UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
KARLA KATERINE BARBOZA DE LIMA

O Problema de Carleson para a Equação Linear de Schrödinger

Maceió
2011

KARLA KATERINE BARBOZA DE LIMA

O Problema de Carleson para a Equação Linear de Schrödinger

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 04 de Outubro de 2011 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adán José Corcho Fernandéz

Maceió
2011

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

L732p Lima, Karla Katerine Barboza de.
O problema de Carleson para a equação linear de Schrödinger / Karla Katerine Barboza de Lima. – 2011.
46 f.

Orientador: Adán José Corcho Fernandéz.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 45-46.

1. Operador maximal. 2. Schrödinger, Equações de. 3. Convergência pontual. 4. Carleson, Problemas de. I. Título.

CDU: 517.95

O Problema de Carleson para a Equação Linear de Schrödinger

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernandéz (UFRJ)
Orientador

Prof. Dr. Júlio Cesar de S. Almeida (UFAL)

Prof. Dr. Xavier Carvajal (UFRJ)

Agradecimentos

Começo agradecendo àqueles que são meu alicerce: minha família. À minha mãe, Maria de Fátima, que durante minha infância e adolescência sempre esteve presente na minha educação, exigindo meu máximo e não aceitando menos que isso. Ao meu pai, José Carlos, que é meu exemplo e motivação. À ele que já percorreu este árduo caminho, passando por grandes dificuldades e mesmo assim chegou lá(e por que eu, que não tenho nem metade das responsabilidades que ele tinha não posso também conseguir?). Ao meu irmão, Carlos, que é meu mais antigo amigo e companheiro. Que como irmão mais velho me protegeu e me ensinou e que ainda hoje, junto à sua querida esposa Leila Amanda, me acolhe no seu lar para me divertir e faz com que eu me esqueça dos problemas. Ao meu marido Adriano Barbosa, pela sua extrema dedicação e companheirismo, pela ajuda técnica no decorrer deste trabalho(evitando que eu jogasse na parede alguns computadores!), e por todo suporte que tem me dado nesses anos. Aos meus sogros, Cícero Barbosa e Cícera Oliveira, por terem me acolhido no seu lar quando era conveniente para mim. Amo imensamente todos vocês.

Aos meus professores do IM UFAL, da graduação e da pós-graduação, em especial àqueles que deixaram suas marcas e algum exemplo para eu seguir: Francisco Vieira Barros, Sinvaldo Gama, Márcio Henrique Batista, Krerley Irraciel, Marcos Petrúcio, Adán Corcho e meu pai, José Carlos . Aos que foram meu orientadores durante minha graduação: Krerley Irraciel, Marcos Petrúcio e José Carlos, meus agradecimentos mais sinceros. Obrigada pela eterna motivação e apoio. Ao professores Dímas Martinez, Luana Contiero, André Contiero e Elisa Sena, que não foram meus professores, mas me acolhem e incentivam. Acima de tudo, agradeço pela amizade dedicada à mim por estes.

Aos meus amigos, que entendem a distância e com os quais sempre posso contar. Em especial aos meus primos, que me divertem tanto; às minhas queridas Cibelly Procópio, Cléa Oliveira e Ingrid Barboza, meninas vocês são incríveis. À Adriana Pitta, pelo amor e torcida. Àquelas que estão comigo desde a época do cursinho pré-vestibular: Marianna Tenório, Andréa Tatiane e Kátia Macário, que juntas torcemos e vimos nossos sonhos se realizando. Aos meus amigos do laboratório Calamgo, Douglas Cedrim, Michel Alves, Ailton Felix, Fabrício Omena, Leandro Botelho, Nayane Freitas, Lucas Lins, Augusto Ícaro e Tainá Ribeiro pela amizade e diversão. Aos meus amigos matemáticos e companheiros de estudo: Márcio Cavalcante, Carlos Gonçalves, Ádina Rocha, Adalgisa Mendonça e Isnaldo Isaac.

Ao professor Ádan Corcho, por ter aceitado me orientar e me propor um excelente trabalho. Obrigada pelo suporte para que eu avançasse nos meus estudos e pelo tempo desprendido, sei o quanto ele era escasso. Obrigada pelo incentivo e pela amizade.

Aos professores Júlio Cesar e Xavier Carvajal por terem aceitado participar da banca, corrigir o trabalho e dar sugestões.

A agência de Fomento Fundação de Amparo a Pesquisa de Alagoas pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho demonstraremos, em detalhes, a seguinte estimativa

$$\left(\int |S^* f(x)|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2} \leq c\|f\|_{H^s}$$

do operador maximal

$$S^* f(x) := \sup_{t>0} |S_t f(x)| = \sup_{t>0} |u(x,t)|$$

associado às soluções $u(x,t)$ da equação linear de Schrödinger, apresentada por L. Vega em [1], para o caso $s > 1/2$.
Além disso, como consequência, daremos uma prova alternativa ao seguinte problema proposto por Carleson: para quais valores reais do índice s a solução

$$S_t f(x) := u(x,t) = c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi^2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

da Equação Linear de Schrödinger converge em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$ (x - $q.t.p$) para o dado inicial f?

Palavras-chave: Operador maximal, convergência pontual, equação de Schrödinger, problema de Carleson.

Abstract

In this work we demonstrate, in details, the following estimative

$$\left(\int |S^*f(x)|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2} \leq c\|f\|_{H^s}$$

of the maximal operator

$$S^*f(x) := \sup_{t>0} |S_t f(x)| = \sup_{t>0} |u(x,t)|$$

associated to solutions $u(x,t)$ of the Schrödinger linear equation, by L. Vega in [1], for $s > 1/2$. In addition, as a consequence, we will give an alternative proof of the following problem proposed by Carleson: for what real values of index s the solution

$$S_t f(x) := u(x,t) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi^2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

of the Schrödinger linear equation converges almost everywhere in $x \in \mathbb{R}$ (x - $a.e$) to the initial data?

Keywords:: Maximal operator, pointwise convergence, Schödinger's equation, Carleson's problem.

Sumário

1 *Introdução*

1.1 A Equação de Schrödinger

A equação de Schrödinger foi formulada pelo físico austríaco Erwin Schrödinger (1887-1961) em 1926. O modelo matemático obtido por Schrödinger é usado na mecânica quântica para descrever a evolução temporal do estado quântico de um sistema físico.

Esta equação se apresenta de diversas formas dependendo do contexto físico. Por exemplo, no estudo da interação de uma partícula de massa m com um potencial de energia $V(x,t)$ no instante t e na posição espacial $x = (x_1, x_2, x_3)$ o modelo é dado pela equação diferencial

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt}(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,t) + V(x,t)\psi(x,t), \tag{1.1}$$

onde $h = 2\pi\hbar$ é a constante de Plank, Δ denota o operador Laplace em $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

e $\psi(x,t)$ é a função de onda da partícula na posição x no instante t. Este modelo nos permite conhecer a função de onda $\psi(x,t)$ em qualquer instante de tempo a partir de um estado inicial $\psi(x,0)$.

No caso em que o potencial V é independente do tempo, $V = V(x)$, a procura por soluções de (1.1) do tipo *standing waves*, ou seja, ondas na forma

$$\psi(x,t) = \varphi(x)e^{-ikt/\hbar},$$

nos leva a um problema de auto-valores interessante. De fato, nesse contexto o operador $i\hbar\frac{d\psi}{dt}$ é substituído pelo operador de multiplicação $k\varphi$ obtendo-se assim o seguinte problema de auto-valores para φ

$$k\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V(x)\varphi(x). \tag{1.2}$$

Encerramos nossa discusão, mostrando como o caso unidimensional de (1.2) pode ser observado através da equação do oscilador harmônico da mecânica clássica. Com efeito, seja φ solução da equação do oscilador harmônico, ou seja, φ é solução da equação diferencial ordinária

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\varphi(x) = 0, \tag{1.3}$$

onde λ é o comprimento de onda. Segundo a relação de Broglie $\lambda = \dfrac{h}{mv(x)}$, onde $v(x)$ denota a velocidade, e substituindo esta igualdade na equação (1.3) obtemos

$$v^2(x)m^2\varphi(x) = -\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x). \tag{1.4}$$

Por outro lado, não havendo energia dissipada a energia mecânica do oscilador se conserva, sendo esta obtida pela soma da energia cinética com a potencial, isto é,

$$E_m = \frac{mv^2(x)}{2} + V(x),$$

de onde temos que

$$v^2(x) = \frac{2\big(E_m - V(x)\big)}{m}. \tag{1.5}$$

Agora, substituindo (1.5) em (1.4) obtemos que

$$E_m\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x) + V(x)\varphi(x),$$

sendo esta equação similar a (1.2) com auto-valor E_m.

O leitor interesssado poderá encontrar informações mais profundas sobre a dedução da equação de Schrödinger e a bela história que envolve o surgimento da mecânica quântica nos textos [2], [3],[4],[5] e [6].

1.2 O problema de Carleson

Após a descoberta da equação de Schrödinger muitas pesquisas, tanto de interesse físico como matemático, em torno desse importante modelo têm sido desenvolvidas por vários pesquisadores do mundo todo.

O trabalho que aqui desenvolveremos versa sobre o problema de Cauchy associado à equação linear de Schrödinger unidimensional sem potencial, ou seja, ao modelo dado pela equação diferencial parcial

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), & (x,t) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.6}$$

onde por simplicidade matemática são desconsideras as constantes físicas envolvidas no modelo original. Consideraremos o dado inicial f (função de onda inicial) pertencendo a espaços de Sobolev clássicos contidos no espaço $L^2(\mathbb{R})$, de maneira mais precisa

$$f \in H^s(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R});\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

onde

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

é a Transformada de Fourier de f e $s \geq 0$.

