Universidade Federal de Alagoas

Instituto de Matemática

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Limitante Superior Extrínseco para o Primeiro Autovalor do Laplaciano

José Ivan da Silva Santos

Maceió

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Limitante Superior Extrínseco para o Primeiro Autovalor do Laplaciano

José Ivan da Silva Santos

Maceió
2012

JOSÉ IVAN DA SILVA SANTOS

LIMITANTE SUPERIOR EXTRÍNSECO PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DO LAPLACIANO

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 07 de Março de 2012 à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

Maceió
2012

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

S237l Santos, José Ivan da Silva.
Limitante superior extrínseco para o primeiro autovalor do laplaciano / José Ivan da Silva Santos. – 2012.
73 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 73.

1. Isometria. 2. Imersão. 3. Laplaciano. 4. Primeiro autovalor. 5. Limitante superior. I. Título.

CDU: 514.76

Limitante Superior Extrínseco para o Primeiro Autovalor do Laplaciano

José Ivan da Silva Santos

Dissertação de Mestrado, na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 07 de Março à banca examinadora, designada pelo Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Márcio Henrique Batista da Silva

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva (Orientador)

Feliciano M. A. Vitório

Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitório

Heudson Tosta Mirandola.

Prof. Dr. Heudson Tosta Mirandola

Aos meus pais Djesima Maria e
Antônio Artur.

“Bem sei eu que tudo podes, e que nenhum dos teus propósitos pode ser impedido” ...(Jó 42:2)

Agradecimentos

A Deus primeiramente, pois Ele permitiu o acontecimento de todos os meios necessários para a conclusão desse trabalho. Ao Prof. Dr. Márcio Henrique Batista, Orientador, que sempre se colocou a disposição quando surgiam as dúvidas, pela contribuição no meu desenvolvimento intelectual e também como profissional, pelo apoio motivacional e pelo amigo que sempre soube ser e que com certeza sem o seu apoio esse trabalho teria sido mais difícil, a você Prof. o meu muitíssimo obrigado.

A todos os professores do Instituto de Matemática da UFAL que contribuiram para eu me tornar o que sou. Vocês me ensinaram mais que Matemática, me ensinaram também a ser uma pessoa que sabe cumprir com seus deveres e lutar pelos objetivos, muito obrigado a todos.

Agora, não por ordem de importância, gostaria de agradecer a Jaaresias Silva do Nascimento, Esposa e Companheira, que teve paciência e compreensividade para aguentar os desabafos e aborrecimentos, a te sou grato.

A todos os colegas da turma de mestrandos de 2010 que com os quais me divertia e principalmente pelas discussões matemáticas que fazíamos.

A Fundação de Amparo e Pesquisa do Estado de Alagoas, FAPEAL, por proporcionar as condições financeiras para a conclusão do meu curso de mestrado.

Resumo

Nesse trabalho descrevemos um resultado obtido por Ernst Heintze que melhora o seguinte resultado devido a Reilly: seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, $N \geq n$, e $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor do operador laplaciano de M, então

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\mathrm{vol} M} \int_M H^2 dM.$$

E. Heintze, em 1988, generalizou o resultado acima. Ele provou que:

Se M está imersa isometricamente em $\bar{M}$, onde $K_{\bar{M}} \leq \delta$, então:

(i) $\lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\mathrm{vol} M} \int_M H^2 dM, \quad \text{para } \delta \geq 0;$

(ii) $\lambda_1(M) \leq n\delta + n \max H^2, \quad \text{para } \delta < 0.$

Além disso, se vale a igualdade em **(i)**, então M é imersa minimamente em alguma esfera geodésica.

Palavras chave: Isometria. Imersão. Laplaciano. Primeiro Autovalor. Limitante Superior.

Abstract

In this work we describe a result obtained by Ernst Heintze which improves the following results due to Reilly: let M be a compact n-dimensional Riemannian manifold and $\lambda_1(M)$ is the first eingenvalue of laplacian. If M is isometrically immersed in $\mathbb{R}^N$, $N \geq n$, then

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\mathrm{vol}M} \int_M H^2 dM.$$

E. Heintze, in 1988, generalized the above result. He proved that:

If M is isometrically imersed in $\bar{M}$, where, $K_{\bar{M}} \leq \delta$, then:

(i) $\lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\mathrm{vol}M} \int_M H^2 dM, \quad \text{para } \delta \geq 0;$

(ii) $\lambda_1(M) \leq n\delta + n \max H^2, \quad \text{para } \delta < 0.$

Furthermore, if the equality in **(i)**, then M is minimally immersed into some geodesic sphere.

Keywords: Isometry. Immersion. Laplacian. First Eigenvalue. Upper Bound.

Sumário

Introdução

Esse trabalho tem como objetivo obter uma cota superior para o primeiro autovalor do Laplaciano. Um autovalor é um número real λ tal que existe uma solução não trivial $\phi \in C^2(M)$ satisfazendo

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0,$$

onde M é uma variedade fechada e conexa. No caso em que M é imersa isometricamente em $\bar{M}$ a estimativa é muito interessante, visto que a cota superior só depende essencialmente de elementos extrínsecos a M, isto é, depende da forma como M é imersa em $\bar{M}$.

Os principais resultados desse trabalho foram obtidos por E. Heintze, tais resultados foram parte do paper **Extrinsic Upper Bounds for** λ_1, publicado em 1988 no Math. Annalen. O trabalho de Heintze é uma extensão do resulatado obtido por Reilly e publicado em 1977 intitulado **On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidean space**, o qual afirma que: se M é uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, conexa e imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$ e $\lambda_1(M)$ é o primeiro autovalor do operador laplaciano de M, então

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\text{vol}M}\int_M H^2 dM.$$

Nas mesmas condições do Teorema de Reilly, trocando-se o $\mathbb{R}^N$ por uma variedade Riemanniana completa $\bar{M}$ com curvatura seccional $K_{\bar{M}} \leq \delta$, Heintze obteve que:

(i) $\lambda_1(M) \leq n\delta + \dfrac{n}{\text{vol}M}\int_M H^2 dM, \quad \text{para } \delta \geq 0.$ **(Teorema 3.4)**

(ii) $\lambda_1(M) \leq n\delta + n\max H^2, \quad \text{para } \delta < 0;$ **(Teorema 3.8)**

Além disso, se vale a igualdade em **(i)**, então M é imersa minimamente em alguma esfera geodésica.

Nas demonstrações dos **Teoremas 3.4** e **3.8**, uma das ferramentas que utilizaremos é o Teorema de Rayleigh, **Teorema 3.1**, o qual afirma que, se f é uma função não nula admissível, isto é, f pertence ao espaço de Sobolev $H^1 = W^{1,2}(M)$ com $\int_M f dM = 0$, então

$$\lambda_1(M) \leq \frac{\int_M |\text{grad}\, f|^2 dM}{\int_M f^2 dM}.$$

No Teorema de Rayleigh usaremos as funções $\dfrac{s_\delta(r)}{r} \cdot x_i$ e $\dfrac{c_\delta(r) - c}{\sqrt{\delta}}$ no caso $\delta > 0$, onde $c := \dfrac{1}{\text{vol}M} \int_M c_\delta(r) dM$ é constante, x_i são as coordenadas normais de $\bar{M}$ centrada em algum ponto $p_0 \in \bar{M}$ e $r = d(p_0, \cdot)$ é a distância a p_0.

Com o objetivo de deixar esse trabalho o mais completo possível o organizamos em três capítulos. No primeiro capítulo descrevemos os resultados fundamentais de Geometria Riemanniana, que são apresentados sem demonstração, pois podem ser facilmente encontrados na literatura, e que imprescindivelmente nos auxilia no entendimento dos resultados tratados nos capítulos seguintes. Ressaltamos que alguns conceitos básicos, como por exemplo, o conceito de espaço tangente e diferenciabilidade serão admitidos, o leitor pode consultar [5] ou [11] para mais detalhes. No segundo capítulo definimos e obtemos as principais propriedades do Gradiente, do Hessiano e do Laplaciano de uma função $f : M \to \mathbb{R}$, e do Divergente de um campo de vetores em M. Apresentamos resultados como, por exemplo, o teorema de comparação do hessiano da função distância.

Por fim, o último capítulo é dedicado as demonstrações dos **Teoremas 3.4** e **3.8**, para os quais faremos alguns lemas que irá nos auxiliar nas demonstrações.

Capítulo 1

Resultados Fundamentais de Geometria Riemanniana

Nesse capítulo apresentaremos os principais resultados de geometria Riemanniana que utilizaremos no restante da dissertação. Nessa primeira seção definiremos os elementos que utilizaremos e apresentamos alguns teoremas tais como o teorema de Hopf-Rinow, que nos permite obter propriedades interessantes de variedades compactas.

1.1 Métrica Riemanniana

Iniciamos definindo o conceito de métrica Riemanniana, além disso escreveremos as métricas do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, da esfera $\mathbb{S}^n$ e do espaço hiperbólico real $\mathbb{H}^n$ em coordenadas polares.

Definição 1.1 *Uma métrica Riemanniana, ou estrutura Riemanniana, em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno $\langle\, ,\rangle_p$ no espaço tangente T_pM que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma parametrização, ou sistema de coordenadas locais, em torno de p, com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Ressaltamos que essa definição não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Uma variedade diferenciável munida com uma métrica Riemanniana é chamada uma variedade Riemanniana.

Definição 1.2 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ é chamado uma isometria se, para todo $p \in M$ e $u, v \in T_pM$,*

$$\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}. \tag{1.1}$$

Se f satisfaz **(1.1)** *numa vizinhança de p, para todo $p \in M$, dizemos que M e N são localmente isométricas.*

Exemplo 1 *Se $M = \mathbb{R}^n$, é o espaço euclidiano de dimensão n, identificando $\frac{\partial}{\partial x_i}$ com $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. A métrica é dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$.*

Exemplo 2 *Seja $f : M \to \bar{M}$ uma imersão, ou seja, f é diferenciável e $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\bar{M}$ é injetiva para todo $p \in M$. Se $\bar{M}$ é uma variedade Riemanniana, então f induz uma métrica Riemanniana em M por*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad u, v \in T_pM.$$

A métrica assim obtida é chamada de métrica induzida por f, e assim f é uma imersão isométrica.

Seja $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\, x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária de $\mathbb{R}^{n+1}$. A métrica induzida por $\mathbb{R}^{n+1}$ em $\mathbb{S}^n$ é chamada métrica canônica de S^n.

Exemplo 3 *O semi-espaço do $\mathbb{R}^n$ dado por*

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\, x_n > 0\}$$

munido da métrica

$$g_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$$

é chamado de Espaço Hiperbólico.

1.2 Conexões

Um dos conceitos que ajuda a entender o comportamento das variedades Riemannianas e nos auxilia no conhecimento de suas propriedades é o conceito de campos de vetores, que tem a seguinte definição:

Definição 1.3 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um vetor $X(p) \in T_pM$. Como aplicação, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. O campo é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.*

Se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas, é possível escrever o campo X como

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}$ é a base associada a x. Consequentemente o campo X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis para toda parametrização.

Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M.

Definição 1.4 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é uma aplicação*

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M),$$

que satisfaz para todos $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e todas* $f, g \in \mathcal{D}(M)$ *as seguintes propriedades:*

i) $\nabla_{(fX+gY)}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z.$

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$

Proposição 1.1 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c*, denominado derivada covariante de* V*, tal que*

i) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}.$

ii) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$

onde W *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* I*.*

iii) *Se* V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathcal{X}(M)$*, isto é,* $V(t) = Y(c(t))$*, então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}Y.$

Demonstração. Ver [5], página 57. ■

Definição 1.5 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Um campo de vetores* X *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado paralelo quando* $\frac{DX}{dt} = 0$*, para todo* $t \in I$*.*

Definição 1.6 *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇ *e uma métrica Riemanniana* $\langle \, , \rangle$*. Dizemos que a conexão é compatível com a métrica* $\langle \, , \rangle$*, quando para toda curva diferenciável* c *e quaisquer campos de vetores paralelos* P *e* P' *ao longo de* c*, tivermos* $\langle P, P' \rangle$ *=const.. A conexão é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ *e* $[X, Y] := XY - YX$ *é o colchete de Lie.*

Proposição 1.2 *Uma conexão* ∇ *em uma variedade Riemanniana* M *é compatível com métrica se, e somente se, para quaisquer campos de vetores* V *e* W *ao longo de uma curva diferenciável* $c : I \to M$ *tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, \quad t \in I. \tag{1.2}$$

Demonstração. Ver [5], página 59. ∎

Corolário 1.3 *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle,$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$. Em particular se $\langle Y, Z\rangle = 0$, então

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = -\langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{1.3}$$

Demonstração. Ver [5], página 60. ∎

Teorema 1.4 (Levi-Civita) *Seja M uma variedade Riemanniana, então existe uma única conexão afim ∇ em M que satisfaz:*

a) *∇ é simétrica.*

b) *∇ é compatível com a métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [5], página 61. ∎

A conexão dada pelo teorema acima é também conhecida como conexão Riemanniana.

Em um sistema de coordenadas (x, U), as funções Γ_{ij}^k definidas em U por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k,$$

onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, são chamadas os coeficientes da conexão ∇ em U ou símbolos de Christoffel. Um simples cálculo nos mostra que

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij} \right\} g^{kl}, \tag{1.4}$$

onde (g^{kl}) é a inversa da matriz (g_{kl}), e usando a simetria da conexão, obtém-se que $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$.

Se $M = \mathbb{R}^n$ munido com a métrica $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$ temos $\Gamma_{ij}^l = 0$ para quaisquer $i, j, l = 1, \ldots, n$. Portanto

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^l e_l = 0. \tag{1.5}$$

1.3 Geodésicas e variedades completas

Agora definiremos o conceito de geodésica que dentre suas aplicações nos permite obter informações topológicas da variedade como mostra o Teorema de Ropf-Rinow. Sua importância também é caracterizada pela propriedade de localmente minimizar distância entre dois pontos da variedade.

Definição 1.7 *Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ no ponto t_0. Se γ é geodésica em todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.*

Se $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, então por **(1.2)**

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2\left\langle \frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0,$$

ou seja, o comprimento do vetor tangente é constante.

Proposição 1.5 *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M, um número $\varepsilon > 0$ e uma aplicação C^∞, $\gamma : (-2,2) \times U \to M$, $U = \{(q,w) \in TM;\, q \in V,\, w \in T_pM,\, |w| < \varepsilon\}$ tal que $t \to \gamma(t,q,w)\,, t \in (-2,2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w, para cada $q \in V$ e cada $w \in T_pM$, com $|w| < \varepsilon$.*

Demonstração. Ver [5], página 72. ∎

Sejam $p \in M$ e $U \subset TM$ o aberto dado pela proposição acima. A aplicação $\exp : U \to M$ dada por

$$\exp(q,v) = \gamma(1,q,v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right),$$

está bem definida e é chamada aplicação exponencial em U. É fácil observar que exp é diferenciável.

Por simplicidade, utilizaremos a restrição da exp a um aberto do T_qM, como

$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M,$$

onde $\exp_q(v) = \exp(q,v)$ e $B_\varepsilon(0)$ é a bola aberta centrada na origem do T_qM e raio ε. Além disso, prova-se que existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ é um difeomorfismo sobre um aberto de M.

Como consequência temos que a aplicação exponencial satisfaz o seguinte resultado:

Lema 1.1 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então*

$$\langle d(\exp_p)_v(v), d(\exp_p)_v(w)\rangle = \langle v, w\rangle.$$

Demonstração. Ver [5], página 77. ∎

Definição 1.8 *Se* $\exp_p$ *é um difeomorfismo em uma vizinhança* V *da origem do* T_pM*,* $\exp_p V = U$ *é chamada de vizinhança normal de* p*. Se* $B_\varepsilon(0)$ *é tal que* $\overline{B_\varepsilon(0)} \subset V$*, chamamos* $\exp_p B_\varepsilon(0) = B_\varepsilon(p)$ *de bola normal, ou geodésica, de centro* p *e raio* ε*. Pelo Lema de Gauss, a fronteira de uma bola normal é uma hipersuperfície em* M *ortogonal as geodésicas que partem de* p*, ela é chamada de esfera normal, ou geodésica, e será denotada por* $S_\varepsilon(p)$*.*

Definição 1.9 *Sejam* $p, q \in M$*, a distância* $d(p, q)$ *é o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas* $c_{p,q}$*, onde* c *é uma curva diferenciável por partes ligando* p *a* q*.*

Agora veremos que localmente as geodésicas minimizam distância.

Proposição 1.6 *Sejam* $p \in M$*,* U *uma vizinhança normal de* p*, e* $B \subset U$ *uma bola normal de centro* p*. Seja* $\gamma : [0, 1] \to B$ *um segmento de geodésica com* $\gamma(0) = p$*. Se* $c : [0, 1] \to M$ *é qualquer curva diferenciável por partes ligando* $\gamma(0)$ *a* $\gamma(1)$*, então* $l(\gamma) \leq l(c)$ *e se a igualdade vale então* $\gamma([0, 1]) = c([0, 1])$*.*

Demonstração. Ver [5], página 79. ∎

Agora trataremos de alguns conceitos globais ligados as variedades Riemannianas. Inicialmente definiremos a noção de completude de uma variedade, e também enunciaremos o teorema de Hopf-Rinow que tem como consequência imediata que toda variedade compacta é completa.

