Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Um estudo qualitativo sobre o Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger Crítica

Márcio Cavalcante de Melo

Maceió, Brasil
Março de 2012

Márcio Cavalcante de Melo

Um estudo qualitativo sobre o Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger Crítica

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 05 de Março de 2012 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Maceió, Brasil
Março de 2012

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Fabiana Camargo dos Santos

M528e Melo, Márcio Cavalcante de.
Um estudo qualitativo sobre o problema de Cauchy para a equação não linear de Schrödinger crítica /Márcio Cavalcante de Melo – 2012.
65 f. : il., graf.

Orientador: Adán José Concho Fernández.
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2012.

Bibliografia: f. 65.

1. Sobolev, Espaços de. 2. Schrödinger, Equação não-linear de. 3. Singularidade. 4. Comportamento assintótico. I. Título.

CDU: 517.955

Um estudo qualitativo sobre o Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger Crítica

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 05 de Março de 2012 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández
(Orientador)

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra
(UFAL)

Prof. Dr. Fabio Matheus Amorin Natali
(UEM)

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço a Deus, por ter ofertado coisas maravilhosas para minha vida; aos meus pais por terem me dado carinho, conforto, educação e motivação durante toda a minha vida. Também agradeço aos meus irmãos Marcos e Géssyca por todo o apoio dado.

Agradeço à minha namorada Jisleyane Rodrigues, por estar ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço ao meu orientador Doutor Adán José Corcho Fernández, exemplo de profissional ético, por sua excelente orientação e paciência em vários momentos.

Também enfatizo minha gratidão aos amigos que ganhei e obtive um excelente convívio no decorrer do curso de Mestrado em Matemática: Carlos, Lucian, Davi, Rafael, Karla, Isnaldo, Adalgisa, Alan, Wágner, Abraão, Marcos, Felipe, Diogo, Ivan, Nicholas, Kenerson, Rodrigo, Fábio, Ádina, Adriano, Ítalo, Gleydson, Edileno.

Agradeço aos professores Doutores do Instituto de Matemática Krerley Irraciel Martins de Oliveira, Antônio Carlos, Marcos Petrúcio, Márcio Batista, José Carlos, André Flores, Dimas Martinez, Adelaílson Peixoto, Feliciano Vitório pela contribuição e apoio dados em minha formação.

Agradeço aos professores Doutores Ediel Azevedo e Fábio Natali, por aceitarem o convite de participar da banca examinadora do presente trabalho, por suas correções e sugestões que muito contribuíram para o desenvolvimento do trabalho.

Também agradeço à Capes pelo auxílio financeiro.

A todos estes eu agradeço por tudo.

RESUMO

Neste trabalho fazemos um estudo da *boa colocação local* em espaços de Sobolev com pesos para o Problema de Valor Inicial (PVI) associado à equação não-linear de Schrödinger. Também fazemos um estudo da *boa colocação global* para o mesmo problema. Em nossa abordagem, dedicamos atenção especial ao caso de soluções no espaço de energia $H^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(|x|^2dx)$ específicos para $1+\frac{4}{n}\leq \alpha < \frac{n+2}{n-2}$, $n\geq 3$, pois neste caso para dados iniciais com tamanho controlado, temos que as soluções locais podem ser estendidas à todo tempo. Além disso, no caso de potência $\alpha = 1+\frac{4}{n}$, que é conhecida como potência L^2 crítica, mostramos a existência de singularidades.

Palavras-chave: Espaços de Sobolev com pesos. Equação não-linear de Schrödinger. Singularidades.

ABSTRACT

In this work we study *local well-posedness* in weighted Sobolev spaces about the Initial Value Problem (IVP) associated with the nonlinear Schrödinger equation. We too study *global well-posedness* results about the same problem. We dedicate special attention to the case when the initial data belong to the energy space $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(|x|^2 dx)$ and $1 + \frac{4}{n} \leq \alpha < \frac{n+2}{n-2}$, $(n \geq 3)$. In this situation, for small data in H^1, the local solutions obtained can be extended globally in time. Moreover, in the case of power $\alpha = 1 + \frac{4}{n}$ we show the formation of singularities.

Keywords: Weighted Sobolev spaces. Nonlinear Schrödinger equation. Singularities.

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

1.1 Os Modelos do Micro mundo e a Equação de Schrödinger

No início do século XX, a análise de alguns resultados experimentais deixou em evidência que as leis clássicas não tinham um caráter universal, no sentido de que não conseguiam explicar certos fenômenos, particularmente aqueles que tinham como origem ou objeto o micro mundo (elétrons, prótons, nêutrons, ...). Graças à intervenção dos mais eminentes cientistas do século passado, contamos com uma teoria capaz de interpretar de modo coerente os fenômenos inerentes às micropartículas, chamada de *mecânica quântica*.

Segundo Gondar e Cipolatti [5] um dos postulados que constroem a Mecânica Quântica é o seguinte: O estado de uma micropartícula de massa m (constante) vem determinado através de uma função $\psi(x,t)$, $t \geq 0$, $x = (x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{R}^3$, que deve satisfazer a seguinte equação, denominada a equação de Schrödinger:

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) + \frac{h^2}{2m}\Delta\psi(t,x) = U(t,x),$$

onde i é a unidade imaginária, h é uma constante universal (denominada constante de Dirac) e $U(t,x)$ é uma função real (denominada função de força), sendo $F(t,x) = \nabla U(t,x)$ a força que atua sobre a micropartícula. A função ψ, que por razões históricas é denominada função de onda é, em geral, uma função complexa, tal que $|\psi(t,x)|^2$ é proporcional à densidade de probabilidade de encontrar a micropartícula numa vizinhança do ponto $x \in \mathbb{R}^3$, no instante t.

Diferentemente do que acontece com outras equações da mecânica clássica, não é possível deduzir rigorosamente a equação de Schrödinger partindo de princípios físicos fundamentais; até porque a função de onda é um simples instrumento de cálculo, uma função auxiliar que não possui significado físico direto. Por isso, em geral, postula-se a validade da equação, sendo este um procedimento aceitável sempre que se produzam resultados que coincidam com a realidade. No entanto, do ponto de vista histórico Schrödinger inferiu sua equação estabelecendo algumas analogias que envolviam as leis da mecânica e da óptica. Apesar de não ter um real conhecimento do que esta equação realmente descrevia, ele conseguiu fixar vários resultados experimentais obtidos por outros autores, calculando os autovalores dos estados estacionários da sua equação.

1.2 A Equação NLS

Após a descoberta da equação de Schrödinger em 1926, muitas pesquisas, tanto de interesse físico como matemático, em torno desse importante modelo têm sido desenvolvidas por vários pesquisadores do mundo todo.

O objetivo do trabalho que desenvolvemos é estudar o comportamento ao longo do tempo da solução do PVI associado à equação não-linear de Schrödinger (NLS) definida por

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda |u|^{\alpha-1} u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \; x \in \mathbb{R}^n, \; t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{1}$$

com dados iniciais no espaço de energia $H_1^1(\mathbb{R}^n)$.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma: no primeiro capítulo apresentamos os resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho; no segundo capítulo vamos fazer um estudo sucinto do grupo livre de Scrödinger; no próximo capítulo iremos apresentar o Espaço de Sobolev com Pesos do tipo x^α onde α é um multiíndice com coordenadas inteiras e provaremos um problema de boa colocação local em $H_1^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(|x|^2 dx)$ para a equação não linear de Schrödinger baseado em [7]; no último capítulo, baseado em [9] iremos fazer um estudo ao longo do tempo das soluções da equação não linear de Schrödinger, apresentando sob quais condições que envolvem a dimensão n, a não linearidade α, o sinal de λ e a norma de u_0, garantem que as soluções locais se estendem para todo o tempo e veremos que quando estas condições não são satisfeitas podemos encontrar soluções do tipo blow-up.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo daremos alguns conceitos e resultados básicos de Análise que serão utilizados no decorrer do trabalho.

2.1 Espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definição 1. *Seja $1 \leq p \leq \infty$. Denotaremos por $L^p(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < \infty, & se\ 1 \leq p < \infty, \\ \\ inf\{r; |f(x)| \leq r,\ q.t.p\ x \in \mathbb{R}^n\} < \infty, & se\ p = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

O espaço $L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p \leq \infty$, munido com a norma dada por $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ é um espaço de Banach.

Proposição 1 (**Desigualdade de Hölder**)**.** *Considere $p, q \geq 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Então $fg \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} . \tag{3}$$

Demonstração. Ver [3]. □

Proposição 2. *Se $1 \leq p < q < r \leq \infty$, então $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^r(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$ e ainda vale*

$$\|u\|_q \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_r^{1-\theta}, \tag{4}$$

onde $\theta \in (0, 1)$ é definido por $\frac{1}{q} = \theta\frac{1}{p} + (1-\theta)\frac{1}{r}$.

Demonstração. Ver [3]. □

A desigualdade abaixo também é bastante clássica:

Teorema 1 (**Desigualdade de Gagliardo-Niremberg**)**.** *Se $f \in C_0^m(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\|\partial_x^\alpha f\|_p \leq c \sum_{|\beta|=m} \|\partial_x^\beta f\|_q^\theta \|f\|_r^{1-\theta}, \tag{5}$$

onde $|\alpha| = j,\ c = (j, m, p, q, r),\ \frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \theta(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}) + (1-\theta)\frac{1}{r},\ \theta \in [\frac{j}{m}, 1]$, com a seguinte exceção: se $m - j - \frac{n}{r}$ for um inteiro não negativo, então a desigualdade acima é válida para todo $\theta \in [\frac{j}{m}, 1)$.

A prova deste teorema é um pouco longa. A estratégia para a sua demostração é reduzi-la a alguns casos particulares e para tanto vamos provar as seguintes afirmações:

Afirmação 1. *Se (5) vale para $j = 1$, $m = 2$, então temos que (5) vale com $\theta = \frac{j}{m}$ para todo $0 \leq j < m < \infty$.*

Demonstração. A prova desta afirmação será feita usando o princípio de indução sobre m. Por hipótese temos que o resultado é válido para $m = 2$, isto é, vale o seguinte

$$\|\partial_{x_i} u\|_p \leq C \|\partial_{x_k x_l} u\|_r^{\frac{1}{2}} \|u\|_q^{\frac{1}{2}}, \tag{6}$$

onde $\frac{1}{p} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2q}$.

Agora suponha que tal resultado seja válido para certo m, ou seja, vale

$$\|\partial^{\alpha} u\|_p \leq \|\partial^{\beta} u\|_r^{\frac{j}{m}} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m}}, \tag{7}$$

onde $|\beta| = m$, $|\alpha| = j$, com $j < m$ e $\frac{1}{p} = \frac{j}{mr} + \left(1 - \frac{j}{m}\right)\frac{1}{q}$.

Agora mostraremos que o resultado é válido para $m+1$. Para este fim considere, dois sub-índices α_{m+1}, onde $|\alpha_{m+1}| = m+1$ e seja β_j um sub-índice tal que $|\beta_j| = j$, onde $j = m - k$ onde k pode assumir os valores $k = 2,\ 3,\ ...,\ m$, então aplicando a nossa hipótese de indução temos

$$\|\partial^{\beta_j} u\|_p \leq C \|\partial^{\alpha_m} u\|_r^{\frac{j}{m}} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m}},$$

onde α_m denota um sub-índice de ordem m e p, q e r satisfazem a seguinte relação

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m}\frac{1}{r} + \left(1 - \frac{j}{m}\right)\frac{1}{q}. \tag{8}$$

Como podemos escrever $\partial^{\alpha_m} = \partial^{\alpha_m - \beta_j} \partial^{\beta_j}$, temos

$$\|\partial^{\beta_j} u\|_p \leq C \|\partial^{\alpha_m - \beta_j} \partial^{\beta_j} u\|_r^{\frac{j}{m}} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m}}. \tag{9}$$

Agora utilizando mais uma vez a hipótese de indução para $j' = m - j$, $m' = m - j + 1$, temos que

$$\|\partial^{\alpha_m - \beta_j} \partial^{\beta} u\|_r \leq C \|\partial^{\alpha_{m+1}} u\|_{r'}^{\frac{m-j}{m-j+1}} \|\partial^{\beta} u\|_{q'}^{1-\frac{m-j}{m-j+1}}, \tag{10}$$

onde

$$\frac{1}{r} = \frac{m-j}{m-j+1}\frac{1}{r'} + \left[1 - \frac{m-j}{m-j+1}\right]\frac{1}{q'}, \tag{11}$$

observe que o denominador da fração $\frac{m-j}{m-j+1}$ não é nulo pois estamos assumindo que $j = m - k$ e $k > 1$.

Associando as equações (9) e (10) obtemos

$$\|\partial^{\beta_j} u\|_p \leq C \|\partial^{\alpha_{m+1}} u\|_{r'}^{\frac{j}{m}\frac{m-j}{m-j+1}} \|\partial^{\beta_j} u\|_{q'}^{\frac{j}{m}\left(1-\frac{m-j}{m-j+1}\right)} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m}}$$

podemos supor $\|\partial^{\beta_j} u\|_p \neq 0$, pois caso contrário a desigualdade seria obviamente válida.

Considere $q' = p$ para então obtermos

$$\|\partial^{\beta_j} u\|_p^{1-\frac{j}{m}\frac{m-j}{m-j+1}} \leq C\|\partial^{\alpha_{m+1}} u\|_{r'}^{\frac{j}{m}\frac{m-j}{m-j+1}} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m}}. \tag{12}$$

Observe que $1 - \frac{j}{m}\frac{m-j}{m-j+1} = \frac{(m-j)(m+1)}{(m-j+1)m}$ assim podemos escrever

$$\|\partial^{\beta_j} u\|_p^{\frac{(m-j)(m+1)}{(m-j+1)m}} \leq C\|\partial^{\alpha_{m+1}} u\|_{r'}^{\frac{j}{m}\frac{m-j}{m-j+1}} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m}}, \tag{13}$$

que por sua vez implica em

$$\|\partial^{\beta_j} u\|_p \leq C\|\partial^{\alpha_{m+1}} u\|_{r'}^{\frac{j}{m+1}} \|u\|_q^{1-\frac{j}{m+1}}. \tag{14}$$

A desigualdade em (14) é justamente a que queríamos para $m' = m+1$. Vamos agora verificar se a relação entre os números p, r' e q' correspondem à hipótese desejada. Por (8), (11) e utilizando o fato que $r' = q$ tem-se

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m}\left(\frac{m-j}{m-j+1}\frac{1}{r'} + \frac{1}{m-j+1}\frac{1}{p}\right) + \frac{m-j}{m}\frac{1}{q}.$$

isto é,

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{m+1}\frac{1}{r'} + \left(1 - \frac{j}{m+1}\right)\frac{1}{q},$$

Agora vamos provar o caso em que $k = 1$. Neste caso temos $j = m+1-k = m$. Sejam β_{m+1} e α_m sub-índices de ordem $m+1$ e m, respectivamente. Assim, aplicando a hipótese de nossa afirmação, temos que

$$\|\partial^{\alpha_m} u\|_p = \|\partial_{x_i}(\partial^{\alpha_{m-1}} u)\|_p \leq C\|\partial_{x_i x_j}(\partial^{\alpha_{m-1}})u\|_r^{\frac{1}{2}} \|\partial^{\alpha_{m-1}} u\|_q^{\frac{1}{2}}, \tag{15}$$

onde escolhemos os operadores de forma que $\partial_{x_i}(\partial^{\alpha_{m-1}}) = \partial^{\alpha_m}$ e $\partial_{x_i x_j}(\partial^{\alpha_{m-1}}) = \partial^{\beta_{m+1}}$ e ainda

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2r} + \frac{1}{2q}. \tag{16}$$

Invocando a hipótese de indução obtemos,

$$\|\partial^{\alpha_{m-1}} u\|_q \leq C\|\partial^{\alpha_m} u\|_{r'}^{\frac{j}{m}} \|u\|_{q'}^{1-\frac{j}{m}}, \tag{17}$$

onde

$$\frac{1}{q} = \frac{m-1}{mr'} + \left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\frac{1}{q'}. \tag{18}$$

Considerando $r' = p$, associando (15) com (17) e supondo $\|\partial^{\alpha_m} u\|_p \neq 0$, obtemos

$$\|\partial^{\alpha_m} u\|_p^{1-\frac{1}{2}\frac{m-1}{m}} \leq C\|\partial^{\beta_{m+1}} u\|_r^{\frac{1}{2}} \|u\|_{q'}^{\left(1-\frac{j}{m}\right)\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

A desigualdade (19) implica finalmente

$$\|\partial^{\alpha_m} u\|_p \leq C \|\partial^{\beta_{m+1}} u\|_r^{\frac{m}{m+1}} \|u\|_{q'}^{1-\frac{m}{m+1}}, \tag{20}$$

como queríamos mostrar. Além disso por (16) e (18) que

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{m+1}\frac{1}{r} + \left(1 - \frac{m}{m+1}\right)\frac{1}{q'}. \tag{21}$$

Pelo princípio de indução, provamos nossa afirmação. □

Afirmação 2. *Se (5) vale para $\theta = 1$, $j = 0$ e $m = 1$, se $n \neq r$, então temos que (5) é válido para $\theta = 1$, $0 \leq j < m < \infty$, quando $m - j - \frac{n}{r}$ não for um inteiro não negativo.*

Demonstração. Provemos esta afirmação novamente fazendo indução sobre m. Por hipótese vale

$$\|u\|_p \leq \|\partial_{x_i} u\|_r, \tag{22}$$

onde $n \neq r$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{n}. \tag{23}$$

Assuma que para certo m vale

$$\|\partial^{\alpha_j} u\|_p \leq \|\partial^{\beta_m} u\|_r, \tag{24}$$

para quaisquer multi-índices α_j de ordem j e β_m de ordem m onde $0 \leq j < m < +\infty$ desde que $m - j - \frac{n}{r}$ não seja um inteiro não negativo e

$$\frac{1}{p} = \frac{j-m}{n} + \frac{1}{r}. \tag{25}$$

Agora tome $\beta_m + 1$ de ordem $m+1$ e α de ordem j onde $j < m+1$, pela hipótese de indução temos

$$\|\partial^{\alpha_j} u\|_p \leq \|\partial^{\beta_m} u\|_r \tag{26}$$

onde $m - j - \frac{n}{r}$ não é um inteiro não negativo e

$$\frac{1}{p} = \frac{j-m}{n} + \frac{1}{r}. \tag{27}$$

Aplicando a hipótese de nossa afirmação obtemos

$$\|\partial^{\alpha_m} u\|_p \leq \|\partial^{\beta_{m+1}} u\|_{r'} \tag{28}$$

onde $n \neq r'$ e

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{n}. \tag{29}$$

Associando (26) com (28) encontramos

$$\|\partial^{\alpha_j} u\|_p \leq \|\partial^{\beta_{m+1}} u\|_{r'} \tag{30}$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{j-m-1}{n} + \frac{1}{r'}. \tag{31}$$

Assim pelo princípio de indução provamos a nossa afirmação.