Em 1979, L. Carleson no trabalho intitulado *"Some analytical problems related to Statistical Mechanics"* (ver [7]) planteou o problema de determinar para que valores do indice s a solução

$$S_t f(x) := u(x,t) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi^2} \hat{f}(\xi) d\xi$$

de (4.1) converge em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$ (x - $q.t.p$) para o dado inicial f. Em outras palavras, deseja-se saber quais são os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ que nos garantem que a condição inicial seja satisfeita no seguinte sentido:

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x), \quad x - q.t.p.$$

Nesse mesmo trabalho Carleson deu resposta positiva ao problema para todo dado inicial $f \in H^s(\mathbb{R})$ com $s \geq 1/4$ e, além disso, construiu um exemplo mostrando que em $H^{1/8}(\mathbb{R})$ a propriedade não vale.

A demostração dada por Carleson a seu resultado positivo ($s \geq 1/4$) foi baseada no método de Kolmogorov-Sliverstov-Plessner (ver [8]) e para tal objetivo ele prova que para qualquer função mensurável $t = t(x)$ o operador $S_{t(x)}$ satisfaz a seguinte estimativa

$$\left| \int_{-1}^{1} S_{t(x)} f(x) dx \right| \leq C\|f\|_{H^{1/4}}$$

para toda função $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, onde C não depende de $t(x)$ nem de f, sendo isto suficiente para obter o resultado desejado.

Mais tarde, em 1982, B. Dahlberg e C. Kenig no artigo *"A note on the almost everywhere behaviour of solutions to the Schrödinger equation"* (ver [9]) provaram que o resultado obtido por Carleson em [7] é o melhor possível, ou seja, $s = 1/4$ é o menor índice de Sobolev para o qual se verifica a convergência em quase todo ponto das soluções $S_t f(x)$ para o dado inicial $f(x)$. De fato, eles dão um exemplo mostrando que para cada $s < 1/4$ existe uma função $f \in H^s(\mathbb{R})$ com suporte compacto tal que

$$\limsup_{t\to 0} |S_t f(x)| = +\infty, \quad x - q.t.p,$$

chegando-se então ao seguinte resultado:

Teorema 1.2.1 *A família de funções $S_t f(x)$ convergem em quase todo ponto para $f(x) \in H^s(\mathbb{R})$ se, e somente se, $s \geq 1/4$.*

1.3 Operador maximal e proposta de trabalho

O problema de Carleson motiva uma questão muito importante dentro da Análise Harmônica relativa à obtenção de estimativas fortes para o operador maximal

$$S^*f(x) := \sup_{t>0} |S_t f(x)| = \sup_{t>0} |u(x,t)| \tag{1.7}$$

associado às soluções da equação linear de Schrödinger.

Estimativas fortes para o operador maximal (1.7) foram dadas por C. Kenig e A. Ruiz no trabalho *"A strong type* $(2,2)$ *estimate for a maximal operator associated to the Schrödinger equation"*. Eles trabalharam com uma variante de S^*, dada por $T^*g(x) = \sup\limits_{t>0} T_t g(x)$ com

$$T_t g(x) = c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi^2} \frac{\hat{g}(\xi)}{|\xi|^{1/4}} d\xi \quad g \in L^2(\mathbb{R}),$$

e mostraram que vale a estimativa forte

$$\int_I |T^*g(x)|^2 dx \le C_I \|g\|_{L^2}^2,$$

onde C apenas depende do intervalo I. Além disso, eles mostraram que estimativas similares do tipo

$$\int_I |T^*g(x)|^p dx \le C_I \|g\|_{L^p}^p$$

não valem para $1 \le p < 2$.

Nosso objetivo nesta dissertação é demonstrar em detalhes a seguinte estimativa para o operador maximal (1.7) apresentada por L. Vega em [1] no caso $s > 1/2$

$$\left(\int |S^*f(x)|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2} \le c\|f\|_{H^s}$$

e como consequência daremos uma prova alternativa ao problema de Carleson nessa situação.

2 Elementos de Medida e Análise Funcional

Neste capítulo faremos uma breve apresentação dos elementos de Teoria de Medida e Análise Funcional que servirão como base para o desenvolvimento do nosso trabalho. Indicaremos onde podem ser encontradas todas as demonstrações dos resultados expostos e faremos as provas daqueles que são menos standard nos primeiros cursos de Medida e Análise Funcional.

2.1 Um pouco sobre medidas borelianas

Seja $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. A representação de x em coordenadas polares é dada pelo par (r, x'), onde

$$r = |x| \in (0,\infty), \quad x' = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1} = \left\{x' \in \mathbb{R}^n;\ |x'| = 1\right\}. \tag{2.1}$$

A função $\phi(x) = (r, x')$ é um homeomorfismo de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ em $(0,\infty) \times S^{n-1}$ cuja inversa é dada por $\phi^{-1}(r, x') = rx'$.

Denotaremos por m_* a medida de Borel em $(0,\infty) \times S^{n-1}$ induzida por ϕ através da medida de Lebesgue m em $\mathbb{R}^n$ e, portanto,

$$m_*(E) = m(\phi^{-1}(E)),$$

para todo conjunto E Borel mensurável em $(0,\infty) \times S^{n-1}$. Denotaremos por ρ $(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ a medida definida por

$$\rho(A) = \int_A r^{n-1} dr,$$

para todo $A \subset (0,\infty)$ Borel mensurável.

O espaço das funções integráveis em $\mathbb{R}^n$ com relação à medida de Lebesgue m é denotado por $L(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.1.1 *Existe uma única medida de Borel σ definida em S^{n-1} tal que $m_* = \rho \times \sigma$ Além disso, se f é Borel mensurável em $\mathbb{R}^n$ e $f \geq 0$ ou $f \in L(\mathbb{R}^n)$ então vale a igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f(rx') r^{n-1} d\sigma(x')dr.$$

Demonstração: Ver demonstração em [10]. ■

Corolário 2.1.1 *Seja f é uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$, não negativa ou integrável, tal que $f(x) = g(|x|)$ para alguma função integrável $g : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr.$$

Demonstração: Segue diretamente de combinar o teorema anterior com o Teorema de Fubini. ■

Corolário 2.1.2 *Sejam ε e C constantes positivas, $B_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \varepsilon\}$, $B_\varepsilon^c = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq \varepsilon\}$ e f uma função mensurável em $\mathbb{R}^n$. Então, valem as afirmações a seguir*

(a) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ em B_ε para algum $a < n$, então $f \in L^1(B_\varepsilon)$. Além disso, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ em B_ε então $f \notin L^1(B_\varepsilon)$.

(b) Se $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ em B_ε^c para algum $a > n$, então $f \in L^1(B_\varepsilon^c)$. Além disso, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ em B_ε^c então $f \notin L^1(B_\varepsilon^c)$,

onde para $X \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, $L^1(X)$ denota o conjunto das funções mensuráveis $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que $\displaystyle\int_X |f|dx$ é integrável.

Demonstração: Faremos apenas a prova do item (a) uma vez que (b) decorre de argumentos similares.

Começamos com a primeira parte de (a). Se $|f(x)| \leq C|x|^{-a}$ em B_ε para algum $a < n$, então

$$\int_{B_\varepsilon} |f(x)|dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-a}\chi_{B_\varepsilon}(x)dx.$$

Como $|x|^{-a}\chi_B(x)$ é mensurável em $\mathbb{R}^n$, não negativa e $|x|^{-a}\chi_B(x) = g(|x|)$ com

$$g(r) = \begin{cases} r^{-a}, & \text{se} \quad 0 < r < \varepsilon \\ 0, & \text{se} \quad \varepsilon < r, \end{cases}$$

usamos o Corolário (2.1.1) para obtermos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-a}\chi_{B_\varepsilon}(x)dx &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\infty g(r)r^{n-1}dr \\ &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^\varepsilon r^{n-a-1}dr \\ &= \sigma(S^{n-1}) \frac{\varepsilon^{n-a}}{n-a} < \infty, \end{aligned}$$

onde usamos a hipótese $n - a > 0$. Assim, $f \in L^1(B_\varepsilon)$.

Por outro lado, se $|f(x)| \geq C|x|^{-n}$ em B_ε teremos

$$\int_{B_\varepsilon} |f(x)|dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-a}\chi_B(x)dx = \sigma(S^{n-1}) \int_0^\varepsilon \frac{1}{r}dr.$$

que não é integrável, logo $f \notin L^1(B_\varepsilon)$. ■

Prosseguimos com duas desigualdades clássicas da teoria da medida.

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Hölder) *Sejam (X,μ) um espaço de medida sigma finita, $1 \leq p,q \leq \infty$ tais que $1/p+1/q=1$. Então, se $f \in L^p(X,\mu)$ e $g \in L^q(X,\mu)$ a função $fg \in L^1(X,\mu)$ e vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Demonstração: Ver em [11]. ■

Teorema 2.1.3 (Desigualdade de Tchebyshev) *Seja $0<p<\infty$ e consideremos $f \in L^p(X,\mu)$. Então, para qualquer $\alpha > 0$ tem-se*

$$\mu\big(\{x; |f(x)| > \alpha\}\big) \leq \left[\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha}\right]^p.$$

Demonstração: Considere o conjunto $E_\alpha = \{x \in X; |f(x)| > \alpha\}$. Assim,

$$\|f\|_{L^p}^p = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) \geq \int_{E_\alpha} |f(x)|^p d\mu(x) \geq \int_{E_\alpha} \alpha^p d\mu(x) = \alpha^p \mu(E_\alpha).$$

Como por hipótese $\alpha > 0$ segue-se que

$$\mu\big(\{x \in X; |f(x)| > \alpha\}\big) \leq \left[\frac{\|f\|_{L^p}}{\alpha}\right]^p,$$

obtendo-se assim o resultado desejado. ■

Sendo X um espaço mensurável, lembramos que

$$M^+(X) = \big\{f : X \to \mathbb{R}^+; f \text{ é mensurável}\big\}.$$

Finalizamos esta seção relembrando o seguinte corolário do Lema de Fatou:

Proposição 2.1.1 *Sejam (X,μ) um espaço de medida, $f \in M^+(X)$ e $\nu : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu$$

Então, ν é uma medida e para toda $g \in M^+(X)$ vale $\displaystyle\int g d\nu = \int fg d\mu$

Demonstração: Ver em [12]. ■

2.2 Operadores entre espaços de medidas

Sejam (X,μ) um espaço de medida e $M(X)$ o espaço das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ que são mensuráveis.