Definição 1.10 *Uma variedade Riemanniana* M *é dita completa, ou geodesicamente completa, se para todo* $p \in M$*, a aplicação exponencial está definida para todo* $v \in T_pM$*, equivalentemente as geodésicas* $\gamma(t)$ *que partem de* p *estão definidas para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Teorema 1.7 (Hopf-Rinow) *Seja* M *uma variedade Riemanniana e seja* $p \in M$*. As seguintes afirmações são equivalentes*

a) $\exp_p$ *está definida em todo o* T_pM*.*

b) *Os limitados e fechados de* M *são compactos.*

c) M *é completa como espaço métrico.*

d) M *é geodesicamente completa.*

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

e) *Para todo* $q \in M$ *existe uma geodésica* γ *ligando* p *a* q *com* $l(\gamma) = d(p, q)$*.*

Demonstração. Ver [5], página 163. ∎

Corolário 1.8 *Se* M *é compacta, então* M *é completa.*

Demonstração. Como todo espaço métrico compacto é completo, a conclusão segue da parte **(c)** do teorema. ∎

O próximo resultado, devido a Nash, nos dá uma importante caracterização das variedades Riemannianas completas, mais precisamente:

Teorema 1.9 (Nash) *Se M^n é uma variedade Riemanniana completa, então ela pode ser imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, para algum $N \geq n$.*

Demonstração. Ver [8]. ∎

Sejam M uma variedade Riemanniana completa e $p \in M$. Considere $\gamma : [0, \infty) \to M$ uma geodésica normalizada (isto é, $|\gamma'(t)|$=1) com $\gamma(0) = p$. sabemos que para $t > 0$ suficientemente pequeno,

$$d(\gamma(0), \gamma(t)) = t,$$

isto é, $\gamma([0, t])$ é uma geodésica minimizante. Além disso, é fácil ver que, se $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante, então o mesmo acontece para $t > t_1$. Por continuidade, o conjunto dos números $t > 0$ para os quais $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$ é da forma $[0, t_0]$ ou $[0, \infty)$. No primeiro caso, $\gamma(t_0)$ é chamado o ponto mínimo de p ao longo de γ; no último caso diz-se que o ponto mínimo não existe.

Definimos o lugar dos pontos mínimos de p, "cut locus"de p, denotado por Cut(p), como sendo o conjunto de todos os pontos mínimos de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p.

1.4 Curvaturas e campos de Jacobi

Sem dúvida a curvatura é um dos conceitos mais presentes em geometria Riemanniana, e entre suas diversas aplicações ela mede intuitivamente o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 1.11 *A curvatura $\mathcal{R}$ de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $\mathcal{R}(X, Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $Z \in \mathcal{X}(M)$ e ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Definição 1.12 *Dados um ponto $p \in M$ e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real*

$$K(x, y) = \frac{(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2},$$

é chamado curvatura seccional de M no ponto p com respeito a σ, onde x, y é uma base de σ, $(x, y, x, y) = \langle \mathcal{R}(x, y)x, y \rangle$ e $|x \wedge y|^2 = |x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2$.

Proposição 1.10 *O número*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Demonstração. Ver [5], página 105. ■

Lema 1.2 *A curvatura seccional de* $\mathbb{R}^n$ *é identicamente nula.*

Demonstração. Pela definição de curvatura seccional é suficiente mostrarmos que, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ tem-se que $\mathcal{R}(X,Y)Z \equiv 0$.

Se $Z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i$, $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, onde $e_1, \ldots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned}
\nabla_X Z = \nabla_X \sum_{i=1}^{n} z_i e_i &= \sum_{i=1}^{n} z_i \nabla_X e_i + \sum_{i=1}^{n} X(z_i) e_i \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} z_i x_j \nabla_{e_j} e_i + \sum_{i=1}^{n} X(z_i) e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} X(z_i) e_i,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é devida a **(1.5)**. Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^{n} Y(X(z_i)) e_i,$$

e

$$\nabla_{[X,Y]} Z = \sum_{i=1}^{n} [X,Y](z_i) e_i$$

portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y(X(z_i)) e_i - \sum_{i=1}^{n} X(Y(z_i)) e_i + \sum_{i=1}^{n} [X,Y](z_i) e_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n} [X,Y](z_i) e_i + \sum_{i=1}^{n} [X,Y](z_i) e_i = 0.
\end{aligned}$$

■

Lema 1.3 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $\widetilde{\mathcal{R}} : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle \widetilde{\mathcal{R}}(X, Y, Z)W, Z\rangle = \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle - \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle,$$

para todo $X, Y, Z, W \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se, e somente se $\mathcal{R} = K_0\widetilde{\mathcal{R}}$, onde $\mathcal{R}$ é a curvatura de M.

Demonstração. Ver [5], página 107. ■

Uma Variedade Riemanniana completa M de curvatura seccional constante é chamada de forma espacial.

Definição 1.13 *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica de M. Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz a equação de Jacobi*

$$\frac{D^2J}{dt^2} + \mathcal{R}(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0, \quad \forall\, t \in [0, a].$$

Os exemplos triviais de campos de Jacobi ao longo de $\gamma(t)$ são $\gamma'(t)$ e $t\gamma'(t)$.

Agora veremos algumas das propriedades dos campos de Jacobi, dentre as quais, um campo de Jacobi nos permite saber onde a aplicação $\exp_p$ deixa de ser um difeomorfismo local.

Exemplo 4 *Sejam M uma variedade Riemanniana de curvatura seccional constante K, $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica normalizada em M e J um campo de Jacobi ao longo de γ, normal a γ'. Então*

$$R(\gamma', J)\gamma' = KJ.$$

De fato, pelo **Lema 1.3***, para todo campo de vetores T ao longo de γ tem-se*

$$\begin{aligned}\langle R(\gamma', J)\gamma', T\rangle &= K(\langle\gamma', \gamma'\rangle\langle J, T\rangle - \langle\gamma', T\rangle\langle J, \gamma'\rangle)\\ &= K\langle J, T\rangle.\end{aligned}$$

Assim a equação de Jacobi tem a forma

$$\frac{D^2J}{dt} + KJ = 0, \tag{1.6}$$

e é fácil ver que, se $w(t)$ é um campo paralelo ao longo de γ com $\langle\gamma', w(t)\rangle = 0$ e $|w(t)| = 1$

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} w(t), & \text{se}\, K > 0,\\ t\, w(t), & \text{se}\, K = 0,\\ \dfrac{\operatorname{senh}(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} w(t), & \text{se}\, K < 0, \end{cases}$$

é solução de **(1.6)** *com condições iniciais $J(0) = 0$ e $J'(0) = w(0)$.*

Lema 1.4 *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. Então um campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

Demonstração. Ver [5], página 126. ■

Com a definição seguinte teremos outras relações entre os campos de Jacobi e a aplicação exponencial, mais precisamente, como encontrar as singularidades da aplicação exponencial:

Definição 1.14 *Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica. dizemos que o ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ, $t_0 \in (0, a]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ, não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$. O número máximo de tais campos linearmente independentes é a multiplicidade do ponto conjugado $\gamma(t_0)$.*

Proposição 1.11 *Suponha que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ ao longo da geodésica $\gamma : [0, a] \to M$. Então:*

a) *ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de p ao longo de γ,*

b) *ou existe uma geodésica $\bar{\gamma} \neq \gamma$ que liga p a $\gamma(t_0)$ com $l(\bar{\gamma}) = l(\gamma)$.*
E a recíproca é também verdadeira.

Demonstração. Ver [5], página 267. ■

Corolário 1.12 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Se $p \in M$ e $q \in M \backslash Cut(p)$, então existe uma única geodésica minimizante ligando p a q, e q não é conjugado a p ao longo da mesma.*

Demonstração. Seja $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica minimizante tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(a) = q$. Suponhamos que p se liga q por duas geodésicas minimizantes ou que q é conjugado de p ao longo de γ. Pela recíproca da **Proposição 1.11**, existe $t_0 \in (0, a]$ tal que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ. Como $q \notin \mathrm{Cut}(p)$, devemos ter que $t_0 < a$, mas assim γ não é minimizante em $(0, a]$. ■

Teorema 1.13 (Rauch) *Sejam $\gamma : [0, a] \to M^n$ e $\bar{\gamma} : [0, a] \to \bar{M}^{n+k}$, $k \geq 0$, geodésicas com a mesma velocidade, e sejam J e $\bar{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\bar{\gamma}$, respectivamente, satisfazendo*

i) *$\bar{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\bar{\gamma}(0)$, $\forall\ 0 < t \leq a$;*

ii) *$J(0) = \bar{J}(0) = 0, \quad \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = \left\langle \bar{J}'(0), \bar{\gamma}'(0) \right\rangle, \ \ |J'(0)| = \left|\bar{J}'(0)\right|$;*

iii) *$K_{\bar{M}}(\bar{x}, \bar{\gamma}'(t)) \geq K_M(x, \gamma'(t))$,*

onde $K(x, y)$ é a curvatura seccional segundo o plano gerado por x, y. Então

a) $\left|\bar{J}\right| \leq |J|$, *além disso, se para algum* $t_0 \in (0,a]$, *tem-se* $\left|\bar{J}(t_0)\right| = |J(t_0)|$, *então*

$$K_{\bar{M}}(\bar{x}, \bar{\gamma}'(t)) = K_M(x, \gamma'(t)),$$

para todo $t \in [0,a]$.

b) $\langle J', J\rangle \geq \dfrac{|J|^2}{|\bar{J}|^2}\langle \bar{J}', \bar{J}\rangle$ *para todo* $t \in (0,a]$.

Demonstração. Faremos a demonstração apenas do item **(b)**, uma demonstração do item **(a)** é encontrada em [5], página 238.

Para mostrarmos o item **(b)**, observamos primeiro que, como $\bar{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\bar{\gamma}(0)$ ao longo de $\bar{\gamma}$, temos que $\bar{J}(t) \neq 0$ em $(0,a]$. Defina $f(t) = |J(t)|^2$ e $\bar{f}(t) = |\bar{J}(t)|^2$ em $(0,a]$, assim $f'(t) = 2\langle J'(t), J(t)\rangle$ e $\bar{f}'(t) = 2\langle \bar{J}'(t), \bar{J}(t)\rangle$, agora basta mostrarmos que

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \geq \frac{\bar{f}'(t_0)}{\bar{f}(t_0)}.$$

Por **(2.7)**

$$\frac{f'(t_0)}{2f(t_0)} = \frac{\langle J', J\rangle(t_0)}{|J(t_0)|^2} = \mathcal{I}_{t_0}\left(\frac{J}{|J(t_0)|}, \frac{J}{|J(t_0)|}\right) = \mathcal{I}_{t_0}(J_1, J_1) \tag{1.7}$$

e

$$\frac{\bar{f}'(t_0)}{2\bar{f}(t_0)} = \frac{\langle \bar{J}', \bar{J}\rangle(t_0)}{|\bar{J}(t_0)|^2} = \mathcal{I}_{t_0}\left(\frac{\bar{J}}{|\bar{J}(t_0)|}, \frac{\bar{J}}{|\bar{J}(t_0)|}\right) = \mathcal{I}_{t_0}(\bar{J}_1, \bar{J}_1), \tag{1.8}$$

onde $J_1 = \dfrac{J}{|J(t_0)|}$ e $\bar{J}_1 = \dfrac{\bar{J}}{|\bar{J}(t_0)|}$. Escolha campos ortogonais e paralelos $e_1, \ldots, e_n$ ao longo de $\gamma|_{[0,t_0]}$ e $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{n+k}$ ao longo de $\bar{\gamma}|_{[0,t_0]}$, com $e_1 = \gamma'$, $e_2(t_0) = J_1(t_0)$ e $\bar{e}_1 = \bar{\gamma}'$, $\bar{e}_2(t_0) = \bar{J}_1(t_0)$.

Para $V = \beta_i(t)e_i(t)$ campo diferenciável por partes ao longo de γ, defina

$$\phi(V) = \beta_i(t)\bar{e}_i(t)$$

campo diferenciável ao longo de $\bar{\gamma}$. Então $\phi(J_1) = 0 = \bar{J}_1(0)$ e

$$J_1(t_0) = e_2(t_0) \Rightarrow \phi(J_1)(t_0) = \bar{e}_2(t_0) = \bar{J}_1(t_0),$$

assim, pelo Lema do Índice (**Teorema 2.5**),

$$\mathcal{I}_{t_0}(\phi(J_1), \phi(J_1)) \geq \mathcal{I}_{t_0}(\bar{J}_1, \bar{J}_1). \tag{1.9}$$

Mas para todos os campos V, W diferenciáveis por partes ao longo de γ, tem-se

$$\langle \phi(V), \phi(W)\rangle = \langle V, W\rangle \quad \text{e} \quad \phi(V)' = \phi(V'),$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{t_0}(J_1,J_1) &= \int_0^{t_0} [\langle J_1', J_1'\rangle - |\gamma' \wedge J_1|^2 K_M(J_1,\gamma')]dt \\
&\geq \int_0^{t_0} [\langle \phi(J_1)', \phi(J_1)'\rangle - |\bar{\gamma}' \wedge \phi(J_1)|^2 K_{\bar{M}}(\phi(J_1),\bar{\gamma}')]dt] \\
&= \mathcal{I}_{t_0}(\phi(J_1),\phi(J_1)). \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

Segue de **(1.7)**, **(1.8)**, **(1.9)** e **(1.10)** que

$$\frac{f'(t_0)}{2f(t_0)} = \mathcal{I}_{t_0}(J_1,J_1) \geq \mathcal{I}_{t_0}(\phi(J_1),\phi(J_1)) \geq \mathcal{I}_{t_0}(\bar{J}_1,\bar{J}_1) = \frac{\bar{f}'(t_0)}{2\bar{f}(t_0)},$$

isto é,

$$\frac{f'(t_0)}{f(t_0)} \geq \frac{\bar{f}'(t_0)}{\bar{f}(t_0)}$$

ou

$$\langle J', J\rangle \geq \frac{|J|^2}{|\bar{J}|^2}\langle \bar{J}', \bar{J}\rangle.$$

■

Observação 1.14 *A igualdade vale se, e somente se, $K_{\bar{M}}(\bar{x},\bar{\gamma}'(t)) = K_M(x,\gamma'(t))$ e vale a igualdade em* **(1.9)**.

1.5 Coordenadas polares

Nessa seção escreveremos as métricas do $\mathbb{R}^n$, de $\mathbb{S}^{n-1}$ e do $\mathbb{H}^n$ em coordenadas polares as quais precisaremos futuramente.

Com esse objetivo, sejam

$$\begin{aligned}
x : U \subset \mathbb{R}^{n-1} &\to S^{n-1} \\
(u_1,\ldots,u_{n-1}) &\to x(u_1,\ldots,u_{n-1})
\end{aligned}$$

parametrização e

$$\gamma(r,u_1,\ldots,u_{n-1}) := \exp_p(rx(u_1,\ldots,u_{n-1})),$$

então

$$\begin{aligned}
\gamma_r &= d(\exp_p)_q(x(u_1,\ldots,u_{n-1})) \\
\gamma_{u_i} &= d(\exp_p)_q\left(r\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)
\end{aligned}$$

logo

$$
\begin{aligned}
\langle \gamma_r, \gamma_r \rangle &= \left\langle d(\exp_p)_q(x(u_1,\ldots,u_{n-1})), d(\exp_p)_q(x(u_1,\ldots,u_{n-1}))\right\rangle \\
&= \langle x(u_1,\ldots,u_{n-1}), x(u_1,\ldots,u_{n-1})\rangle = 1. \qquad (1.11)\\
\langle \gamma_r, \gamma_{u_i} \rangle &= \left\langle d(\exp_p)_q(x(u_1,\ldots,u_{n-1})), d(\exp_p)_q\left(r\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)\right\rangle \\
&= \left\langle x(u_1,\ldots,u_{n-1}), r\frac{\partial x}{\partial u_i}\right\rangle = 0. \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

onde $q = rx(u_1,\ldots,u_{n-1})$ e as igualdades **(1.11)** e **(1.12)** são devidas ao Lema de Gauss.

Finalmente,

$$
\left\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \right\rangle = \left\langle d(\exp_p)_q\left(r\frac{\partial x}{\partial u_i}\right), d(\exp_p)_q\left(r\frac{\partial x}{\partial u_j}\right)\right\rangle, \qquad (1.13)
$$

Observe que, para cada i fixado, $J_i(r) = d(\exp_p)_q\left(r\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)$ é um campo de Jacobi dado pelo **Lema 1.4**, e pelo **exemplo 4**

$$
J(r) = \begin{cases} r\,w(r), & \text{em } \mathbb{R}^n. \\ \operatorname{sen}(r)w(r), & \text{em } \mathbb{S}^{n-1}. \\ \operatorname{senh}(r)w(r), & \text{em } \mathbb{H}^n. \end{cases}
$$

Portanto, para o $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \right\rangle &= \langle r\,w_i(r), r\,w_j(r)\rangle \\
&= r^2\langle w_i(r), w_j(r)\rangle = r^2\delta_{ij}.
\end{aligned}
$$

donde

$$
ds^2 := \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}du_i du_j = dr^2 + r^2 d\omega^2,
$$

onde $d\omega^2$ é a métrica canônica de S^{n-1}.

