Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Propriedades ergódicas do modelo geométrico do atrator de Lorenz

Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

Maceió, Brasil
Março de 2011

Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

Propriedades ergódicas do modelo geométrico do atrator de Lorenz

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 15 de Março de 2011 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira

Maceió, Brasil

Propriedades ergódicas do modelo geométrico do atrator de Lorenz

Rafael Nóbrega de Oliveira Lucena

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 15 de Março de 2011 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira(orientador)

Prof. Dr. Maria José Pacífico

Prof. Dr. Fernando Pereira Micena

Resumo

Este trabalho tem sua motivação no modelo geométrico construído para aproximar o comportamento das soluções das equações de Lorenz. Simultaneamente Afraimovich em [17] e Guckenheimer e Williams [18] construíram um modelo geométrico. Essencialmente ele consiste na construção de medidas físicas e ergódicas para dois tipos de aplicações, uma unidimensional que é seccionalmente expansora (*piecewise expanding*) e outra bidimensional que contrai as folhas de uma folheação invariante. A primeira faz uso de um operador (operador de transferência) agindo no espaço das funções de variação limitada, enquanto que a segunda utiliza o teorema de representação Riesz bem como algumas outras propriedades topológicas.

Abstract

This work has its motivation in the study of the ergodic properties of the Lorenz geometric model, constructed to approximate the behavior of solutions of the Lorenz equations. Simultaneously, Afraimovich in [17] and Guckenheimer and Williams [18], constructed a geometric model that mimics the dynamics of the original Lorenz equations. Here, we build ergodic physical measures for two types of applications that arise from the Lorenz geometric model. The first one is a piecewise expanding one-dimensional map and the second is a two-dimensional application wich contracts the leaves of an invariant foliation.

To construct the ergodic physical measure for the one dimensional Lorenz map, we make use of an operator (transfer operator) acting in the space of bounded variation functions, while the second uses the Riesz representation theorem and some other topological properties.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por minha vida perfeita.

A meus pais Eudes Lucena e Maria das Neves pelo amor e educação, que me deram a sensibilidade necessária para encarar a vida da maneira correta. E por todas as inúmeras oportunidades.

A minha perfeita esposa, namorada e amiga Cibelle Lucena. Linda demais! Ela é tudo na minha vida. Juntos desde 28/12/1999 (eu aos 15 e ela aos 13 anos). Obrigado Deus!

Ao meu grande amigo/matemático Krerley Oliveira. Pela sólida e sincera orientação e direção que ele me concedeu durante esses anos de trabalho. Desejo tudo de bom para ele.

Aos meus professores do CPMAT, Prof. Marcos Petrúcio, Prof. Adam Corcho e Prof. Amauri Barros que apoiaram minha entrada no mestrado. Aos colegas de classe Giovane Ferreira, Adina Rocha, Marcio Silva, Diogo Albuquerque, Fábio Honorato, Douglas Cedrim e Adalgisa Mendonça.

Aos meus grandes amigos Aníbal e Pedro, que mesmo longe, sempre me dão muita força, alegria e muitos risos. Desejo a todos, amigos iguais a eles.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) pelo apoio financeiro.

A todos estes eu agradeço por tudo.

Introdução

Estudado pela primeira vez no início dos anos 60 por E. Lorenz, o fluxo descrito pelas equações polinomiais

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10y - 10x\\ \dot{y} &= 28x - y - xz\\ \dot{z} &= xy - \frac{8}{3}z\end{aligned}$$

trouxe um impacto positivo no estudo dos Sistemas Dinâmicos. A motivação original de Lorenz era estudar os fenômenos naturais relacionados com a previsão climática. Tomando conhecimento através de Saltzmann de alguns sistemas de equações relacionados com o clima, Lorenz decidiu utilizar a nova tecnologia computacional, que desabrochava naquela época, em equações simplificadas descritas acima dos modelos de Saltzmann.