Definição 2.2.1 *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida. Um operador*

$$T : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(Y)$$

é dito sublinear se $T(f+g) \leq T(f) + T(g)$ para quaisquer $f,g \in L^p(X,\mu)$.

Definição 2.2.2 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$. Dizemos que um operador sublinear $T : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(Y)$ é de tipo (p,q)-forte se for um operador limitado, isto é, existe uma constante C positiva tal que*

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p},$$

para toda $f \in L^p(X,\mu)$.

Definição 2.2.3 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$. Dizemos que um operador sublinear $T : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(Y)$ é de tipo (p,q)-fraco se existe uma constante positiva C tal que*

$$\lambda \left[\nu\left\{y \in Y; |Tf(y)| > \lambda\right\}\right]^{1/q} \leq C\|f\|_{L^p},$$

para todo $\lambda > 0$ e para toda $f \in L^p(X,\mu)$. No caso $q = \infty$ definimos $(p,\infty)-fraco$ como sendo $(p,\infty)-forte$.

O seguinte resultado estabelece que a condição (p,q)-forte é suficiente para termos a condição (p,q)-fraco para operadores sublineares.

Proposição 2.2.1 *Se um operador sublinear $T : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(Y)$ é (p,q)-forte então ele é (p,q)-fraco.*

Demonstração: Para todo $\lambda > 0$ pondo $A_\lambda = \left\{y \in Y; |Tf(y)| > \lambda\right\}$ temos que

$$\nu(A_\lambda) = \int_{A_\lambda} d\nu \leq \int_{A_\lambda} \left|\frac{Tf(y)}{\lambda}\right|^q d\nu \leq \frac{1}{\lambda^q}\|Tf\|^q_{L^q} \leq \left(\frac{C\|f\|_{L^p}}{\lambda}\right)^q,$$

de onde segue que

$$\lambda \left[\nu(A_\lambda)\right]^{1/q} \leq C\|f\|_{L^p},$$

finalizando-se assim a prova. ∎

Dada uma família de operadores lineares $T_t : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(X)$, $t > 0$, o *operador maximal* $T^* : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(X)$ é definido por

$$T^*f(x) = \sup_{t>0} |T_t f(x)|.$$

O resultado a seguir é muito importante dentro da teoria dos operadores maximais.

Teorema 2.2.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $T_t, t > 0$, uma família de operadores lineares em $T_t : L^p(X,\mu) \longrightarrow M(X)$. Então, se T^* é (p,q)-fraco e $t_0 > 0$, as seguintes afirmações são válidas:*

(a) *O conjunto* $F_1 = \left\{ f \in L^p;\ \lim\limits_{t\to t_0} T_t f(x) = f(x)\ x - q.t.p \right\}$ *é fechado em* $L^p(X,\mu)$.

(b) *O conjunto* $F_2 = \left\{ f \in L^p;\ \lim\limits_{t\to t_0} T_t f(x)\ \text{existe}\ x - q.t.p \right\}$ *é fechado em* $L^p(X,\mu)$.

Demonstração: Primeiro provaremos o item (a). Dada uma sequência $(f_n) \subset F_1$ convergente para f em $L^p(X,\mu)$, logo $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0$, precisamos provar que $f \in F_1$. Dado $\lambda > 0$ consideremos os seguintes conjuntos:

- $A_\lambda = \left\{ x \in X;\ \limsup\limits_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > \lambda \right\}$;
- $A_{\lambda,n} = \left\{ x \in X;\ \limsup\limits_{t\to t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| > \lambda \right\}$;
- $\tilde{A}_{\lambda,n} = A_\lambda \setminus \left\{ x \in X;\ \limsup\limits_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)| > 0 \right\}$.

Como $(f_n) \subset F_1$ temos que

$$\mu\left(\left\{ x \in X;\ \limsup_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)| > 0 \right\} \right) = 0,$$

assim $\mu(\tilde{A}_{\lambda,n}) = \mu(A_\lambda)$.

Afirmação 1: $\tilde{A}_{\lambda,n} \subset A_{\lambda,n}$ e, portanto, $\mu(A_\lambda) = \mu(\tilde{A}_{\lambda,n}) \leq \mu(A_{\lambda,n})$.

Para verificar a afirmação acima primeiro observamos que pela desigualdade triangular tem-se

$$\begin{aligned}
|T_t f(x) - f(x)| &= |T_t f(x) - f(x) - T_t f_n(x) + f_n(x) + T_t f_n(x) - f_n(x)| \\
&= |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x) + T_t f_n(x) - f_n(x)| \\
&\leq |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| + |T_t f_n(x) - f_n(x)|.
\end{aligned}$$

Usando esta desigualdade e supondo que $x \in \tilde{A}_{\lambda,n}$ temos que

$$\begin{aligned}
\lambda &< \limsup_{t\to t_0} |T_t f(x) - f(x)| \\
&\leq \limsup_{t\to t_0} \Big[|T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| + |T_t f_n(x) - f_n(x)| \Big] \\
&\leq \limsup_{t\to t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| + \limsup_{t\to t_0} |T_t f_n(x) - f_n(x)| \\
&= \limsup_{t\to t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)|.
\end{aligned}$$

Portanto $x \in A_{\lambda,n}$, verificando-se a *Afirmação 1*.

Afirmação 2: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_{\lambda,n}) = 0$.

Para tanto, consideramos os conjuntos

$$B_1 = \left\{ x \in X;\ |T^*(f - f_n)(x)| > \lambda/2 \right\} \quad \text{e} \quad B_2 = \left\{ x \in X;\ |(f - f_n)(x)| > \lambda/2 \right\}.$$

Notemos que $A_{\lambda,n} \subset B_1 \cup B_2$. De fato, se $x \in (B_1 \cup B_2)^c$ então x satisfaz

$$|T_t(f - f_n)(x)| \leq |T^*(f - f_n)(x)| \leq \frac{\lambda}{2} \quad \text{e} \quad |(f - f_n)(x)| \leq \frac{\lambda}{2}.$$

Assim, pela desigualdade triangular temos que

$$\limsup_{t \to t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| \leq \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda,$$

o que nos dá que $x \notin A_{\lambda,n}$. Portanto, podemos concluir que $A_{\lambda,n} \subset B_1 \cup B_2$ e consequentemente $\mu(A_{\lambda,n}) \leq \mu(B_1) + \mu(B_2)$.

Usando o fato de T^* ser $(p,q)-$fraco e a desigualdade de Tchebyshev, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \mu(A_{\lambda,n}) \\
&\leq \mu\Big(\big\{x \in X;\ |T^*(f - f_n)(x)| > \lambda/2\big\}\Big) + \mu\Big(\big\{x \in X;\ |(f - f_n)|(x) > \lambda/2\big\}\Big) \\
&\leq \left(\frac{C\|(f - f_n)\|_{L^p}}{\lambda/2}\right)^q + \left(\frac{\|(f - f_n)\|_{L^p}}{\lambda/2}\right)^p \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \to \infty$ pois $f_n \to f$ em $L^p(X, \mu)$. Verificando-se assim a *Afirmação 2*.

Das afirmações 1 e 2 podemos concluir que

$$0 \leq \mu(A_\lambda) \leq \lim_{n \to \infty} \mu(A_{\lambda,n}) = 0,$$

de onde segue-se que

$$\mu(A_\lambda) = 0, \quad \text{para todo} \quad \lambda > 0. \tag{2.2}$$

Para finalizar a demostração de (a) escolhemos $\lambda_k = 1/k,\ k = 1, 2, 3, \ldots$ e escrevemos

$$\left\{ x \in X;\ \limsup_{t \to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0 \right\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1/k}.$$

Como $A_1 \subset A_{1/2} \subset A_{1/3} \subset \cdots$, concluímos usando (2.2) que

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left\{ x \in X : \limsup_{t \to t_0} |T_t f(x) - f(x)| > 0 \right\}\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{1/k}\right) \\
&= \lim_{k \to \infty} \mu(A_{1/k}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{t \to t_0} T_t f(x) = f(x)$ em quase todo ponto de X e $f \in F_1$, como clamávamos, finalizando assim aprova do item (a).

Procedemos agora com a prova de (b). Seja (f_n) uma sequência em $L^p(X,\mu)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)-f(x)\|_{L^p}=0$ e que

$$\mu\left(\left\{x\in X : \limsup_{t\to t_0} T_t f_n(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t f_n(x) > 0\right\}\right) = 0.$$

Então, neste caso é suficiente mostrar que

$$\mu\left(\left\{x\in X : \limsup_{t\to t_0} T_t f(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t f(x) > \lambda\right\}\right) = 0.$$

Considere os conjuntos:

- $A = \{x\in X; \limsup_{t\to t_0} T_t f(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t f(x) > \lambda\}$;
- $A_{\lambda,n} = \{x\in X; \limsup_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) > \lambda\}$;
- $\tilde{A}_{\lambda,n} = A \setminus \{x\in X; \limsup_{t\to t_0} T_t f_n(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t f_n(x) > 0\}$.

Novamente teremos $\mu(\tilde{A}_{\lambda,n}) = \mu(A)$. E ainda,

$$\limsup_{t\to t_0} T_t f(x) \le \limsup_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) + \limsup_{t\to t_0} T_t f_n(x)$$

e

$$\liminf_{t\to t_0} T_t f(x) \ge \liminf_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) + \liminf_{t\to t_0} T_t f_n(x),$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to t_0} T_t f(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t f(x) &\le \limsup_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) + \limsup_{t\to t_0} T_t f_n(x)\\
&\quad - \liminf_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t f_n(x)\\
&= \limsup_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x).
\end{aligned}$$

Assim, $\tilde{A}_{\lambda,n} \subset A_{\lambda,n}$. Para finalizar, usando que

$$\limsup_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) - \liminf_{t\to t_0} T_t (f-f_n)(x) \le 2T^*(f-f_n)(x),$$

provamos que $A_{\lambda,n} \subset P = \{x\in X; |T^*(f-f_n)(x)| > \frac{\lambda}{2}\}$ e o resto segue identicamente ao caso anterior. ■

3 *Transformada de Fourier*

3.1 Transformada em $\mathbf{L^1}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$

Definição 3.1.1 *A transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\widehat{f}$, é definida como*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \tag{3.1}$$

onde $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$.