Para a esfera $\mathbb{S}^{n-1}$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \right\rangle &= \langle \operatorname{sen}(r)\,w_i(r), \operatorname{sen}(r)\,w_j(r)\rangle \\
&= \operatorname{sen}^2(r)\langle w_i(r), w_j(r)\rangle = \operatorname{sen}^2(r)\,\delta_{ij},
\end{aligned}
$$

donde

$$
ds^2 = dr^2 + \operatorname{sen}^2(r)\,d\omega^2.
$$

Para $\mathbb{H}^n$

$$\begin{aligned}\left\langle \gamma_{u_i}, \gamma_{u_j} \right\rangle &= \langle \operatorname{senh}(r)\, w_i(r), \operatorname{senh}(r)\, w_j(r) \rangle \\ &= \operatorname{senh}^2(r) \langle w_i(r), w_j(r) \rangle = \operatorname{senh}^2(r)\, \delta_{ij},\end{aligned}$$

donde

$$ds^2 = dr^2 + \operatorname{senh}^2(r)\, d\omega^2.$$

1.6 A segunda forma fundamental

Sejam M^n e $\bar{M}^{n+k}$, $k \geq 0$, variedades Riemanniana e $f : M \to \bar{M}$ uma imersão isométrica, então para cada $p \in M$ o produto interno em $T_p\bar{M}$ decompõe $T_p\bar{M}$ na soma direta

$$T_p\bar{M} = df(T_pM) \oplus (df(T_pM))^{\perp},$$

Por simplicidade de notação identificamos $df(T_pM)$ com T_pM onde $(T_pM)^{\perp}$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\bar{M}$ e p é identificado com $f(p)$.

Denotaremos a conexão Riemanniana de $\bar{M}$ por $\bar{\nabla}$, e se X e Y são campos locais de vetores em M, e $\bar{X}$, $\bar{Y}$ são extensões locais em $\bar{M}$, de $df(X)$ e $df(Y)$, definimos

$$\nabla_X Y := (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T,$$

onde $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$ denota a componente tangencial de $\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}$.

Proposição 1.15 *Seja $f : M^n \to \bar{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Então para X, $Y \in \mathcal{X}(M)$*

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$$

é a conexão Riemanniana de M.

Demonstração. Para mostrarmos que $(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T$ é uma conexão em M, sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $g, h \in \mathcal{D}(M)$ e $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \in \mathcal{X}(\bar{M})$, $\bar{g}, \bar{h} \in \mathcal{D}(\bar{M})$ suas extensões em $\bar{M}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned}\nabla_{(gX+hY)} Z &= (\bar{\nabla}_{(\bar{g}\bar{X}+\bar{h}\bar{Y})} \bar{Z})^T \\ &= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} + \bar{h}\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z})^T \\ &= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z})^T + (\bar{h}\bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z})^T \\ &= g\nabla_X Z + h\nabla_Y Z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla_X (Y+Z) &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}} (\bar{Y} + \bar{Z}))^T \\ &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} + \bar{\nabla}_{\bar{Y}} (\bar{Z})^T \\ &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{Y}} (\bar{Z})^T \\ &= \nabla_X Y + \nabla_X Z\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_X(gY) &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}(\bar{g}\bar{Y}))^T \\
&= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} + \bar{X}(\bar{g})\bar{Y})^T \\
&= (\bar{g}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T + (\bar{X}(\bar{g})\bar{Y})^T \\
&= g\nabla_X Y + X(g)Y
\end{aligned}
$$

Agora mostraremos a simetria e a compatibilidade com a métrica de M, induzida por f. Com efeito,

$$
\nabla_X Y - \nabla_Y X = (\nabla_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_{\bar{Y}}\bar{X})^T = [\bar{X}, \bar{Y}]^T = [X, Y],
$$

onde a última igualdade é devida a (**Proposição 13.4** de [9]). Para a compatibilidade, temos

$$
\begin{aligned}
X\langle Y, Z\rangle &= \bar{X}\langle \bar{Y}, \bar{Z}\rangle \\
&= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y}, \bar{Z}\rangle + \langle \bar{Y}, \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z}\rangle \\
&= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\perp}, Z\rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T + (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^{\perp}\rangle,
\end{aligned}
$$

como $\langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^{\perp}, Z\rangle = \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^{\perp}\rangle = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
X\langle Y, Z\rangle &= \langle (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T, Z\rangle + \langle Y, (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Z})^T\rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo **Corolário 1.3** $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T$ é compatível com a métrica de M. ∎

Definição 1.15 *Sejam $f : M \to \bar{M}$ uma imersão e X, Y campos locais definidos em $U \subset M$. A aplicação $\alpha : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$
\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y,
$$

é chamada a segunda forma fundamental da imersão f, onde $\mathcal{X}(U)^{\perp}$ é o conjunto dos campos diferenciáveis em U normais a $f(U)$, que o identificamos com U.

Proposição 1.16 *A aplicação $\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$ é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Ver [5], página 140. ∎

Definição 1.16 *O traço da segunda forma fundamental, $tr\,\alpha =: \overrightarrow{\mathrm{H}}$, é chamado de vetor curvatura média e $H := \dfrac{1}{n}|\overrightarrow{\mathrm{H}}|$ é chamada de curvatura média de M, onde n é a dimensão de M. Quando $\mathrm{H} \equiv 0$ diz-se que a imersão $f : M \to \bar{M}$ é mínima.*

O seguinte resultado, devido a Gauss, relaciona as geometrias intrínseca e extrínseca:

Teorema 1.17 (Gauss) *Sejam $p \in M$ e x, y vetores ortonormais de T_pM. Então*

$$
K_M(x, y) - K_{\bar{M}}(x, y) = \langle \alpha(x, x), \alpha(y, y)\rangle - |\alpha(x, y)|^2
$$

Demonstração. Ver [5], página 143. ∎

Capítulo 2

Divergente, Gradiente, Hessiana e Laplaciano em variedade Riemanniana

Nesse capítulo trabalharemos com o gradiente, o laplaciano e o hessiano de funções definidas em variedade e com o divergente de campos de vetores em variedades, onde discutiremos alguns resultados relevantes, os quais serão utilizados nessa dissertação.

2.1 Gradiente e Divergente

Sejam M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Considere uma função f de classe C^1 definida numa vizinhança de p e $\xi \in T_pM$. Definimos a derivada direcional de f em p na direção de ξ, denotada por $\xi(f)$, por

$$\xi(f) = (f \circ \omega)'(0),$$

onde $\omega(t)$ é um caminho em M satisfazendo $\omega(0) = p$ e $\omega'(0) = \xi$. A aplicação de $T_pM \to \mathbb{R}$ dada por $\xi \to \xi(f)$ é linear. Além disso, para funções f, $h \in C^1$ temos

$$\begin{aligned} \xi(f+h) &= \xi(f) + \xi(h); \\ \xi(fh) &= \xi(h)f + f\xi(h). \end{aligned}$$

Definição 2.1 *Dada uma função $f \in C^k$, $k \geq 1$ sobre M, o gradiente de f, denotado por* $\mathrm{grad} f$*, é um campo de vetores sobre M definido pela seguinte relação*

$$\langle \mathrm{grad} f, \xi \rangle = \xi(f),$$

para todo $\xi \in TM$.

Para funções f, $h \in C^1$ temos

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\,(f+h) &= \mathrm{grad}\, f + \mathrm{grad}\, h; \\ \mathrm{grad}\,(fh) &= h\,\mathrm{grad}\, f + f\,\mathrm{grad}\, h. \end{aligned}$$

Proposição 2.1 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Dados $p \in M$ e $\xi \in T_pM$, seja $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ um caminho em M tal que $\omega(0) = p$ e $\omega'(0) = \xi$. Então*

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \omega)(t)\Big|_{t=0}.$$

Além disso, se p é ponto de máximo ou de mínimo local para f, então $\operatorname{grad} f(p) = 0$.

Demonstração. A afirmação

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \omega)(t)\Big|_{t=0},$$

é a definição de derivada direcional.

Para a segunda parte, suponha que p é ponto de máximo ou de mínimo para f. Então existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(p) \geq (f(q))$ para todo $q \in U$. Seja $\xi \in T_pM$ e $\omega : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ tal que $\omega(0) = p$ e $\omega'(0) = \xi$, então $f \circ \omega$ tem um máximo ou um mínimo em 0. Portanto

$$\langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle = \frac{d}{dt}(f \circ \omega)(t)\Big|_{t=0} = 0.$$

Como $\xi \in T_pM$ é arbitrário, temos que $\operatorname{grad} f(p) = 0$. ∎

Proposição 2.2 *Seja $E_p = \{v \in T_pM;\ \exp_p(tv) \in M \backslash Cut(p),\ \forall\ 0 \leq t \leq 1\}$, então $exp_p : E_p \to M \backslash Cut(p)$ é um difeomorfismo.*

Demonstração. Obviamente $\exp_p(E_p) = M \backslash Cut(p)$. Seja $q \in M \backslash Cut(p)$, então pelo **corolário 1.12** existe uma única geodésica minimizante $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ normalizada ligando $p = \gamma(0)$ a $q = \gamma(1)$ e q não é conjugado a p ao longo de γ. Portanto $v \in T_pM$ não é ponto crítico da $\exp_p$ e, portanto é um difeomorfismo local sobre $M \backslash Cut(p)$. Agora, basta mostrarmos que $\exp_p$ é injetiva. Suponha que existam $v, w \in E_p$, tais que $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ e $\bar{\gamma}(t) = \exp_p(tw)$ ligam p a $q = \gamma(1) = \bar{\gamma}(1)$. Como $q \notin \mathrm{Cut}(p)$ segue que ao menos uma dentre $\bar{\gamma}$ e γ, digamos γ, não é minimizante até q. Assim, existe $0 < t_0 < 1$ tal que $\gamma(t_0) = \exp_p(t_0 v) \in \mathrm{Cut}(p)$, contradizendo o fato de v pertencer a E_p.

∎

Teorema 2.3 *Seja $\gamma : [0, a] \to M \setminus Cut(p)$ uma geodésica normalizada partindo de p. Então*

$$\operatorname{grad} r(\gamma(t)) = \gamma'(t),\ \forall\, 0 < t \leqslant a,$$

onde $r(q) = d(p, q)$ é a função distância a partir de p. Além disso, $|\operatorname{grad} r| = 1$.

Demonstração. Primeiro observamos que, se $r : M \backslash Cut(p) \to \mathbb{R}^+$ é a função distância a partir de p, então a função $r \circ \exp_p : E_p \to \mathbb{R}^+$ é dada por

$$(r \circ \exp_p)(v) = d(p, \exp_p(v)) = |v|,$$

é diferenciável em $E_p \setminus 0$.

Agora seja $\gamma(t) = \exp_p(tv)$, $0 \leq t \leq a$ e $q = \gamma(t_0)$. Se $w \in T_pM$, com $w \perp \gamma'(t_0) = d(\exp_p)_{t_0v}(v)$, pela **Proposição 2.2** $\exp_p$ é um difeomorfismo e, portanto $d(\exp_p)_{t_0v}$ é isomorfismo, assim existe um $W \in T_v(T_pM)$ tal que $d(\exp_p)_{t_0v}(W) = w$ e pelo Lema de Gauss

$$0 = \langle \gamma'(t_0), w\rangle = \langle d(\exp_p)_{t_0v}(v), d(\exp_p)_{t_0v}(W)\rangle = \langle v, W\rangle.$$

Consideremos $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_p$ tal que $|\alpha(s)| = t_0$, $\alpha(0) = t_0v$ e $\alpha'(0) = W$. Então pela unicidade da geodésica minimizante que liga $\exp_p(\alpha(s))$ a p tem-se que

$$r(\exp_p(\alpha(s)) = t_0,$$

e daí temos

$$0 = \langle \operatorname{grad} r(q), d(\exp_p)_{t_0v}W\rangle = \langle \operatorname{grad} r(q), w\rangle.$$

Como a igualdade acima vale para todo $w \perp \gamma'(t_0)$, segue que $\operatorname{grad} r(q)$ é um múltiplo de $\gamma'(t_0)$. Por outro lado $r(\gamma(t)) = t$ para $0 \leq t \leq a$, temos

$$\langle \operatorname{grad} r(\gamma(t)), \gamma'\rangle = 1, \quad \forall\ 0 < t \leq a,$$

e daí $\operatorname{grad} r(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para $0 < t \leq a$. Além disso, sendo γ normalizada temos

$$|\operatorname{grad} r| = |\gamma'| = 1.$$

■

Agora escreveremos o gradiente em função da métrica de M. Assim, se $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma carta, a ela estão associados n campos de vetores coordenados, que denotaremos por ∂_j, $j = 1, \ldots, n$, que formam uma base do T_pM. Assim, se $\xi \in T_pM$ podemos escrever

$$\xi = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j,$$

e portanto

$$\xi(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j \partial_j(f),$$

onde $\partial_j(f)$ é a derivada direcional de f na direção de ∂_j.

Dada uma métrica Riemanniana, sejam

$$\begin{aligned} g_{jk} &= \langle \partial_j, \partial_k\rangle, & G &= (g_{jk}), \\ g &= det\, G, & G^{-1} &= (g^{jk}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $j,k=1,\dots,n$. Então

$$\begin{aligned}\langle \text{grad} f, \xi\rangle = \xi(f) = \sum_{j=1}^n a_j\partial_j(f) &= \sum_{j,k,l=1}^n a_j g_{jk} g^{kl}\partial_l(f)\\ &= \sum_{j,k,l=1}^n a_j\langle \partial_j,\partial_k\rangle g^{kl}\partial_l(f)\\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n a_j\partial_j, \sum_{k,l=1}^n (g^{kl}\partial_l(f))\partial_k\right\rangle\\ &= \left\langle \xi, \sum_{k,l=1}^n (g^{kl}\partial_l(f))\partial_k\right\rangle.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{grad}\, f = \sum_{k,l=1}^n g^{kl}\partial_l(f)\partial_k. \tag{2.2}$$

Se a base ∂_j, $j=1,\dots,n$, de T_pM for ortonormal o grad f pode também ser expresso por

$$\text{grad}\, f = \sum_{i=1}^n \partial_k(f)\partial_k. \tag{2.3}$$

Com efeito, $g^{kl}=\delta_{kl}$ em **(2.2)**.

Definição 2.2 *Dado o campo de vetores $X\in C^k$, $k\geq 1$, sobre M, a divergência de X denotada por* div$X$*, é a função definida por*

$$(\text{div}X)(p) := \textit{traço}\,(Y\to \nabla_Y X(p)),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Para $f\in C^k$, $k\geq 1$, e campos de vetores $X,Y\in C^k$, $k\geq 1$, temos

$$\begin{aligned}\text{div}(X+Y) &= \text{div}X + \text{div}Y;\\ \text{div}(fX) &= f\,\text{div}X + \langle \text{grad}\, f, X\rangle.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Lema 2.1 *Sejam M uma variedade Riemanniana imersa em $\bar{M}$ e X um campo de vetores em $\bar{M}$, denote por X^T e $X^\perp$ as componentes tangente e normal de X, com respeito a M, então*

$$\text{div}_M X = \text{div}_M X^T + \left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, X\right\rangle,$$

onde $\overrightarrow{\mathrm{H}}$ é o vetor curvatura média.