□

Afirmação 3. *Se (5) vale para $\theta = 1$ e $\theta = \frac{j}{m}$, então pela Proposição 2 temos que (5) vale para todo $\theta \in [\frac{j}{m}, 1]$.*

Demonstração. Devido às afirmações acima, é suficiente mostrarmos os seguintes casos: $\theta = 1,\ j = 0,\ m = 1$ (quando $n \neq rk$) e $j = 1,\ m = 2,\ \theta = \frac{1}{2}$.

Passo 1. Nesta etapa vamos mostrar o caso em que $j = 1,\ m = 2\ \ \theta = \frac{1}{2}$, ou seja, vamos obter

$$\|\partial_{x_i} u\|_p \leq C\|\partial_{x_i x_j} u\|_r^{\frac{1}{2}} \|u\|_q^{\frac{1}{2}}, \tag{32}$$

onde

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q},\ 1 \leq 1,\ r \leq \infty. \tag{33}$$

Suponha inicialmente que $n = 1$. Neste caso queremos obter

$$\int |u'|^p dx \leq c^p \left(\int |u''|^r dx \right)^{\frac{p}{2r}} \left(\int |u|^q dx \right)^{\frac{p}{2q}}. \tag{34}$$

Seja J um intervalo de comprimento $|J|$ e $0 < \epsilon < 2^p |J|^p$, divida J em sub-intervalos de comprimento menor ou igual que $\epsilon^{\frac{1}{p}}$ e maior ou igual que $\frac{\epsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$. Para cada sub-intervalo (a, b), seja $\delta = \frac{b-a}{4}$ e sejam x_1 e x_2, pontos variando nos intervalos $(a, a+\delta)$ e $(a+3\delta, b)$, respectivamente. Pelo teorema do valor médio temos que

$$\frac{u(x_2) - u(x_1)}{x_2 - x_1} = u'(x_{12}),\ \text{para algum}\ x_{12} \in (x_1, x_2), \tag{35}$$

por outro lado o teorema fundamental do cálculo nos dá

$$u'(x) = u'(x_{12}) + \int_{x_{12}}^{x} u''(\xi) d\xi. \tag{36}$$

Utilizando (35) e (36) chega-se

$$|u'(x)| \leq \frac{|u(x_1)| + |u(x_2)|}{2\delta} + \int_a^b |u''(\xi)| d\xi. \tag{37}$$

O passo agora é integrar (37) com respeito à x_1 em $(a, a+\delta)$ de modo a obter

$$\delta|u'(x)| \leq \frac{1}{2\delta}\int_a^{a+\delta}|u(\xi)|d\xi + \frac{1}{2}|u(x_2)| + \delta\int_a^b |u''(\xi)|d\xi. \tag{38}$$

Integrando (38) com respeito à x_2 em $(a+3\delta, b)$ conseguimos

$$\delta^2|u'(x)| \leq \frac{1}{2}\int_a^{a+\delta}|u(\xi)|d\xi + \frac{1}{2}\int_{a+3\delta}^b|u(\xi)|d\xi + \delta^2\int_a^b |u''(\xi)|d\xi,$$

que implica em

$$|u'(x)| \leq \frac{c}{\delta^2}\int_a^b|u(\xi)|d\xi + \int_a^b|u''(\xi)|d\xi.$$

A desigualdade de Hölder nos fornece

$$|u'(x)| \leq \frac{c}{\delta^2}\delta^{1-\frac{1}{q}}\left(\int_a^b|u(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{1}{q}} + c\delta^{1-\frac{1}{r}}\left(\int_a^b|u''(\xi)|^r d\xi\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Tomando a potência p e utilizando o fato $\frac{2}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{q}$ tem-se

$$|u'(x)|^p \leq c^p\delta^{-p+\frac{p}{r}-2}\left(\int_a^b|u(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{p}{q}} + c^p\delta^{p-\frac{p}{r}}\left(\int_a^b|u''(\xi)|^r d\xi\right)^{\frac{p}{r}}. \tag{39}$$

Integrando (39) com respeito à x em (a,b) obtemos

$$\int_a^b|u'(x)|^p dx \leq c^p\delta^{-p+\frac{p}{r}-1}\left(\int_a^b|u(\xi)|^q d\xi\right)^{\frac{p}{q}} + c^p\delta^{p-\frac{p}{r}+1}\left(\int_a^b|u''(\xi)|^r d\xi\right)^{\frac{p}{r}}. \tag{40}$$

Se provarmos que para algum $L > 0$,

$$\int_0^L |u'|^p dx \leq c^p\left(\int_0^\infty|u''|^r dx\right)^{\frac{p}{2r}}\left(\int_0^\infty|u|^q dx\right)^{\frac{p}{2q}}, \tag{41}$$

então (34) segue.

Considere $k \geq 1$, um inteiro. Denote por I o intervalo $[0, \frac{L}{k}]$.

Se $c^p\delta^{-p+\frac{p}{r}-1}\left(\int_a^b|u(\xi)d\xi\right)^{\frac{p}{q}} < c^p\delta^{p-\frac{p}{r}+1}\left(\int_a^b|u''(\xi)|d\xi\right)^{\frac{p}{r}}$, defina $I_1 = I$. Caso contrário, aumentamos I até que os dois termos fiquem iguais. Neste caso, chamamos o correspondente intervalo de I_1 (deixando fixo o ponto extremo esquerdo). Note que I_1 existe, pois devemos assumir $u'' \neq 0$ em $(0,\infty)$.

Temos que

$$\int_{I_1}|u'(x)|^p dx \leq \begin{cases} 2c^p\left(\frac{L}{K}\right)^{1+p-\frac{p}{r}}\left(\int_0^L|u''|^r dx\right)^{\frac{p}{2r}} & \text{se } |I_1| = |I|, \\ 2c^p\left(\int_{I_1}|u''|^r dx\right)^{\frac{p}{2r}}\left(\int_a^b|u(\xi)d\xi\right)^{\frac{p}{2q}} & \text{se } |I_1| \neq |I|. \end{cases} \tag{42}$$

Se $|I_1| \geq L$, então (41) segue. Caso $I_1 \leq L$, então repetimos o passo acima para $I_2, I_3, ...$, onde o útimo I_i satisfaz $|I_1| + \cdots + |I_i| \geq L > |I_1| + \cdots + |I_{i-1}|$. Afirmamos que este processo ocorre no máximo k vezes, enquanto que a soma do segundo membro é análoga à segunda desigualdade em (42).

Portanto ao somarmos as desigualdades e fazermos $k \to \infty$, então (41) segue. Note que a constante c independe de p, q e r.

Se $n > 1$, então aplicamos (34) para cada derivada ∂_{x_i}, tratando todas as variáveis x_j, com $j \neq i$ como variáveis. Em seguida integramos a desigualdade com respeito às variáveis x_j, $(j \neq i)$ e utilizamos a desigualdade de Hölder.

Finalmente os casos $q = \infty$ e $r = 1, \ \infty$ são obtidos fazendo $q \to \infty$ e $r \to 1, \infty$ em (34).

Passo 2. Agora vamos considerar o caso em que $a = 1$, $j = 0$, $m = 1$. Vamos supor $r < n$, considere $r = 1$. Como u tem suporte compacto, para cada $i = 1, \ ..., n$ e $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \ ..., x_{i-1}, y_i \ , x_{i+1}, \ ..., x_n) dy_i.$$

Logo

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ ..., x_{i-1}, y_i \ , x_{i+1}, \ ..., x_n)| dy_i.$$

Consequentemente

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ ..., x_{i-1}, y_i \ , x_{i+1}, \ ..., x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando esta igualdade com respeito à x_1 e utilizando a desigualdade geral de Hölder:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \\
\leq \ & \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{x_i} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
= \ & \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{y_1} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{x_i} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
\leq \ & \left(\int_{-\infty}^{\infty} u_{y_1} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1. \qquad (43)
\end{aligned}$$

Agora integrando (43) com respeito à x_2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1; i \neq 2}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

para $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1$, $I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i$, $(i = 3, \ ..., n)$. Aplicando mais uma vez a desigualdade de Hölder estendida, encontramos

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\\
\leq\ &\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dy_1dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dx_2dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Eventualmente continuando integrando com respeito à $x_3,\ ...,\ x_n$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}dx &\leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1\ ...dy_i\ ...dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|dx\right)^{\frac{n}{n-1}}.
\end{aligned}$$

Esta é a estimativa para $r=1$.

Para obter o caso em que $1<r<n$ é só aplicar a estimativa acima para $v=|u|^{\gamma}$, onde $\gamma>1$ será selecionado. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla|u|^{\gamma}|dx\\
&= \gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|\nabla u|dx\\
&\leq \gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{(\gamma-1)\frac{r}{r-1}}dx\right)^{\frac{r-1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^r dx\right)^{\frac{1}{r}}. \qquad (44)
\end{aligned}$$

Vamos escolher λ tal que $\frac{\gamma n}{n-1}=(\gamma-1)\frac{r}{r-1}$, desta forma temos

$$\gamma=\frac{r(n-1)}{n-r}>1,$$

neste caso teremos $\frac{\gamma n}{n-1}=(\gamma-1)\frac{r}{r-1}=\frac{nr}{n-r}$. Portanto de (44) obtemos

$$\|u\|_{\frac{nr}{n-r}}\leq\|\nabla u\|_r, \qquad (45)$$

como queríamos. □

Observação: No *Passo 2* da demonstração acima só tratamos o caso em que $r<n$, pois este será o caso utilizado em nosso trabalho. Ressaltamos que se $r>n$, quando $a=1,\ j=0,\ m=1$, então $p<0$, assim como os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ só são definidos para $p\geq 1$ o resultado não faz sentido. Para contornar este problema o livro do Friedman define espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $p<0$ como sendo os espaços das funções Hölder Contínuas com um certo expoente que depende de p, onde neste espaço o resultado tratado é válido.

Para maiores informações ver [2].

Teorema 2 (Desigualdade de Heisenberg). *Se $f \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(|x|^2 dx)$, então*

$$\|f\|_2^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j f\|_2 \|\partial_{x_j} f\|_2. \tag{46}$$

Demonstração. Como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(|x|^2 dx)$, existe uma sequência de funções $\{\varphi_n\}$ em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{n \to +\infty} (\|\varphi_n - f\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|(\varphi_n - f)|x|\|_2) = 0.$$

Então integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_2^2 &= \int |\varphi_n|^2 dx \\ &= -\int x_j \partial_{x_j}(|\varphi_n|^2) dx, \ \forall j = 1, 2, ..., n. \end{aligned}$$

Assim somando as igualdades acima obtidas para cada n temos

$$\begin{aligned} n\|\varphi_n\|_2 &= -\sum_{j=1}^{n} \int x_j \partial_{x_j}(|\varphi_n|^2) dx \\ &= -2\sum_{j=1}^{n} \int |x_j \bar{(\varphi_n)}| \partial_{x_j} \varphi_n dx \\ &\leq 2\sum_{j=1}^{n} \|x_j \varphi_n\|_2 \|\partial_{x_j} \partial \varphi_n\|_2. \end{aligned}$$

Fazendo $n \to \infty$ e utilizando a continuidade da norma obtemos (46).

□

2.2 O Espaço de Schwartz

Denotaremos por $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Se $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n$, onde $\alpha = (\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1,\ ...,\ \beta_n)$ então $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ e $\partial^\beta f(x) = \partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_n}^{\beta_n} f(x)$.

Definição 2. *Uma função complexa f de classe C^∞ definida em $\mathbb{R}^n$ está no espaço de Schwartz se para todo par de multi-índices $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n$ existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ tal que*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = sup|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C_{\alpha,\beta} < \infty. \tag{47}$$

Note que se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ e $\lim_{|x| \to \infty} \partial^\beta f(x) = 0$ para todo $\beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Iremos denotar o conjunto de todas as funções de Schwartz em $\mathbb{R}^n$ por $S(\mathbb{R}^n)$. Fixado um par α e β temos que $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ definido acima define uma seminorma. A topologia em $S(\mathbb{R}^n)$ é dada pela família de seminormas $\rho_{\alpha,\beta}$, onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Definição 3. *Dizemos que uma sequência $\{\varphi_j\} \subset S(\mathbb{R}^n)$ converge para a função nula 0 se para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tem-se*

$$\rho_{\alpha,\beta}(\varphi_j) \to 0, \ \textit{quando } j \to \infty.$$

Vamos agora definir a transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$.

Definição 4. *A transformada de Fourier de uma função $f \in S(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\hat{f}$ é dada por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi\xi\cdot x} f(x)dx. \tag{48}$$

A próxima proposição resume as principais propriedades da transformada de Fourier no espaço de Schwartz.

Proposição 3. *Sejam f e g em $S(\mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{C}$, α um multi-índice e $t > 0$, então vale*

1. $\|\hat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$,
2. $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$,
3. $\widehat{bf} = b\hat{f}$,
4. $(\partial^\alpha f)\hat{} = (2\pi i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi)$,
5. $(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = ((-2\pi i x)^\alpha f)\hat{}$,
6. $\hat{f} \in S(\mathbb{R}^n)$,
7. $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$

Demonstração. Ver [6]. $\square$

O teorema abaixo nos apresenta mais uma propriedade.

Proposição 4. *O espaço de Schwartz é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com $p \in [1, +\infty)$.*

Demonstração. Ver [3]. $\square$

A proposição seguinte estende o operador transformada de Fourier para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 5. *A transformada de Fourier se estende unicamente para um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Além disso, se f e g pertencem à $L^2(\mathbb{R}^n)$, então tem-se:*

$$\int f\overline{g}dx = \int \hat{f}\overline{\hat{g}}d\xi. \tag{49}$$

Demonstração. Ver [6] □

2.3 Interpolação de Operadores

A partir de agora, vamos abordar alguns conceitos e resultados que servirão como plataforma para a prova do clássico Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz, que será utilizado para provar a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev.

Sejam X um conjunto, A uma σ álgebra em X e μ uma medida em A.

Definição 5. *Para uma função mensurável $f : X \to \mathbb{C}$ definimos sua função de distribuição como*

$$m(\lambda, f) = \mu(E_f^\lambda), \tag{50}$$

onde $E_f^\lambda = \{x \in X; |f(x)| > \lambda\}$

Observemos que fixado f temos que $m(\lambda, f)$ é uma função de $\lambda \in [0, \infty]$ que toma valores em $[0, \infty)$, além disso, esta função é não crescente e contínua à direita.

Proposição 6. *Para qualquer função mensurável $f : X \to \mathbb{C}$ e qualquer $\lambda \geq 0$ segue que*

1. *(Tchebychev)*
$$m(\lambda, f) \leq \lambda^{-p} \int_{E_f^\lambda} |f(x)|^p dx\mu(x) \leq \lambda^p \|f\|_p^p. \tag{51}$$

2. *Se $1 \leq p < +\infty$, então*
$$\|f\|_p^p = -\int_0^\infty \lambda^p dm(\lambda, f) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\lambda, f) d\lambda. \tag{52}$$

3. $$m(\lambda, f + g) \leq m\left(\frac{\lambda}{2}, f\right) + m\left(\frac{\lambda}{2}, g\right). \tag{53}$$

Demonstração. Vamos inicialmente obter (51). Pela definição de E_f^λ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{E_f^\lambda} |f(x)|^p dx &\geq \int_{E_f^\lambda} \lambda^p d\mu(x) \\ &= \lambda^p m(\lambda, f), \end{aligned}$$

ou seja,

$$m(\lambda, f) \leq \lambda^p \|f\|_p^p, \tag{54}$$

como queríamos mostrar. Pela definição de E_f^λ e pelo Teorema de Fubini tem-se

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\lambda, f) dx\lambda &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\mu(E_f^\lambda)d\lambda \\
&= p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\int_X \chi_{E_f^\lambda} d\mu(x) d\lambda \\
&= p\int_X\int_0^\infty \lambda^{p-1}\chi_{E_f^\lambda} d\lambda d\mu(x) \\
&= p\int_X\int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1} d\lambda d\mu(x) \\
&= \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \\
&= \|f\|_p.
\end{aligned}$$

A igualdade $-\int_0^\infty \lambda^p dm(\lambda, f) = p\int_0^\infty \lambda^{p-1} m(\lambda, f) dx\lambda$ é obtida através de uma integração por partes. Assim provamos (52).