Observe que a função $\widehat{f}$ está bem definida, pois

$$|f(x)e^{-ix\cdot\xi}| = |f(x)|$$

e portanto, $f(x)e^{-ix\cdot\xi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Listaremos algumas propriedades da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, as quais serão de grande utilidade no decorrer do trabalho. Usaremos a notação $f(x) \to g(\xi)$ para indicar que $g(\xi) = \widehat{f}(\xi)$.

Proposição 3.1.1 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.*

(i) $f(x+h) \to e^{i\xi \cdot h}\, \widehat{f}(\xi)$*, para qualquer* $h \in \mathbb{R}^n$.

(ii) $e^{-ix\cdot h} f(x) \to \widehat{f}(\xi + h)$*, para qualquer* $h \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $f(ax) \to a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$*, para qualquer* $a > 0$.

(iv) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} f(x) \to (i\xi)^{\alpha}\, \widehat{f}(\xi)$.

(v) $(-ix)^{\alpha} f(x) \to \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\alpha} \widehat{f}(\xi)$.

(vi) $f(Rx) \to \widehat{f}(R\xi)$ *para qualquer rotação R.*

(vii) Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y) dy.$$

Demonstração:

(i) Seja $\tau_h f(x) := f(x+h)$. Aplicando a definição de transformada de Fourier, obtemos:

$$\widehat{\tau_h f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_h f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Pela invariância da integral por translações:

$$\begin{aligned}\widehat{\tau_h f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \tau_h f(x-h) e^{-i(x-h)\cdot\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x+h-h) e^{-i(x-h)\cdot\xi} dx \\ &= e^{ih\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \\ &= e^{ih\cdot\xi} \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

(ii) Se definirmos $g(x) = f(x)e^{-ix\cdot h}$, então decorre facilmente da definição:

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot h} e^{-ix\cdot\xi} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot(h+\xi)} dx \\ &= \widehat{f}(\xi+h).\end{aligned}$$

(iii) Defina $d_a(x) = f(ax), a > 0$. Aplicando a transformada à função, obtemos

$$\widehat{d_a}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(ax) e^{-ix\cdot\xi} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = ax$ teremos que $a^{-1}dy_i = dx_i, i = 1, ..., n$ e

$$\begin{aligned}\widehat{d_a}(\xi) &= \int e^{-ia^{-1}y_1\cdot\xi_1} \cdots \int f(y) e^{-ia^{-1}y_n\cdot\xi_n} a^{-n} dy_n ... dy_1 \\ &= a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-iy\cdot(a^{-1}\xi)} dy \\ &= a^{-n} \widehat{f}(a^{-1}\xi).\end{aligned}$$

(vi) Façamos a mudança de variável $y = Rx$. Tem-se $|det(R)| = 1$ e, por R ser um operador ortogonal, $\langle R^{-1}y, \xi\rangle = \langle RR^{-1}y, R\xi\rangle = \langle y, R\xi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(Rx)e^{-ix\cdot\xi}dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-i(R^{-1}y)\cdot\xi}|det(R)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-iy\cdot R\xi}dy \\
&= \widehat{f}(R\xi).
\end{aligned}$$

(vii) Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\widehat{g}(\xi)$ é limitada:

$$|\widehat{g}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|dx < \infty.$$

Logo $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx$ é integrável e podemos aplicar o teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy\cdot x}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-iy\cdot x}dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot y}dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\widehat{f}(y)dy.
\end{aligned}$$

Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ não é necessariamente verdade que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$; por exemplo, considere $f(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ a função característica do intervalo (a,b). Se $\xi = 0$ teremos $\widehat{f}(\xi) = \widehat{f}(0) = b-a$; se $\xi \neq 0$, então:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_a^b e^{-ix\xi}dx \\
&= -\left(\frac{e^{-ib\xi}-e^{-ia\xi}}{i\xi}\right) \\
&= -\frac{2}{\xi}e^{-i(\frac{b+a}{2})\xi} sen\left(\left(\frac{a-b}{2}\right)\xi\right) \\
&\geq -\frac{2}{\xi}e^{-i(\frac{b+a}{2})\xi}
\end{aligned}$$

Como $|-\frac{2}{\xi}e^{-i(\frac{b+a}{2})\xi}| = \frac{2}{\xi}$ com $\xi \neq 0$ e não é integrável, concluímos que $|\widehat{f}(\xi)|$ não é integrável em $\mathbb{R}$.

■

Como podemos definir a transformada de Fourier em funções de $L^2(\mathbb{R}^n)$? Em geral, não é verdade que se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$; basta tomar como exemplo a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1] \\ 1/x, & x \in (1, \infty) \end{cases}$$

que é quadrado integrável mas não é integrável. Então, aqui, a expressão (3.1) não faz sentido.

Na próxima seção, estudaremos algumas características das funções de Schwartz que nos ajudarão a definir a transformada em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.2 Transformada de Fourier em Espaços de Schwartz e sua extensão para funções em $\mathbf{L^2}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$

As propriedades abordadas sobre o espaço de Schwartz enfatizam o bom comportamento da transformada neste espaço. Mostraremos que as funções de Schwartz são integráveis, portanto a transformada está bem definida e que ela leva bijetivamente $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, o que não é verdade em geral para as funções integráveis.

Definição 3.2.1 (Multiíndice) *Um multiíndice é uma n-upla ordenada de números inteiros não negativos, ou seja, é um elemento do conjunto*

$$\mathbb{N}_0^n = \{\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n); \alpha_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}\}.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ *é um multiíndice e* $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, denotaremos:*

- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \circ \partial_2^{\alpha_2} \cdots \circ \partial_n^{\alpha_n}$.

Agora podemos definir o espaço de Schwartz:

Definição 3.2.2 (Espaço de Schwartz) *O espaço de Schwartz* $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *é o espaço das funções* C^∞ *com decaimento no infinito, isto é,*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : |||\varphi|||_{(\alpha,\beta)} < \infty \quad \textit{para quaisquer} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\},$$

onde $|||\varphi|||_{(\alpha,\beta)} = \|x^\alpha \partial_x^\beta \varphi\|_\infty$ *é uma seminorma.*

Utilizaremos a seguinte caracterização para as funções de Schwartz:

Teorema 3.2.1 *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0, \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n. \tag{3.2}$$

Demonstração: Ver demonstração em [13]. ■

Do teorema acima concluímos que as derivadas parciais de f vão mais rápido para 0 do que as potências x^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vão para o infinito, quando $|x| \to \infty$.

Teorema 3.2.2 *Seja $p \in [1,\infty)$. Então o espaço de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p})$.*

Demonstração: Sejam $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e r um número real tal que $r > n/2$. Então

$$\begin{aligned}\|\phi\|_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^r |\phi(x)|^p \frac{1}{(1+|x|^2)^r} dx \\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^r |\phi(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^r} dx < \infty.\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ (ver em [13]), teremos

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \overline{(C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{L^p})} \subset \overline{(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{L^p})} \subset L^p(\mathbb{R}^n),$$

de onde concluímos que $\overline{(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{L^p})} = L^p(\mathbb{R}^n)$. ■

Assim, fica bem definida a **transformada de Fourier** de uma função de Schwartz f por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi} dx$$

e valem as propriedades da Proposição 3.1.1. Estaremos também interessados em discutir sobre a inversa da transformada de Fourier; em $L^1(\mathbb{R}^n)$ também podemos descrever tal função (ver em [14]), porém estamos mais interessados na teoria das distribuições e, portanto, iniciaremos este estudo pelas funções de Schwartz.

Teorema 3.2.3 *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\widehat{f} \in C^\infty$ e*

$$\partial^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha f)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{3.3}$$

Demonstração: Ver Teorema 2.2 de [13]. ■

Teorema 3.2.4 *Para todo $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ assim como*

$$\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

Demonstração: Ver Teorema 2.3 de [13]. ■

Para provarmos a fórmula da transformada inversa precisaremos ainda do seguinte Lema:

Lema 3.2.1 *Sejam $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $g(x) = e^{-a|x|^2}$, com $Re a > 0$. Então $\widehat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2/4a}(\pi a^{-1})^{n/2}$*

Demonstração: Faremos apenas a demonstração para $n = 1$ pois o caso geral segue imediatamente através deste. Comecemos observando que $g'(x) = -2axg(x)$ e, pelos Teoremas 3.2.3 e 3.2.4 obtemos:

$$(\widehat{g})'(\xi) = -i\,\widehat{(xg)}(\xi) = \frac{i}{2a}\widehat{(g')}(\xi) = -\frac{\xi}{2a}\widehat{g}(\xi).$$

■

Observando ainda que $\widehat{g}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = (\pi a^{-1})^{1/2}$, a unicidade da solução do Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'(\xi) + \dfrac{\xi}{2a}y(\xi) = 0 \\ y(0) = (\pi a^{-1})^{1/2}, \end{cases}$$

nos garante que

$$\widehat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/4a}(\pi a^{-1})^{1/2},$$

como queríamos demonstrar.

Agora podemos demonstrar que a transformada é invertível no espaço de Schwartz e tal inversa possui propriedades semelhantes às suas.

Teorema 3.2.5 *Sejam $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, vale a fórmula da inversão*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.5}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g = \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}. \tag{3.6}$$

Demonstração: Sejam $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. O Teorema 3.2.3 nos diz que $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e juntamente com o Teorema 3.2.4 e fato de que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1} \Longrightarrow \|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1},$$

para cada $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha \partial^\beta \widehat{f}(\xi)| &= |\xi^\alpha (-i)^{|\beta|} \widehat{(x^\beta f)}(\xi)| = |(-i)^{|\beta|} (-i^2)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{(x^\beta f)}(\xi)| \\
&= |(-i)^{|\alpha|+|\beta|} (-i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{(x^\beta f)}(\xi)| = |(\partial^\alpha (x^\beta f))^\wedge(\xi)| \\
&\le \|\partial^\alpha (x^\beta f)\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Logo, $|||\widehat{f}|||_{(\alpha,\beta)} < \infty$, provando que $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Se $f,g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ então a função $f(x)g(y)e^{-i\lambda x\cdot y}$ é integrável em $\mathbb{R}^{2n}$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-i\lambda x\cdot y}\, dydx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(\lambda x)dx < \infty$$

uma vez que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e é limitada.