Demonstração.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}_M X &= \mathrm{div}_M (X^T + X^\perp) \\
&= \mathrm{div}_M X^T + \mathrm{div}_M X^\perp \\
&= \mathrm{div}_M X^T + \sum_{i=1}^{n} \langle \bar{\nabla}_{e_i} X^\perp, e_i \rangle \\
&= \mathrm{div}_M X^T + \sum_{i=1}^{n} \langle -\bar{\nabla}_{e_i} e_i, X^\perp \rangle \\
&= \mathrm{div}_M X^T - \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha(e_i, e_i), X - X^T \rangle \\
&= \mathrm{div}_M X^T - \left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, X \right\rangle
\end{aligned}
$$

■

2.2 Laplaciano e Hessiana

Definição 2.3 *Para toda função $f \in C^k$, $k \geq 2$, sobre M o laplaciano de f, denotado por Δf, é definido por*

$$\Delta f := \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f).$$

Para funções f e h temos

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{div}(h(\mathrm{grad}\, f)) = h\Delta f + \langle \mathrm{grad}\, h, \mathrm{grad}\, f \rangle; \\
&\Delta(f + h) = \Delta f + \Delta h; \\
&\Delta(fh) = h(\Delta f) + 2\langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h \rangle + f(\Delta h).
\end{aligned}
$$

Definição 2.4 *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. A hessiana de f é a forma bilinear e simétrica* $\mathrm{Hess} f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{D}(M)$, *definida para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ por*

$$\mathrm{Hess} f(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f).$$

A simetria e bilinearidade da hessiana segue das propriedades da conexão Riemanniana de M. De fato, a simetria da hessiana segue da simetria da conexão,

$$\nabla_X Y(f) - \nabla_Y X(f) = [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

assim

$$\mathrm{Hess} f(X, Y) = X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) = Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) = \mathrm{Hess} f(Y, X).$$

Para a bilinearidade, temos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}f(X+Z,Y) &= (X+Z)(Y(f)) - \nabla_{X+Z}Y(f)\\ &= X(Y(f)) + Z(Y(f)) - \nabla_X Y(f) - \nabla_Z Y(f)\\ &= (\mathrm{Hess}f)_p(X,Y) + (\mathrm{Hess}f)_p(Z,Y);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}f(X,Y+Z) &= X((Y+Z)(f)) - \nabla_X(Y+Z)(f)\\ &= X(Y(f)) + X(Z(f)) - \nabla_X Y(f) - \nabla_X Z(f)\\ &= \mathrm{Hess}f(X,Y) + \mathrm{Hess}f(X,Z).\end{aligned}$$

Sabemos que a toda forma bilinear simétrica $\mathcal{B} : E \times E \to \mathbb{R}$ está associado um operador auto-adjunto $\mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{B}(a_1, a_2) = \langle \mathcal{A}(a_1), a_2 \rangle,$$

onde E é um espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, em particular o operador auto-adjunto associado a forma hessiana é o operador hessiano

$$(\mathrm{Hess}f)_p : T_pM \to T_pM.$$

Agora veremos que regra define o operador $(\mathrm{Hess}f)_p$. Com efeito, para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ quaisquer

$$\begin{aligned}\langle (\mathrm{Hess}f)_p(X), Y\rangle &= \mathrm{Hess}f(X,Y)\\ &= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f)\\ &= X(\langle Y, \mathrm{grad}\, f\rangle) - \nabla_X Y(f)\\ &= X(\langle Y, \mathrm{grad}\, f\rangle) - \langle \nabla_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle\\ &= \langle \nabla_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle + \langle Y, \nabla_X \mathrm{grad}\, f\rangle - \langle \nabla_X Y, \mathrm{grad}\, f\rangle\\ &= \langle Y, \nabla_X \mathrm{grad}\, f\rangle,\end{aligned}$$

portanto

$$(\mathrm{Hess}f)_p(X) = \nabla_X \mathrm{grad} f(p). \tag{2.5}$$

Lema 2.2 *Seja $f : M \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma geodésica em M, então*

$$(\mathrm{Hess}f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) = \frac{d^2}{dt^2}(f \circ \gamma)(t).$$

Demonstração. Basta observar que

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess} f)_{\gamma(t)}(\gamma'(t),\gamma'(t)) &= \langle \nabla_{\gamma'(t)}\mathrm{grad}\, f, \gamma'(t)\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\langle \mathrm{grad}\, f, \gamma'(t)\rangle - \left\langle \mathrm{grad}\, f, \frac{D\gamma'(t)}{dt}\right\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\langle \mathrm{grad}\, f, \gamma'(t)\rangle \\ &= \frac{d^2}{dt^2}(f\circ\gamma)(t).\end{aligned}$$

A última igualdade é devida a **Proposição 2.1**. ■

Lema 2.3 *Se $f : M^n \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2. Então*

$$\Delta f = tr(\mathrm{Hess})_p.$$

Demonstração. Seja $\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base em T_pM, então

$$\begin{aligned}tr(\mathrm{Hess} f)_p &= \sum_{i=1}^{n}\langle (\mathrm{Hess} f)_p(e_i), e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \nabla_{e_i}\mathrm{grad}\, f, e_i\rangle \\ &= \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f) = \Delta f.\end{aligned}$$

■

Agora, com objetivo de demonstrarmos o teorema de comparação do hessiano, definiremos a forma do índice de uma geodésica.

Seja $\gamma : [0,a] \to M^n$ uma geodésica. Indicaremos por $\mathcal{V}(0,a) = \mathcal{V}$ o espaço vetorial formado por campos vetoriais V ao longo de γ, diferenciáveis por partes e tais que $V(0) = V(a) = 0$.

Definição 2.5 *A forma do índice de γ é a forma bilinear simétrica $\mathcal{I}_a$ definida em $\mathcal{V}$ por*

$$\mathcal{I}_a(V,W) = \int_0^a (\langle V', W'\rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', W\rangle)dt. \tag{2.6}$$

Em particular se $J \in \mathcal{V}$ é um campo de Jacobi ao longo de γ, então

$$\mathcal{I}_a(J,J) = \langle J', J\rangle(a). \tag{2.7}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_a(J,J) &= \int_0^a (\langle J', J'\rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', J)\gamma', J\rangle)dt \\ &= \int_0^a (\langle J', J'\rangle + \langle J'', J\rangle)dt \\ &= \int_0^a \frac{d}{dt}\langle J', J\rangle dt \\ &= \langle J', J\rangle(a).\end{aligned}$$

Proposição 2.4 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana completa e $\gamma : [0,a] \to M$ uma geodésica normalizada partindo de p e que não intersecta o $Cut(p)$. Se $0 < t_0 \leq a$ e $X \in T_{\gamma(t_0)}M$ é ortogonal a $\gamma'(t_0)$, então*

$$(\operatorname{Hess} r)_{\gamma(t_0)}(X,X) = \langle J', J\rangle(t_0), \tag{2.8}$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = X$.

Demonstração. Como o $Cut(p)$ é fechado em M, podemos tomar uma geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \setminus Cut(p)$ tal que $\alpha(0) = \gamma(t_0)$ e $\alpha'(0) = X$. Sendo α geodésica temos pelo **Lema 2.2** que

$$(\operatorname{Hess} r)_{\gamma(t_0)}(X,X) = (r \circ \alpha)''(0). \tag{2.9}$$

Seja $\beta = ((\exp_p)|_{E_p})^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to E_p$ e $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, t_0] \to M \setminus Cut(p)$ a variação da geodésica $\gamma|_{[0,t_0]}$ dada por

$$\phi(s,t) = \exp_p\left(\frac{t}{t_0}\beta(s)\right),$$

com campo variacional, de Jacobi, J. De $\phi(s,0) = p$ para todo s temos $J(0) = 0$; de $\phi(s,t_0) = \alpha(s)$, temos $J(t_0) = \frac{\partial \phi}{\partial s}(s,t_0)|_{s=0} = \alpha'(0) = X$. Como $X \perp \gamma'(t_0)$, segue que $J \perp \gamma'$ ao longo de γ e consequentemente $\langle J', \gamma'\rangle = 0$.

Por outro lado, sendo $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ o funcional energia de ϕ (ver [5] pág. 214), segue que

$$\begin{aligned}(r \circ \alpha)(s) = l(\phi_s) &= \int_0^{t_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)\right| dt \\ &\leq \sqrt{t_0}\left(\int_0^{t_0} \left|\frac{\partial \phi}{\partial t}(s,t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{t_0}E(s)^{1/2},\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de ϕ_s estar parametrizada proporcionalmente ao comprimento de arco. Portanto,

$$(r \circ \alpha)'(s) = l(\phi_s) = \frac{\sqrt{t_0}}{2}E(s)^{-1/2}E'(s)$$

e

$$(r \circ \alpha)''(s) = -\frac{\sqrt{t_0}}{4} E(s)^{-3/2} E'(s)^2 + \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(s)^{-1/2} E''(s). \tag{2.10}$$

Pela a fórmula da primeira variação da energia (ver [5] pág. 215)

$$\frac{1}{2} E'(0) = -\int_0^{t_0} \left\langle J, \frac{D\gamma'}{dt} dt \right\rangle + \langle J, \gamma' \rangle |_0^{t_0} = 0,$$

uma vez que $J \perp \gamma'$. Logo, aplicando a fórmula da segunda variação da energia (ver [5] pág. 218) em **(2.10)**, obtém-se

$$\begin{aligned}
(r \circ \alpha)''(0) &= \frac{\sqrt{t_0}}{2} E(0)^{-1/2} E''(0) \\
&= \frac{\sqrt{t_0}}{2} . \frac{\sqrt{t_0}}{r(\gamma(t_0))} . 2 \left(I_{t_0}(J, J) + \langle J', \gamma' \rangle |_0^{t_0} \right) \\
&= I_{t_0}(J, J) = \langle J', J \rangle (t_0).
\end{aligned}$$

Logo por **(2.9)**

$$(\mathrm{Hess}\, r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J \rangle (t_0).$$

■

Teorema 2.5 (Lema do Índice) *Sejam M^n uma variedade Riemanniana e $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica tal que para todo $t \in (0, a]$ $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ. Se V é um campo diferenciável por partes e J um campo de Jacobi ao longo de γ, com $V(0) = J(0) = 0$ e $V(t_0) = J(t_0)$ para $t_0 \in (0, a]$, então*

$$\mathcal{I}_{t_0}(V, V) \geq \mathcal{I}_{t_0}(J, J),$$

além disso, ocorre a igualdade se, e somente se, $V(t) = J(t)$ para todo $t \in [0, a]$.

Demonstração. Se $\mathcal{J}$ é o espaço vetorial dos campos de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$, então a $\dim \mathcal{J} = n$, pelo isomorfismo

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &\to T_{\gamma(0)} M \\
J &\mapsto J'(0).
\end{aligned}$$

Como para $J \in \mathcal{J}$ tem-se $\langle J, \gamma' \rangle (t) = \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle t$, segue que $\langle J, \gamma' \rangle \equiv 0 \Leftrightarrow \langle J'(0), \gamma'(0) \rangle = 0$. Podemos então tomar uma base $\{J_1, \ldots, J_{n-1}, J_n = t\gamma'(t)\}$ de $\mathcal{J}$, tal que $\langle J_i, \gamma' \rangle \equiv 0$ para $1 \leq i \leq n-1$. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que

$$J = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i J_i.$$

Como $\gamma(t)$ não é conjugado a $\gamma(0)$ ao longo γ, para $0 < t \leq a$, temos que $\{J_1(t), \ldots, J_{n-1}(t)\}$ é base do $(\mathrm{span}\{\gamma'(t)\})^{\perp} \subset T_{\gamma(t)}M$, para $t \in (0, a]$. Mas

$$J_i(t) = (d\exp_{\gamma(0)})_{t\gamma'(0)} tJ_i'(0) = t\,\underbrace{(d\exp_{\gamma(0)})_{t\gamma'(0)} J_i'(0)}_{A_i(t)} = tA_i(t),$$

com $A_i(0) = J_i'(0)$ e $A_n(t) = \gamma'(t)$, de modo que $\{A_1(t), \ldots, A_{n-1}(t)\}$ é base do $(\mathrm{span}\{\gamma'(t)\})^{\perp}$ $\subset T_{\gamma(t)}M$, para $0 \leq t \leq a$. Segue que existem funções $\beta_1, \ldots, \beta_n : [0, a] \to \mathbb{R}$, diferenciáveis por partes tais que $\beta_i(0) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ e

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(t) A_i(t), \quad \forall\ t \in [0, a].$$

Mas para $0 \leq i \leq n$ e $0 \leq t \leq a$, temos

$$\beta_i(t) = \int_0^t \beta_i'(s)ds = \int_0^1 \beta_i'(t\tau)td\tau = t\underbrace{\int_0^1 \beta_i'(t\tau)d\tau}_{b_i(t)},$$

onde cada b_i é diferenciável por partes em $[0, a]$, assim

$$V(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i(t) J_i(t), \quad \forall\ t \in [0, a]$$

e observe que

$$V(t_0) = J(t_0) \Rightarrow b_i(t_0) = \alpha_i, \quad \forall\ i \in [1, n]. \tag{2.11}$$

Como $\mathcal{I}_{t_0}(J, J) = \langle J', J\rangle(t_0)$ e $V' = \sum_{i=1}^{n}(b_i'J_i + b_iJ_i')$ onde V for diferenciável, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{t_0}(V, V) &= \int_0^{t_0} [\langle V', V'\rangle - \langle \mathcal{R}(\gamma', V)\gamma', V\rangle]dt \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{t_0} [\langle b_i'J_i + b_iJ_i', b_j'J_j + b_jJ_j'\rangle - \langle b_i\underbrace{\mathcal{R}(\gamma', J_i)\gamma'}_{-J_i''}, b_jJ_j\rangle]dt \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{t_0} [|b_i'J_i|^2 + \langle b_i'J_i, b_jJ_j'\rangle + \langle b_iJ_i', b_j'J_j\rangle + \langle b_iJ_i', b_jJ_j'\rangle + \langle b_iJ_i'', b_jJ_j\rangle]dt.
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\langle b_ij_i', b_jJ_j\rangle &= \langle b_i'j_i' + b_ij_i'', b_jJ_j\rangle + \langle b_ij_i', b_j'J_j + b_jJ_j'\rangle \\
&= \langle b_i'j_i', b_jJ_j\rangle + \langle b_ij_i'', b_jJ_j\rangle + \langle b_ij_i', b_j'J_j\rangle + \langle b_ij_i', b_jJ_j'\rangle
\end{aligned}$$

Donde

$$\mathcal{I}_{t_0}(V,V) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{t_0} \left[|b_i' J_i|^2 + \langle b_i' J_i, b_j J_j' \rangle - \langle b_i' j_i', b_j J_j \rangle + \frac{d}{dt} \langle b_i j_i', b_j J_j \rangle \right] dt$$

Agora afirmamos que

$$\langle J_i', J_j \rangle = \langle J_i, J_j' \rangle, \quad \text{para quaisquer } 1 \leq i,j \leq n \text{ e } t \in [0,a].$$

De fato, sendo $\phi(t) = \langle J_i', J_j \rangle - \langle J_i, J_j' \rangle$ temos $\phi(0) = 0$ e

$$\phi'(t) = \langle J_i'', J_j \rangle - \langle J_i, J_j'' \rangle = -\langle \mathcal{R}(\gamma', J_i)\gamma', J_j \rangle + \langle J_i, \mathcal{R}(\gamma', J_j)\gamma' \rangle = 0,$$

logo $\phi \equiv 0$. Segue de **(2.11)** e da afirmação acima que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{t_0}(V,V) &= \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t_0} |b_i' J_i|^2 dt + \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^{t_0} \frac{d}{dt} \langle b_i J_i', b_j J_j \rangle dt \qquad (2.12) \\ &\geq \sum_{i,j=1}^{n} \langle b_i J_i', b_j J_j \rangle |_0^{t_0} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle \alpha_i J_i'(t_0), \alpha_j J_j(t_0) \rangle \\ &= \mathcal{I}_{t_0}(J,J). \end{aligned}$$

Para a igualdade, é imediato de **(2.12)** que devemos ter $b_i'(t) = 0$ para $t \in (0, t_0]$ onde V for diferenciável. Portanto, $b_i(t) = \alpha_i$ para $t \in [0, t_0]$ por continuidade, logo

$$V(t) = \alpha_i J_i(t) = J(t), \quad \forall \; t \in [0, t_0].$$

■

Teorema 2.6 (Comparação do Hessiano) *Sejam M^n e $\bar{M}^n$ variedades Riemannianas completas e $\gamma : [0,a] \to M$ e $\bar{\gamma} : [0,a] \to \bar{M}$ geodésicas normalizadas que não intersectam respectivamente $Cut(\gamma(0))$ e $Cut(\bar{\gamma}(0))$. Se*

$$K_M(\gamma'(t), X) \leqslant K_{\bar{M}}(\bar{\gamma}'(t), \bar{X}),$$

para todo $t \in [0,a]$, $X \in T_{\gamma(t)}M$ e $\bar{X} \in T_{\bar{\gamma}(t)}\bar{M}$, unitários e ortogonais respectivamente a $\gamma'(t)$ e $\bar{\gamma}'(t)$, e r e $\bar{r}$ são respectivamente as funções distância em M e $\bar{M}$ a partir de $\gamma(0)$ e $\bar{\gamma}(0)$. Então para $0 < t \leqslant a$,

$$(\operatorname{Hess} r)_{\gamma(t)}(X,X) \geq (\operatorname{Hess} \bar{r})_{\bar{\gamma}(t)}(\bar{X}, \bar{X}).$$

Além disso, vale a igualdade se e só se $K_M(\gamma'(t), X) = K_{\bar{M}}(\bar{\gamma}'(t), \bar{X})$.