Agora vamos provar o último item. Pela desigualdade triangular temos que $|f+g| \leq |f| + |g|$. Se X é tal que $|f(x)| < \frac{\lambda}{2}$ e $|g(x)| < \frac{\lambda}{2}$, então $|f(x) + g(x)| < \lambda$. Assim $(E_f^{\frac{\lambda}{2}})^c \cup (E_g^{\frac{\lambda}{2}})^c \subset (E_{f+g}^\lambda)^c$, implicando em $E_f^{\frac{\lambda}{2}} \cup E_g^{\frac{\lambda}{2}} \supset E_{f+g}^\lambda$. Portanto

$$\mu(E_{f+g}^\lambda) \leq \mu(E_f^{\frac{\lambda}{2}}) + \mu(E_g^{\frac{\lambda}{2}}), \tag{55}$$

como queríamos mostrar. □

Definição 6. *Para $1 \leq p < +\infty$ denote por $L^{p^*}(X, A, \mu)$ o espaço das funções mensuráveis $f : X \to$ tal que*

$$\|f\|_p^* = \sup_{\lambda > 0} \lambda (m(\lambda, f))^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{56}$$

Note que $L^{\infty^*} = L^\infty$.

Proposição 7. *Se $1 \leq p < \infty$, então*

1. *$L^p(\mathbb{R}^n)$ está continuamente imerso em $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.*

2. *$\|f+g\|_p^* \leq 2(\|f\|_p^* + \|g\|_p^*)$.*

Demonstração. Ver [9]. □

Definição 7. *Seja $M(X)$ o espaço das funções de valores complexos mensuráveis definidas em X. Um operador sublinear $T : L^p(X) \to M(X)$ com $1 \leq p < +\infty$ é dito do tipo fraco (p, q) se existe uma constante $c > 0$ tal que para toda $f \in L^p(X)$ termos*

$$\|Tf\|_q^* \leq c\|f\|_p. \tag{57}$$

Observe que pela desigualdade de Tchebychev segue que se T é do tipo (p,q), então esta é do tipo fraco (p,q).

Enfim vamos ao Teorema de Marcinkiewicz

Teorema 3 (Marcinkiewicz)**.** *Seja $1 < r < \infty$ e $T : L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n) \to M(\mathbb{R}^n)$ um operador sublinear. Se T é do tipo fraco $(1,1)$ e do tipo fraco (r,r), então T é do tipo forte (p,p) para qualquer $p \in (1,r)$.*

Demonstração. Vamos inicialmente obter o resultado para $r = \infty$. Trocando o operador T por $\|T\|^{-1}T$ podemos assumir que

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty. \tag{58}$$

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$, para cada $\lambda \in \mathbb{R}^+$ defina

$$f_1^\lambda = \begin{cases} f(x), \text{ se } |f(x)| \geq \frac{\lambda}{2} \\ 0, \text{se } |f(x)| < \frac{\lambda}{2} \end{cases} \tag{59}$$

e

$$f_2^\lambda = f(x) - f_1^\lambda(x). \tag{60}$$

Portanto como T é sublinear temos

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &\leq |T(f_1^\lambda(x) + f_2^\lambda(x))| \\ &\leq |T(f_1^\lambda(x))| + |T(f_2^\lambda(x))| \\ &\leq T(f_1^\lambda(x)) + \frac{\lambda}{2}, \end{aligned}$$

implicando em

$$\{x \in \mathbb{R}^n; |T(f(x)| > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n; |T(f_1^\lambda(x))| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Como T é do tipo fraco $(1,1)$ temos

$$\begin{aligned} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n; |T(f_1^\lambda(x))| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| &\leq c\frac{\lambda}{2}^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1^\lambda(x)| dx \\ &= 2c\lambda^{-1} \int_{|f|>\frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx, \end{aligned}$$

onde $|\cdot|$ denota a medida Lebesgue.

Agora combinando a parte 2 da Proposição 6 com o Teorema de Fubini

$$
\begin{aligned}
\int_{R^n} |Tf(x)|^p dx &= \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left|\left\{x \in \mathbb{R}^n; |T(f^\lambda(x))| > \lambda\right\}\right| dx \\
&\leq \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(c\lambda^{-1} \int_{|f|>\frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx \right) d\lambda \\
&= 2cp \int_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int_{|f|>\frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx \right) d\lambda \\
&= 2cp \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \lambda^{p-2} |f(x)| \chi_{E_f^{\frac{\lambda}{2}}} dx d\lambda \\
&= 2cp \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-2} d\lambda \right) |f(x)| dx \\
&= \frac{2cp}{p-1} 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-1} |f(x)| dx \\
&= \frac{2^p cp}{p-1} \|f\|_p^p,
\end{aligned}
$$

provando assim o caso $r = \infty$. No caso $r < \infty$ temos que

$$
\begin{aligned}
m(\lambda, Tf) &= |\{x \in \mathbb{R}^n; |Tf(x)| > \lambda\}| \\
&\leq m(\frac{\lambda}{2}, Tf_1^\lambda) + m(\frac{\lambda}{2}, Tf_2^\lambda) \\
&\leq c_1 \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1^\lambda(x)| dx + c_r^r \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{-r} \int_{\mathbb{R}^n} |f_2^\lambda(x)|^r dx \\
&= 2c_1 \lambda^{-1} \int_{|f| \geq \frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx + 2c_r^r (\lambda)^{-r} \int_{|f| \leq \frac{\lambda}{2}} |f(x)|^r dx.
\end{aligned}
$$

Como na prova do caso $r = \infty$ temos

$$
\int_0^\infty \lambda^{p-2} \left(\int_{|f| \geq \frac{\lambda}{2}} |f(x)| dx \right) d\lambda = \frac{2^{p-1}}{p-1} \|f\|_p^p.
$$

Um argumento similar prova que

$$
\int_0^\infty \lambda^{p-1-r} \left(\int_{|f| < \frac{\lambda}{2}} |f(x)|^r dx \right) d\lambda = \frac{2^{p-r}}{r-p} \|f\|_p^p.
$$

Combinando estas igualdades e utilizando a parte 2 da Proposição (6) obtemos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}m(\lambda,Tf)d\lambda \\
&\leq p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}c_1\lambda^{-1}\int_{|f|\geq\frac{\lambda}{2}}|f(x)|dx + p\int_0^{+\infty}\lambda^{p-1}2c_r^r(\lambda)^{-r}\int_{|f|\leq\frac{\lambda}{2}}|f(x)|^r dx \\
&= \frac{2^{p-1}}{p-1}c_1\|f\|_p^p + \frac{2^{p-r}}{r-p}c_r^r\|f\|_p^p \\
&= \left(\frac{2^{p-1}}{p-1}c_1 + \frac{2^{p-r}}{r-p}c_r^r\right)\|f\|_p^p,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\|Tf\|_p \leq \left(\frac{2^{p-1}}{p-1}c_1 + \frac{2^{p-r}}{r-p}c_r^r\right)^{\frac{1}{p}}\|f\|_p,$$

como queríamos.

□

Como aplicação do Teorema de Interpolação de Marcinkiewicz iremos obter algumas propriedades básicas da função de Hardy-Littlewood maximal.

Definição 8. *Para uma dada função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ denotemos por $\mathcal{M}f(x)$, a função maximal Hardy-Littlewood associada à f, como*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}f(x) &= \sup_{r>0}\frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)}|f(y)|dy \\
&= \sup_{r>0}\frac{1}{\omega_n}\int_{B_1(0)}|f(x-ry)|dy \\
&= \sup_{r>0}\left(|f| * \frac{1}{B_r(0)}\chi_{B_r(0)}\right)(x).
\end{aligned}$$

Proposição 8. *As seguintes afirmações são válidas*

1. *$\mathcal{M}$ define um operador sublinear, ou seja,*

$$|\mathcal{M}(f+g)(x)| \leq |\mathcal{M}f(x)| + |\mathcal{M}g(x)|,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

2. *Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

Demonstração. Ver [9] □

Lema 4 (Cobertura de Vitali). *Seja $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável tal que $E \subset \cup_\alpha B_{r_\alpha}(x_\alpha)$ onde a família de bolas abertas $\{B_{r_\alpha}(x_\alpha)\}_\alpha$ satisfaz $\sup_\alpha r_\alpha = c_0 < \infty$. Então* *existe uma subfamília $\{B_{r_j}(x_j)\}_j$ disjunta e enumerável tal que*

$$|E| \leq 5^n \sum_{j=1}^{\infty} |B_{r_j}(x_j)|.$$

Demonstração. ver [9]. □

Teorema 5 (Hardy-Littlewood). *Seja $1 < p \leq \infty$. Então $\mathcal{M}$ é um o operador quasilinear do tipo (p, q), ou seja, exite c_p tal que*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq c_p \|f\|_p, \text{ para toda } f \in L^P(\mathbb{R}^n). \tag{61}$$

Demonstração. Ver [9] □

Lema 6. *Seja $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ uma função radial, positiva e não crescente de $r = \|x\| \in [0, \infty)$. Então*

$$\sup_{t>0} |\phi_t * f(x)| = \sup_{t>0} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\phi(t^{-1}(x-y))}{t^n} f(y) dy \right| \leq \|\phi\|_1 \mathcal{M}f(x). \tag{62}$$

Demonstração. ver [9]. □

Definição 9. *Seja $0 < \alpha < n$. O potencial de Riesz de ordem α, denotado por I_α, é definido como*

$$I_\alpha f(x) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy = k_\alpha * f(x).$$

Teorema 7 (Hardy-Littlewood-Sobolev)**.** *Seja $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n}$, então*

1. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então $I_\alpha f(x)$ é absolutamente convergente em $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Se $p > 1$, então I_α é do tipo (p, q), ou seja,*

$$\|I_\alpha(f)\|_q \leq c_{p,\alpha,n} \|f\|_p. \tag{63}$$

Demonstração. Vamos decompor o Kernel $k_\alpha(x) = k_\alpha^0(x) + k_\alpha^\infty(x)$ como

$$k_\alpha^0(x) = \begin{cases} k_\alpha(x), & \text{se } |x| \leq \epsilon \\ 0, & \text{se } \ |x| > \epsilon, \end{cases}$$

e $k_\alpha^\infty(x) = k_\alpha(x) - k_\alpha^0(x)$, onde ϵ é uma constante a ser determinada.

Portanto

$$|I_\alpha f(x)| \leq |k_\alpha^0 * f(x)| + |k_\alpha^\infty * f(x)| = I + J. \tag{64}$$

A integral I representa a convolução de uma função $k_\alpha^0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $f \in L^p\mathbb{R}^n$. A integral J é a convolução de uma função com $f \in L^p\mathbb{R}^n$ com $k_\alpha^\infty(x) \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Portanto as duas integrais convergem absolutamente.

Também usando

$$\int_{|y|<\epsilon} \frac{dy}{y^{n-\alpha}} = c_n \int_0^\epsilon \frac{r^{n-1}}{r^n} dr = c_{n,\alpha}\epsilon^\alpha,$$

com (62) do Lema 6, obtemos

$$I \leq c_{\alpha,n}\epsilon^\alpha \mathcal{M}f(x). \tag{65}$$

Por outro lado a desigualdade de Hölder implica

$$\begin{aligned} J &\leq c_{\alpha,n}\|f\|_p \left(\int_{|y|\geq\epsilon} \frac{1}{|y|^{(n-\alpha)p'}} dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= c_{\alpha,n}\|f\|_p \left(\int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{(n-\alpha)p'}} dr\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= c_{\alpha,n}\epsilon^{\frac{n}{p'}-n+\alpha}\|f\|_p. \end{aligned} \tag{66}$$

Agora fixe $\epsilon = \epsilon(x)$ tal que

$$c\epsilon^\alpha \mathcal{M}f(x) = c_{\alpha,n}\epsilon^{\frac{n}{p'}-n+\alpha}\|f\|_p,$$

usando $\frac{n}{p'} - n = \frac{-n}{p}$ temos

$$c\mathcal{M}f(x) = c_{\alpha,n}\epsilon^{-\frac{n}{p}}\|f\|_p, \tag{67}$$

que por sua vez implica em

$$\epsilon(x) = (\mathcal{M}f(x))^{\frac{n}{p}}\|f\|_p^{\frac{-n}{p}} \tag{68}$$

Combinando (64)-(68) obtemos

$$\begin{aligned} |I_\alpha f(x)| &\leq c(\|f\|_p(\mathcal{M}f(x))^{-1})^{\frac{\alpha p}{n}}\mathcal{M}f(x) \\ &= c\|f\|_p^{\frac{\alpha p}{n}}(\mathcal{M}f(x))^{1-\frac{\alpha p}{n}} \\ &= c\|f\|_p^\theta(\mathcal{M}f(x))^{1-\theta},\ \theta = \frac{\alpha p}{n} \in (0,1). \end{aligned} \tag{69}$$

Por fim, tomando a norma $L^q(\mathbb{R}^n)$ em (69) e usando (61) obtemos

$$\|I_\alpha f(x)\|_q \leq c\|f\|_p^\theta\|(\mathcal{M}f(x))^{1-\theta}\|_q = c\|f\|_p^\theta\|\mathcal{M}f(x)\|_{(1-\theta)q}^{1-\theta} \leq c\|f\|_p, \tag{70}$$

pois $(1-\theta)q = (1-\frac{\alpha p}{n})q = p$, já que por hipótese temos $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.

Isto prova o teorema. $\square$

2.4 Espaços de Sobolev com Pesos

Definição 10. *Sejam k e m inteiros não negativos e seja $1 \leq p \leq \infty$.O Espaço de Sobolev com peso $W_m^{k,p} = W_m^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ consiste de todas as funções localmente integráveis $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq K$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e esta pertence à $L^p(\mathbb{R}^n)$ e além disso para cada multi-índice β tal que $|\beta| \leq m$ a função $x^\beta u$ pertence à $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

O espaço $W_m^{k,p}$ é um espaço vetorial complexo de Banach com a seguinte norma

$$\|u\|_{W_m^{k,p}} = \sum_{\alpha \leq k} \|\partial^\alpha u\|_p + \sum_{\alpha \leq m} \|x^\alpha u\|_p, \tag{71}$$

onde a norma $\|\cdot\|_p$ denota a norma em $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$.

Vamos denotar L_m^p e H_m^k por $W_m^{0,p}$ e $W_m^{k,2}$ respectivamente.

Temos a seguinte propriedade

Lema 8. *Se m é um inteiro não negativo e $1 < p < \infty$, então vale*

$$\sum_{|\alpha|+|\beta| \leq m} \|x^\alpha \partial^\beta \phi\|_p \leq c\|\phi\|_{W_m^{m,p}}. \tag{72}$$

Demonstração. Ver [12] $\square$

Em particular temos

$$\|(x - 2it\partial)^\alpha \phi\|_p \leq (1+|t|)^m \|\phi\|_{W_m^{m,p}}, \tag{73}$$

sempre que $|\alpha| \leq m$, $t \in \mathbb{R}$ e $\phi \in W_m^{m,p}$.

3 O GRUPO LIVRE DE SCHRÖDINGER

Neste capítulo vamos analisar as principais propriedades do Operador Livre de Schrödinger. Salientamos que os resultados desta seção não serão provados e as demonstrações podem ser consultadas em [11] e [9].

Considere o seguinte problema de Cauchy para a equação linear de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{74}$$

onde $u_0 \in S(\mathbb{R}^n)$.

Aplicando a Transformada de Fourier na variável espacial em (75) obtemos a seguinte equação diferencial ordinária

$$\begin{cases} i\hat{u}_t - 4\pi^2|\xi|^2\hat{u} = 0 \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi), \;\; x \in \mathbb{R}^n, \;\; t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{75}$$

Por outro lado sabemos que a solução de (75) é dada por

$$\hat{u}(\xi, t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 it}\hat{u}_0. \tag{76}$$

Desta forma aplicando a transformada de Fourier inversa obtemos

$$u(t) = (e^{-4\pi^2|x|^2 it}\hat{u}_0)\check{}, \tag{77}$$

ou seja,

$$u(t) = e^{-it\Delta}u_0. \tag{78}$$

Vamos adotar a seguinte notação

$$S(t) = e^{-it\Delta}u_0.$$

Faremos agora um estudo das principais propriedades do operador $S(t)$.

Teorema 9. *A família de operadores $\{S(t)\}$ formam um grupo unitário de operadores em $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é,*

1. *Para todo $t \in \mathbb{R}$ $S(t) : L^2(\mathbb{R}^n) \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria, ou seja,*

$$\|S(t)f\|_2 = \|f\|_2. \tag{79}$$

2. *$S(t)S(s) = S(t+s)$, com $(S(t))^{-1} = S(-t) = (S(t))^*$.*

3. *$S(0) = I$.*

4. *Fixado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a função $\phi_f : \mathbb{R} \mapsto L^2(\mathbb{R}^n)$ definida por $\phi_f(t) = S(t)f$ é uma função contínua, ou seja, esta descreve uma curva em $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Ver [11]. □

O próximo resultado caracteriza os grupos unitários de operadores em um espaço de Hilbert.

Teorema 10 (M.H. Stone)**.** *A família de operadores $\{T_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ definida num espaço de Hilbert H é um grupo unitário de operadores se e somente se existe um operador auto-adjunto A (não necessariamente limitado) em H tal que*

$$T_t = e^{itA} \tag{80}$$

no seguinte sentido: considere $D(A)$ o domínio do operador A, que é denso em H; se $f \in D(A)$, então temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{T_t f - f}{t} = iAf. \tag{81}$$

Em outras palavras, se $f \in D(A)$, então a curva ϕ_f definida no teorema acima é diferenciável em $t = 0$ com derivada iAf.