Pelo Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(\lambda x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)e^{-i\lambda x\cdot y}\, dydx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(y)f(x)e^{-i\lambda y\cdot x}\, dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\widehat{f}(\lambda y)dy,
\end{aligned}$$

de onde segue (3.6). Vale observar que f e g são uniformemente contínuas, logo podemos escrever:

$$\begin{aligned}
f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)dx &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x/\lambda)\, \widehat{g}(x)dx \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(y/\lambda)\, \widehat{f}(y)dy \\
&= g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)dy.
\end{aligned}$$

Tomando $g(x) = e^{-|x|^2/2}$ na igualdade anterior, o Lema 3.2.1 nos dá que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)dy &= g(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)dy \\
&= f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(x)dx \\
&= f(0)(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2}dx \\
&= f(0)(2\pi)^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi(|x|/\sqrt{2\pi})^2}dx \\
&= (2\pi)^n f(0),
\end{aligned}
$$

logo

$$
f(0) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)dy.
$$

Portanto, pelo item 1 da Proposição 3.1.1, obtemos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f_x(0) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_x}(y)dy \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)e^{ix\cdot y}dy.
\end{aligned}
$$

Considerando o operador

$$
\begin{aligned}
\vee\ :\ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \\
f &\longmapsto \vee(f) = \check{f},
\end{aligned}
$$

definido por

$$
\check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi
$$

obtemos que

$$
f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi = (\widehat{f})^{\vee}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.
$$

Por outro lado, se tomarmos $g(x) = f(-x) = f(Rx)$ o item iv) da Proposição 3.1.1 nos diz que $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(R\xi) = \widehat{f}(-x)$ e assim podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
(\check{f})^{\wedge}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(\xi)e^{-ix\cdot\xi}d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(-\xi)e^{i(-x)\cdot(-\xi)}d\xi \\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{g}(\xi)e^{i(-x)\cdot\xi}d\xi \\
&= g(-x) = f(x),
\end{aligned}
$$

e por fim provamos que a transformada de Fourier restrita ao espaço de Schwartz possui uma inversa. ■

Teorema 3.2.6 (Teorema de Plancherel) *Se* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *então*

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração: Tomando $\widehat{g} = \overline{f}$ na equação (3.6) obtemos

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\check{\overline{f}}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)\overline{\widehat{f}(y)}dy = \|\widehat{f}\|_{L^2}^2.$$

Fica então provado que a transformada de Fourier restrita a $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria . ■

Pelo Teorema de Plancherel e pelo Teorema 3.2.5 podemos afirmar que a restrição da Transformada de Fourier $\mathscr{F} : (\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (\mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2})$ ao espaço de Schwartz é um isomorfismo de espaços vetoriais normados; portanto tanto a transformada quanto sua inversa podem ser extendidas como operadores lineares contínuos de $\overline{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} = L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, permitindo, assim, definir a transformada de Fourier e sua inversa em $L^2(\mathbb{R}^n)$ por:

$$\widehat{f} = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k} \qquad \check{f} = \lim_{k\to\infty} \check{f_k},$$

onde $\{f_k\}$ é uma sequência qualquer em Schwartz convergindo a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3.3 Transformada de Fourier no Espaço da Distribuições Temperadas

Aliada à teoria das distribuições, a transformada de Fourier possui grande importância na teoria de equações diferenciais. Aqui, estenderemos as interessantes propriedades do espaço de Schwartz ao seu dual topológico, denominado espaços das distribuições temperadas $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Para maiores detalhes sobre os espaços referidos nesta seção, consutar [13].

Definição 3.3.1 (Distribuições Temperadas) *Dizemos que* $\psi \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *é uma distribuição temperada, se*

a) ψ *é linear;*

b) ψ *é contínua; i.e., para qualquer* $\{\phi_j\} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *com* $\phi_j \to 0$ *quando* $j \to \infty$ *a sequência numérica* $\psi(\phi_j) \to 0$ *quando* $j \to \infty$.

Assim, definimos naturalmente neste espaço:

Definição 3.3.2 *Dada* $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *sua transformada de Fourier* $\widehat{\psi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é definida por*

$$\widehat{\psi}(\phi) = \psi(\widehat{\phi}), \quad \textit{para qualquer} \quad \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \tag{3.7}$$

assim como sua transformada inversa é dada por

$$\check{\psi}(\phi) = \psi(\check{\phi}), \quad \text{para qualquer } \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.8}$$

Podemos ainda definir a derivada de um distribuição temperada:

Definição 3.3.3 *Sejam $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. A derivada $\partial^\alpha f$ de f é o funcional*

$$\begin{aligned} \partial^\alpha : \ \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &\to \mathbb{C} \\ \varphi &\to (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

Proposição 3.3.1 *Sejam $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\psi \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Defina*

$$\psi * \varphi(x) = \psi(\varphi(x - \cdot)).$$

Então

$$\psi * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n), \tag{3.9}$$

$$\widehat{\psi * \varphi} = \widehat{\psi}\widehat{\varphi} \tag{3.10}$$

onde $\widehat{\psi}\widehat{\varphi} \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ é definida como $\widehat{\psi}\widehat{\varphi}(\phi) = \widehat{\psi}(\widehat{\varphi}\phi)$ para qualquer $\phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, e

$$\partial^\alpha(\psi * \varphi) = (\partial^\alpha \psi) * \varphi = \psi * (\partial^\alpha \varphi), \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{3.11}$$

Demonstração: De 3.9 e 3.10 ver em [14] e de 3.11 ver em [13].

■

Valem também para as Distribuições Temperadas os seguintes teoremas:

Teorema 3.3.1 *Seja $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Denotando $x^\alpha f$ o produto da função $\phi(x) = x^\alpha$ com a distribuição temperada f, então*

i) $(\partial^\alpha f)^\wedge = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}$;

ii) $\partial^\alpha \widehat{f} = i^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge$.

Demonstração: Ver em [13]. ■

3.4 Espaços de Sobolev

Aqui faremos um pequeno resumo com as principais propriedades dos espaços de Sobolev a serem utilizados, que no darão a base necessária para justificar os cálculos que nos induzirão ao resultado desejado.

Definição 3.4.1 *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o **espaço de Sobolev** de ordem s, denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$, como*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{H^s} = \left(\int (1+|\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}.$$

Teorema 3.4.1 *Para cada $s \in \mathbb{R}$ o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno*

$$\begin{aligned} <\cdot,\cdot>_{H^s}: \quad H^s(\mathbb{R}^n) \times H^s(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto <f,g>_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)} d\xi \end{aligned}$$

Definição 3.4.2 *Sejam X e Y espaços vetoriais normados. Diremos que X está imerso continuamente em Y ou que a imersão de X em Y é contínua, quando $X \subset Y$ e existe uma constante $C > 0$ tal que:*

$$\|v\|_Y \leq C\|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

Teorema 3.4.2 *Sejam $s,k \in \mathbb{R}$, com $k > 0$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Então $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ para todo natural $\alpha \leq k$.*

Demonstração: Seja $\alpha \in \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha \leq k$ e, portanto, $\alpha - k < 0$. Então, pelo Teorema 3.3.1 segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k} |\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k} |\xi|^{2\alpha} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-k+\alpha} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Portanto $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$. ∎

Lema 3.4.1 *Sejam $a,b \in [0,\infty)$ e $s \geq 0$. Então existem constantes positivas m_s e M_s, dependendo apenas de s, tais que*

$$m_s(a^s + b^s) \leq (a+b)^s \leq M_s(a^s+b^s). \tag{3.12}$$

Demonstração: Ver lema 1.1 de [15]. ∎

Teorema 3.4.3 (Teorema de imersão de Sobolev) *Suponha que $s > k + \frac{n}{2}$.*

(a) *Se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $(\partial^\alpha f)^\wedge \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|(\partial^\alpha f)^\wedge\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^s}$ para $|\alpha| \leq k$, onde C depende apenas de $s-k$.*

(b) *$H^s(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em*

$$C^{k,\infty}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in C^k(\mathbb{R}^n);\ \lim_{|x|\to\infty} f^{(\alpha)}(x) = 0, \quad \forall \alpha \in \{0,1,\cdots,k\} \right\}$$

Demonstração:

(a)

$$\begin{aligned}
\int \left|\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\right| d\xi &= \int \left|\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \int |\xi^\alpha| \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&= \int \left(|\xi_1|^2\right)^{\alpha_1/2} \cdots \left(|\xi_n|^2\right)^{\alpha_n/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \int \left(1+|\xi_1|^2\right)^{\alpha_1/2} \cdots \left(1+|\xi_n|^2\right)^{\alpha_n/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \int \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha_1/2} \cdots \left(1+|\xi|^2\right)^{\alpha_n/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&= \int \left(1+|\xi|^2\right)^{|\alpha|/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \int \left(1+|\xi|^2\right)^{k/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade deve-se a $|\alpha| \leq k$.
Então, rearrumando a integral e aplicando a desigualdade de Schwartz:

$$\begin{aligned}
\int \left|\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\right| d\xi &\leq \int \left(1+|\xi|^2\right)^{k/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \int \left(1+|\xi|^2\right)^{(k-s)/2} \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&\leq \left[\int \left(1+|\xi|^2\right)^{k-s} d\xi\right]^{1/2} \left[\int \left(1+|\xi|^2\right)^{s} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right]^{1/2} \\
&= \left[\int \left(1+|\xi|^2\right)^{k-s} d\xi\right]^{1/2} \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Por fim, resta provar que $C = \left[\displaystyle\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}}\right]^{1/2} < \infty$. Para isso mostraremos, utilizando o Corolário 2.1.2 e propriedades da função em B, que as integrais

$$\int_B \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} \quad \text{e} \quad \int_{B^c} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}},$$

onde $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, são finitas e, portanto, podemos escrever

$$\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} = \int_B \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} + \int_{B^c} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} < \infty.$$

Considere $g(\xi) = \dfrac{1}{(1+|\xi|^2)^{s-k}}$, que é claramente não negativa. Como $s-k > n/2 > 0$, teremos

$$|g(\xi)| \;=\; \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} \;\leq \frac{1}{|\xi|^{2(s-k)}}.$$

(i) A desigualdade acima vale para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0$, em particular para $\xi \in B^c$. Assim, para todo $\xi \in B^c$ temos que $|g(\xi)| \leq |\xi|^{-2(s-k)}$, com $2(s-k) > n$, por hipótese. Pelo Corolário 2.1.2 , $g \in L(B^c)$.