Demonstração. Fixe $0 < t_0 \leq a$. Pela **Proposição 2.4**, temos

$$(\operatorname{Hess} r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J\rangle(t_0),$$

onde J é o campo de Jacobi ao longo de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(y_0) = X$. Em particular $\langle J, \gamma'\rangle = 0$ em $[0, t_0]$. Analogamente

$$(\operatorname{Hess} \bar{r})_{\bar{\gamma}(t_0)}(\bar{X}, \bar{X}) = \langle \bar{J}', \bar{J}\rangle(t_0),$$

onde $\bar{J}$ é o campo de Jacobi ao longo de $\bar{\gamma}$ tal que $\bar{J}(0) = 0$ e $\bar{J}(t_0) = \bar{X}$, com $\langle \bar{J}, \bar{\gamma}'\rangle = 0$ em $[0, t_0]$. Como $\bar{\gamma}$ não encontra o $Cut(\bar{\gamma}(0))$ em $(0, t_0]$, segue que $\bar{\gamma}(t)$ não é conjugado a $\bar{\gamma}(0)$ ao longo de $\bar{\gamma}$, para $t \in (0, t_0]$. Portanto, pela parte **(b)** do teorema de Rauch

$$\begin{aligned}(\operatorname{Hess} r)_{\gamma(t_0)}(X, X) = \langle J', J\rangle(t_0) &\geq \frac{|J(t_0)|^2}{|\bar{J}(t_0)|^2}\langle \bar{J}', \bar{J}\rangle(t_0)\\ &= \frac{|X|^2}{|\bar{X}|^2}(\operatorname{Hess} \bar{r})_{\bar{\gamma}(t_0)}(\bar{X}, \bar{X})\\ &= (\operatorname{Hess} \bar{r})_{\bar{\gamma}(t_0)}(\bar{X}, \bar{X}).\end{aligned}$$

Pela **Observação 1.14**, do teorema de Rauch, a igualdade vale se e só se $K_M(\gamma'(t), X) = K_{\bar{M}}(\bar{\gamma}'(t), \bar{X})$. ∎

Teorema 2.7 *Seja $\mathbb{R}^n$ munido com a métrica g, que pode ser escrita em coordenadas polares como*

$$dr^2 + f^2(r)dw^2$$

onde f é uma função suave, dw^2 é a métrica canônica sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ e $r(x) = d(x, 0)$, onde d é a função distância. Então para $x = rw$, $r > 0$, $w \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$\operatorname{Hess} r(x) = \frac{f'(r)}{f(r)}(g - dr \otimes dr)$$

além disso,

$$\Delta r(x) = (n-1)\frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Demonstração. Usando que as curvas $r \to rw$ são geodésicas para w fixado e que $\frac{\partial}{\partial r}$ é o campo velocidade, então pela definição de hessiana

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess} r\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}(r) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}}\frac{\partial}{\partial r}(r)\\ &= \frac{\partial}{\partial r}(1) = 0\end{aligned} \tag{2.13}$$

Se X é um campo ortogonal a $\frac{\partial}{\partial r}$, então

$$\operatorname{Hess} r\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = \operatorname{Hess} r\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) = X\left(\frac{\partial}{\partial r}(r)\right) - \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}(r),$$

pela **Proposição 2.3** $\operatorname{grad} r = \dfrac{\partial}{\partial r}$ e, portanto

$$\nabla_X \frac{\partial}{\partial r}(r) = \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle,$$

ainda pela **Proposição 2.3**

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 1,$$

assim,

$$0 = X\left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 2\left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

Portanto, quando X é ortogonal a $\dfrac{\partial}{\partial r}$,

$$\operatorname{Hess} r\left(\frac{\partial}{\partial r}, X\right) = \left\langle \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle = 0. \tag{2.14}$$

Agora consideremos os campos de vetores X e Y que são tangentes ao conjunto de nível $r = c$, onde c é uma constante positiva. Então $X(r) = Y(r) = 0$ e

$$\operatorname{Hess} r(X, Y) = -\nabla_X Y(r) = -\left\langle \nabla_X Y, \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

Como Y é ortogonal a $\dfrac{\partial}{\partial r}$, temos por **(1.3)** que

$$\operatorname{Hess} r(X, Y) = \left\langle Y, \nabla_X \frac{\partial}{\partial r}\right\rangle.$$

Seja $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}$, para $i = 1, \ldots, n-1$, campos de vetores coordenados sobre $\mathbb{S}^{n-1}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_n} = \dfrac{\partial}{\partial r}$ o campo normal a superfície $r = c$. Então para $1 \leq i, j \leq n-1$,

$$\operatorname{Hess} r\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \left\langle \sum_s \Gamma_{jn}^s \frac{\partial}{\partial x_s}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right\rangle = \sum_s \Gamma_{jn}^s g_{si}, \tag{2.15}$$

onde Γ_{jn}^s, são os símbolos de Christoffel dados por

$$\Gamma_{jn}^s = \frac{1}{2}\sum_k \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} g_{nk} + \frac{\partial}{\partial x_n} g_{kj} - \frac{\partial}{\partial x_k} g_{jn} \right\} g^{ks}.$$

Como $g_{ni} = \left\langle \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = 0$ para todo $= 1, \ldots, n-1$, temos

$$\Gamma_{jn}^s = \frac{1}{2}\sum_k \left(\frac{\partial}{\partial x_n} g_{kj} \right) g^{ks}.$$

como $g(r, w) = dr^2 + f(r)^2 dw^2$, temos que

$$g^{ks} = f^{-2}(dw^2)^{ks} \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x_n} g_{kj} = \frac{\partial}{\partial r} g_{kj} = 2ff'(dw^2)_{kj}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \Gamma_{jn}^s &= \sum_k \frac{f'}{f}(dw^2)_{kj}(dw^2)^{ks} \\ &= \frac{f'}{f}\delta_{sj} \end{aligned}$$

Voltando a **(2.15)**, temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} r \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) &= \sum_s \frac{f'}{f}\delta_{sj} g_{si} \\ &= \frac{f'}{f} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle. \end{aligned}$$

Por linearidade, se X e Y são ortogonais a $\dfrac{\partial}{\partial r}$, temos

$$\operatorname{Hess} r(X, Y) = \frac{f'}{f} g(X, Y). \tag{2.16}$$

Agora sejam X e Y campos de vetores quaisquer, os quais podemos escrever como

$$\begin{aligned} X &= X_1 + \alpha \frac{\partial}{\partial r}, \\ Y &= Y_1 + \beta \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned}$$

onde X_1 e Y_1 são ortogonais a $\dfrac{\partial}{\partial r}$, consequentemente

$$g\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \alpha \quad \text{e}$$
$$g\left(Y, \frac{\partial}{\partial r}\right) = \beta.$$

Pela linearidade da hessiana e as equações **(2.13)**, **(2.14)** e **(2.16)** temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} r(X,Y) &= \operatorname{Hess} r(X_1,Y_1) + \beta \operatorname{Hess} r\left(X_1, \frac{\partial}{\partial r}\right) + \alpha \operatorname{Hess} r\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y_1\right) + \\
&\quad + \alpha\beta \operatorname{Hess} r\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= \operatorname{Hess} r(X_1,Y_1) \\
&= \frac{f'}{f} g(X_1,Y_1) \\
&= \frac{f'}{f} g\left(X - \alpha\frac{\partial}{\partial r}, Y - \beta\frac{\partial}{\partial r}\right) \\
&= \frac{f'}{f}\left[g(X,Y) - \beta g\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) - \alpha g\left(\frac{\partial}{\partial r}, Y\right) + \alpha\beta g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right)\right] \\
&= \frac{f'}{f}[g(X,Y) - \alpha\beta] \\
&= \frac{f'}{f}\left[g(X,Y) - g\left(X, \frac{\partial}{\partial r}\right) g\left(Y, \frac{\partial}{\partial r}\right)\right] \\
&= \frac{f'}{f}(g(X,Y) - dr \otimes dr(X,Y)).
\end{aligned}$$

Para a segunda parte temos que,

$$\Delta r(x) = tr(\operatorname{Hess} r(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f'}{f}\left(g(e_i,e_i) - g\left(e_i, \frac{\partial}{\partial r}\right) g\left(e_i, \frac{\partial}{\partial r}\right)\right) = (n-1)\frac{f'}{f},$$

onde $e_1, \ldots, e_n = \dfrac{\partial}{\partial r}$ é uma base ortonormal. ■

Em particular, tomando a métrica $dr^2 + s_\delta^2(r)dw^2$, onde s_δ é solução do sistema

$$\begin{cases} y'' + \delta y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

temos que

$$\operatorname{Hess} r(X,Y) = \frac{s_\delta'(r)}{s_\delta(r)}(g(X,Y) - dr \otimes dr(X,Y)) \tag{2.17}$$

e

$$\Delta r_\delta(x) = (n-1)\frac{s'_\delta(r)}{s_\delta(r)} = \operatorname{Hess} r_\delta(e_i, e_i),$$

onde r_δ é a função distância na variedade M_δ de curvatura seccional constante δ.

Capítulo 3

Limites Superiores Extrínsecos para λ_1

Nesse capítulo provaremos o resultado principal dessa dissertação, que é uma generalização do teorema de Reilly. No entanto, começaremos mostrando dois métodos de calcular os autovalores do laplaciano, conhecidos como quociente de Rayleigh e o princípio do MinMax, para os quais dedicamos a primeira seção.

3.1 Rayleigh e o método MinMax

Seja $L^2(M)$ o espaço das funções mensuráveis f sobre M tal que

$$\int_M |f|^2 dM < +\infty.$$

Sobre $L^2(M)$ temos o produto interno usual, e a norma induzida, respectivamente dados por

$$(f, g) := \int_M fh\, dM, \quad \|f\|^2 = (f, f)$$

para quaisquer $f, h \in L^2(M)$.

Nosso interesse é no seguinte problema de autovalores:

Problema fechado de autovalores: Seja M uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo e conexa. Determine todos os números reais λ tais que exista uma solução não trivial, isto é, uma função não nula $\phi \in C^2(M)$ satisfazendo a EDP

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0. \tag{3.1}$$

Os números λ são chamados de autovalores do laplaciano e o espaço vetorial das soluções de **(3.1)** para um dado autovalor λ é chamado de autoespaço. Os elementos de cada autoespaço são chamados de autofunções.

Daqui em diante, por simplicidade, não usaremos o elemento de volume dM, no contexto ficará implícito o seu uso.

Observe que, se ϕ satisfaz **(3.1)**, então

$$\lambda = \frac{\int_M |\mathrm{grad}\, \phi|^2}{\int_M \phi^2} \geq 0.$$

De fato, multiplicando **(3.1)** por ϕ e integrando obtemos

$$\int_M (\phi \Delta \phi + \lambda \phi^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{\int_M \phi \Delta \phi}{\int_M \phi^2} \tag{3.2}$$

como M não tem bordo, obtemos pela fórmula de Green

$$\int_M (f \Delta h + \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, h \rangle) = \int_{\partial M} h \nu(f), \tag{3.3}$$

onde ν denota o campo unitário normal exterior sobre ∂M, que

$$\int_M \phi \Delta \phi = - \int_M |\mathrm{grad}\, \phi|^2,$$

substituindo em **(3.2)**, obtemos

$$\lambda = \frac{\int_M |\mathrm{grad}\, \phi|^2}{\int_M \phi^2}.$$

Agora para campos de vetores contínuos X, Y em M, definimos o produto interno

$$(X, Y) = \int_M \langle X, Y \rangle dM,$$

com norma

$$\|X\|^2 = \int_M |X|^2 dM. \tag{3.4}$$

Identificaremos $\mathcal{L}^2(M)$ como o conjunto dos campos de vetores mensuráveis sobre M (isto é, campos de vetores cujas funções coeficientes, em uma carta, são mensuráveis) para os quais a integral **(3.4)** é finita. Com o produto interno e a norma definidos acima, $\mathcal{L}^2(M)$ é um espaço de Hilbert.

Definição 3.1 *Se $f \in L^2(M)$ dizemos que $Y \in \mathcal{L}^2(M)$ é uma derivada fraca de f se*

$$(Y, X) = -(f, \mathrm{div} X)$$

para todo campo X com suporte compacto sobre M.

Lema 3.1 *Se f é uma função de classe C^1 sobre uma variedade Riemanniana M e X é um campo também de classe C^1 e com suporte compacto sobre M, então*

$$(\mathrm{grad}\, f, X) = -(f, \mathrm{div} X).$$

Demonstração. Pela equação **(2.4)** temos que

$$\int_M \operatorname{div}(fX) = \int_M f\operatorname{div}X + \int_M \langle \operatorname{grad} f, X\rangle,$$

mas pelo teorema da divergência $\int_M \operatorname{div}(fX) = 0$, logo

$$(\operatorname{grad} f, X) = \int_M \langle \operatorname{grad} f, X\rangle = -\int_M f\operatorname{div}X = -(f, \operatorname{div}X).$$

■

Vamos denotar por $\mathcal{H}(M)$ o subespaço de $L^2(M)$ (referido como o espaço de Sobolev, pois é possível mostrar que quando $\partial M = \emptyset$, $\mathcal{H}(M)$ coincide com o espaço de Sobolev $W^{1,2}(M)$) consistindo das funções em $L^2(M)$ que possuem derivada fraca. Sobre $\mathcal{H}(M)$ definimos o produto interno

$$(f, h)_1 = (f, h) + (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h)$$

com norma associada,

$$\|f\|_1^2 = \|f\|^2 + \|\operatorname{grad} f\|^2. \tag{3.5}$$

É também conhecido que $\mathcal{H}(M)$ é o completamento de

$$\{f \in C^\infty(M) : \|f\|_1 < +\infty\}$$

na métrica induzida por **(3.5)**. Além disso, como ∂M (quando não vazia) é C^∞, temos que $C^\infty(\bar{M})$ é denso em $\mathcal{H}(M)$ na métrica dada. No problema fechado de autovalores, $\mathcal{H}(M)$ é também conhecido como o espaço das funções admissíveis.

Sobre $\mathcal{H}(M)$ vamos considerar a forma bilinear simétrica, conhecida como integral de Dirichlet ou da energia, dada por

$$D[f, h] = (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h) \tag{3.6}$$

para $f, h \in \mathcal{H}(M)$.

Lema 3.2 *No problema fechado de autovalores , se $\phi \in C^2(M)$ é uma autofunção e $f \in C^\infty(M)$, então*

$$(\Delta\phi, f) = -D[\phi, f].$$

Demonstração. Basta observar que sendo M compacto sem bordo, então da equação **(3.3)**

$$\int_M (f\Delta\phi + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \phi\rangle) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_M f\Delta\phi = -\int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \phi\rangle,$$

isto é

$$(\Delta\phi, f) = \int_M f\Delta\phi = -\int_M \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} \phi\rangle = -D[f, \phi].$$

■

Agora temos todos os elementos necessários para o teorema de Rayleigh, que enunciamos visando o problema fechado de autovalores:

Teorema 3.1 (Rayleigh) *Seja M^n uma variedade Riemanniana e considere o problema fechado de autovalores tendo espaço de funções admissíveis $\mathcal{H}(M)$ e autovalores*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \ldots, \tag{3.7}$$

onde cada autovalor é repetido o número de vezes igual a sua multiplicidade. Então para toda $f \in \mathcal{H}(M), f \neq 0$, temos

$$\lambda_1 \leq \frac{D[f,f]}{\|f\|^2}, \tag{3.8}$$

com igualdade se, e somente se, f é uma autofunção de λ_1. Se $\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$ é uma base ortonormal de $L^2(M)$ tais que ϕ_j é uma autofunção de λ_j para cada $j = 1, 2, \ldots,$ então para $f \in \mathcal{H}(M), f \neq 0$, satisfazendo

$$(f, \phi_1) = \ldots = (f, \phi_{k-1}) = 0, \tag{3.9}$$

temos a desigualdade

$$\lambda_k \leq \frac{D[f,f]}{\|f\|^2} \tag{3.10}$$

com igualdade se, e somente se, f é uma autofunção de λ_k.

Demonstração. Ver [4], página 16. ■

Teorema 3.2 (Minmax) *Dados $v_1, \ldots, v_{k-1} \in L^2(M)$, seja*

$$\mu = \inf\left(\frac{D[f,f]}{\|f\|^2}\right),$$

onde f percorre os subespaços (exceto a origem) de funções em $\mathcal{H}(M)$ ortogonais a $v_1, \ldots,$ v_{k-1}. Então para o problema de autovalores dado em **(3.7)** *temos*

$$\mu \leq \lambda_k.$$

Claramente, se $v_1, \ldots, v_{k-1}$ são ortogonais, com cada v_i sendo autofunção de λ_i, $i = 1, \ldots, k-1$, então $\mu = \lambda_k$.

Demonstração. Ver [4], página 17. ■

3.2 Resultados principais

Nessa última seção trabalharemos com os resultados que envolvem diretamente o primeiro autovalor do laplaciano, λ_1. Nosso principal objetivo é provar os **Teoremas 3.4** e **3.8**. Para isso provaremos alguns lemas técnicos que tornará a demonstração dos teoremas citados mais didática. Iniciamos com uma pequena introdução do resultado obtido por Reilly:

seja M uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta, conexa e imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$ e $\lambda_1(M)$ o primeiro autovalor do operador laplaciano de M, Reilly mostrou que

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\mathrm{vol} M} \int_M H^2,$$

onde $H = \dfrac{1}{n} |\overrightarrow{\mathrm{H}}|$ é a curvatura média, $\overrightarrow{\mathrm{H}} = tr\, \alpha$ é o vetor curvatura média e α é a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{R}^N$. O resultado de Reilly melhora a seguinte estimativa, devida a Bleecker e Weiner [1]

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\mathrm{vol} M} \int_M |\alpha|^2 \, dM.$$

Que pode ser comprovada assim,

$$\begin{aligned} nH^2 = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha(e_i, e_i) \right|^2 &\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha(e_i, e_i)| \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha(e_i, e_i)|^2 \\ &\leq \sum_{i,j=1}^{n} |\alpha(e_i, e_j)|^2 = |\alpha|^2, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade é devida a Cauchy-Schwarz e $e_1, \ldots, e_n$ é uma base ortonormal do espaço tangente.

Como acima mencionado nosso objetivo nessa dissertação é estender a desigualdade de Reilly para outros espaços $\bar{M}$, isto será feito de varias maneiras, por exemplo:

Teorema 3.3 *Se $\bar{M}$ é compacto então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lambda_1(M) \leq c + \frac{n}{\mathrm{vol} M} \int_M H^2$$

para toda variedade M compacta, conexa e imersa isometricamente em $\bar{M}$.