Demonstração. Ver [13]. □

Proposição 9. *Se $t \neq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ e $p' \in [1,2]$, então temos que $S(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \mapsto L^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua e*

$$\|S(t)f\|_p \leq (4\pi|t|)^{-\frac{n}{2}+\frac{n}{p}}\|f\|_{p'}. \tag{82}$$

A expressão (82) é conhecida como a estimativa fundamental para a equação de Schrödinger.

Demonstração. [11] e [9]. □

A próxima definição será útil para simplicar a escrita.

Definição 11. *O par (q,p) é dito admissível, se*

$$\frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p} = \delta(p). \tag{83}$$

O próximo teorema é conhecido como as estimativas de Strichartz.

Teorema 11. *Se (p,q) for um par admissível e $T > 0$ valem:*

1. *Para todo $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a função $t \mapsto S(t)\phi$ pertence à $L^q(\mathbb{R}; L^p(\mathbb{R}^n)) \cap C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ e ainda existe um c tal que*

$$\|S(\cdot)\phi\|_{L^q_t L^p_x} \leq c\|\phi\|_2. \tag{84}$$

2. *Defina o funcional*

$$I(t,\phi) = \int_0^t S(t-s)\phi(s)ds,$$

então existe $c > 0$ tal que para toda $\phi \in L^{q'}(0,T; L^{p'}(\mathbb{R}^n))$ vale

$$\|I(\cdot,\phi)\|_{L^q_T L^p_x} \leq c\|\phi\|_{L^{q'}_T L^{p'}_x}. \tag{85}$$

3. *Existe $c > 0$ tal que para toda $\phi \in L^{q'}(0,T; L^{p'}(\mathbb{R}^n))$ vale*

$$\|I(t,\phi)\|_2 \leq c\|\phi\|_{L^{q'}_T L^{p'}_x}. \tag{86}$$

Demonstração. Ver [11] e [9]. □

Para a prova de certas estimativas feitas neste trabalho, vamos utilizar fortemente o fato do operador $S(t)$ comutar com o operador derivada ∂^α. De fato seja $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} \partial^\alpha (S(t))\phi &= \partial^\alpha (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{\phi})\check{} \\ &= ((2\pi i\xi)^\alpha e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{\phi})\check{}. \end{aligned} \tag{87}$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} S(t)(\partial^\alpha \phi) &= (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}(\partial^\alpha \phi)\hat{})\check{} \\ &= (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}(2\pi i\xi)^\alpha \hat{\phi})\check{}. \end{aligned} \tag{88}$$

Portanto por (87) e (88) temos que

$$\partial^\alpha (S(t)\phi) = S(t)(\partial^\alpha \phi). \tag{89}$$

Lema 12. *Seja $\alpha \in \mathbb{N}_0$ então para toda $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ vale*

$$x^\alpha S(t)\phi = S(t)(x - 2it)^\alpha \phi. \tag{90}$$

Demonstração. Tome $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$, então utilizando as propriedades da transformada de Fourier no espaço de Schwartz temos

$$\begin{aligned} x^\alpha S(t)\phi &= x^\alpha (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{\phi})\check{} \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^\alpha}(\partial^\alpha (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{\phi}))\check{} \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^\alpha}(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\partial^\alpha \hat{\phi})\check{} + \frac{(-4\pi^2 it2\xi)^\alpha}{(-2\pi i)^\alpha}(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\hat{\phi})\check{} \\ &= \frac{1}{(-2\pi i)^\alpha}(e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}((-2\pi x)^\alpha \phi)\hat{})\check{} + \\ &\quad \frac{1}{(-2\pi i)^\alpha}((-4t\pi)^\alpha e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}(2\pi\xi)^\alpha \hat{\phi})\check{} \\ &= S(t)x^\alpha \phi + \left(\frac{2t}{i}\right)^\alpha (e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}(\partial^\alpha \phi)\hat{})\check{} \\ &= S(t)(x - 2it\partial)^\alpha \phi. \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

O próximo teorema nos dá as estimativas de Strichartz em espaços de Sobolev com Pesos.

Proposição 10 (Estimativa Fundamental em Espaços de Sobolev com Pesos)**.** *Sejam k e m inteiros não negativos com $k \geq m$. Então para qualquer par (p,q) admissível e para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então $S(t)$ é um operador linear limitado de $W_m^{k,p'}$ em $W_m^{k,p}$ com*

$$\|S(t)\phi\|_{W_m^{k,p}} \leq (1+|t|)^m |t|^{-\delta(p)} \|\phi\|_{W_m^{k,p'}}. \tag{91}$$

No caso $p = 2$, a mesma afirmação vale para todo $t \in \mathbb{R}$, e $S(t)$ forma um grupo unitário de operadores.

Demonstração. Por (89), (73), (82) e (73) obtemos

$$\begin{aligned}
\|S(t)\phi\|_{W_m^{k,p}} &= \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha (S(t)\phi)\|_p + \sum_{|\beta|\leq m} \|x^\beta S(t)\phi\|_p \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \|S(t)(\partial^\alpha \phi)\|_p + \sum_{|\beta|\leq m} \|S(t)(x-2it)^\beta \phi\|_p \\
&\leq c|t|^{-\delta(p)} \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_{p'} + c(1+|t|)^m |t|^{-\delta(p)} \|\phi\|_{W_m^{k,p'}}, \\
&\leq (1+|t|)^m |t|^{-\delta(p)} \|\phi\|_{W_m^{k,p'}}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 11. *Seja (p,q) um par admissível, então existe um $c > 0$ tal que para toda $\phi \in H_m^k$ vale*

$$\|S(\cdot)\phi\|_{L_T^q W_m^{k,p}} \leq c(1+T)^m \|\phi\|_{H_m^k}. \tag{92}$$

Demonstração. Utilizando (89), o Lema 12, a estimativa de Strichartz (84) e (93) temos

$$\begin{aligned}
\|S(\cdot)\phi\|_{L_T^q W_m^{k,p}} &= \left\| \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha (S(t)\phi)\|_p + \sum_{|\beta|\leq m} \|x^\beta S(t)\phi\|_p \right\|_{L_T^q} \\
&= \left\| \sum_{|\alpha|\leq k} \|S(t)(\partial^\alpha \phi)\|_p + \sum_{|\beta|\leq m} \|S(t)(x-2it)^\beta \phi\|_p \right\|_{L_T^q} \\
&\leq \left\| \sum_{|\alpha|\leq k} \|S(t)(\partial^\alpha \phi)\|_p \right\|_{L_T^q} + \left\| \sum_{|\beta|\leq m} \|S(t)(x-2it)^\beta \phi\|_p \right\|_{L_T^q} \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \|S(\cdot)(\partial^\alpha \phi)\|_{L_T^q L_x^p} + \sum_{|\beta|\leq m} \|S(\cdot)(x-2it\partial)^\beta \phi\|_{L_T^q L_x^p} \\
&\leq c \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_2 + \sum_{|\beta|\leq m} \|(x-2it\partial)^\beta \phi\|_2 \\
&\leq c\Big(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \phi\|_2 + (1+|t|)^m \|\phi\|_{H_m^m}\Big) \\
&\leq c(1+|t|)^m \|\phi\|_{H_m^k},
\end{aligned}$$

como queríamos mostrar. $\square$

Proposição 12. *Sejam k e m inteiros não negativos tais que $k \geq m$, (p,q) um par admissível e*

$$I(t,u) = \int_0^t S(t-s)u(s)ds, \tag{93}$$

então existe um $c > 0$ tal que para toda $u \in L^{q'}(0,T;W_m^{k,p'})$ valem

$$\|I(\cdot,u)\|_{L_T^q W_m^{k,p}} \leq c(1+T)^m \|u\|_{L_T^{q'} W_m^{k,p'}} \tag{94}$$

e além disso,

$$\|I(\cdot,u)\|_{H_m^k} \leq c(1+T)^m \|u\|_{L_T^{q'} W_m^{k,p'}}. \tag{95}$$

Mais que isso, para cada $u \in L^{q'}(0,T;W_m^{k,p'})$, temos que $I(\cdot,u) \in C([0,T];H_m^k)$.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em três passos.

Passo 1. Vamos primeiramente mostrar que vale

$$\partial^\alpha I(t,u) = I(t,\partial^\alpha u), \tag{96}$$

para toda $u \in S(\mathbb{R}^n)$. De fato utilizando as propriedades da Transformada de Fourier em $S(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha I(t,u) &= \int_0^t \partial^\alpha (e^{-4\pi i(t-s)|\xi|^2}\hat{u}(s))\check{}\,ds \\
&= \int_0^t ((2\pi i x)^\alpha e^{-4\pi i(t-s)|\xi|^2}\hat{u}(s))\check{}\,ds \\
&= \int_0^t (e^{-4\pi i(t-s)|\xi|^2}(\partial^\alpha u)\hat{}\,)\check{}\,ds \\
&= \int_0^t S(t-s)\partial^\alpha u ds \\
&= I(t,\partial^\alpha u).
\end{aligned}$$

Passo 2. Agora vamos obter (94). Por (73) e pela estimativa de Strichartz (85) tem-se

$$\begin{aligned}
\|I(\cdot,u)\|_{L_T^q W_m^{k,p}} &= \left\| \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha I(\cdot,u)\|_p + \sum_{|\beta|\leq m} \|x^\beta I(\cdot,u)\|_p \right\|_{L^q(0,T)} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha I(\cdot,u)\|_{L_T^q L_x^p} + \sum_{|\beta|\leq m} \|S(t)(x-2it\partial)^\beta I(\cdot,u)\|_{L_T^q L_x^p} \\
&\leq c\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L_T^{q'} L_x^{p'}} + c(1+|t|)^m \sum_{|\beta|\leq m} \|u\|_{L_T^{q'} W_m^{m,p'}} \\
&\leq c(1+|t|)^m \|u\|_{L_T^{q'} W_m^{k,p'}}.
\end{aligned}$$

Onde na terceira passagem usamos (73) e a estimativa de Strichartz (85).

Passo 3. Vamos agora mostrar a desigualdade (95). Por (90), pelo fato de $S(t)$ ser unitário em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pela estimativa fundamental para espaços de Sobolev com pesos e pela estimativa de Strichartz (86) temos

$$\begin{aligned}
\|I(t,u)\|_{H^k_m} &= \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha I(t,u)\|_2 + \sum_{|\beta|\leq m} \|x^\beta I(t,u)\|_2 \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \|I(t,\partial^\alpha u)\|_2 + \sum_{|\beta|\leq m} \|S(t)(x-2it\partial)^\beta I(t,u)\|_2 \\
&= \sum_{|\alpha|\leq k} \|I(t,\partial^\alpha u)\|_2 + \sum_{|\beta|\leq m} \|(x-2it\partial)^\beta I(t,u)\|_2 \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq k} \|I(t,\partial^\alpha u)\|_2 + c(1+|t|)^m \|I(t,u)\|_{W^{m,2}_m} \\
&\leq \sum_{|\alpha|\leq k} c\|\partial^\alpha u\|_{L^{q'}_T L^{p'}_x} + c(1+|t|)^m \|u\|_{L^{q'}_T W^{m,p'}_m} \\
&\leq c(1+T)^m \|u\|_{L^{q'}_T W^{k,p'}_m}.
\end{aligned}$$

Passo 4. Por fim suponha que $u \in L^{q'}(0,T;W^{k,p'}_m)$ e vamos mostrar que $I(\cdot,u) \in C([0,T];H^k_m)$.

Como o conjunto das funções contínuas em C[0,T] são densas em $L^{q'}[0,T]$ e o espaço $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{k,p'}_m$, podemos tomar uma sequência $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $C([0,T];S(\mathbb{R}^n))$, tal que $u_j \to u$ em $L^{q'}(0,T;W^{k,p'}_m)$, quando $j\to\infty$. Afirmamos que $I(\cdot,u_j) \in C([0,T];H^k_m)$, com efeito como $S(t)$ forma um grupo unitário em H^k_m temos

$$\begin{aligned}
\|I(t,u_j)\|_{H^k_m} &= \left\| \int_0^t S(t-s)u_j(s)ds \right\|_{H^k_m} \\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)u_j(s)ds\|_{H^k_m} \\
&= \int_0^t \|u_j(s)\|_{H^k_m} ds.
\end{aligned}$$

Isto implica em nossa afirmação já que $u_j \in C([0,T];H^k_m)$.

Para todo $t\in[0,T]$ temos por (95)

$$\|I(t,u_j) - I(t,u_j)\|_{H^k_m} \leq c(1+T)^m \|u_j - u\|_{L^{q'}_T W^{k,p'}}. \tag{97}$$

Lembrando que $u_j \to u$ em $L^{q'}(0,T;W^{k,p'}_m)$, quando $j\to\infty$, assim

$$I(\cdot,u_j) \to I(\cdot,u), \text{ em } L^\infty([0,T];H^k_m),$$

portanto temos que $I(\cdot,u) \in C([0,T];H^k_m)$, como queríamos demonstrar.

□

4 BOA COLOCAÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO-LINEAR DE SCHRÖDINGER EM ESPAÇOS DE SOBOLEV COM PESOS

Neste capítulo iremos estudar a *boa colocação local* para o problema de Cauchy para a equação não linear de Schrödinger em $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, da forma

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = F(u), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{98}$$

onde $u_0 \in H^k_m$.

A proposição seguinte escreve o problema (98) na forma integral.

Proposição 13. *Se u é uma solução de (98), então u satisfaz*

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \tag{99}$$

onde $S(t) = e^{it\Delta}$ é o grupo livre de Schrödinger.

Demonstração. Seja

$$w(s) = S(t-s)u(s),$$

utilizando as propriedades do operador $S(t)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{w(s+h)-w(s)}{h} &= \frac{S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s)u(s)}{h} \\ &= \frac{S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s+h-h)u(s)}{h} \\ &= \frac{S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s-h)S(h)u(s)}{h} \\ &= \frac{S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s-h)u(s)}{h} + \\ &\quad \frac{S(t-s-h)u(s) - S(t-s-h)S(h)u(s)}{h} \\ &= S(t-s-h)\left[\frac{u(s+h)-u(s)}{h} - \left(\frac{S(h)u(s)-u(s)}{h}\right)\right]. \end{aligned}$$

Fazendo $h \to 0$, usando o teorema de Stone e (98) obtemos

$$w'(s) = S(t-s)(\partial_s u(s) - i\Delta u) = iS(t-s)u(s). \tag{100}$$

Agora integrando ambos os membros com respeito à variável s de 0 à τ, para τ pertencente à $[0,t)$ obtemos

$$\int_0^\tau w'(s) = \int_0^\tau iS(t-s)u(s).$$

Pelo teorema fundamental do cálculo

$$w(\tau) - w(0) = \int_0^\tau iS(t-s)u(s). \tag{101}$$

Por outro lado pela definição de w temos que (101) é equivalente à

$$S(t-\tau)u(\tau) - S(t)u(0) = \int_0^\tau iS(t-s)u(s).$$

Finalmente, fazendo $\tau \to t$ temos a equação na forma integral

$$u(t) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \tag{102}$$

como afirmamos. □

Vamos agora ao principal teorema desta seção

Teorema 13. *Sejam k e m inteiros não negativos, com $k \geq m$. Seja $\lambda \geq 1$ e $2 \leq p \leq \infty$ com $\frac{1}{2} - \frac{2}{n(\lambda+1)} \leq \frac{1}{p}$. Seja ainda V um espaço de Banach no qual H^k_m esteja continuamente imerso. Seja F uma aplicação de $W^{k,p}_m \cap H^k_m$ em $W^{k,p'}_m$ tal que*

$$\|F(\phi) - F(\psi)\|_{W^{k,p'}_m} \leq c\{1 + \|\phi\|_{W^{k,p}_m} + \|\psi\|_{W^{k,p}_m}\}^{\lambda-1}\|\phi - \psi\|_{W^{k,p}_m} \tag{103}$$

e

$$\|F(\phi)\|_{W^{k,p'}_m} \leq c\{1 + \|\phi\|_V\}^{\lambda-1}\|\phi\|_{W^{k,p}_m}, \tag{104}$$

para toda $\phi,\ \psi \in W^{k,p}_m \cap H^k_m$. Então para toda $u_0 \in H^k_m$, existe um $T > 0$,e uma única solução u de (98) em $[0,T)$ com

$$u \in C([0,T); H^k_m) \cap L^{\frac{4p}{n(p-2)}}(0,T; W^{k,p}_m) = X_{[0,T)}. \tag{105}$$

Além disso temos que $T = \infty$ ou $\lim_{t\to T} \|u(t)\|_V = \infty$. Mais ainda, temos que se uma sequência $\{u_{0j}\}_{j\in\mathbb{N}} \in H^k_m$ com $u_{0j} \to u_0$ em H^k_m quando $j \to \infty$, então para algum T' com $T' < T_j$, $u_j \in X_{[0,T_j)}$ e $T' < T_j$ sendo a solução de (98) para a condição inicial u_{0j}, para j suficientemente grande, e $u_j \to u \in X_{[0,T']}$.

Demonstração. vamos mostrar este teorema em alguns passos.

Passo 1. Sejam k, m, λ, p, v e F como nas hipóteses do teorema e $q = \frac{2}{\delta p}$.