(ii) Temos que g é uma função contínua e limitada em B , portanto

$$\int_B \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} \leq \int_B M d\xi = M\mu(B) < \infty.$$

De onde podemos concluir que $C = \left[\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{s-k}} \right]^{1/2}$ é uma constante que depende apenas de $s-k$, seguindo, assim, o item (a).

(b) Iniciaremos fazendo a seguinte observação: se $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$ e $f = (\widehat{f})^\vee$ x-q.t.p. Agora, dividiremos nossa demonstração em dois casos:
Caso 1: k = 0
Teremos $\|f\|_\infty = \|(\widehat{f})^\vee\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{L^1}$ e pelo item anterior, usando $\alpha = 0$:

$$\|f\|_\infty \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^s}$$

Caso 2: $k \geq 1$
Pelo item anterior temos que $\|\widehat{\partial^\alpha f}\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^s}$, logo

$$\|\partial^\alpha f\|_\infty = \|(\widehat{\partial^\alpha f})^\vee\|_\infty \leq \|\widehat{\partial^\alpha f}\|_{L^1} \leq C\|f\|_{H^s}.$$

Como $\|f\|_{C^{k,\infty}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_\infty$, concluímos que

$$\|f\|_{C^{k;\infty}} \leq (k+1)C\|f\|_{H^s}.$$

O Teorema 3.4.2 nos diz que $f^{(\alpha)} \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall \alpha \in \{0, 1, \cdots, k\}$. Como $s-k > n/2$ então $f^{(\alpha)} \in C^{0,\infty}(\mathbb{R}^n)$, de onde segue que $f \in C^{k,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e a inclusão desejada.

■

4 O Problema de Carleson para n=1

Neste capítulo daremos uma estimativa para a função maximal $S^*(x) = \sup_{t>0} |u(x,t)|$ associada à solução $u(x,t)$ da equação linear de Schrödinger com dado inicial em Espaços de Sobolev de índice $s > 1/2$ dada por L. Vega em [1]. A partir desta estimativa é possível dar uma prova alternativa ao problema proposto por Carleson em [7] para índices maiores que $1/2$; aqui daremos nossa versão para esta prova.

4.1 Equação Linear de Schrödinger em Espaços de Sobolev

Nesta seção estudaremos a solução para o sistema linear

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad (x,t) \in (\mathbb{R}, \mathbb{R}^+), \\ \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $f \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > 1/2$. Mostraremos que o sistema (4.1) tem uma única solução que depende continuamente dos dados iniciais.

Vamos começar esclarecendo o significado da derivada temporal em (4.1): vimos em 3.4.2 que

$$\forall f \in H^s(\mathbb{R}) \Rightarrow -i\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \in H^{s-2}(\mathbb{R}).$$

Então, se $u \in H^s(\mathbb{R})$ é solução de (4.1), deve-se ter $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in H^{s-2}(\mathbb{R})$; portanto, é natural requerer que a derivada temporal exista nesta topologia, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \left(-i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t) \right) \right\|_{H^{s-2}} = 0. \tag{4.2}$$

Teorema 4.1.1 *O problema (4.1) tem, no máximo, uma solução.*

Demonstração: Ver em [15]. ■

4.1.1 Encontrando a solução do sistema

Vamos considerar o sistema (4.1) com dado inicial no espaço de Sobolev. Tomando a transformada de Fourier com respeito a x em cada igualdade do sistema:

$$\begin{cases} i\widehat{\partial_t u(\xi t)} = \widehat{\triangle u(\xi t)}, \\ \widehat{u(\xi 0)} = \widehat{f(\xi} \end{cases}$$

obtemos um novo sistema

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u(\xi t)} = i|\xi \;\; ^2\widehat{u}(\xi t), \\ \widehat{u}(\xi 0) = \widehat{f}(\xi, \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\widehat{u}(\xi t) = e^{\;\; i|\xi \;\; ^2 t}\widehat{f}(\xi.$$

Aplicando a transformada inversa nos dois lados da equação, teremos

$$u(x,t) = (e^{i|\xi \;\; ^2 t}\widehat{f}(\xi) \;\; ^{\vee}. \tag{4.3}$$

Pela Proposição 3.3.1 a Equação (4.3), $t > 0$, resulta em:

$$u(x,t) \;\; = (e^{i|\xi \;\; ^2 t})^{\vee} * f(x)$$

e escrevemos

$$u(x,t) = S_t f(x). \tag{4.4}$$

Agora descreveremos algumas propriedades da família de operadores $\{S_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ definida em (4.4), considerando $f \in H^s(\mathbb{R})$. O caso geral em dimensão n é uma aplicação direta do caso em dimensão 1.

Proposição 4.1.1 *Seja* $S_t f(x) = (e^{i|\xi \;\; ^2 t}\widehat{f}(\xi) \;\; ^{\vee}$. *Então:*

i) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $S_t : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$ *é uma isometria, ou seja,*

$$\|S_t f\|_{H^s} = \|f\|_{H^s}.$$

ii) $S_t \circ S_{\bar{t}} = S_{t+\bar{t}}$.

iii) $S_0 = 1$ *e* $(S_t)^{-1} = S_{-t}$.

iv) Fixando $f \in H^s$, *a função* $\phi_f : \mathbb{R} \to H^s(\mathbb{R})$ *definida por* $\phi_f(t) = S_t f(x)$ *é uma função contínua.*

Demonstração: Para o item i) começamos calculando a norma de $S_t f$ em H^s:

$$\begin{aligned} \|S_t f\|_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^s |e^{it|\xi|^2}\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \|f\|_{H^s} \end{aligned}$$

Da igualdade acima, podemos concluir que $S_t f$ está em $H^s(\mathbb{R})$ sempre que f está, logo a função está bem definida, e suas normas coincidem.
Para o item ii) calculamos primeiramente $S_{t+\bar{t}} f$.

$$\begin{aligned} S_{t+\bar{t}} f(x) &= \{e^{i(t+\bar{t})|\xi|^2}\widehat{f}\}^\vee \\ &= \{e^{it|\xi|^2}(e^{i\bar{t}|\xi|^2}\widehat{f})^{\vee\wedge}\}^\vee \\ &= \{e^{it|\xi|^2}(e^{i\bar{t}\Delta}f)^\wedge\}^\vee. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S_{t+\bar{t}} f(x) = S_t \circ (S_{\bar{t}} f). \tag{4.5}$$

Temos que

$$S_0 f(x) = \{e^{i0|\cdot|^2}\widehat{f}\}^\vee(x) = (\widehat{f})^\vee(x) = f(x).$$

Desta igualdade junto com a equação (4.5) concluímos que

$$(S_t)^{-1} = e^{i(-t)\Delta},$$

e fica demonstrado o item iii). Por fim, para o item iv), mostraremos a continuidade, mas primeiro façamos uma observação:

$$(1+|\xi|^2)^s|(e^{it\xi^2} - e^{i\tau\xi^2})\widehat{f}|^2 \leq 2(1+|\xi|^2)^s|\widehat{f}|^2,$$

logo, para cada τ o termo da esquerda é dominado por uma função integrável. Como

$$\lim_{t-\tau\to 0} (1+|\xi|^2)^s|(e^{it\xi^2} - e^{i\tau\xi^2})\widehat{f}|^2 = 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\tau} \|\phi_f(t) - \phi_f(\tau)\|_{H^s} &= \lim_{t\to\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|\xi|^2)^s|(e^{it\xi^2} - e^{i\tau\xi^2})\widehat{f}|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to\tau} (1+|\xi|^2)^s|(e^{it\xi^2} - e^{i\tau\xi^2})\widehat{f}|^2 d\xi = 0 \end{aligned}$$

de onde concluímos a continuidade. ■

4.2 Estimativa da função maximal

Estamos interessados em demonstrar a seguinte estimativa forte

$$\left(\int |S^*f(x)|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2} \leq c\|f\|_{H^s}$$

para o operador maximal $S^*f(x)$ associado à solução da equação linear de Schrödinger com dados iniciais em espaços de Sobolev com índice $s > 1/2$ e $a > 1$.

Nesta seção iremos demonstrar alguns resultados parciais que combinados resultam na estimativa acima, que é nosso objetivo principal no trabalho. Gostaria de chamar atenção ao fato de que chamaremos sempre por c qualquer constante que se apresente em nossas contas.

Teorema 4.2.1 *Se* $0 \leq \beta$ *e* $a > 1$, *então*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial\ \beta}u(x,t)\right|^2 dt\frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2} \leq c\|f\|_{H^{2\beta-1/2+a/2}}\ . \tag{4.6}$$

Demonstração: Chamando $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial\ \beta}u(x,t)\right|^2 dt$ e $h(x) = \dfrac{1}{(1+|x|)^a}$ e usando a desigualdade de Holder, temos que $\|gh\|_{L^1} \leq \|g\|_{L^\infty}\|h\|_{L^1}$; ou seja,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial\ \beta}u(x,t)\right|^2 dt\frac{dx}{(1+|x|)^a} &\leq \left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial\ \beta}u(x,t)\right|^2 dt\right\|_{L^\infty}\left\|\frac{1}{(1+|x|)^a}\right\|_{L^1}\\ &= \left(\frac{2}{a-1}\right)\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial\ \beta}u(x,t)\right|^2 dt\right\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Basta provarmos que

$$\left(\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^{\beta}}{\partial\ \beta}u(x,t)\right|^2 dt\right\|_{L^\infty}\right)^{1/2} \leq c\|f\|_{H^{2\beta-1/2+a/2}}$$

para completarmos a demonstração do teorema.