Demonstração. A prova segue de uma combinação da desigualdade de Reilly com o teorema de Nash, **Teorema 1.9**. Por Nash temos que $\bar{M}$ está imersa isometricamente num espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Consequentemente, M está imersa isometricamente em $\mathbb{R}^N$, assim

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\mathrm{vol} M} \int_M \widetilde{H}^2,$$

onde $\widetilde{H}$ é a curvatura média de M em $\mathbb{R}^N$. Se $\tilde{\alpha}$, $\alpha_{\bar{M}}$ denotam as segundas formas fundamentais de M e $\bar{M}$ em $\mathbb{R}^N$, respectivamente, então $\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_{\bar{M}}$, onde α é a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$. Com efeito, se α denota a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$, então por definição para $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, X_1, Y_1 suas extensões a $\bar{M}$, respectivamente, e X', Y' extensões a $\mathbb{R}^N$ de X_1, Y_1, respectivamente e denotando por C a conexão Riemanniana de $\mathbb{R}^N$ temos que:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}(X, Y) &= C_{X'}Y' - \nabla_X Y \\
\alpha(X, Y) &= \overline{\nabla}_{X_1}Y_1 - \nabla_X Y \\
\alpha_{\bar{M}}(X_1, Y_1) &= C_{X'}Y' - \overline{\nabla}_{X_1}Y_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha(X, Y) + \alpha_{\bar{M}}(X_1, Y_1) = C_{X'}Y' - \nabla_X Y = \tilde{\alpha}(X, Y), \tag{3.11}$$

e consequentemente

$$\overrightarrow{\mathrm{H}}_1 = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}(e_i, e_i) = \overrightarrow{\mathrm{H}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i),$$

onde $\overrightarrow{\mathrm{H}}_1$ é o vetor curvatura média de M em $\mathbb{R}^N$ e $e_1, \ldots, e_n$ é uma base ortonormal do espaço tangente. Assim,

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}^2 = \frac{1}{n^2}|\overrightarrow{\mathrm{H}}_1| &= \frac{1}{n^2}\left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i), \overrightarrow{\mathrm{H}} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle \\
&= \frac{1}{n^2}\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, \overrightarrow{\mathrm{H}} \rangle + \frac{1}{n^2}\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i), \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle + \frac{2}{n^2}\left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle \\
&= H^2 + \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right|^2,
\end{aligned}$$

pois $\alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i)$ é perpendicular a $\bar{M}$, consequentemente

$$\left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right\rangle = 0,$$

assim

$$\lambda_1(M) \leq \frac{1}{n\,\mathrm{vol}M} \int_M \left| \sum_{i=1}^{n} \alpha_{\bar{M}}(e_i, e_i) \right|^2 + \frac{n}{\mathrm{vol}M} \int_M H^2 \leq c + \frac{n}{\mathrm{vol}M} \int_M H^2$$

onde $c := \max_{\nu \in S\bar{M}} |\alpha_{\bar{M}}(\nu, \nu)|$ e $S\bar{M}$ denota o fibrado tangente unitário. Isto completa a prova do teorema. ∎

O primeiro dos objetivos principais dessa dissertação é mostrar a seguinte extensão da desigualdade de Reilly:

Teorema 3.4 *Se $K_{\bar{M}} \leq \delta$ para algum $\delta \geq 0$ e se além disso M está em uma bola convexa de raio $r \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\delta}}$ quando $\delta > 0$, então*

$$\lambda_1(M) \leq n\delta + \frac{n}{\mathrm{vol}M} \int H^2.$$

Se vale a igualdade, então M é imersa minimamente em alguma esfera geodésica.

Para mostrarmos um caso particular do **Teorema 3.4**, vamos usar os dois resultados seguintes:

Teorema 3.5 *Duas variedades Riemannianas compactas 2-dimensional são homeomorfas se, e somente se, elas têm a mesma característica de Euler e são ambas orientáveis ou não orientáveis.*

Demonstração. Ver [10], página 33. ■

Teorema 3.6 *Seja M uma superfície de Riemann orientada de gênero g com área A. Então*

$$\lambda_1 \leq 8\pi(g+1)A^{-1}.$$

Demonstração. Ver [12], página 4. ■

Agora para $n = 2$, temos o seguinte caso particular do **Teorema 3.4**:

Proposição 3.7 *Seja M homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ e $K_{\bar{M}} \leq \delta$ para algum $\delta \in \mathbb{R}$. Então*

$$\lambda_1(M) \leq 2\delta + \frac{2}{\mathrm{vol}M} \int_M H^2.$$

Demonstração. Sendo M homeomorfa a $\mathbb{S}^2$, segue que M tem dimensão 2, pelo **Teorema de Invariância da dimensão**, e pelo **Teorema 3.5** M e $\mathbb{S}^2$ têm a mesma característica de Euler e consequentemente o mesmo gênero $g = 0$. Usando o **Teorema 3.6** temos

$$\lambda_1(M) \leq \frac{8\pi(g+1)}{\mathrm{vol}M} = \frac{8\pi}{\mathrm{vol}M},$$

usando o teorema de Gauss-Bonnet

$$\lambda_1(M) \leq \frac{8\pi}{\mathrm{vol}M} = \frac{2}{\mathrm{vol}M} \int_M K_M,$$

onde K_M denota a curvatura seccional de M.

Tendo M dimensão 2, então temos duas curvaturas principais k_1 e k_2. Agora, observamos que

$$0 \leqslant (k_1 - k_2)^2 = k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2$$

e portanto,

$$2k_1k_2 \leq k_1^2 + k_2^2.$$

Mas,

$$(k_1 + k_2)^2 = k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2 \geq 4k_1k_2$$

logo,

$$k_1k_2 \leq \frac{(k_1+k_2)^2}{4} = \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2.$$

Pelo teorema de Gauss $K_M(x,y) - K_{\bar{M}}(x,y) = \langle \alpha(x,x), \alpha(y,y)\rangle - |\alpha(x,y)|^2$, temos

$$\begin{aligned} K_M(x,y) - K_{\bar{M}}(x,y) &\leq \langle \alpha(x,x), \alpha(y,y)\rangle = k_1k_2 \\ &\leq \left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)^2 = H^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$K_M(x,y) \leq K_{\bar{M}}(x,y) + H^2 \leq \delta + H^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} \lambda_1(M) &\leq \frac{2}{\mathrm{vol}M}\int_M (\delta + H^2) \\ &= 2\delta + \frac{2}{\mathrm{vol}M}\int_M H^2. \end{aligned}$$

■

Nosso resultado mais geral quando $\delta < 0$ é o seguinte:

Teorema 3.8 *Se $K_{\bar{M}} \leq \delta$ para algum $\delta < 0$ e M está em uma bola convexa, então*

$$\lambda_1(M) \leq n\delta + n\max H^2.$$

Agora, seja s_δ a solução de

$$y'' + \delta y = 0 \tag{3.12}$$

com $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ e ponha $c_\delta := s_\delta'$. Então, $c_\delta' = -\delta s_\delta$ e $c_\delta^2 + \delta s_\delta^2 = 1$. Para comprovar esta última igualdade seja $f(t) = (c_\delta(t))^2 + \delta(s_\delta(t))^2$, então

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2c_\delta(t)c_\delta'(t) + 2\delta s_\delta(t)s_\delta'(t) \\ &= -2\delta s_\delta' s_\delta + 2\delta s_\delta' s_\delta = 0, \end{aligned}$$

portanto f é constante, e

$$\begin{aligned}
f(0) &= (c_\delta(0))^2 + \delta(s_\delta(0))^2 \\
&= (s'_\delta(0))^2 + \delta(s_\delta(0))^2 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

pois $s'_\delta(0) = 1$ e $s_\delta(0) = 0$.

Vamos usar $\dfrac{s_\delta(r)}{r} \cdot x_i$ e $\dfrac{c_\delta(r) - c}{\sqrt{\delta}}$ no caso $\delta > 0$, onde $c := \dfrac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M c_\delta(r)$ é constante, como funções teste no quociente de Rayleigh onde x_i são as coordenadas normais de $\bar{M}$ centrada em algum ponto $p_0 \in \bar{M}$ e $r = d(p_0, \cdot)$ é a distância a p_0. Assuma , que M está numa bola convexa em torno de p_0 de raio menor ou igual $\frac{\pi}{4\sqrt{\delta}}$ se $\delta > 0$. Em particular $c_\delta \geq 0$. Seja $X := s_\delta(r) \mathrm{grad}\, r$, onde o gradiente é tomado em $\bar{M}$. Como, $|\mathrm{grad}\, r| = 1$ temos

$$|X|^2 = s_\delta^2(r) \langle \mathrm{grad}\, r, \mathrm{grad}\, r \rangle = s_\delta^2(r),$$

logo

$$\begin{aligned}
\lambda_1(M) \int_M s_\delta^2(r) = \lambda_1(M) \int_M |X|^2 &= \lambda_1(M) \int_M \sum_{i=1}^n \left(\frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right)^2 \\
&\leq \int_M \sum_{i=1}^n \left| \mathrm{grad}_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i \right|^2, \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

e a desigualdade é pelo quociente de Rayleigh.

No caso $\delta > 0$

$$\lambda_1(M) \int_M \frac{(c_\delta(r) - c)^2}{\delta} \leq \int_M \frac{1}{\delta} |\mathrm{grad}_M c_\delta(r)|^2. \qquad (3.14)$$

Aqui grad_M denota o gradiente em M, isto é, a componente tangente do gradiente em $\bar{M}$. Note, que $\mathrm{grad}\, c_\delta = -\delta X$, com efeito

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}\, c_\delta(r) &= \mathrm{grad}\, s'_\delta(r) \\
&= s''_\delta(r) \mathrm{grad}\, r \\
&= -\delta s_\delta \mathrm{grad}\, r \\
&= -\delta X,
\end{aligned}$$

e consequentemente $\mathrm{grad}_M\, c_\delta = -\delta X^T$ onde T denota a parte tangente.

Pelo teorema de Rayleigh, as desigualdades **(3.13)** e **(3.14)** são válidas apenas se

$$\int_M \frac{c_\delta(r) - c}{\sqrt{\delta}} = \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i = 0.$$

Com esse objetivo definimos

$$P_f^\delta(y) = \frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M \int_0^{r(y,f(x))} s_\delta(t) dt dx,$$

onde $f : M \to B_r(p) \subset \bar{M}$ é uma imersão isométrica da variedade compacta M numa bola convexa de $\bar{M}$ e $r(y, f(x))$ é a função distância de y a $f(x)$.

Para a próxima proposição, relembramos algumas definições:

Definição 3.2 *Uma função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada convexa se para todo $a < b$ e $s \in (0,1)$ temos*

$$g((1-s)a + sb) \leq (1-s)g(a) + sg(b).$$

A função g é chamada estritamente convexa se a desigualdade é estrita. Uma função f sobre uma variedade Riemanniana M é (estritamente) convexa se para toda geodésica não trivial $\gamma : [0,1] \to M$ a função $f \circ \gamma$ é (estritamente) convexa. Um subconjunto $A \subset M$ é chamado convexo se para quaisquer $p, q \in A$ existe uma única geodésica normalizada γ em M ligando p a q com $\gamma \subset A$.

Proposição 3.9 *Se $K_{\bar{M}} \leq \delta$ e B é a bola convexa de raio $r \leq \frac{\pi}{4\sqrt{\delta}}$, então P_f^δ tem um único ponto mínimo em B, além disso, esse ponto mínimo está no interior de B.*

Demonstração. Primeiramente calcularemos o gradiente de P_f^δ. Como

$$P_f^\delta(y) = \frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M \int_0^{r(y,f(x))} s_\delta(t) dt dx,$$

usando o teorema fundamental do cálculo com a regra da cadeia e coordenadas normais com $y = \exp_p(y_1, \ldots, y_n)$ e $f(x) = \exp_p(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ temos

$$r = r(y, f(x)) = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right)^{1/2}.$$

Pela equação **(2.3)** $\mathrm{grad}\, P_f^\delta(y) = \displaystyle\sum_i \partial_i (P_f^\delta(y)) \partial_i$, assim temos que

$$\begin{aligned}
\partial_i (P_f^\delta(y)) &= \frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M s_\delta(r) \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right)^{\frac{1}{2}-1} \partial_i \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M s_\delta(r) \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (y_i - f_i(x))^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2(y_i - f_i(x)) dx \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} (y_i - f_i(x)) dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} P_f^\delta(y) &= \sum_i^n \frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M \frac{s_\delta(r)}{r}(y_i - f_i(x))dx\partial_i\\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M \frac{s_\delta(r)}{r}\sum_i^n (y_i - f_i(x))\partial_i dx.\end{aligned}$$

Identificando os vetores $\sum_i^n y_i\partial_i$ e $\sum_i^n f_i(x)\partial_i$ como pré-imagem da $\exp_y$ temos que

$$\sum_i^n y_i\partial_i = \exp_y^{-1}(y) = 0$$

e

$$\sum_i^n f_i(x)\partial_i = \exp_y^{-1}(f(x)).$$

Portanto,

$$\operatorname{grad} P_f^\delta(y) = -\frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M \frac{s_\delta(r)}{r}\exp_y^{-1}(f(x))dx.$$

Agora, pela compacidade de B, temos que P_f^δ tem pelo menos um ponto mínimo em B.

Sendo

$$P_f^\delta(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M \int_0^{r(y,f(x))} s_\delta(t)dtdx,$$

seja

$$\mathcal{E}_{f(x)}(y) := \int_0^{r(y,f(x))} s_\delta(t)dt.$$

Então

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\mathcal{E}_{f(x)}(y) &= s_\delta(r(y,f(x))).\operatorname{grad} r(y,f(x))\\ &= -\frac{s_\delta(r(y,f(x)))}{r(y,f(x))}\exp_y^{-1}(f(x)).\end{aligned}$$

Agora, para $X, Y \in \mathcal{X}(\bar{M})$ temos pela equação **(2.5)** e por **(iii)** da definição de conexão que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\mathcal{E}_{f(x)}(X,Y) &= \langle \nabla_X \mathrm{grad}\, \mathcal{E}_{f(x)}, Y\rangle \\
&= \langle \nabla_X s_\delta(r) \mathrm{grad}\, r, Y\rangle \\
&= \langle s_\delta(r) \nabla_X \mathrm{grad}\, r + X(s_\delta(r)) \mathrm{grad}\, r, Y\rangle \\
&= s_\delta(r) \langle \nabla_X \mathrm{grad}\, r, Y\rangle + X(s_\delta(r)) \langle \mathrm{grad}\, r, Y\rangle \\
&= s_\delta(r) \mathrm{Hess} r + \langle \mathrm{grad}\, s_\delta(r), X\rangle \langle \mathrm{grad}\, r, Y\rangle \\
&= s_\delta(r) \mathrm{Hess} r + s'_\delta(r) \langle \mathrm{grad}\, r, X\rangle \langle \mathrm{grad}\, r, Y\rangle \\
&\geq s_\delta(r) \frac{s'_\delta(r)}{s_\delta(r)} (\langle X, Y\rangle - \langle \mathrm{grad}\, r, X\rangle \langle \mathrm{grad}\, r, Y\rangle) + s'_\delta(r) \langle \mathrm{grad}\, r, X\rangle \langle \mathrm{grad}\, r, Y\rangle \\
&= s'_\delta(r) \langle X, Y\rangle,
\end{aligned}$$

onde a desigualdade é devida ao teorema de comparação do hessiano, **Teorema 2.6**, e a equação **(2.17)**.

Agora sejam γ uma geodésica normalizada em B e $\phi(t) = \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t))$, então

$$\phi'(t) = \langle \mathrm{grad}\, \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

e por **(1.2)**

$$\phi''(t) = \left\langle \frac{D}{dt} \mathrm{grad}\, \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t)), \gamma'(t) \right\rangle,$$

mas pelo item **(iii)** da **Proposição 1.1**

$$\begin{aligned}
\phi''(t) &= \langle \nabla_{\gamma'(t)} \mathrm{grad}\, \mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \\
&= \mathrm{Hess}\mathcal{E}_{f(x)}(\gamma(t))(\gamma'(t), \gamma'(t)) \\
&\geq s'_\delta(r) \langle \gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = c_\delta > 0,
\end{aligned}$$

portanto $\mathcal{E}_{f(x)}$ é estritamente convexa em B, consequentemente P_f^δ também é, pois se γ é uma geodésica normalizada em B, então $\psi(t) = P_f^\delta(\gamma(t))$ é tal que

$$\psi''(t) = \frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M \phi''(t) dx \geq 0.$$

Agora seja $\bar{y}$ o ponto mínimo de P_f^δ em B, observamos inicialmente que $\bar{y} \notin \partial B$, pois na ∂B o campo

$$\mathrm{grad}\, P_f^\delta(y) = -\frac{1}{\mathrm{vol} M} \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \exp_y^{-1}(f(x)) dx$$

aponta para dentro de B (observe que $\frac{s_\delta(r)}{r}$ é sempre positivo em B) e portanto o grad P_f^δ não se anula na ∂B, logo $\bar{y}$ está no interior de B. Para a unicidade, como $\psi''(t) > 0$ isso significa que $\psi'(t)$ é estritamente crescente, e portanto $\psi'(t)$ anula-se em um único ponto para o qual temos $\bar{y}$ como ponto mínimo de P_f^δ. ∎

O ponto mínimo dado pela **Proposição 3.9** é chamado de centro de massa de M em $\bar{M}$.