Primeiramente notemos que a condição $\frac{1}{2} - \frac{2}{n(\lambda+1)} \leq \frac{1}{p}$ implica que

$$\frac{\lambda+1}{q} < 1. \tag{106}$$

Sejam $T > 0$, $Y = C([0,T]; H^k_m)$, $Z = L^q(0,T; W^{k,p}_m)$ e $X = Y \cap Z$, vamos adotar a seguinte norma em X:

$$\|u\|_X = \max\{\|u\|_Y, \|u\|_Z\}.$$

Seja $u_0 \in H^k_m$ e defina

$$G(u(t)) = S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds. \tag{107}$$

Iremos escrever como antes

$$I(t,w) = \int_0^t S(t-s)w(s)ds.$$

Pela proposição anterior temos que se $w \in L^{q'}(0,T;W^{k,p'}_m)$, então $I(\cdot,w) \in X$ com

$$\|I(\cdot,w)\|_X \le c\|w\|_{L^{q'}_T W^{k,p'}_m}. \tag{108}$$

Pela Proposição 11 e da estimativa fundamental em espaços de Sobolev com pesos para $p=2$ temos

$$\|S(\cdot)u_0\|_X \le a(1+T)^m\|u_0\|_{H^k_m},$$

para algum $a>0$.

Sejam u e v pertencentes à X, então pela desigualdade de Hölder para o par de expoentes conjugados $r = \frac{q-1}{\lambda}$ e $r' = \frac{q-1}{q-1-\lambda}$, nas funções $\|F(u)-F(v)\|^{q'}_{W^{k,p'}_m}$ e na função constante $f(s)=1$, pela hipótese (103) e pela desigualdade de Hölder para o par de expontes conjugados λ e $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ nas funções $\|u-v\|^{\frac{q}{\lambda}}_{w^{k,p}_m}$ e $\{1+\|u\|_{w^{k,p}_m}+\|v\|_{w^{k,p}_m}\}^{\frac{q}{\lambda}(\lambda-1)}$ temos

$$\begin{aligned}
&\|Gu-Gv\|_X \\
=\;& \left\|\int_0^t S(t-s)(F(u(s))-F(v(s)))ds\right\|_X \\
=\;& \|I(\cdot,F(u)-F(v))\|_X \\
\le\;& c(1+T)^m\|F(u)-F(v)\|_{L^{q'}_T W^{k,p'}_m} \\
\le\;& c(1+T)^m T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\|F(u)-F(v)\|_{L^{\frac{q}{\lambda}}_T W^{k,p'}_m} \\
\le\;& c(1+T)^m T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\left(\int_0^T c\{1+\|u\|_{w^{k,p}_m}+\|v\|_{w^{k,p}_m}\}^{\frac{q}{\lambda}(\lambda-1)}\|u-v\|^{\frac{q}{\lambda}}_{w^{k,p}_m}dt\right)^{\frac{\lambda}{q}} \\
\le\;& c(1+T)^m T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\left(\int_0^T \{1+\|u\|_{w^{k,p}_m}+\|v\|_{w^{k,p}_m}\}^q dt\right)^{\frac{\lambda-1}{q}}\|u-v\|_Z \\
\le\;& c(1+T)^{m+\frac{\lambda-1}{q}}T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\{1+\|u\|_Z+\|v\|_Z\}^{\lambda-1}\|u-v\|_Z.
\end{aligned}$$

Resumindo obtemos

$$\|Gu-Gv\|_X \le c(1+T)^{m+\frac{\lambda-1}{q}}T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\{1+\|u\|_X+\|v\|_X\}^{\lambda-1}\|u-v\|_X. \tag{109}$$

De (104) temos que $F(0)=0$, assim um cálculo análogo ao anterior implica em

$$\begin{array}{rcl} \|I(\cdot,F(u))\|_X & \leq & c(1+T)^m\|F(u)\|_{L_T^{q'}W_m^{k,p'}} \\ & \leq & c(1+T)^{m+\frac{\lambda-1}{q}}T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\{1+\|u\|_Z\}^{\lambda-1}\|u\|_Z. \end{array}$$

Além disso,

$$\begin{array}{rcl} \|Gu\|_X & = & \|S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds\|_X \\ & \leq & \|S(t)u_0\|_X + \|I(\cdot,F(u))\|_X \\ & \leq & a(1+T)^m\|u_0\|_{H_m^k} + c(1+T)^{m+\frac{\lambda-1}{q}}T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\{1+\|u\|_Z\}^{\lambda-1}\|u\|_Z. \end{array} \tag{110}$$

Em particular,

$$\|Gu\|_X \leq a(1+T)^m\|u_0\|_{H_m^k} + c(1+T)^{m+\frac{\lambda-1}{q}}T^{1-\frac{\lambda+1}{q}}\{1+\|u\|_X\}^{\lambda-1}\|u\|_X. \tag{111}$$

Agora seja K um número real tal que

$$K \geq \|u_0\|_{H_m^k}.$$

Para cada b fixado defina o seguinte conjunto

$$B_K = \{u \in X; \|u\|_X \leq (a+b)K + b\}. \tag{112}$$

De (109) e (111) temos que G é uma contração de B_K em B_K para um $T>0$ suficientemente pequeno, logo pelo método do ponto fixo da contração a equação $u(t)=G(u(t))$ tem um única solução $u\in B_K$ em $[0,T]$, para um certo T que denotaremos por T_K. Assim provamos a existência de solução para o problema (98), no espaço X, para $T=T_K$.

Passo 2. Vamos agora mostrar a unicidade da solução em X. Sejam u e v soluções em $X=X_{[0,T]}$. Defina a seguinte função $\theta:[0,T)\to\mathbb{R}$, dada por

$$\theta(s) = \max\{\|u(t)-v(t)\|_{L_s^qW_m^{k,p}}, \|u(t)-v(t)\|_{L_s^\infty H_m^k}\}.$$

Como $u(0)=v(0)=u_0$ segue que $\theta(0)=0$.

Afirmamos que θ é contínua. Com efeito seja $\theta_1(s)=\|u(t)-v(t)\|_{L_s^qW_m^{k,p}}$, mostremos primeiro que θ_1 é contínua. Seja t_n uma sequência em $[0,T]$ tal que $t_n\to t$, então

$$\begin{array}{rcl} \theta_1(t_n) & = & \left\| \|u-v\|_{W_m^{k,p}}\chi[0,t_n] \right\|_{L_T^q} \\ & \leq & \left\| \|u-v\|_{W_m^{k,p}} \right\|_{L_T^q}. \end{array}$$

Aplicando o teorema da convergência dominada obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{t_n \to t} \theta(t_n) &= \lim_{t_n \to t} \left\| \|u - v\|_{W_m^{k,p}} \chi[0, t_n] \right\|_{L_T^q} \\
&= \left\| \lim_{t_n \to t} \|u - v\|_{W_m^{k,p}} \chi[0, t_n] \right\|_{L_T^q} \\
&= \left\| \|u - v\|_{W_m^{k,p}} \chi[0, t_0] \right\|_{L_T^q} \\
&= \theta(t),
\end{aligned}$$

mostrando assim a continuidade de θ_1. Por outro lado a função $\theta_2(s) = \|u(t) - v(t)\|_{L_s^\infty H_m^k}\}$ é claramente contínua, logo θ é contínua.

Defina $t_0 = \inf\{t \in [0, T]; \theta(t) > 0$, então pela continuidade de θ temos que $\theta(t_0) = 0$, desta forma $u(t_0) = v(t_0)$. Suponha por absurdo que exista um $t \in [0, T)$ tal que $\theta(t) > 0$, então pela definição de ínfimo existe um $\delta > 0$ tal que $\theta(t) > 0$ sempre que $t \in (t_0, t_0 + \delta)$.

Defina $\tilde{u}(t) = u(t_0 + t)$ e $\tilde{v}(t) = u(t_0 + t)$, como $\theta(t_0) = 0$ então $v(t_0) = \tilde{v}(0) = \tilde{u}(0) = u(t_0) = \psi(x)$ para um certa ψ.

Desta forma $\tilde{u}$ e $\tilde{v}$ são soluções do problema abaixo

$$\begin{cases} iw_t + \Delta w = F(w), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \\ w(0, x) = \psi(x) \end{cases} \tag{113}$$

Assim procedendo de forma análoga à (109) temos

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_\epsilon} \leq c(1 + \epsilon)^{m + \frac{\lambda - 1}{q}} \epsilon^{1 - \frac{\lambda + 1}{q}} \{1 + \|\tilde{u}\|_{X_\epsilon} + \|\tilde{v}\|_{X_\epsilon}\}^{\lambda - 1} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_\epsilon}, \tag{114}$$

onde $\epsilon \in [0, T - t_0]$, $X_\epsilon = C([o, \epsilon]; H_m^k) \cap L^q(0, \epsilon; {W_m}^k, p)$. Tomando ϵ suficientemente pequeno para que $\epsilon < \delta$ e

$$c(1 + \epsilon)^{m + \frac{\lambda - 1}{q}} \epsilon^{1 - \frac{\lambda + 1}{q}} \{1 + \|\tilde{u}\|_{X_\epsilon} + \|\tilde{v}\|_{X_\epsilon}\}^{\lambda - 1} < \frac{1}{2}$$

obtemos

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_\epsilon} < \frac{1}{2} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_\epsilon},$$

ou seja,

$$\theta(t_0 + \epsilon) = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{X_\epsilon} = 0,$$

obtemos assim uma contradição pela definição de t_0. Portanto devemos ter $\theta(t) = 0$ para todo $t \in [0, T)$.

Passo 3. Como T_K pode ser escolhido uniformemente por u_0 na bola de raio K em H_m^k de raio k, concluímos que a solução u se estende unicamente em algum intervalo maximal $[0, T_{max})$ tal que

$$u \in C([0, T_{max}); H_m^k) \cap L^q(0, T_{max}; W_m^{k,p}).$$

Agora vamos mostrar que ocorre a seguinte alternativa de explosão:

$$T_{\max} = \infty \text{ ou } \lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_{H_m^k} = \infty$$

Iremos fazê-lo por contradição. Suponha que $T_{max}\|u(t)\|_{H_m^k} < \infty$ e que não ocorra

$$\lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_{H_m^k} = \infty,$$

então como $u \in C([0, T_{\max}]; H_m^k)$ temos que

$$\lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_{H_m^k} = \|u(T_{\max})\|_{H_m^k} = M,$$

onde $M < \infty$. Considerando agora o novo problema do valor inicial

$$\begin{cases} iv_t + \Delta v = F(v), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \\ v(0, x) = u(T_{\max}, x) \end{cases} \tag{115}$$

Como $\|u(T_{\max})\|_{H_m^k} = M \leq \infty$, seguindo o raciocínio anterior, podemos tomar a bola $B_M = \{v \in X; (a+b)M + b\}$ e escolhermos um T_m suficientemente pequeno de forma que a aplicação dada por

$$v \to \tilde{G}(v(t)) = S(t)u_{T_{\max}} - i\int_0^t S(t-s)F(v(s))ds$$

seja uma contração, então temos uma solução $v \in X_{[0,T_m]}$. Defina

$$\tilde{w}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), \text{ se } t \in [0, T_m ax) \\ v(t - T_{\max}), \text{ se } t \geq T_{\max} \end{cases} \tag{116}$$

desta forma temos que $w \in X_{[0,T_{\max}+T_m]}$ define uma nova solução de (98) isto contradiz a maximilidade de $T_{\max}$.

Passo 4. Afirmamos que ou $T_{\max} = \infty$ ou $\lim_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_V = \infty$. Com efeito suponha que $T_{\max} < \infty$ e $\|u(t)\|_V < c$ quando $0 < t < T_{\max}$, iremos mostrar que desta forma temos que $\|u(t)\|_{H_m^k} < c$ em $(0, T)$ e obter uma contradição.

No caso $p = 2$ a prova é mais simples, pois seja $0 < t < T_{\max}$, pela Estimativa

Fundamental em Espaços de Sobolev com Pesos e por (104) obtemos

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^k_m} &= \|S(t)u_0 - i\int_0^t S(t-s)F(u(s))ds\|_{H^k_m} \\
&\leq \|S(t)u_0\|_{H^k_m} + \int_0^t \|S(t-s)F(u(s))\|_{H^k_m} ds \\
&\leq c(1+t)^m\|u_0\|_{H^k_m} + c(1+t)^m \int_0^t \|F(u(s))ds\|_{H^k_m} ds \\
&\leq c(1+t)^m\|u_0\|_{H^k_m} + \\
&\quad c(1+t)^m \int_0^t \{1+\|u(s)\|_V\}^{\lambda-1}\|u\|_{H^k_m} ds \\
&\leq c(1+T_{\max})^m\|u_0\|_{H^k_m} + c(1+T_{\max}) \int_0^t \|u(s)\|_{H^k_m} ds.
\end{aligned}$$

Então pela desigualdade de Gronwall temos que

$$\|u(t)\|_{H^k_m} \leq c, \ \forall\ 0 < t < T_{\max}.$$

Obtendo assim uma contradição, portanto devemos ter $T_{\max} = \infty$ ou $\lim_{t\to T_{\max}} \|u(t)\|_V = \infty$.

Agora assuma $2 < p < \infty$, então $2 < q < \infty$. Para mostrarmos que $\|u(t)\|_{H^k_m} \leq c$ quando $0 < t < T_{\max}$, é suficiente mostrarmos que $u \in L^q(0, T_{\max}, W^{k,p}_m)$ devido à (110) e à equação $u = G(u)$.

Pela Estimativa de Strichartz em espaços de Sobolev com pesos (93) encontramos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q_T W^{k,p}_m} &= \|S(\cdot)u_0 + I(\cdot, F(u))\|_{L^q_T W^{k,p}_m} \\
&\leq \|S(\cdot)u_0\|_{L^q_T W^{k,p}_m} + \|I(\cdot, F(u))\|_{L^q_T W^{k,p}_m} \\
&\leq c(1+T)^m\|u_0\|_{H^k_m} + c(1+T)^m\|I(\cdot, F(u))\|_{L^q_T W^{k,p}_m}.
\end{aligned} \tag{117}$$

Agora estimemos $\|I(\cdot, F(u))\|_{L^q_T W^{k,p}_m}$:

$$\begin{aligned}
\|I(\cdot, F(u))\|_{L^q_T W^{k,p}_m} &= \left(\int_0^T \|I(t, F(u))\|^q_{W^{k,p}_m} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^T \|S(t-s)F(u(s))ds\|^q_{W^{k,p}_m} dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\int_0^T \left(\int_0^t c(1+T)^m|t-s|^{-\delta(p)}\|F(u(s))\|_{W^{k,p}_m}\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \qquad (118)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left[\int_0^T \left(\int_0^t c(1+T)^m |t-s|^{-\delta(p)} \{1+\|u(s)\|_V\}^{\lambda-1} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c(1+T)^m \left[\int_0^T \left(\int_0^t |t-s|^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

De (117) e (118) tem-se

$$\|u\|_{L_T^q W_m^{k,p}} \leq \|u_0\|_{H_m^k} + c(1+T_{\max})^m J, \tag{119}$$

onde

$$J = \left[\int_0^T \left(\int_0^t |t-s|^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Temos que

$$J \leq J_1 + J_2 + J_3,$$

onde

$$J_1 = \left[\int_0^\epsilon \left(\int_0^t |t-s|^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q ds\right]^{\frac{1}{q}},$$

$$J_2 = \left[\int_\epsilon^T \left(\int_0^{t-\epsilon} |t-s|^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q ds\right]^{\frac{1}{q}},$$

$$J_3 = \left[\int_\epsilon^T \left(\int_{t-\epsilon}^t |t-s|^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q ds\right]^{\frac{1}{q}},$$

com $0 < \epsilon < T$.

Inicialmente vamos estimar J_1.

$$\begin{aligned}
J_1^q &= \int_0^\epsilon \left(\int_0^t (t-s)^{-\delta(p)} \|U(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q dt \\
&= \int_0^\epsilon \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{-\delta(p)}{3}} (t-s)^{\frac{-2\delta(p)}{3}} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q dt \\
&\leq \int_0^\epsilon \left(\int_0^t (t-s)^{-\delta(p)} ds\right)^{\frac{q}{3}} \left(\int_0^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt \\
&\leq c\epsilon^{(1-\delta(p))\frac{q}{3}} \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt \\
&\leq c\epsilon^{\frac{q-2}{3}\frac{q}{3}} \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt,
\end{aligned}$$

onde na terceira passagem utilizamos a desigualdade de Hölder nas funções $h_1 = (t-s)^{\frac{-\delta(p)}{3}}$ e $h_2 = (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}$ para os expoentes conjugados $r = 3$ e $r' = \frac{3}{2}$.