Vimos em (4.3) que

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}}\widehat{f}(\xi)e^{i|\xi|^2t}e^{ix\cdot\xi}d\xi \tag{4.7}$$

Fazemos a seguinte mudança de variável:

$$\xi = \begin{cases} -\tau^{1/2}, & \text{se} \quad \xi \leq 0 \\ \tau^{1/2}, & \text{se} \quad \xi \geq 0 \end{cases}$$

onde $0 \leq \tau < \infty$.

Então

$$\begin{aligned} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i|\xi|^2 t} e^{ix\cdot\xi} d\xi \ &= \ \frac{1}{2}\int_0^\infty \tau^{-1/2} f(\tau^{1/2}) e^{it\tau}\, e^{ix\tau^{1/2}} d\tau \\ &-\frac{1}{2}\int_\infty^0 \tau^{-1/2} f(\tau^{1/2}) e^{it\tau}\, e^{ix(-\tau^{1/2})} d\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \tau^{-1/2} f(\tau^{1/2}) e^{it\tau}\, e^{ix\tau^{1/2}} d\tau \\ &+\frac{1}{2}\int_0^\infty \tau^{-1/2} f(-\tau^{1/2}) e^{it\tau}\, e^{ix(-\tau^{1/2})} d\tau \end{aligned}$$

Considere as funções

$$U(x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\tau^{-1/2} f(\tau^{1/2}) e^{ix(-\tau^{1/2})}, & \text{se} \quad \tau \geq 0, \\ \\ 0, & \text{se} \quad \tau < 0, \end{cases}$$

e

$$V(x,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\tau^{-1/2} f(-\tau^{1/2}) e^{ix(-\tau^{1/2})}, & \text{se} \quad \tau \geq 0, \\ \\ 0, & \text{se} \quad \tau < 0. \end{cases}$$

Observe que ao tomar a transformada de Fourier inversa com relação a variável t da soma $U+V$, obtemos exatamente a função $u(x,t)$ e, portanto:

$$\widehat{u}(x,\tau) = U(x,\tau) + V(x,\tau). \tag{4.8}$$

Aplicando a igualdade de Plancherel e a desigualdade (3.12), obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,t)\right|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,\cdot)\right)^{\wedge_t}\right|^2 d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\tau^{2\beta}\,|\widehat{u}(x,\tau)|^2\,d\tau \\
&\leq c\int_0^{\infty}\tau^{2\beta}\,|U(x,\tau)|^2\,d\tau + c\int_0^{\infty}\tau^{2\beta}\,|V(x,\tau)|^2\,d\tau \\
&\leq C\int_0^{\infty}\tau^{2\beta-1}\,|f(\tau^{1/2})|^2 d\tau + C\int_0^{\infty}\tau^{2\beta-1}\,|f(-\tau^{1/2})|^2 d\tau
\end{aligned}$$

Por fim, fazemos a mudança de volta para ξ

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,t)\right|^2 dt &\leq C\int_0^{\infty}(|\xi|^2)^{2\beta-1}\,|f(\xi)|^2(2\xi)d\xi \\
&+C\int_0^{-\infty}(|\xi|^2)^{2\beta-1}\,|f(\xi)|^2(-2\xi)d\xi \\
&\leq C\int_0^{\infty}(|\xi|^2)^{2\beta-1}\,|f(\xi)|^2(|\xi|^2)^{1/2}d\xi \\
&+C\int_{-\infty}^{0}(|\xi|^2)^{2\beta-1}\,|f(\xi)|^2(|\xi|^2)^{1/2}d\xi \\
&\leq C\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^{2\beta-1/2}\,|f(\xi)|^2 d\xi \\
&= C\|f\|^2_{H^{2\beta-1/2}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left(\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,t)\right|^2 dt\right\|_{L^\infty}\right)^{1/2} &\leq \left(\sup_{x\in\mathbb{R}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}u(x,t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq C\|f\|_{H^{2\beta-1/2}}\,,
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ∎

Chegamos, por fim, no nosso objetivo principal; a partir dos resultados apresentados anteriormente podemos concluir a seguinte estimativa:

Teorema 4.2.2 *Seja $f \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > a/2$ e $a > 1$. Então*

$$\left(\int |S^*f(x)|^2\frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2} \leq c\|f\|_{H^s}$$

Demonstração: Seja $\frac{1}{2} < \rho < s$. Pelo Teorema de Imersão 3.4.3, tomando $k = 0$ e $n = 1$, teremos:

$$|S^* f(x)| = \sup_{t \geq 0} |u(x,t)| \leq \|u(x,\cdot)\|_\infty \leq c\|u(x,\cdot)\|_{H_t^\rho}.$$

Por definição, $\|u(x,\cdot)\|_{H_t^\rho} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|\tau|^2)^\rho |\widehat{u}(\tau)|^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$. Usando o Lema 3.4.1:

$$\begin{aligned}
\|u(x,\cdot)\|_{H_t^\rho}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(1+\tau^2\right)^\rho |\widehat{u}(x,\tau)|^2 d\tau \\
&\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left(|\widehat{u}(x,\tau)|^2 + |\tau|^{2\rho} |\widehat{u}(x,\tau)|^2\right) d\tau \\
&= c\left(\|\widehat{u}(x,\tau)\|_{L_t^2}^2 + \|(D_t^\rho u(x,\cdot))^{\wedge_t}\|_{L_t^2}^2\right) \\
&= c\left(\|u(x,t)\|_{L_t^2}^2 + \|D_t^\rho u(x,t)\|_{L_t^2}^2\right),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do teorema de Plancherel. Assim, pelo Teorema 4.2.1:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |S^* f(x)|^2 \frac{dx}{(1+|x|)^a} &\leq c \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |u(x,t)|^2 d\tau\right) \frac{dx}{(1+|x|)^a} \\
&+ c \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |D_t^\rho u(x,t)|^2 d\tau\right) \frac{dx}{(1+|x|)^a} \\
&\leq c\left[\|f\|_{H^{-1}}^2 + \|f\|_{H^{2\rho-1}}^2\right]
\end{aligned}$$

Por hipótese $s > a/2$, portanto $s > -1$ e

$$\|f\|_{H^{-1}}^2 \leq \|f\|_{H^s}^2.$$

Resta-nos apenas tomar ρ de forma que $2\rho - 1 < s$ e terminamos nossa demonstração. Lembremos que tomamos $\rho > 1/2$; ao escrevermos $\rho = 1/2 + \varepsilon$ queremos que $\varepsilon < \dfrac{s-1/2}{2}$. Tomando $\varepsilon = \dfrac{s-1/2}{4}$, teremos $\varepsilon > 0$ e por fim $2\rho - 1 < s$ de onde segue que

$$\|f\|_{H^{2\rho-1}}^2 \leq \|f\|_{H^s}^2,$$

e podemos concluir nossa estimativa. ■

4.3 O problema de Carleson, s $> 1/2$

Da Proposição 4.1.1, temos que

$$\lim_{t\to 0}\|u(\cdot,t)-f(\cdot)\|_{H^s}=0.$$

Desta convergência forte em $H^s(\mathbb{R})$ podemos concluir que existe uma subsequência $u(x,t_n)$ tal que

$$\lim_{t_n\to 0}u(x,t_n)=f(x) \quad \text{x-q.t.p..}$$

De fato, como $s>1/2>0$, temos que

$$\|u(\cdot,t)-f\|_{L^2}\leq\|u(\cdot,t)-f\|_{H^s}=0.$$

Portanto, como é bem conhecido da teoria da medida, existe uma subsequência $u(x,t_n)$ convergindo q.t.p. à f. O problema proposto por Carleson diz que a sequência em si converge q.t.p. à f quando $s>1/4$. Sua demonstração é bastante sofisticada, sendo necessária uma base teórica matemática mais ampla do que a nossa proposta; sendo assim, daremos uma prova para $s>1/2$ usando a estimativa (4.2), a qual simplifica este problema.

Iniciamos observando que podemos conduzir o teorema anterior a fim de obter a seguinte equivalência:

Teorema 4.3.1 *Seja $g\in L^2(\mathbb{R})$ e $a>1$. Então*

$$\left(\int|T^*g(x)|^2\frac{dx}{(1+|x|)^a}\right)^{1/2}\leq c\|g\|_{L^2} \tag{4.9}$$

onde $T_tg(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi}e^{it\xi^2}\frac{\widehat{g}(\xi}{(1+\xi^2)^{s/2}}d\xi$

Antes de começarmos a demonstrar o teorema provaremos o seguinte resultado:
Afirmação: O operador

$$\begin{aligned} \Lambda \quad L^2(\mathbb{R}) &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}) \\ g &\longmapsto \Lambda(g):=\left(\frac{\widehat{g}(\cdot)}{(1+(\cdot)^2)^{s/2}}\right)^{\vee_x} \end{aligned} \tag{4.10}$$

tem por inversa

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}:\quad H^s(\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ f &\longmapsto \Lambda^{-1}(f):=\left(\widehat{f}(1+(\cdot)^2)^{s/2}\right)^{\vee_x} \end{aligned} \tag{4.11}$$

e é uma isometria.