Lema 3.3 $\int_M \frac{c_\delta(r)-c}{\sqrt{\delta}} = \int_M \frac{s_\delta(r)}{r} \cdot x_i = 0.$

Demonstração. Sendo $c = \frac{1}{\mathrm{vol} M}\int_M c_\delta(r)$ constante, temos

$$\begin{aligned}\int_M (c_\delta(r) - c) &= \int_M c_\delta(r) - c.\,\mathrm{vol} M\\ &= \int_M c_\delta(r) - \frac{1}{\mathrm{vol} M}\int_M c_\delta(r).\,\mathrm{vol} M = 0.\end{aligned}$$

Para a segunda integral, temos pela **Proposição 3.9** que P_f^δ tem um único ponto mínimo $\bar{y}$ no interior de B e pela **Proposição 2.1** $\operatorname{grad} P_f^\delta(\bar{y}) = 0$. Assim tomando um sistema de coordenadas normais $(y_1, \ldots, y_n) = \exp_{\bar{y}}^{-1}(y)$ em $\bar{y}$, obtemos

$$\begin{aligned}0 = \operatorname{grad} P_f^\delta(\bar{y}) &= -\frac{1}{\mathrm{vol} M}\int_M \frac{s_\delta(r)}{r}\exp_{\bar{y}}^{-1}(f(x))dx\\ &= -\frac{1}{\mathrm{vol} M}\int_M \frac{s_\delta(r)}{r}(f_1(x), \ldots, f_n(x))dx\end{aligned}$$

onde r é a distância de $f(x)$ a $\bar{y}$. Portanto

$$\int_M \frac{s_\delta(r)}{r} f_i(x)dx_i = 0.$$

Como $f_i(x)$ é identificado com x_i, temos

$$\int_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i dx_i = 0.$$

∎

O primeiro resultado que usaremos diretamente na demonstração dos **Teoremas 3.4** e **3.8** é o seguinte

Lema 3.4 **(i)** $\operatorname{div}_M X \geq n \cdot c_\delta$,

(ii) $\operatorname{div}_M X^T \geq n \cdot c_\delta + \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}}\right\rangle$.

Se $K_M \equiv \delta$*, então vale a igualdade em* **(i)** *e em* **(ii)**.

Demonstração.

(i) Seja $p \in M$ e $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ uma base ortonormal. Agora, observe que

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X = \mathrm{div}_M(s_\delta \,\mathrm{grad}\, r) &= s_\delta \mathrm{div}_M(\mathrm{grad}\, r) + \langle \mathrm{grad}\, s_\delta, \mathrm{grad}\, r\rangle \\ &= s_\delta \mathrm{div}_M(\mathrm{grad}\, r) + \langle s_\delta' \,\mathrm{grad}\, r, \mathrm{grad}\, r\rangle \\ &= s_\delta \mathrm{div}_M(\mathrm{grad}\, r) + c_\delta |\mathrm{grad}\, r|^2.\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M(\mathrm{grad}\, r) &= \sum_{i=1}^n \langle \bar{\nabla}_{e_i} \mathrm{grad}\, r, e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Hess} r(e_i, e_i) \geq \mathrm{Hess} r_\delta(\bar{e}_i, \bar{e}_i) && (3.15) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{c_\delta(r_\delta)}{s_\delta(r_\delta)} (\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i\rangle - \langle \mathrm{grad}\, r_\delta, \bar{e}_i\rangle \langle \mathrm{grad}\, r_\delta, \bar{e}_i\rangle) && (3.16) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{c_\delta(r_\delta)}{s_\delta(r_\delta)} (1 - \langle \mathrm{grad}\, r_\delta, \bar{e}_i\rangle^2) \\ &= (n - |\mathrm{grad}\, r_\delta|^2) \frac{c_\delta(r_\delta)}{s_\delta(r_\delta)},\end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é devida ao teorema de comparação do hessiano, **Teorema 2.6**, a igualdade **(3.16)** é devida ao **Teorema 2.7** e r_δ é a função distância r sobre a forma espacial de curvatura seccional δ. Portanto,

$$\mathrm{div}_M X \geq c_\delta(r_\delta)(n - |\mathrm{grad}\, r_\delta|^2) + c_\delta(r_\delta)|\mathrm{grad}\, r|^2 = nc_\delta. \tag{3.17}$$

(ii) Usando o **Lema 2.1**

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X^T &= \mathrm{div}_M X + \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle \\ &\geq n \cdot c_\delta + \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle.\end{aligned}$$

Se $K_M \equiv \delta$, então temos igualdade em **(3.15)**, pelo **Teorema 2.6** e, consequentemente vale a igualdade em **(3.17)** e em **(ii)**. ∎

As provas dos **Teoremas 3.4** e **3.8** são inspiradas na prova de Reilly (o caso $\bar{M} = \mathbb{R}^n$) que essencialmente consiste em usar as funções coordenadas de $\mathbb{R}^n$ como funções teste no quociente de Rayleigh e aplicar a fórmula de Minkowski. De fato, pelo teorema de Rayleigh, **Teorema 3.1**

$$\lambda_1(M) \cdot \int_M f^2 \leq \int_M |\mathrm{grad}\, f|^2,$$

para toda função suficientemente suave f com $\int_M f = 0$. Assim se 0 é o centro de massa de $M \subset \mathbb{R}^n$ e x_i são as funções coordenadas, então

$$\lambda_1 \int_M |X|^2 = \lambda_1 \int_M \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq \int_M \sum_{i=1}^n |\mathrm{grad}_M x_i|^2 = n \cdot \mathrm{vol}M, \tag{3.18}$$

onde X é o campo de vetores posição. Sendo $\bar{M} = \mathbb{R}^n$ temos que $K_{\mathbb{R}^n} \equiv 0$, pelo **Lema 1.2**, e a equação **(3.12)** se torna $y'' = 0$ cuja solução satisfazendo as condições iniciais é $s_0 = t$, assim $c_0 = 1$. As desigualdades do **Lema 3.4** se tornam igualdades, isto é $\mathrm{div}_M X = nc_0 = n$ e

$$\mathrm{div}_M X = \mathrm{div}_M X^T - \left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, X \right\rangle$$

daí,

$$n\,\mathrm{vol}M = \int_M \mathrm{div}_M X = \int_M \mathrm{div}_M X^T - \int_M \left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, X \right\rangle,$$

pelo teorema da divergência, a primeira parcela do lado direito da segunda igualdade acima é nula, logo

$$\begin{aligned} n\,\mathrm{vol}M &= -\int_M \left\langle \overrightarrow{\mathrm{H}}, X \right\rangle \\ &\leq \int_M |\overrightarrow{\mathrm{H}}||X| \end{aligned} \tag{3.19}$$

a equação **(3.19)** é conhecida como fórmula de Mikowski, assim

$$\begin{aligned} (n\,\mathrm{vol}M)^2 &\leq \left(\int_M |\overrightarrow{\mathrm{H}}||X|\right)^2 \\ &\leq \int_M |\overrightarrow{\mathrm{H}}|^2 \int_M |X|^2 \\ &= n^2 \int_M H^2 \int_M |X|^2 \end{aligned}$$

multiplicando por λ_1 e usando **(3.18)** obtemos,

$$\begin{aligned} \lambda_1 (n\,\mathrm{vol}M)^2 &\leq n^2 \int_M H^2 \lambda_1 \int_M |X|^2 \\ &= n^3 \mathrm{vol}M \int_M H^2 \end{aligned}$$

simplificando obtemos,

$$\lambda_1 \leq \frac{n}{\mathrm{vol}M} \int_M H^2.$$

O próximo lema é uma generalização da fórmula de Minkowski (Note, que $c_\delta \equiv 1$ se $\delta = 0$). Segue integrando **(ii)** do **Lema 3.4** e pela a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Lema 3.5 *$\int_M c_\delta \leq -\frac{1}{n}\int_M \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle \leq \int_M H s_\delta$, se $K_M \equiv \delta$ a igualdade vale na primeira desigualdade.*

Demonstração. Como $X^T \perp \overrightarrow{\mathrm{H}}$, então pelo teorema da divergência e **(ii)** do **Lema 3.4** temos,

$$0 = \int_{\partial M} \left\langle X^T, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle = \int_M \operatorname{div}_M X^T \geq \int_M n c_\delta + \int_M \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle \tag{3.20}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \int_M c_\delta &\leqslant -\frac{1}{n}\int_M \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle \\ &\leqslant \left| -\frac{1}{n}\int_M \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle \right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_M |X||\overrightarrow{\mathrm{H}}| \\ &= \int_M H s_\delta. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Se $K_M \equiv \delta$, então vale a igualdade em **(ii)** do **Lema 3.4**, logo vale a igualdade em **(3.20)**, e consequentemente temos a igualdade em **(3.21)**. ■

Lema 3.6 *$\delta \int_M \left|X^T\right|^2 \geq n\int_M c_\delta^2 - n\int_M H s_\delta\, c_\delta$.*

Demonstração. Se $\delta = 0$ a desigualdade se reduz ao **Lema 3.5**, pois neste caso $c_\delta = 1$, consequentemente

$$\int_M 1 \leqslant \int_M H s_\delta,$$

que é o **Lema 3.5** para $\delta = 0$. Se $\delta \neq 0$, $X^T = \operatorname{grad}_M f$ onde $f = -\frac{1}{\delta}c_\delta$, então pela fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned} \delta \int_M |X^T|^2 = -\delta\int_M f\,\Delta f = \int_M -\delta f \operatorname{div}_M X^T &= \int_M c_\delta \operatorname{div}_M X^T \\ \geq n\int_M c_\delta^2 + \int_M c_\delta \left\langle X, \overrightarrow{\mathrm{H}} \right\rangle \\ \geq n\int_M c_\delta^2 - \int_M c_\delta\,|X|\,|\overrightarrow{\mathrm{H}}| \\ = n\int_M c_\delta^2 - n\int_M H s_\delta\, c_\delta, \end{aligned}$$

pelo **Lema 3.4** e a desigualdade de Cauchy-Schwarz. ■

Lema 3.7 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left|\operatorname{grad}_M \frac{s_\delta(r)}{r} x_i\right|^2 + \delta|X^T|^2 \leq n.$

Demonstração. Seja $v := d(\exp_{p_0})_q(\tilde{v}) \in T_p\bar{M}$ ortogonal ao $\operatorname{grad} r$, onde $\tilde{v} \in T_{p_0}\bar{M}$, $q = r\gamma'(0)$ com $\gamma = \exp_{p_0}$ uma geodésica normalizada. Pelo **Lema 1.4**, $v = J(r) = d(\exp_{p_0})_q(rJ'(0))$, onde $J'(0) = \dfrac{\tilde{v}}{|\tilde{v}|}$, é um campo de Jacobi ao longo da geodésica γ tal que $\langle J, \gamma'\rangle = 0$. Como $K_{\bar{M}} \leq \delta$, então na forma espacial de curvatura seccional δ o campo de Jacobi é dado por $J_\delta(r) = s_\delta(r)w(r)$ com $\langle \gamma_\delta'(r), w(r)\rangle = 0$ para todo r, e w é um campo paralelo e unitário conforme o **Exemplo 4**.

Agora observamos que, J e J_δ satisfazem as hipóteses do **Teorema 1.13 (Rauch)**: observando que J é linear, vem que $J(0) = 0$, por sua vez $J_\delta(0) = s_\delta(0)w(0) = 0$, lembre que $s_\delta(0) = 0$, assim $J(0) = J_\delta(0) = 0$ e $J_\delta'(0) = s_\delta'(0)w(0) = w(0)$, logo $0 = \langle J, \gamma'\rangle = \langle \gamma_\delta'(0), w(0)\rangle = \langle \gamma_\delta'(0), J_\delta'(0)\rangle$ pois $s_\delta'(0) = 1$, finalmente, sendo w unitário temos

$$1 = |w(0)| = |J_\delta'(0)| = |J'(0)|.$$

Portanto, pelo **Teorema 1.13**

$$|J_\delta(r)|^2 \leq |J(r)|^2,$$

por outro lado, $|J_\delta(r)|^2 = s_\delta^2(r)$ e usando o Lema de Gauss $|J(r)|^2 = \dfrac{r^2}{|\tilde{v}|^2}|\tilde{v}|^2 = \dfrac{r^2}{|\tilde{v}|^2}|v|^2$, logo

$$\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}|\tilde{v}|^2 \leq |v|^2. \tag{3.22}$$

Para o que segue, seja U o aberto de $\bar{M}$ no qual está definida

$$\begin{aligned} \exp_{p_0}^{-1} : U &\to T_{p_0}\bar{M} \\ u &\to (x_1(u), \ldots, x_n(u)). \end{aligned}$$

Seja π_i a projeção sobre a i-coordenada, então para $v = d(\exp_{p_0})_q(\tilde{v})$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \langle \operatorname{grad} x_i, v\rangle \langle \operatorname{grad} x_i, w\rangle &= \sum_{i=1}^{n} v(x_i)w(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} d(\exp_{p_0})_q(\tilde{v}(x_i))d(\exp_{p_0})_q(\tilde{w}(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}(x_i \circ \exp_{p_0})\tilde{w}(x_i \circ \exp_{p_0}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}(\pi_i \circ \exp_{p_0}^{-1} \circ \exp_{p_0})\tilde{w}(\pi_i \circ \exp_{p_0}^{-1} \circ \exp_{p_0}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi_i(\tilde{v})\pi_i(\tilde{w}) = \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Agora, se tomarmos $v = w$ temos

$$\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{n}\langle \operatorname{grad} x_i, v\rangle^2 = \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}|\tilde{v}|^2 \leq |v|^2, \tag{3.24}$$

observe que a desigualdade **(3.24)** vale se $v \perp \operatorname{grad} r$.

Por outro lado, sabemos que se $\gamma(t) = \exp_{p_0}(t\tilde{w})$, então

$$\gamma'(t) = d(\exp_{p_0})_{t\tilde{w}}(\tilde{w}) = \operatorname{grad} r(\gamma(t))$$

pelo **Teorema 2.3**. Tomando $w = \operatorname{grad} r$ com $v \perp \operatorname{grad} r$ e usando o Lema de Gauss em **(3.23)** temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle \operatorname{grad} x_i, v\rangle \langle \operatorname{grad} x_i, \operatorname{grad} r\rangle &= \langle \tilde{v}, \tilde{w}\rangle \\ &= \langle d(\exp_{p_0})_{t\tilde{w}}(\tilde{v}), d(\exp_{p_0})_{t\tilde{w}}(\tilde{w})\rangle \\ &= \langle v, \operatorname{grad} r\rangle = 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \operatorname{grad} x_i, v\rangle \langle \operatorname{grad} x_i, \operatorname{grad} r\rangle = 0. \tag{3.25}$$

Em particular tomando $v = w = \operatorname{grad} r$ em **(3.23)** temos

$$\sum_{i=1}^{n}\langle \operatorname{grad} x_i, \operatorname{grad} r\rangle^2 = \langle \tilde{w}, \tilde{w}\rangle = 1, \tag{3.26}$$

onde $d(\exp_{p_0})_q(\tilde{w}) = \operatorname{grad} r$.

Como $r(\exp_{p_0}(v)) = |v|$, então

$$r(u)^2 = \left|\exp_{p_0}^{-1}(u)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i(u)e_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

portanto,

$$\operatorname{grad} r^2 = \sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad} x_i^2 \Rightarrow 2r\operatorname{grad} r = \sum_{i=1}^{n} 2x_i\operatorname{grad} x_i$$

logo

$$r\operatorname{grad} r = \sum_{i=1}^{n} x_i\operatorname{grad} x_i. \tag{3.27}$$

Agora seja

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}x_i\right)\right|^2=\mathcal{I},$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{s_\delta(r)}{r}\mathrm{grad}_M x_i + x_i\,\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right)\right|^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + 2\frac{s_\delta(r)}{r}x_i\left\langle \mathrm{grad}_M x_i, \mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right\rangle + x_i^2\left|\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right|^2\right]\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + 2\frac{s_\delta(r)}{r}\left\langle \sum_{i=1}^{n}x_i\mathrm{grad}_M x_i, \mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right\rangle + r^2\left|\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right|^2
\end{aligned}$$

na segunda parcela da última igualdade, usando **(3.27)** obtemos,

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n}\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + 2s_\delta(r)\left\langle \mathrm{grad}_M\, r, \mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right\rangle + r^2\left|\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right|^2.$$

Mas

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right) &= \frac{r\mathrm{grad}_M s_\delta(r) - s_\delta(r)\mathrm{grad}_M\, r}{r^2}\\
&= \frac{rc_\delta(r)\mathrm{grad}_M r - s_\delta(r)\mathrm{grad}_M\, r}{r^2}\\
&= \frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r^2}\,\mathrm{grad}_M\, r
\end{aligned}$$

logo,

$$\left|\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right|^2 = \left(\frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r^2}\right)^2\left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2$$

e

$$\left\langle \mathrm{grad}_M\, r, \mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}\right)\right\rangle = \frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2.$$

Consequentemente

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{n}\frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + \frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r)}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 + \frac{(rc_\delta(r) - s_\delta(r))^2}{r^2}\left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2.$$