Como $\frac{3}{2q} = \frac{2q-1}{2q} + \delta(p) - 1$ a desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev implica que

$$\left[\int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt\right]^{\frac{3}{2q}} \leq \left(\int_0^T \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3q}{2q-1}} ds\right)^{\frac{2q-1}{2q}}.$$

Também temos que $\frac{2q-1}{3} > 1$, pois $q > 2$, então pela desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}
J_1^q &\leq c\epsilon^{\frac{q-2}{3}} \left(\int_0^T \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3q}{2q-1}} ds\right)^{\frac{2q-1}{2q}} \\
&\leq c\epsilon^{\frac{q-2}{3}} \left(\int_0^T \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{q} ds\right)^{\frac{2q-1}{2q}\frac{3}{2q-1}} \left(\int_0^T 1\right)^{\frac{2q-1}{2q}\frac{2q-4}{2q-1}} \\
&\leq c\epsilon^{\frac{q-2}{3}} T^{\frac{2(q-2)}{3}} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{q} ds.
\end{aligned}$$

A estimativa de J_3 é um caminho completamente análogo. De fato:

$$\begin{aligned}
J_3^q &= \int_\epsilon^T \left(\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q dt \\
&\leq \int_\epsilon^T \left(\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{\frac{-\delta(p)}{3}} (t-s)^{\frac{-2\delta(p)}{3}} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q dt \\
&\leq \int_0^\epsilon \left(\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{-\delta(p)} ds\right)^{\frac{q}{3}} \left(\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt \\
&\leq c\epsilon^{(1-\delta(p))\frac{q}{3}} \int_0^T \left(\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt \\
&\leq c\epsilon^{\frac{q-2}{3}\frac{q}{3}} \int_0^T \left(\int_{t-\epsilon}^t (t-s)^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{\frac{3}{2}} ds\right)^{\frac{2q}{3}} dt \\
&\leq c\epsilon^{\frac{q-2}{3}} T^{\frac{2(q-2)}{3}} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^{q} ds.
\end{aligned}$$

Agora estimemos J_2:

$$\begin{aligned}
J_2^q &= \int_\epsilon^T \left(\int_0^{t-\epsilon} |t-s|^{-\delta(p)} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}} ds\right)^q dt \\
&\leq \int_\epsilon^T \left[\left(\int_0^{t-\epsilon} |t-s|^{-\delta(p)q'}\right)^{\frac{q}{q'}} \left(\int_0^{t-\epsilon} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^q ds\right)\right] dt \\
&= c\int_\epsilon^T \left[t^{(1-\delta(p)q')} - \epsilon^{(1-\delta(p)q')}\right]^{\frac{q}{q'}} \int_0^{t-\epsilon} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^q ds \\
&\leq cT^{1-\delta(p)q'\frac{q}{q'}} \int_\epsilon^T \int_0^{t-\epsilon} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^q ds \\
&\leq cT^{q-3} \int_\epsilon^T \int_0^{t-\epsilon} \|u(s)\|_{W_m^{k,p}}^q ds
\end{aligned}$$

Assim de (119) e das estimativas de J_1, J_2 e J_3 temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^q_T W^{k,p}_m} &\leq \|u_0\|_{H^k_m} + c(1+T_{\max})^m J_1 + J_2 + J_3 \\
&\leq \|u_0\|_{H^k_m} + c(1+T_{\max})^m cT^{\frac{q-3}{q}} \left(\int_0^t \|u\|^q_{L^q_T W^{k,p}_m} \right) dt \\
&\quad + c\epsilon^{\frac{q-2}{3}} (1+T_{\max})^{\frac{2(q-2)}{3q}} \|u\|_{L^q_T W^{k,p}_m}.
\end{aligned}$$

Como isto vale para um $\epsilon > 0$ qualquer com $\epsilon < T$ segue que

$$\|u\|^q_{L^q_T W^{k,p}_m} \leq c(1+T_{\max})^{mq} \|u_0\|^q_{H^k_m} + c(1+T_{\max})^{mq} cT^{q-3} \int_0^t \|u\|^q_{L^q_T W^{k,p}_m} dt,$$

sempre que $0 \leq T < T_{\max}$. Pela desigualdade de Gronwall temos que

$$\|u\|_{L^q_T W^{k,p}_m} \leq c,$$

sempre que $0 < T < T_{\max}$, assim $u \in L^q(0, T_{\max}, W^{k,p}_m)$, como queríamos mostrar.

Passo 5. Neste passo mostraremos a continuidade de u em X com respeito às condições iniciais.

Seja $u_{0j} \in H^k_m$, $j \in \mathbb{N}$ e $u_j \in X_{[0,T_j]}$ a sua correspondente solução. Suponha que $u_{0j} \to u_0$ em H^k_m quando $j \to \infty$. Vamos provar que $u_j \to u$ em $X_{[0,T_{\max}]}$. De fato lembremos que para cada $k > 0$ existe um $T_K > 0$ e uma bola B_K em $X_{[0,T_{\max}]}$ de raio $ck + c$ centrada na origem, tal que se u_0 está na bola em H^k_m de raio k e centrada na origem, então G é uma contração de B_K em B_K.

A solução u em B_K e $[0, T_K]$ é feita por construção.

Assuma que u_0 pertence a bola em H^k_m de raio k. Como $u_{0j} \to u_0$ em H^k_m segue que $u_j \in B_{2k}$ para j suficientemente grande, denotando $X = X_{[0,T_{2k}]}$ temos

$$\begin{aligned}
\|u - u_j\|_X &= \|Gu - G_j u_j\|_X \\
&\leq \|Gu - Gu_j\|_X + \|Gu_j - G_j u_j\|_X \\
&\leq \|Gu - Gu_j\|_X + \|S(\cdot)(u_0 - u_{0j})\|_X.
\end{aligned}$$

Usando (91) com $p = 2$, (93) e o fato de G ser uma contração de B_{2k} encontramos

$$\|u - u_j\|_X = c\|u - u_j\|_X + c(1+T_{2k})^m \|u_0 - u_{0j}\|_X. \tag{120}$$

Por outro lado

$$\|u - u_j\|_X = c(1+T_{2k})^m \|u_0 - u_{0j}\|_X, \tag{121}$$

ou seja $u_j \to u$ em $X_{[0,T_{2k}]}$, como queríamos demonstrar.

□

O próximo lema é útil para obtermmos estimativas adequadas do termo não linear de equação dada por

Lema 14. *Seja $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dada por $F(z) = |z|^{\alpha-1}z$, então vale a seguinte desigualdade*

$$|F(z_1) - F(z_2)| = ||z_1|^{\alpha-1}z_1 - |z_2|^{\alpha-1}z_2| \leq \{1 + |z_1| + |z_2|\}^{\alpha-1}|z_1 - z_2|. \tag{122}$$

Demonstração. Vamos fazer a prova para o caso $\alpha - 2 < 0$, pois o caso contário é feito de maneira análoga.

Suponhamos sem perda de generalidade que $|z_1| \leq |z_2|$, logo

$$\begin{aligned} ||z_1|^{\alpha-1}z_1 - |z_2|^{\alpha-1}z_2| &= ||z_1|^{\alpha-1}z_1 - z_2^{\alpha-1}z_1 + z_2^{\alpha-1}z_1 - |z_2|^{\alpha-1}z_2| \\ &\leq |z_2|^{\alpha-1}|z_2 - z_1| + |z_1|||z_1|^{\alpha-1} - |z_2|^{\alpha-1}|. \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema do Valor Médio para um $\theta \in (0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned} &||z_1|^{\alpha-1}z_1 - |z_2|^{\alpha-1}z_2| \\ &\leq |z_2|^{\alpha-1}|z_2 - z_1| + |z_1|(\alpha-1)((1-\theta)z_1 + \theta z_2)^{\alpha-2}|z_1 - z_2| \\ &\leq |z_2|^{\alpha-1}|z_2 - z_1| + |z_1|(\alpha-1)z_1^{\alpha-2}|z_1 - z_2| \\ &\leq \{|z_1| + |z_2|\}^{\alpha-1}|z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Corolário 15. *Considere o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda|u|^{\alpha-1}u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{123}$$

onde λ é real e α deve satisfazer

$$\begin{cases} 1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \ se \ n > 2 \\ 1 < \alpha < \infty, \ se \ n = 1, 2. \end{cases} \tag{124}$$

Então o problema acima é localmente bem posto em $H_1^1(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Pelo resultado obtido anteriormente basta verificarmos que a função $F(u) = \lambda|u|^{\alpha-1}u$ satisfaz as hipóteses do teorema acima, para $k = m = 1$ e um certo $\lambda > 1$ Inicialmente verifiquemos que se $u \in W_1^{1,p}$, então

$$\begin{aligned} \|F(u)\|_{W_1^{1,p'}} &= \|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{W_1^{1,p}} \\ &\leq c\{1 + \|u\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha}\|u\|_{W_1^{1,p}}. \end{aligned}$$

Temos

$$\|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{W_1^{1,p'}} =$$
$$\|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{p'} + \|\nabla(\lambda|u|^{\alpha-1}u)\|_{p'} + \|\lambda|x||u|^{\alpha-1}u\|_{p'}.$$

Desta forma precisamos estimar cada um dos três termos acima. Inicialmente estimemos $\|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{p'}$.

Pela desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados $\frac{p}{p'}$ e $p_1 = \frac{p}{p-p'}$ temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{p'} &= \lambda\left(\int \left(|u|^{\alpha-1}|u|\right)^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \lambda\left(\int |u|^{(\alpha-1)\frac{p}{p-p'}}\right)^{\frac{p}{(p-p')p'}} \left(\int |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lambda\|u\|_l^{\alpha-1}\|u\|_p,
\end{aligned}$$

onde $l = (\alpha-1)p_1$. Pela desigualdade de Gagliardo Niremberg para $\overline{p} = (\alpha-1)l$, $r = p$, $\theta = 1$, $j = 0$ e $m = 1$ onde

$$\frac{1}{l} = \frac{p-p'}{(\alpha-1)p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \tag{125}$$

obtemos

$$\|u\|_l^{\alpha-1} \leq \|\nabla u\|_p^{\alpha-1} \leq \|u\|_{W_1^{1,p}}^{\alpha-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{p'} &\leq \lambda\|u\|_{W_1^{1,p}}^{\alpha-1}\|u\|_{W_1^{1,p}} \\
&\leq \lambda\{1 + \|u\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u\|_{W_1^{1,p}}.
\end{aligned} \tag{126}$$

Logo um candidato natural a fazer o papel de λ é α. Afirmamos que α satisfaz as condições requeridas por λ, com efeito temos por hipótese que $\alpha > 1$ e pela hipótese (135) temos que

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{n\alpha} \leq \frac{1}{p}. \tag{127}$$

Para obtermos a estimativa de $\|\lambda|x||u|^{\alpha-1}u\|_{p'}$ vamos repetir o processo feito acima. Aplicando a desigualdade de Hölder para as funções $|u|^{\alpha-1}$ e $|x|u$, e em seguida a desigualdade de Gagliardo Niremberg em $|u|^{\alpha-1}$, obtemos

$$\|\lambda|x||u|^{\alpha-1}u\|_{p'} \leq \lambda c\{1 + \|u\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u\|_{W_1^{1,p}}.$$

O passo seguinte será estimar $\|\nabla(\lambda|u|^{\alpha-1}u)\|_{p'}$. Reproduzindo o argumento usado anteriormente para as funções $|u|^{\alpha-1}$ e ∇u chegamos em

$$\|\lambda|u|^{\alpha-1}\nabla u\|_{p'} \leq \lambda\{1+\|u\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u\|_{W_1^{1,p}}. \tag{128}$$

Note que

$$\begin{aligned}
||u|\nabla(|u|^{\alpha-1})| &= ||u|\nabla(u\overline{u})^{\frac{\alpha-1}{2}}| \\
&= \left||u|\frac{\alpha-1}{2}(u\overline{u})^{\frac{\alpha-1}{3}}\nabla(u\overline{u})\right| \\
&= ||u||u|^{\alpha-3}(\overline{u}\nabla u + u\nabla\overline{u})| \\
&= |u|^{\alpha-2}(\overline{u}\nabla u + u\nabla\overline{u}) \\
&\leq |u|^{\alpha-1}(|\nabla u| + |\nabla\overline{u}|) \\
&= 2|u|^{\alpha-1}|\nabla u|.
\end{aligned} \tag{129}$$

Assim, por (128) e (129) temos

$$\|\lambda|u|\nabla(|u|^{\alpha-1})\|_{W_1^{1,p'}} \leq c\{1+\|u\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u\|_{W_1^{1,p}}. \tag{130}$$

Portanto, pelas estimativas acima obtemos

$$\|\lambda|u|^{\alpha-1}u\|_{W_1^{1,p'}} \leq c\{1+\|u\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u\|_{W_1^{1,p}}. \tag{131}$$

Agora nosso objetivo será obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\|F(u)-F(v)\|_{W_1^{1,p'}} &= \|\lambda(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1})\|_{W_1^{1,p'}} \\
&\leq c\{1+\|u\|_{W_1^{1,p}}+\|v\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u-v\|_{W_1^{1,p}}.
\end{aligned}$$

Com efeito, sabemos que

$$\begin{aligned}
&\|\lambda(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1})\|_{W_1^{1,p'}} = \\
&\|\lambda(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1})\|_{p'} + \|\lambda(\nabla(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}))\|_{p'} + \\
&\sum_{i=1}^{n}\|\lambda|x|(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1})\|_{p'}.
\end{aligned}$$

Vamos analisar cada uma das expressões acima.

Pelo Lema 14 temos que

$$||u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}| \leq \{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|u-v|,$$

então

$$\||u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}\|_{p'} \leq \|\{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|u-v|\|_{p'}$$

e

$$\||x||u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}\|_{p'} \leq \|\{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|x||u-v|\|_{p'}.$$

Procedendo de modo análogo às estimativas anteriores encontramos

$$\|\{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|u-v|\|_{p'} \leq \||u|+|v|\|_p^{\alpha-1}\|u-v\|_p$$

e

$$\|\{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|x||u-v|\|_{p'} \leq \||u|+|v|\|_p^{\alpha-1}\||x|(u-v)\|_p.$$

A desigualdade de Minkowski nos dá

$$\begin{aligned} \|\{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|u-v|\|_{p'} &\leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^{\alpha-1}\|u-v\|_p \\ &\leq (\|u\|_{W_1^{1,p}} + \|v\|_{W_1{}^1,p)})^{\alpha-1}\|u-v\|_{W_1^{1,p}}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\{|u|+|v|\}^{\alpha-1}|x||u-v|\|_{p'} &\leq (\|u\|_p + \|v\|_p)^{\alpha-1}\||x|(u-v)\|_p \\ &\leq (\|u\|_{W_1^{1,p}} + \|v\|_{W_1^{1,p}})^{\alpha-1}\|(u-v)\|_{W_1^{1,p}}. \end{aligned}$$

Assim temos

$$||u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}| \leq (\|u\|_{W_1^{1,p}} + \|v\|_{W_1{}^1,p)})^{\alpha-1}\|u-v\|_{W_1^{1,p}}$$

e

$$\||x||u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}\|_{p'} \leq (\|u\|_{W_1^{1,p}} + \|v\|_{W_1^{1,p}})^{\alpha-1}\|(u-v)\|_{W_1^{1,p}}$$

Resta estimar $\|\lambda\nabla(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}v)\|_{p'}$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} & \|\lambda(\nabla(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}v))\|_{p'} \\ = \; & \|\lambda(\nabla(|u|^{\alpha-1}u) - \nabla(|v|^{\alpha-1}v))\|_{p'} \\ = \; & \|\lambda(\nabla(|u|^{\alpha-1})u + |u|^{\alpha-1})\nabla u - \nabla(|v|^{\alpha-1})v - |v|^{\alpha-1}\nabla v\|_{p'} \\ \leq \; & \lambda(\||u|^{\alpha-1}\nabla u - |v|^{\alpha-1}\nabla v\|_{p'} + \|\nabla(|u|^{\alpha-1})u - \nabla(|v|^{\alpha-1})v\|_{p'}) \\ \leq \; & c\||u|^{\alpha-1}\nabla u - |v|^{\alpha-1}\nabla v\|_{p'}. \end{aligned}$$

Além disso, tem-se

$$\begin{aligned} & ||u|^{\alpha-1}\nabla u - |v|^{\alpha-1}\nabla v| \\ = \; & ||u|^{\alpha-1}\nabla u - |v|^{\alpha-1}\nabla u + |v|^{\alpha-1}\nabla u - |v|^{\alpha-1}\nabla v| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |v|^{\alpha-1}|\nabla u - \nabla v| + |\nabla u||u|^{\alpha-1} - |v|^{\alpha-1}v| \\
&\leq |v|^{\alpha-1}|\nabla(u-v)| + |\nabla u||u|^{\alpha-2}|u-v| \\
&\leq |v|^{\alpha-1}|\nabla(u-v)| + |\nabla u + u|^{\alpha-1}|u-v|.
\end{aligned}
$$

Aplicando as desigualdades de Hölder e Gagliardo Niremberg obtemos

$$\||v|^{\alpha-1}|\nabla(u-v)|\|_{p'} \leq \|v\|_p^{\alpha-1}\|u-v\|_p$$

e

$$\|(|\nabla u| + u)^{\alpha-1}|u-v|\|_{p'} \leq \|(|\nabla u| + u)\|_p^{\alpha-1}\|u-v\|_p.$$

As estimativas acima implicam

$$\|\lambda(\nabla(|u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}v))\|_{p'} = c\{1 + \|u\|_{W_1^{1,p}} + \|v\|_{W_1^{1,p}}\}^{\alpha-1}\|u-v\|_{W_1^{1,p}}. \tag{132}$$

Portanto o corolário está provado. □

5 COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO PARA A EQUAÇÃO NLS

Neste capítulo vamos estudar o comportamento das soluções locais ao longo do tempo do problema do valor inicial

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda|u|^{\alpha-1}u = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \ t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{133}$$

onde λ e α são constantes conhecidas com $\alpha > 1$.

5.1 Resultados Globais

Vamos considerar a equação na forma integral

$$u(t) = S(t)u_0 + i\lambda\int_0^t S(t-t')(|u|^{\alpha-1}u)(t')dt'. \tag{134}$$

No capítulo anterior vimos que se u é solução da equação (133), então esta também é solução de (134).

5.1.1 O caso $L^2(\mathbb{R}^n)$

Para o caso $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos o seguinte teorema de boa colocação local:

Teorema 16 (Teoria Local em L^2). *Se $1 < \alpha < 1 + \frac{4}{n}$, então para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existe um $T = T(\|u_0\|_2, n, \lambda, \alpha) > 0$ e uma única solução da equação (134) no intervalo* *de tempo* $[0,T]$ *com*

$$u \in C([0,T] : L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([0,T] : L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^n)),$$

onde $r = \frac{4(\alpha+1)}{n(\alpha-1)}$.