Demonstração: Pelo teorema de Plancherel, ambas as aplicações estão bem definidas; assim, basta fazer a composta e verificar, sem dificuldades, que uma é a inversa da outra. E mais,

$$\|g\|_{L^2} = \|\widehat{g}\|_{L^2} = \left\| \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+(\xi)^2)^{s/2}}(1+(\xi)^2)^{s/2} \right\|_{L^2} = \|\Lambda(g)\|_{H^s},$$

e portanto, é uma isometria. ■

Agora, vamos à demonstração do Teorema:

Demonstração: Definida a aplicação acima, podemos escrever

$$T_t g(x) = S_t \Lambda g(x) \Rightarrow T^* g(x) = S^* \Lambda g(x).$$

Assim, teremos

$$\begin{aligned} \|T^* g\|_{L^2(\mathbb{R},\nu)} &= \|S^* \Lambda g(x)\|_{L^2(\mathbb{R},\nu)} \\ &\leq c\|\Lambda g(x)\|_{H^s} \\ &= c\|g\|_{L^2(\mathbb{R},\lambda)}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Para obtermos o resultado de Carleson faremos a seguinte variação do seu problema:

Teorema 4.3.2 *Para toda $g \in L^2(\mathbb{R},\lambda)$ tem-se*

$$\lim_{t\to 0} T_t g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi$$

em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Podemos usar o Teorema 2.2.1, pois pela definição 2.2.2, se a estimativa vale, então o operador T^* é (2,2)-forte e pela Proposição 2.2.1 segue que é (2,2)-fraco. Pelo item b) do Teorema 2.2.1 o conjunto

$$F = \left\{ f \in L^2;\ \lim_{t\to t_0} T_t f(x) \text{ existe } x - q.t.p \right\}$$

é fechado em $L^2(\mathbb{R},\nu)$, onde $\nu(E) = \displaystyle\int_E \frac{dx}{(1+|x|)^a}$.

Considerando g no espaço de Schwartz teremos que $\widehat{g}$ é uma função integrável e portanto

$$
\begin{aligned}
|T_t g(x) - T_0 g(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{it\xi^2} \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) \frac{\widehat{g}(\xi)}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) \right| \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi \\
&\leq c|\widehat{g}(\xi)|
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\lim_{t\to 0} |T_t g(x) - T_0 g(x)| \leq \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) \right| \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi
$$

Como

$$
\lim_{t\to 0} \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) = 0 \quad \text{e} \quad \left| \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) \right| \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{(1+\xi^2)^{s/2}} \leq 2 \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{(1+\xi^2)^{s/2}}
$$

que observamos acima ser uma função integrável, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada e obter

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} |T_t g(x) - T_0 g(x)| &\leq \lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) \right| \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t\to 0} \left| \left(e^{it\xi^2} - 1 \right) \right| \frac{|\widehat{g}(\xi)|}{(1+\xi^2)^{s/2}} d\xi \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

e obter a convergência em quase todo ponto.

Portanto se $F = \left\{ f \in L^2;\ \lim_{t\to t_0} T_t f(x) \text{ existe } x - q.t.p \right\}$ então $\mathscr{S} \subset F \subset L^2$ e assim

$$
L^2 = \overline{\mathscr{S}} \subset \overline{F} = F \subset L^2.
$$

Daí podemos concluir, por Schwartz ser denso em L^2, que para toda função em L^2

$$
\lim_{t\to 0} |T_t g(x) - T_0 g(x)| = 0
$$

em quase todo ponto. ■

Por fim, obtemos como corolário a prova alternativa ao problema de Carleson.

Corolário 4.3.1 *Seja $f \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > 1/2$. Então*

$$
\lim_{t\to 0} S_t f(x) = f(x) \quad x - q.t.p.
$$

Demonstração: Se $f \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > 1/2$. Então podemos concluir que

$$\lim_{t\to 0} T_t \Lambda^{-1} f(x) = T_0 \Lambda^{-1} f(x) \quad x - q.t.p,$$

e portanto

$$\lim_{t\to 0} S_t f(x) = \lim_{t\to 0} T_t \Lambda^{-1} f(x) = T_0 g \Lambda^{-1} f(x) = S_0 f(x) = f(x)$$

em quase todo ponto de $x \in \mathbb{R}$. ■

5 *Uma breve discussão sobre outros valores do índice s e da dimensão n*

5.1 O que acontece quando $1/4 \leq s \leq 1/2$?

Não sabemos se a estimativa (4.2) vale neste intervalo; mas se fosse provada a validade desta, poderíamos usar a técnica acima, pois ela não depende do índice s e sim se a estimativa é válida ou não.

5.2 Em dimensões maiores

O objetivo inicial deste trabalho era demonstrar a estimativa principal (4.2) para dimensões maiores ou iguais a 1. Perceba que falamos que o resultado de Carleson é o melhor que temos em espaços de Sobolev na reta; porém será possível demonstrar tal resultado para dimensões maiores? O trabalho de Vega trouxe uma grande contribuição para esta conjectura; se a estimativa de Vega for verdadeira para $n \geq 1$ então obtemos exatamente o mesmo resultado que provamos na reta; ou seja, para $s > 1/2$ teríamos a convergência em quase todo ponto da solução da equação linear de Schrödinger ao dado inicial. A prova é a mesma.

Então, por que não o fizemos? Depois de muitas tentativas em entender a prova no caso geral, em uma pesquisa a artigos relacionados encontramos um escrito por Si Lei Wang, ver em [16], no qual o autor dá contra-exemplos para os quais o Teorema 4.2.1 não é verdadeiro, ficando, assim, comprometida a validade do Teorema 4.2.2 que é crucial na demonstração da estimativa (4.2).

A seguir, faremos um resumo sobre os melhores resultados para o índice s para os quais o problema de Carleson é positivo e como se resolveu o problema de Vega. Para tanto, usaremos a seguinte afirmação:
Afirmação A(s): Denote por B^n a bola unitária em $\mathbb{R}^n$, $n \leq 2$, e B a bola unitária na reta. Seja $S^* f(x) = \sup_{t \in B} |u_f(x,t)|$, onde

$$u_f(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\xi - t|\xi|^2)} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

a solução da equação linear de Schrödinger com a qual estamos trabalhando. Então, existe um número C independente de f tal que

$$\|S^* f\|_{L^2(B^n)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{5.1}$$

A afirmação $A(s)$ está relacionada ao problema de convergência pontual introduzido por Carleson; foi estudada por vários autores e pode ser generalizada ao substituirmos $e^{it|\xi|^2}$ por $e^{it|\xi|^a}$,

$a > 0$ sob o sinal da integral em (4.4).

- **O caso n $= 1$**. Resultados para $0 < a < 1$ e $a > 1$ podem ser achados em [17]. Por exemplo, no caso $a > 1$ Sjölin [18] mostrou que $s \leq 1/4$ é necessário e suficiente para $A(s)$ ser verdadeira.
- **O caso n $= 2$**. Para o caso $a > 1$ a referência é Tao, Vargas [19] para resultados recentes. Esses são do tipo em que $A(s)$ vale para $s = 1/2 - \varepsilon$ onde εé um número positivo pequeno.
- **O caso n ≥ 3**. Para $a > 1$ Sjölin [18] prova, usando suavizações locais, que $A(s)$ é verdadeira para $s > 1/2$ e $n > 2$. Independentemente, Vega [1] usando o caso geral da nossa estimativa obteve o mesmo resultado que Sjölin; após as discussões sobre sua validade em Si Lei Wang(1991) [16] e B. Walter(1996) [20] é possível validar a estimativa e obter o resultado de [18].

A relação entre suavização local e estimativas maximais pode ser encontrada em [18] e [21].O estudo sobre a estimativa $A(s)$ é alvo de nossos trabalhos futuros, uma vez que para fazê-lo é preciso o uso de uma matemática mais avançada.

Referências Bibliográficas

[1] VEGA, L. Schrödinger equations: pointwise convergence to the inicial data. In: *Proceedings of the American Mathematical Society*. [S.l.: s.n.], 1988. v. 102, n. 4, p. 874–878.

[2] MERZBACHER, E. *Quantum Mechanics*. New York: John Wiley and Sons, 1970.

[3] GOTTFRIED, K. *Quantum Mechanics Vol. I: Fundamentals*. New York: W. A. Benjamin, Inc., 1966.

[4] KOBERLE, R. Sobre a gênese da mecânica ondulatória. *Revista Brasileira de Física*, 1979.

[5] SHANKAR, R. *Principles of quantum mechanics*. New York: Plenum Press, 1980.

[6] GRIBBEN, J. *In search of Schrödinger's cat: quantum physics and reality*. New York: Batan Books Inc., 1984.

[7] CARLESON, L. Some analytical problems related to statistical mechanics. *Lectures Notes in Math*, 1979.

[8] KOLMOGOROV, A. N.; SELIVERSTOV, G. Sur la convergence de séries de fourier. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math*, 1925.

[9] DAHLBERG, B.; KENIG, C. A note on the almost everywhere behaviour of solutions to the Schrödinger equation. *Lecture Notes in Math*, 1982.

[10] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and their Applicatios*. 2ª. ed. [S.l.]: Wiley-Interscience, 1999. (Pure and Applied Mathematics).

[11] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. International estudent edition. [S.l.]: McGraw-Hill Inc., 1970. (In Higher Mathematics).

[12] THE Elements of Integration and Lebesgue Measure. [S.l.]: Wiley Classics Library Edition Published, 1995.

[13] CARDOSO, D. C. S. *O problema de Cauchy para o sistema de Gross-Pitaevskii*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2005.

[14] LINARES, F.; PONCE, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. Rio de Janeiro e Santa Barbara: Springer, 2008.

[15] ROMAO, D. C. *Um estudo sobre a boa colocação local da equação não linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2009.

[16] WANG, S. L. On the weighted estimate of the solution associated with the Schrödinger equation. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* [S.l.: s.n.].

[17] WALTER, B. G. Higher integrability for maximal oscillatory fourier integrals. *Ann. Acad.Sci. Fenn. Ser. A I Math.*, 2001.

[18] SJöLIN, P. Regularity of solutions to the schrödinger equation. *Duke Math. J.*, 1987.

[19] TAO, T.; VARGAS, A. A bilinear approach to cone multipliers II. Applications. *Geometric and Functional Analysis*, 2000.

[20] WALTER, B. G. A sharp weighted l2 -estimate for the solution to the time-dependent Schrödinger equation. *Arkiv för Matematik*, 1999.

[21] WALTER, B. G. Maximal estimates for oscillatory integrals with concave phase. In: *Contemporary Mathematics*. [S.l.: s.n.].