Como

$$\delta\left|X^T\right|^2 = \delta\left|s_\delta(r)\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 = \delta s_\delta^2(r)\left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2,$$

fazendo,

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{grad}_M\left(\frac{s_\delta(r)}{r}x_i\right)\right|^2 + \delta\left|X^T\right|^2 = \mathcal{J}$$

vem que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + \frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r)}{r^2} \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 + \left(\frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r}\right)^2 \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 + \\
&\quad + \delta s_\delta^2(r) \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + \left[\frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r)}{r^2} + \left(\frac{rc_\delta(r) - s_\delta(r)}{r}\right)^2 + \delta s_\delta^2(r)\right] \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + \\
&\quad + \left[\frac{2rs_\delta(r)c_\delta(r) - 2s_\delta^2(r) + r^2c_\delta^2(r) - 2rc_\delta(r)s_\delta(r) + s_\delta^2(r) + r^2\delta s_\delta^2(r)}{r^2}\right] \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2, \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + \left[\frac{r^2(c_\delta^2(r) + \delta s_\delta^2(r)) - s_\delta^2(r)}{r^2}\right] \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 \\
&= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \left|\mathrm{grad}_M x_i\right|^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right) \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2
\end{aligned}
$$

logo,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \mathrm{grad}\, x_i, e_j\rangle^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right) \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2 \\
&\leq n - 1 + \frac{s_\delta^2(r)}{r^2} \sum_{i=1}^{n} (\langle \mathrm{grad}\, x_i, \lambda \mathrm{grad}\, r\rangle + \langle \mathrm{grad}\, x_i, \mu e_n^*\rangle)^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right) \left|\mathrm{grad}_M\, r\right|^2
\end{aligned}
$$

onde $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ é uma base ortonormal tal que $e_n = \lambda \mathrm{grad}\, r + \mu e_n^*$ está na direção do $\mathrm{grad}_M\, r$ com $\langle \mathrm{grad}\, r, e_n^* \rangle = 0$, consequentemente $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ e $\langle e_n, \mathrm{grad}\, r\rangle = \lambda$, e a primeira parcela da desigualdade acima é devida a **(3.24)**, pois como $e_i \perp e_n$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ e e_n está na direção de $\mathrm{grad}_M\, r$ segue que $e_i \perp \mathrm{grad}\, r$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Como

$$
e_n = \frac{\mathrm{grad}_M\, r}{|\mathrm{grad}_M\, r|}
$$

temos

$$
\langle \mathrm{grad}_M\, r, \mathrm{grad}\, r\rangle = \lambda |\mathrm{grad}_M\, r|
$$

mas

$$
\langle \mathrm{grad}_M\, r, \mathrm{grad}\, r\rangle = \langle \mathrm{grad}_M\, r, \mathrm{grad}_M\, r + (\mathrm{grad}\, r)^\perp\rangle = |\mathrm{grad}_M\, r|^2
$$

assim

$$|\mathrm{grad}_M\, r| = \lambda \Rightarrow |\mathrm{grad}_M\, r|^2 = \lambda^2.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{J} &\leq n - 1 + \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{n}(\langle \mathrm{grad}\, x_i, \lambda \mathrm{grad}\, r\rangle + \langle \mathrm{grad}\, x_i, \mu e_n^*\rangle)^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right)\lambda^2 \\ &= n - 1 + \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\sum_{i=1}^{n}[\lambda^2\langle \mathrm{grad}\, x_i, \mathrm{grad}\, r\rangle^2 + 2\lambda\mu\langle \mathrm{grad}\, x_i, \mathrm{grad}\, r\rangle\langle \mathrm{grad}\, x_i, e_n^*\rangle + \\ &\quad + \mu^2\langle \mathrm{grad}\, x_i, e_n^*\rangle^2] + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right)\lambda^2\end{aligned}$$

como e_n^* é ortogonal ao $\mathrm{grad}\, r$, então por **(3.25)**

$$\langle \mathrm{grad}\, x_i, \mathrm{grad}\, r\rangle\langle \mathrm{grad}\, x_i, e_n^*\rangle = 0$$

e usando **(3.26)** na primeira parcela do somatório obtemos $\lambda^2 \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}$; usando **(3.24)**, a última parcela do somatório é menor ou igual a μ^2. Portanto,

$$\mathcal{J} \leq n - 1 + \lambda^2\frac{s_\delta^2(r)}{r^2} + \mu^2 + \left(1 - \frac{s_\delta^2(r)}{r^2}\right)\lambda^2 = n.$$

■

Lema 3.8 *Se $\delta \leq 0$, então*

$$\int_M s_\delta \int_M s_\delta\, c_\delta \leq \int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta.$$

Demonstração. Primeiro observamos que de $c_\delta^2 = 1 - \delta s_\delta^2$, temos que

$$\begin{aligned}\int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta^2 &= \int_M s_\delta^2 \int_M (1 - \delta s_\delta^2) \\ &= \mathrm{vol} M \int_M s_\delta^2 - \delta\left(\int_M s_\delta^2\right)^2,\end{aligned} \tag{3.28}$$

e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\int_M s_\delta \leqslant \left(\int_M 1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_M s_\delta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

logo

$$\left(\int_M s_\delta\right)^2 \leqslant \mathrm{vol} M \int_M s_\delta^2. \tag{3.29}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\left(\int_M s_\delta \int_M s_\delta c_\delta\right)^2 &= \left(\int_M s_\delta\right)^2 \left(\int_M s_\delta c_\delta\right)^2 \\
&\leqslant \left(\int_M s_\delta\right)^2 \left(\int_M |s_\delta c_\delta|\right)^2 \\
&\leq \left(\int_M s_\delta\right)^2 \int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta^2 \\
&= \mathrm{vol} M \left(\int_M s_\delta\right)^2 \int_M s_\delta^2 - \delta \left(\int_M s_\delta\right)^2 \left(\int_M s_\delta^2\right)^2 \\
&\leq \left(\int_M s_\delta^2\right)^2 \left((\mathrm{vol} M)^2 - \delta \left(\int_M s_\delta\right)^2\right) \leq \left(\int_M s_\delta^2 \int_M c_\delta\right)^2.
\end{aligned}$$

Observe que na segunda igualdade usamos **(3.28)** e na terceira desigualdade usamos **(3.29)**, enquanto a última desigualdade é uma consequência de $\left|\int_M f\right| \leq \int_M |f|$, onde $f : M \to \mathbb{R}^2$ é dada por $f(p) = (1, \sqrt{|\delta|} s_\delta(r))$. De fato,

$$\begin{aligned}
\left|\int_M (1, \sqrt{|\delta|} s_\delta(r))\right| &= \left|(\mathrm{vol} M, \sqrt{|\delta|} \int_M s_\delta(r))\right| \\
&= \sqrt{(\mathrm{vol} M)^2 + |\delta| \left(\int_M s_\delta(r)\right)^2} \\
&= \sqrt{(\mathrm{vol} M)^2 - \delta \left(\int_M s_\delta(r)\right)^2} \\
&\leqslant \int_M \sqrt{1 + |\delta|\, s_\delta^2(r)} \\
&= \int_M \sqrt{1 - \delta s_\delta^2(r)} = \int_M c_\delta(r)
\end{aligned}$$

logo,

$$(\mathrm{vol} M)^2 - \delta \left(\int_M s_\delta(r)\right)^2 \leqslant \left(\int_M c_\delta(r)\right)^2.$$

■

Agora, depois dessa preparação iniciamos com as provas dos **Teoremas 3.4 e 3.8**:

Demonstração. Se $\delta = 0$, então $c_\delta = 1$ e o **Lema 3.7** se reduz a

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\mathrm{grad}_M \frac{s_\delta^2(r)}{r} x_i\right|^2 \leq n.$$

Usando **(3.13)** temos,

$$\lambda_1(M)\int_M s_\delta^2(r) \leq \int_M \sum_{i=1}^n \left|\mathrm{grad}_M \frac{s_\delta^2(r)}{r}x_i\right|^2$$
$$\leq \int_M n = n\,\mathrm{vol}M = n\int_M c_\delta$$

pelo **Lema 3.5**

$$\leq n\int_M Hs_\delta = \frac{n}{\mathrm{vol}M}\int_M c_\delta \int_M Hs_\delta$$
$$\leq \frac{n}{\mathrm{vol}M}\left(\int_M Hs_\delta\right)^2$$
$$\leq \frac{n}{\mathrm{vol}M}\int_M H^2\int_M s_\delta^2,$$

onde a última desigualdade é devida a Cauchy-Schwarz . Portanto,

$$\lambda_1(M) \leq \frac{n}{\mathrm{vol}M}\int_M H^2.$$

Se $\delta > 0$ usaremos $\frac{s_\delta(r)}{r}x_i$ e $\frac{c_\delta(r)-c}{\sqrt{\delta}}$, com $c := \frac{1}{\mathrm{vol}M}\int_M c_\delta(r)$, como funções teste. Então, usando que $|\mathrm{grad}_M c_\delta(r)|^2 = \delta^2|X^T|^2$, **(3.13)** e **(3.14)**, temos

$$\lambda_1(M)\int_M\left(s_\delta^2(r) + \frac{(c_\delta(r)-c)^2}{\delta}\right) \leq \int_M \sum_{i=1}^n \left|\mathrm{grad}_M \frac{s_\delta(r)}{r}x_i\right|^2 + \int_M \frac{1}{\delta}|\mathrm{grad}_M c_\delta(r)|^2$$

pelo **Lema 3.7**

$$\leq \int_M (n-\delta|X^T|^2) + \int_M \delta|X^T|^2 = n\,\mathrm{vol}M.$$

Agora observe que

$$\int_M\left(s_\delta^2(r) + \frac{(c_\delta(r)-c)^2}{\delta}\right) = \int_M \frac{\delta s_\delta^2(r) + c_\delta^2(r) - 2c_\delta(r)c + c^2}{\delta}$$
$$= \int_M \frac{1-2c_\delta(r)c+c^2}{\delta}$$
$$= \int_M \frac{1+c^2}{\delta} - \frac{2c}{\delta}\int_M c_\delta(r)$$
$$= \frac{1+c^2}{\delta}\,\mathrm{vol}M - \frac{2c^2}{\delta}\,\mathrm{vol}M$$
$$= \frac{1-c^2}{\delta}\,\mathrm{vol}M.$$

Portanto,

$$\lambda_1(M)(1-c^2) \leq n\delta.$$

Agora

$$\begin{aligned}
(1-c^2)\left(1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2\right) &= 1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2 - c^2 - \frac{c^2}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2 \\
&= 1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2 - \frac{1}{(\mathrm{vol} M)^2}\left(\int_M c_\delta\right)^2 - \\
&\quad - \frac{1}{\delta(\mathrm{vol} M)^3}\left(\int_M c_\delta\right)^2\int_M H^2
\end{aligned}$$

pelo **Lema 3.5**

$$\begin{aligned}
&\geq 1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2 - \frac{1}{(\mathrm{vol} M)^2}\left(\int_M H s_\delta\right)^2 - \\
&\quad - \frac{1}{\delta(\mathrm{vol} M)^3}\left(\int_M c_\delta\right)^2\int_M H^2 \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}
(1-c^2)\left(1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2\right) &\geq 1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2 - \frac{1}{(\mathrm{vol} M)^2}\int_M H^2\int_M s_\delta^2 - \\
&\quad - \frac{1}{\delta(\mathrm{vol} M)^2}\int_M c_\delta^2\int_M H^2, \qquad (3.31)
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
(1-c^2)\left(1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2\right) &\geq 1+\int_M H^2\left(\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M} - \frac{1}{(\mathrm{vol} M)^2}\int_M s_\delta^2 - \frac{1}{\delta(\mathrm{vol} M)^2}\int_M c_\delta^2\right) \\
&= 1+\int_M H^2\left(\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M} - \frac{1}{\delta(\mathrm{vol} M)^2}\int_M (\delta s_\delta^2 + c_\delta^2)\right) \\
&= 1+\int_M H^2\left(\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M} - \frac{1}{\delta(\mathrm{vol} M)^2}\mathrm{vol} M)\right) = 1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_1(M) \leq n\delta\left(1+\frac{1}{\delta \mathrm{vol} M}\int_M H^2\right) = n\delta + \frac{n}{\mathrm{vol} M}\int_M H^2.$$

Se vale a igualdade, então na demonstração acima todas as desigualdades se tornam igualdades, em particular, a igualdade em **(3.30)** implica igualdade no **Lema 3.5** e por Cauchy-Schwarz temos que $X = s_\delta \mathrm{grad}\, r$ é múltiplo de $\overrightarrow{\mathrm{H}}$, o vetor curvatura média de M em $\bar{M}$, isso implica que $\mathrm{grad}_M\, r = 0$.

Agora seja $f : M \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{2}r(x)^2$, então para $Y \in \mathcal{X}(M)$ temos

$$\begin{aligned} Yf &= Y\left(\frac{1}{2}r^2\right) \\ &= \frac{1}{2}.\,2.\,r.\,Y(r) \end{aligned}$$

equivalentemente

$$\langle \operatorname{grad}_M f, Y\rangle = r\langle \operatorname{grad}_M r, Y\rangle$$

assim

$$\operatorname{grad}_M f = r\operatorname{grad}_M r = 0$$

logo, f é constante em M, e isso significa que M está contida em uma esfera. Agora, seja $\mathbb{S}$ a esfera de $\bar{M}$ tal que $M \subset \mathbb{S}$. Sejam α a segunda forma fundamental de M em $\bar{M}$, $\alpha_{\mathbb{S}}$ a segunda forma fundamental de M em $\mathbb{S}$ e $\bar{\alpha}$ a segunda forma fundamental de $\mathbb{S}$ em $\bar{M}$. Analogamente como feito para obter **(3.11)** obtemos que

$$\alpha = \alpha_{\mathbb{S}} + \bar{\alpha}$$

e observe que $\alpha_{\mathbb{S}} \in T\mathbb{S}$ e $\bar{\alpha} \in T\mathbb{S}^{\perp}$, consequentemente, se $e_1, \ldots, e_n \in T_pM$ é uma base ortonormal, então

$$\eta = \overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathbb{S}} + \overrightarrow{\mathrm{H}}, \tag{3.32}$$

onde $\overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathbb{S}}$ é o vetor curvatura média de M em $\mathbb{S}$ e $\overrightarrow{\mathrm{H}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}(e_i, e_i)$, e é claro que $\overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathbb{S}} \in T\mathbb{S}$ e $\overrightarrow{\mathrm{H}} \in T\mathbb{S}^{\perp}$. No entanto, sendo $\overrightarrow{\mathrm{H}}$ múltiplo de $X = s_\delta(r)\operatorname{grad} r$ que é ortogonal a $T\mathbb{S}$ segue que $\eta \equiv 0$ e, portanto M é mínima em $\mathbb{S}$.

Agora se $\delta < 0$, observamos primeiro que de $c_\delta^2 + \delta s_\delta^2 = 1$, obtemos

$$\delta \int_M s_\delta^2 = \mathrm{vol}M - \int_M c_\delta^2.$$

Novamente, usando **(3.13)** temos

$$\lambda_1(M)\int_M s_\delta^2(r) \le \int_M \sum_{i=1}^{n}\left|\operatorname{grad}_M \frac{s_\delta^2(r)}{r}x_i\right|^2$$

pelo **Lema 3.7**

$$\le \int_M (n - \delta|X^T|^2) = n\,\mathrm{vol}M - \delta\int_M |X^T|^2$$

pelo **Lema 3.6**

$$
\begin{aligned}
&\leq n\,\mathrm{vol}M - n\int_M c_\delta^2 + n\int_M H s_\delta c_\delta \\
&= n\left(\mathrm{vol}M - \int_M c_\delta^2\right) + n\int_M H s_\delta c_\delta \\
&= n\delta\int_M s_\delta^2 + n\int_M H s_\delta c_\delta \\
&\leq n\delta\int_M s_\delta^2 + n\max H\int_M s_\delta c_\delta
\end{aligned}
$$

pelo **Lema 3.8**

$$
\leq n\delta\int_M s_\delta^2 + n\max H\int_M s_\delta^2 \times \frac{\int_M c_\delta}{\int_M s_\delta}
$$

pelo **Lema 3.5**

$$
\begin{aligned}
&\leq n\delta\int_M s_\delta^2 + n\max H\int_M s_\delta^2 \times \frac{\int_M H s_\delta}{\int_M s_\delta} \\
&\leq n\delta\int_M s_\delta^2 + n(\max H)^2\int_M s_\delta^2 \\
&= n\delta\int_M s_\delta^2 + n\max H^2\int_M s_\delta^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\lambda_1(M) \leq n\delta + n\max H^2,
$$

e assim fica provado o resultado.

■

Referências Bibliográficas

[1] Bleecker, D., Weiner, L.: Extrinsic bounds on λ_1 of Δ on a compact manifold. Comment. Math. Helv. 51, 601-609. 1976

[2] Bredon, G. Graduate Texts in Mathematics, Topology and Geometry. New York: Springer-Verlag, vol 139. 1993.

[3] Chow, B; Lu, P; Ni, L. Hamilton's Ricci Flow. Beijing: Science Press, vol 77. 2006.

[4] Chavel, I. Eigenvalues in Riemannian Geometry. New York, Academic Press, 1984.

[5] do Carmo, M.P., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 4ª edição, 2008.

[6] Escobar, J. F., Topics in PDE's and Differential Geometry, XII Escola de Geometria Diferencial, Goiânia, Ed.da UFG, 2002.

[7] Heintze, E. Extinsic Upper Bounds for λ_1, in: Periodical issue/ Mathematics Annalen, 14, 389-402, 1988.

[8] Nash, J. The imbedding problem for Riemannian manifolds, Ann. of Math., 63, 20-63, 1956.

[9] Lee, J.Graduate Texts in Mathematics, Introduction to Smooth Manifolds. Seatle, Springer, v. 218. 2000.

[10] Massey, Willian S. Algebraic Topology: An Introcuction, Graduate texts in Mathematics 56, New York, Springer-Verlag, 1977.

[11] Mishchenko, A. Fomenko, A. A Course of Differential Geometry and Topology, Mir Publishers Moscow, 1988.

[12] Yang, P.,Yau, S.T. Eigenvalues of the Lapalacian of Compact Riemann Surfaces and Minimal Submanifolds. Ann. Scuola Norm. Pisa 7, 55-63, 1980.