Além disso, para todo $T' < T$ *existe uma vizinhança* V *de* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *tal que o campo* $\mathbb{F} : V \to C([0,T'] : L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^r([0,T'] : L^{\alpha+1}(\mathbb{R}^n))$ *dado por* $\tilde{u_0} \to \tilde{u}(t)$ *é Lipschitz.*

Demonstração. Ver [9] ou [11].

Vamos enunciar o teorema de boa colocação local em $H^2(\mathbb{R}^n)$ de (134) para justificarmos um argumento de densidade utilizado na demonstração da conservação das normas das soluções em L^2.

Lema 17 (Teoria Local em $H^2(\mathbb{R}^n)$)**.** *Se* α *satisfaz*

$$\begin{cases} 2 < \alpha < \frac{n}{n-4}, & se\ n \geq 5 \\ 2 < \alpha < \infty, & se\ n \leq 4. \end{cases} \tag{135}$$

Então para todo $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ *existe* $T = T(\|u_0\|_{H_2^2}, n, \lambda, \alpha) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral (134) no intervalo de tempo* $[0,T]$ *com* $u \in C([0,T] : H^2(\mathbb{R}^n))$*. Além disso, para todo* $T' < T$ *existe uma vizinhança* W *de* u_0 *em* $H^2(\mathbb{R}^n)$ *tal que a função* $\mathbb{F} : V \to C([0,T'] : H^2(\mathbb{R}^n))$ *dada por* $\tilde{u_0} \to \tilde{u}(t)$ *é Lipschitz.*

□

O lema abaixo nos fornece a lei de conservação das soluções de (133) em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Lema 18. *Se* $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *é uma solução de* (133) *fornecida pelo Teorema 16, isto é, para* $\alpha \in \left(1, 1 + \frac{4}{n}\right)$*, em um intervalo de tempo* $[0,T]$ *temos*

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2, \ \forall t \in [0,T]. \tag{136}$$

Demonstração. Vamos fazer a prova para $\alpha \in (2, 1 + \frac{1}{4n})$. Desta forma, devido ao Lema (18) podemos considerar $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, pois dada $u_0 \in L^2$ podemos encontrar uma sequência $\{u_0^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em $H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|u_0 - u_0^k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{137}$$

Assim supondo que (136) seja válido para toda $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\|u^k(t)\|_2 = \|u_0^k\|_2, \text{ para todo } t \in [0,T], \ k \in \mathbb{N}. \tag{138}$$

Por outro lado, utilizando a dependência contínua das soluções com respeito às condições iniciais em $L^2(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u^k(t) - u(t)\|_2 = 0. \tag{139}$$

Portanto por (137), (138) e (139) obtemos

$$\|u_0\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|u_0^k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|u^k(t)\|_2 = \|u(t)\|_2.$$

Desta forma vamos obter (136) para uma dada $u(x,t) = a(x,t) + ib(x,t) \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Multipliquemos (133) por $\overline{u}$, tomemos a parte imaginária e integremos em $\mathbb{R}^n$, assim

$$0 = \int Im(\overline{u} i u_t + \overline{u}\Delta u + \overline{u}\lambda|u|^{\alpha-1}u)dx. \tag{140}$$

Por um lado temos

$$Im(\overline{u} i u_t)dx = Im(i(a-ib)(\partial_t a + i\partial_t)) = a\partial_t a + b\partial_t b = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}|u|^2, \tag{141}$$

e ainda,

$$Im(\overline{u}\lambda|u|^{\alpha-1}u) = Im(\lambda|u|^\alpha) = 0. \tag{142}$$

Por outro lado, como $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, podemos utilizar a proposição 5 e obter

$$\begin{aligned} Im\left(\int \overline{u}\Delta u dx\right) &= Im\left(\int \overline{\hat{u}} \widehat{(\Delta u)} d\xi\right) \\ &= Im\left(\int \overline{\hat{u}}(2\pi i|\xi|)^2 \hat{u} d\xi\right) \\ &= Im\left(-4\pi^2 \int |\xi|^2|\hat{u}|^2 d\xi\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{143}$$

Portanto por (140), (141), (142) e (143) obtemos

$$\frac{d}{dt}\int |u|^2 dx = 0,$$

que implica na seguinte lei de conservação

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2, \ \forall t \in [0,T]. \tag{144}$$

Como queríamos mostrar.

O caso $\alpha \in (1,2)$ exige um argumento de regularização e requer mais trabalho, o leitor interessado deve consultar [9]. $\square$

Como consequência deste lema temos o seguinte teorema:

Teorema 19 (Solução $L^2(\mathbb{R}^n)$ global, caso subcrítico)**.** *Se a potência de não-linearidade $\alpha \in \left(1, 1+\frac{4}{n}\right)$, então para toda $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ a solução local de $u(x,t)$ de (133) se estende globalmente no tempo com*

$$u \in C([0,\infty) : L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q_{loc}([0,\infty) : L^p(\mathbb{R}^n)). \tag{145}$$

Demonstração. Se caso exitisse um intervalo maximal $[0,T^*)$ com $T^* < \infty$ o Teorema 16 implicaria em

$$\lim_{t \to T^*} \|u(x,t)\|_2 = \infty,$$

gerando uma contradição já que o lema anterior diz que

$$\|u(t)\|_2 = \|u_0\|_2 < \infty, \ \forall t \in [0,T^*).$$

□

5.1.2 O caso $H^1(\mathbb{R}^n)$

Agora vamos analisar o caso H^1. No capítulo anterior provamos que o problema (134) é localmente bem posto em $H^1_1(\mathbb{R}^n)$ se α satisfaz:

$$\begin{cases} 1 < \alpha < \frac{n+2}{n-2}, \ \text{se } n > 2 \\ 1 < \alpha < \infty, \ \text{se } n = 1,2. \end{cases}$$

Vamos considerar soluções H^1 locais $\alpha \in \left(1, 1+\frac{4}{n-2}\right)$ se $n \geq 3$ ou $1 < \alpha \leq \infty$ para $n = 1,2$, onde o tempo de existência T depende da condição inicial, isto é, $T = T(\|u_0\|_{H^1})$.

Vamos obter agora outra fórmula de conservação de energia.

Lema 20. *Se u é uma solução no intervalo $[0,T)$ de (133) então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_x u_0|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}|u_0|^{\alpha+1} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla_x u(x,t)|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1} \right) dx,$$

para todo $t \in [0,T)$.

Demonstração. Multiplicando (133) por $-\partial_t \overline{u}$ temos

$$-\partial_t \overline{u} i u_t - \partial_t \overline{u} \Delta u - \partial_t \overline{u} \lambda |u|^{\alpha-1} u = 0.$$

Consideremos $u(x,t) = a(x,t) + ib(x,t)$, temos as seguintes relações

$$Re(-\partial_t \overline{u} i u_t - \partial_t \overline{u} \Delta u - \partial_t \overline{u} \lambda |u|^{\alpha-1} u) = Re(-i|\partial_t u|) = 0,$$

$$\begin{aligned}
Re\left(-\partial_t\overline{u}\Delta u\right) &= Re\left(-\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2 a + i\partial_{x_j}^2 b\right)(\partial_t a - i\partial_t b)\right)\\
&= -\left(\sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2 a\partial_t a + \partial_{x_j}^2 b\partial_t b\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\partial_{x_j}^2 a\partial_{x_j t}^2 a + \partial_{x_j} b\partial_{x_j t} b\\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}(\partial_{x_j} a)^2 + (\partial_{x_j} b)^2 \qquad (146)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Re(-\partial_t\overline{u}\lambda|u|^{\alpha-1}u) &= -\lambda|u|^{\alpha-1}(a\partial_t a + b\partial_t b)\\
&= -\lambda|u|^{\alpha-1}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2\\
&= \frac{-1}{2}\lambda||u|^2|^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{d}{dt}|u|^2\\
&= \frac{-1}{2}\frac{2\lambda}{\alpha+1}|u|^{\alpha+1}. \qquad (147)
\end{aligned}$$

Assim, por (146) e (147) ao tomarmos a parte real de (133) e integrar em $\mathbb{R}^n$ obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla_x u(x,t)|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1}\right)dx = 0.$$

Denotando

$$E(u(t)) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla_x u(x,t)|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1}\right)dx,$$

temos que $E(t)$ é constante no tempo, ou seja,

$$E(u_0) = \int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla_x u(x,t)|^2 - \frac{2\lambda}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1}\right)dx, \qquad (148)$$

para todo $t \in (0,T)$, onde $(0,T)$ é o intervalo na qual é definida a solução u. □

Teorema 21. *Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, então a solução u associada à u_0 se estende globalmente no tempo se*

1. $\lambda < 0$
2. $\lambda > 0$ *e* $\alpha < 1 + \frac{4}{n}$
3. $\lambda > 0,\ \alpha = 1 + \frac{4}{n}$ *e* $\|u_0\|_2 < c_0$
4. $\lambda > 0,\ \alpha > 1 + \frac{4}{n}$ *e* $\|u_0\|_{1,2} \cong \|u_0\|_2 + ||\nabla u||_2 < \rho$.

para c_0 e ρ suficientemente pequenos.

Demonstração. **Caso 1.** Vamos primeiro supor $\lambda < 0$, então por (148) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(x,t)|^2 \leq E(u_0), \ \forall t \in (-T,T),$$

logo

$$\sup_{[0,T]} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_x u(x,t)|^2 \leq E(u_0), \ \forall t \in (-T,T),$$

então via (144) temos que

$$\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_{1,2}^2 \leq E(u_0) + \|u_0\|_2^2.$$

Assim podemos estender a solução local u para todo $\mathbb{R}$.

Caso 2. No caso $\lambda > 0$ usando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg temos para todo $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\alpha+1} &\leq c\|\nabla_x u(t)\|_2^{\theta}\|u(t)\|_2^{1-\theta} \\ &= c\|\nabla_x u(t)\|_2^{\theta}\|u_0\|_2^{1-\theta}, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{\alpha+1} = \theta\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1-\theta}{2}\right),$$

ou

$$\theta = \frac{n(\alpha-1)}{2(\alpha+1)}.$$

Desta forma temos que

$$\|u(t)\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \leq c\|\nabla_x u(t)\|_2^{\frac{n(\alpha-1)}{2}}\|u_0\|_2^{\left[(\alpha+1)-\frac{n(\alpha-1)}{2}\right]}.$$

Esta desigualdade combinada com (148) nos prova que se $E(u_0) < \infty$, então

$$\|\nabla_x u(t)\|_2^2 \leq |E(u_0)| + c_\alpha\|u_0\|_2^{\left[(\alpha+1)-\frac{n(\alpha-1)}{2}\right]}\|\nabla_x u(t)\|_2^{\frac{n(\alpha-1)}{2}}. \tag{149}$$

Caso 2.1. Assumindo que $\alpha \in \left(1, 1+\frac{4}{n}\right)$, então $\frac{n(\alpha-1)}{2} < 2$, assim com a notação $y = y(t) = \|\nabla_x u(t)\|_2$ temos

$$y^2 \leq |E(u_0)| + c\|u_0\|_2^{\left[(\alpha+1)-\frac{n(\alpha-1)}{2}\right]}y^{2-\gamma}, \tag{150}$$

com $\gamma = 2 - \frac{n(\alpha-1)}{2} \in (0,2)$.

Defina $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, por

$$g(y) = \frac{y^2}{|E(u_0)| + c_\alpha\|u_0\|_2^{\left[(\alpha+1)-\frac{n(\alpha-1)}{2}\right]}y^{2-\gamma}}.$$

Temos que $\lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty$, $g(0) = 0$, $g'(y) \geq 0$ e g é contínua, assim pelo Teorema do Valor Intermediário que existe $y_m > 0$ tal que

$$\begin{cases} g(y) \leq 1; \ 0 \leq y \leq y_m, \\ g(y) > 1; \ y \geq y_m. \end{cases} \tag{151}$$

Assim a desigualdade (150) é satisfeita somente se $0 \leq y \leq y_m$.

Logo tomando $M = y_m$ tem-se

$$\sup_{[0,T]} \|\nabla_x u(t)\|_2 \leq M.$$

Portanto a solução local u pode ser estendida globalmente.

Caso 2.2. Agora suponha que $\alpha \in \left(1 + \frac{4}{n}, \frac{n+2}{n-2}\right)$. Seja $\delta = \|u_0\|_2$, assim por (149) temos

$$y^2(t) \leq E(u_0) + c\delta^{\left[(\alpha+1) - \frac{n(\alpha-1)}{2}\right]} y(t)^{\frac{n(\alpha-1)}{2}}.$$

Como $n\frac{(\alpha-1)}{2} > \frac{n(1+\frac{4}{n}-1)}{2} > 2$, assim podemos escrever

$$y^2(t) \leq E(u_0) + c\delta^{\left[(\alpha+1) - \frac{n(\alpha-1)}{2}\right]} y(t)^{2+\nu}, \tag{152}$$

onde $\nu = n\frac{(\alpha-1)}{2} - 2 > 0$.

Fazendo $t = 0$ temos

$$E(u_0) \geq y^2(0) - c\delta^{\left[(\alpha+1) - \frac{n(\alpha-1)}{2}\right]} y(0)^{2+\nu}. \tag{153}$$

Assim para $\|\nabla u_0\|_2$ e $\|u_0\|_2$ suficientemente pequenos, digamos $\|u_0\| \leq \rho_1$, temos que $E(u_0) > 0$.

Defina $p : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $p(y) = y^2$ e $q : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por $q(y) = c\delta^{\left[(\alpha+1) - \frac{n(\alpha-1)}{2}\right]} y^{2+\nu}$, desta forma existe um y_1 tal que

$$\begin{cases} p(y) \geq q(y); \ 0 \leq y \leq y_1, \\ p(y) < q(y); \ y > y_1. \end{cases} \tag{154}$$

Além disso, caso $E(u_0)$ seja suficientemente pequeno, digamos $E(u_0) \leq \rho_2$, que implica em $\|\nabla u_0\|_2 \leq \rho_2$, existem y_m e y_n, com $0 < y_m < y_n$ tais que

$$\begin{cases} p(y) \leq E(u_0) + q(y); \ y \in [0, y_m] \cup [y_n, +\infty) \\ p(y) > E(u_0) + q(y); \ y \in [y_m, y_n]. \end{cases} \tag{155}$$

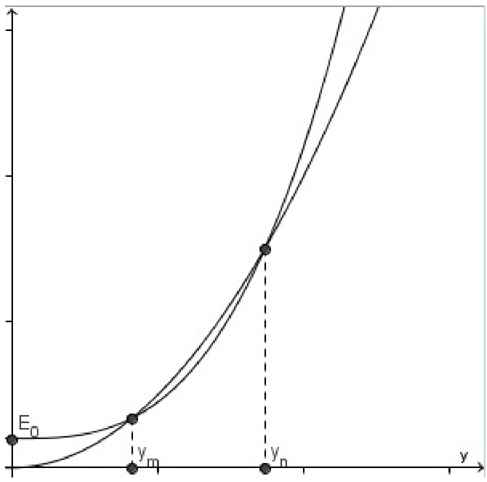
Defina $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$. Assim temos que

$$y^2 \leq E(u_0) + c\delta^{\left[(\alpha+1) - \frac{n(\alpha-1)}{2}\right]} y^{2+\nu}, \tag{156}$$

é satisfeita para $\|u_0\|_{H_1^1} \leq \rho$ somente se $y \in [0, y_m] \cup [y_n, +\infty)$. Como $y(t) = \|\nabla u(t)\|_2$ e $u(x,t) \in C([0,T]; H_1^1(\mathbb{R}^n))$ temos que (156) é satisfeita somente quando $y \in [0, y_m]$.

Logo tomando $M = y_m$ temos que $y(t) = \|\nabla_x u(t)\|_2 \leq M$, então podemos estender soluções locais para todo o intervalo de tempo como anteriormente.

Gráfico 1: Gráficos de $p(y)$ e $q(y)$



Caso 2.3. Por fim suponha que $\alpha = 1 + \frac{4}{n}$ então temos de (149) que

$$y^2 \leq E(u_0) + c\|u_0\|_2^{\frac{4}{n}} y^2,$$

ou ainda,

$$(1 - c\|u_0\|_2^{\frac{4}{n}}) y^2 \leq E(u_0),$$

assim se $\|u_0\|_2 \leq \frac{1}{c^{\frac{n}{4}}}$, temos que a inequação acima tem solução contida num intervalo limitado, desta forma temos

$$\|\nabla_x u(x,t)\|_2 \leq M,$$

para um certo $M > 0$, então neste caso podemos estender a solução local u associada à u_0 para todo o tempo.

$\square$

5.2 Formação de Singularidades

Nesta seção, iremos mostrar que os resultados globais provados no Teorema anterior são ótimos, ou seja, quando não são satisfeitas as suas hipóteses pode-se mostrar um resultado de explosão em tempo finito, isto é, existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e $T < \infty$ tal que a solução correspondente de (133) satisfaz

$$\lim_{t \uparrow T} \|\nabla u(t)\|_2 = \infty. \tag{157}$$

Para simplificar nossa exposição iremos assumir $\lambda = 1$. Na prova de (157) utilizaremos o seguinte lema:

Lema 22. *Seja $u(t)$ uma solução em $C([0,T] : H^1(\mathbb{R}^n))$ do problema do valor inicial (133) com $\lambda = 1$, então*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u(x,t)|^2dx = 4Im\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u}\partial_r udx, \tag{158}$$

com $r = |x|$, $r\partial_r u = \sum_{i=1}^n \partial_{x_j} ux_j$ e

$$\frac{d}{dt}Im\left(\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u}\partial_r udx\right) = 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2dx + \left(\frac{2n}{\alpha+1} - n\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\alpha+1}dx. \tag{159}$$

Demonstração. Multipliquemos (133) por $2\overline{u}$ e tomemos a sua parte imaginária, assim temos

$$Im(2\overline{u}iu_t + 2\overline{u}\Delta u - 2\overline{u}|u|^{\alpha-1}u) = 0,$$

assim

$$\frac{d}{dt}|u|^2 + 2div(Im(\nabla u\overline{u})) = 0,$$

multiplicando esta expressão por $|x|^2$ e integrando em $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int |u|^2|x|^2 &= -2\int |x|^2 div(Im(\nabla u\overline{u})) \\
&= 2\int \sum_{i=1}^n Im(\overline{u}\partial_{x_j}u)2x_jdx \\
&= 4\int \sum_{i=1}^n Im(\overline{u}\partial_{x_j}u)x_j \\
&= 4\int Im(r\overline{u}u_r)dx.
\end{aligned}$$

onde na segunda passagem fizemos integração por partes.

Vamos agora obter a segunda expressão. Multipliquemos (133) por $2r\partial_r\overline{u}$, tomemos a parte real e integremos em $\mathbb{R}^n$ e temos

$$\int Re(2r\partial_r\overline{u}iu_t + 2r\partial_r\overline{u}\Delta u + 2r\partial_r\overline{u}\lambda|u|^{\alpha-1}u)dx = 0.$$

Vamos analisar cada expressão separadamente:

$$\begin{aligned}
\int Re(2r\partial_r\overline{u}iu_t)dx &= 2i\int r(\partial_r\overline{u}u_t - \partial_r u\partial_t\overline{u})dx \\
&= -2Re\left(\int r\partial\overline{u}\delta u\right) - 2Re\int r\partial_r\overline{u}|u|^{\alpha-1}udx
\end{aligned}$$

Por outro lado fazendo integração por partes:

$$
\begin{aligned}
& i\int r(\partial_r\overline{u}u_t - \partial_r u\partial_t\overline{u})dx = \\
= \quad & i\int\sum_{i=1}^{n} x_j(\partial_{x_j}\overline{u}\partial_t u - \partial_{x_j}u\partial_t c)dx \\
= \quad & i\int\sum_{i=1}^{n} x_j\left(\frac{d}{dt}\partial_{x_j}\overline{u}u - \partial_{x_j}(u\partial_t\overline{u})\right)dx \\
= \quad & i\frac{d}{dt}\int ru\partial_r\overline{u}dx + ni\int u\partial_t\overline{u}dx \\
= \quad & \frac{d}{dt}(i\int r\partial_r\overline{u}dx) + n\int u(\delta\overline{u} + |u|^{\alpha-1}\overline{u})dx.
\end{aligned}
$$

Na última passagem usamos (133).

Integrando por partes tem-se

$$
\begin{aligned}
2Re\left(\int r\partial\overline{u}\Delta u\right) &= 2Re\left(\int\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j}\overline{u}\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}^2 udx\right) \\
&= -2Re\left[\int\sum_{k=1}^{n}\left(\partial_{x_k}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j}\overline{u}\right)\partial_{x_k}u\right)dx\right] \\
&= -2Re\left[\int\sum_{k=1}^{n}\left(((\partial_{x_k}x_j)\partial_{x_j}\overline{u} + \sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j x_k}^2\overline{u})\partial_{x_k}u\right)dx\right] \\
&= -2Re\left(\int\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}\overline{u}\partial_{x_k}udx\right) \\
&\quad -2Re\left(\int\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_k x_j}^2\overline{u}\partial_{x_k}udx\right),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
2Re\left(\int r\partial\overline{u}\Delta u\right) &= -2\int|\nabla u|^2dx - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int x_j\partial_{x_k}u\partial_{x_k x_j}^2\overline{u} \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int x_j\partial_{x_k}\overline{u}\partial_{x_k x_j}^2 u \\
&= -2\int|\nabla u|^2dx + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int\partial_{x_k}\overline{u}\partial_{x_j}(x_j\partial_{x_k}u)dx \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int x_j\partial_{x_k}\overline{u}\partial_{x_k x_j}^2 u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -2\int |\nabla u|^2dx + \int \partial_{x_k}\overline{u}(\partial_{x_j}u + \partial^2_{x_kx_j}u) \\
&\quad -\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int x_j\partial_{x_k}\overline{u}\partial^2_{x_kx_j}u \\
&= -2\int |\nabla u|^2dx + n\int |\nabla u|^2dx + \\
&\quad + \int x_j\partial^2_{x_kx_j}u\partial_{x_k}\overline{u} \\
&= (n-2)\int |\nabla u|^2dx.
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
2Re\left(\int |u|^{\alpha-1}ru\partial_r\overline{u}dx\right) &= 2Re(\int |u|^{\alpha-1}u\sum_{j=1}^{n}x_j\partial_{x_j}\overline{u}dx) \\
&= \int x_j\frac{(|u|^{\alpha-1})}{2}(\partial_{x_j}u\overline{u} + u\partial_{x_j}\overline{u})dx \\
&= \frac{2}{\alpha+1}\int x_j\partial_{x_j}[(|u|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}]dx \\
&= \frac{2n}{\alpha+1}\int |u|^{\alpha+1}.
\end{aligned}
$$

Por fim, combinando as três igualdades acima obtemos

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_r udx = 2\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(x,t)|^2dx + \left(\frac{2n}{\alpha+1} - n\right)\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^{\alpha+1}dx.
$$

Como queríamos demonstrar.

$\square$

Teorema 23. *Seja u uma solução para problema do valor inicial (133) em $C([0,T]:H^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(|x|^2dx))$ com $\lambda=1$, fornecida pelo Corolário 15. Assuma que a condição inicial u_0 e a não linearidade α satisfaçam as seguintes condições:*

(i) $\int\left(|\nabla u_0|^2 - \frac{2}{\alpha+1}|u_0|^{\alpha+1}\right)dx = E(u_0) = E_0 < 0$;

(ii) $\alpha \in \left(1+\frac{4}{n}, 1+\frac{4}{n+2}\right)$,

então existe $T^* > 0$ tal que

$$
\lim_{t\to T^*}\|\nabla u(t)\|_2 = \infty. \tag{160}
$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração em alguns passos

Suponha que $Im\left(\int r\overline{u_0}\partial_r u_0dx\right) < 0$.

Defina a função

$$f(t) = -Im \int r(\partial_r u\overline{u})(x,t)dx. \tag{161}$$

Por hipótese temos que $f(0) > 0$ assim o Lema (22) implica em

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx + \left(\frac{2n}{\alpha+1} - n\right)\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\alpha+1}dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx + n\left(\frac{\alpha+1}{2} - 1\right)\frac{2}{\alpha+1}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\alpha+1}dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx + n\left(\frac{\alpha+1}{2} - 1\right)\left(\int |\nabla u(x,t)|^2 dx - E_0\right) \\
&= -\left[2 - n\left(\frac{\alpha+1}{2} - 1\right)\right]\int |\nabla u(x,t)|^2 dx - n\left(\frac{\alpha+1}{2} - 1\right)E_0 \\
&\geq M\|\nabla u(x,t)\|_2^2, \qquad (162)
\end{aligned}$$

onde $M = n\left(\frac{\alpha+1}{2} - 1\right) - 2 > n\left(\frac{2+\frac{4}{n}}{2} - 1\right) - 2 = n + 2 - 3 \geq 0$, pois $\alpha > 1 + \frac{4}{n}$. Assim $f(t)$ é uma função não decrescente, e em particular $f(t) \geq f(0) > 0$ para todo $t > 0$. Ainda pelo Lema 22 segue

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u(x,t)|^2 dx &= 4Im\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u}\partial_r u dx \qquad (163) \\
&= -4f(t) < 0. \qquad (164)
\end{aligned}$$

Assim $h(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u(x,t)|^2 dx$ é uma função decrescente com

$$h(t) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u_0|^2 dx = h(0). \tag{165}$$

Além disso a desigualdade de Cauchy-Schwartz nos fornece

$$\begin{aligned}
f(t) &= -Im\int r(\partial_r u\overline{u})(x,t)dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2|u(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\partial_r u|^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= h(t)^{\frac{1}{2}}\left(\int |\partial_r u|^2(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (166) \\
&\leq h(0)^{\frac{1}{2}}\|\nabla u(x,t)\|_2.
\end{aligned}$$

Desta forma combinando (162), (166) e (165) concluímos que f satisfaz

$$\begin{cases} f'(t) \geq \frac{M}{h(0)}f(t)^2 \\ f(0) > 0 \end{cases}$$

Assim temos

$$\frac{f'(t)}{f(t)^2} \geq \frac{M}{h(0)},$$

que implica em

$$\int_0^t \frac{f'(s)}{f(s)^2} ds \geq \int_0^t \frac{M}{h(0)} ds,$$

mas como $\frac{f'(s)}{f(s)^2} = \frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{f(s)}\right)$, temos que

$$\frac{1}{f(t)} + \frac{1}{f(0)} \geq \frac{M}{h(0)} t,$$

ou equivalentemente,

$$f(t) \geq \frac{h(0)f(0)}{h(0) - Mf(0)t}.$$

Resumindo, obtemos

$$(h(0))^{\frac{1}{2}} \|\nabla u(x,t)\|_2 \geq f(t) \geq \frac{h(0)f(0)}{h(0) - Mf(0)t}.$$

Assim como $\frac{h(0)}{Mf(0)} > 0$ ao tomarmos $T^* = \frac{h(0)}{Mf(0)} > 0$ obtemos o resultado.

Agora vamos considerar o caso em que $Im\left(\int r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx\right) \geq 0$.

De (166) temos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} Im\left(\int r\overline{u}\partial_r u dx\right) = \\
& 2\int |\nabla u(x,t)|^2 dx + \left(\frac{2n}{\alpha+1} - n\right)\int |u(x,t)|^{\alpha+1} dx \\
= \;& 2\left(E_0 + \frac{2}{\alpha+1}|u(x,t)|^{\alpha+1}\right) + \left(\frac{2n}{\alpha+1} - n\right)\int |u(x,t)|^{\alpha+1} dx \\
= \;& 2E_0 + \left(\frac{2(n+2)}{\alpha+1} - n\right)\int |u(x,t)|^{\alpha+1} dx \leq 2E_0,
\end{aligned}$$

pois como $\alpha > 1 + \frac{4}{n}$, então

$$\frac{2(n+2)}{\alpha+1} - n \leq \frac{2(n+2)}{2+\frac{4}{n}} - n = 0. \tag{167}$$

Como $E_0 < 0$ existe $\hat{t} > 0$ tal que

$$Im\left(\int r\overline{u}\partial_r u(x,\hat{t}) dx\right) < 0, \tag{168}$$

e assim caímos no caso anterior.

$\square$

Vamos agora ao caso crítico:

Teorema 24. *Seja $u \in C([0,T] : H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(|x|^2dx))$ uma solução de (133) com $\alpha = 1 + \frac{4}{n}$ obtida no Corolário 15 tal que a condição inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(|x|dx)$ satisfaça uma das condições abaixo:*

(i)$E_0 < 0$,

(ii)$E_0 = 0$ e $Im \int r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx < 0$,

(iii)$E_0 > 0$ e $Im \int r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx < -\sqrt{E_0}\||x|u_0\|_2$.

Então existe um T para o qual vale

$$\lim_{t\to T} \|\nabla u(t)\|_2 = \infty. \tag{169}$$

Demonstração. Como $\alpha = 1 + \frac{4}{n}$, então $n\left(1 - \frac{2}{\alpha+1}\right) = \frac{4}{\alpha+1}$.

Assim podemos reescrever (159) como

$$\frac{d}{dt} Im \left(\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u}\partial_r u dx \right) = 2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x,t)|^2 dx - \frac{2}{\alpha+1} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^{\alpha+1} dx \right) = 2E_0.$$

Integrando esta igualdade em $(0,t)$ obtemos

$$Im \left(\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u}\partial_r u dx \right) = Im \left(\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx \right) + 2tE_0,$$

que combinada com (158) nos fornece

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x,t)|^2 dx = 4Im \int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx + 8tE_0. \tag{170}$$

Integrando (170) em $(0,t)$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x,t)|^2 dx = \||x|u_0\|_2^2 + 4tIm \int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx + 4t^2 E_0. \tag{171}$$

Vamos analisar a expressão acima como um polinômio em t, assim defina

$$p(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 |u(x,t)|^2 dx = \||x|u_0\|_2^2 + 4tIm \int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx + 4t^2 E_0. \tag{172}$$

Agora suponha que não ocorra a explosão

$$\lim_{t\to T} \|\nabla u(t)\|_2 = \infty, \tag{173}$$

para todo T na qual a solução esteja definida, então a solução local u pode ser estendida globalmente.

O discriminante de $p(t)$ é

$$\Delta = 16\left(Im\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx\right)^2 - 16E_0\||x|u_0\|_2^2. \tag{174}$$

Afirmamos que existe um T tal que

$$\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u(x,t)|^2dx = 0. \tag{175}$$

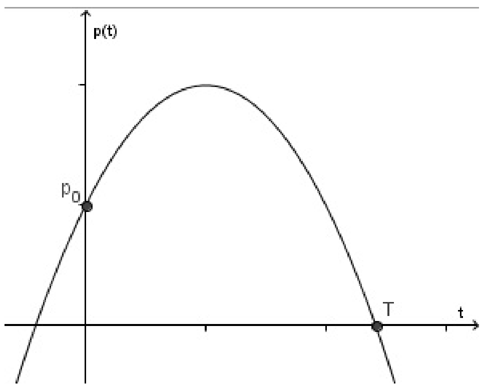
Provemos esta afirmação em alguns casos.

Primeiramente se $E_0 < 0$ (174) nos diz que $\Delta > 0$, assim $p(t)$ tem duas soluções reais. Como $p(0) = \||x|u_0\|_2^2 > 0$, existe $T^* > 0$ (ver figura 4.2) tal que

$$p(T) = \int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u(x,T)|^2dx = 0. \tag{176}$$

Como por hipótese $u \in C([0,T] : H^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(|x|^2dx))$, então obtemos (175).

Gráfico 2: Gráfico de $p(t)$



Já se $E_0 > 0$ e $Im\int r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx < -\sqrt{E_0}\||x|u_0\|_2$, então $\Delta > 0$, assim $p(t)$ tem duas raízes reais e tomando

$$T^* = \frac{-4Im\int r\overline{u_0}\partial_r u_0dx + 4(\left(Im\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0 dx\right)^2 - E_0\||x|u_0\|_2^2)^{\frac{1}{2}}}{8E_0} > 0$$

tem-se que $p(T^*) = 0$ (ver figura 4.3). Portanto obtemos (175).

Enfim, se $E(0) = 0$ e $Im\int r\overline{u_0}\partial_r u_0dx < 0$, então

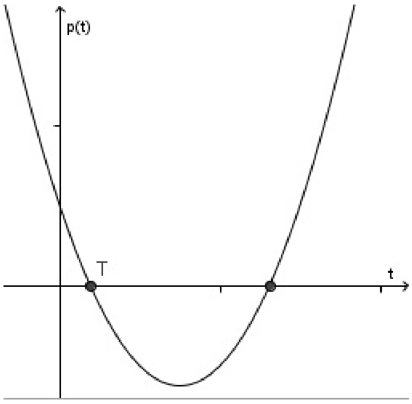
$$p(t) = \int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u(x,t)|^2dx = \||x|u_0\|_2^2 + 4tIm\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0dx, \tag{177}$$

Assim tomando

$$T = -\frac{\||x|u_0\|_2^2}{4Im\int_{\mathbb{R}^n} r\overline{u_0}\partial_r u_0dx},$$

obtemos nossa afirmação.

Gráfico 3: Gráfico de $p(t)$



Agora por (144) e pela desigualdade de Weil-Heisenberg obtemos

$$0 < \|u_0\|_2^2 = \|u\|_2^2 \leq \frac{2}{n}\||x|u\|_2\|\nabla u\|_2. \tag{178}$$

Ora, como $\lim_{t\to T}\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|u(x,t)|^2dx = 0$, a igualdade acima resultaria em

$$\lim_{t\to T}\|\nabla u(t)\|_2 = \infty, \tag{179}$$

uma contradição, logo existe um T^* tal que vale

$$\lim_{t\to T^*}\|\nabla u(t)\|_2 = \infty. \tag{180}$$

$\square$

REFERÊNCIAS

1. Evans, L.C., Partial Diferential Equations. American Mathematical Society, 2010.

2. Friedman, A.,Partial Diferential Equations. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.

3. Folland, G.B., Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 1999.

4. Glassey, R.T.,On the blowing up of solutions to the Cauchy Problem for nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Phys. 18(1977), 1794-1797.

5. Gondar, J., Cipolatti, R., Iniciação à Física Matemática: Modelagem de Processo e Métodos de Solução, IMPA 2011.

6. Grafakos, L. Classical Fourier Analysis(Graduate Texts in Mathematics).Springer, 2008.

7. Hayashi,N.;Nakamitsu,K. and Tsutsumi, M.Nonlinear Schrödinger equations in weighted Sobolev Spaces. Funkcial. Ekvac. 31(1988), 363-381.

8. Lima, E.L.Espaços Métricos, IMPA, 1977.

9. Linares, F., Ponce, G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations, Springer, 2007.

10. Nawa, Tsutsumi, M.On Blow up for the pseudo conformal invariant nonlinear Schrödinger equation. Funk Ekv. 32(1989), 417-428.

11. Santos, A.S. Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaços Euclidianos. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, 2009.

12. Triebe,H.Spaces of distributions with weights: Multipliers in L^p-spaces with weights,. Math. Nachr., 78 (1977), 339-355.

13. Yosida, K.Functional Analysis, Springer-Verlag, 1980.