No estudo dessas equações, Lorenz se deparou com um estranho fenômeno, desconhecido até então, a sensibilidade às condições iniciais. Isso gerou a noção de atrator estranho, que veio a ser estudada com intensidade nos anos 70 e 80. Apesar de ser um tópico relativamente clássico em Sistemas Dinâmicos e de claro interesse em áreas mais aplicadas, muitas questões relevantes só foram respondidas recentemente, como a existência de medidas físicas, e várias outras continuam em aberto.

O objetivo do projeto é estudar algumas propriedades ergódicas do modelo geométrico de Lorenz, como a existência de medidas ergódicas e físicas, para as aplicações que estão envolvidas no modelo.

Com este intuito o capítulo 1 trata da matemática necessária para a construção teórica dos resultados principais. Nele são abordados tópicos de EDO, teoria da medida, teoria ergódica. No capítulo 2 inicia-se a discussão sobre o modelo geométrico de Lorenz. A construção do modelo, aplicação de Poincaré do fluxo e propriedades das funções coordenadas são os tópicos abordados neste capítulo. Veremos que a aplicação de Poincaré, $P : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$, do modelo geométrico pode ser escrita como

$$P(x, y) = (f(x), g(x, y)),$$

isto é, uma das funções coordenadas é unidimensional. Esta propriedade é bastante útil para o estudo do modelo, e dela, surgem várias outras propriedades a respeito do modelo geométrico. O capítulo 3 trata da existência de medidas ergódicas e físicas para transformações expansoras por pedaços, provada pela primeira vez por Lasota e Yorke em [21]. Veremos que o número destas medidas que são absolutamente contínuas com relação a medida de Lebesgue é limitado pelo número de singularidades da aplicação. No nosso caso, uma vez que a aplicação envolvida com o modelo geométrico possui uma única singularidade, teremos unicidade. A existência é provada usando-se o chamado Operador de Transferência (ou de *Perron-Frobenius*). Finalizamos o trabalho com o capítulo 4. Nele construímos uma medida ergódica e física para a aplicação de Poincaré do modelo. Esta construção se baseia na existência da medida ergódica e absolutamente contínua para a aplicação unidimensional f, do modelo geométrico e no teorema de representação de Riesz.

0.1 Preliminares

0.1.1 Equações Diferenciais Ordinárias

Nesta seção, f denotará um campo de vetores $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definido no aberto $E \subset \mathbb{R}^m$ e $\phi : [a,b] \times E \longrightarrow E$ denotará o fluxo determinado por f, onde $[a,b]$ é o intervalo maximal da solução de $x' = f(x)$.

Definição 0.1.1. A *variedade estável* $W^s(x)$ do ponto $x \in E$ é o conjunto dos $y \in E$ tais que $\lim_{t\to\infty} \phi_t(y) = x$ analogamente, a *variedade instável* $W^u(x)$ do ponto $x \in E$ é o conjunto dos $y \in E$ tais que $\lim_{t\to-\infty} \phi_t(y) = x$.

Definição 0.1.2. Dados dois campos de vetores $f_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e seus fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2, dizemos que os campos f_1 e f_2, ou que os fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2, são *diferenciavelmente conjugados* se existe um difeomorfismo $g : E_1 \longrightarrow E_2$, chamado de *conjugação diferencial*, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_t^2 \circ g = g \circ \phi_t^1$$

Definição 0.1.3. Dados dois campos de vetores $f_1 : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $f_2 : E_2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e seus fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2, dizemos que os campos f_1 e f_2, ou que os fluxos ϕ_t^1 e ϕ_t^2, são *topologicamente conjugados* se existe um homeomorfismo $g : E_1 \longrightarrow E_2$, chamado de *conjugação topológica*, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_t^2 \circ g = g \circ \phi_t^1$$

Definição 0.1.4. Uma singularidade x_0 de f é *hiperbólica* se todos os autovalores generalizados da parte linear, $Df(x_0)$, do campo f em x_0, têm parte real não nula.

Definição 0.1.5. Dizemos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ é uma *superfície imersa* de classe C^1 e dimensão k se existe uma aplicação injetora $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que $g(\mathbb{R}^k) = S$ e a aplicação linear $Dg : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é injetora para cada $x \in R^k$.

Exemplo 0.1.1. Cada órbita não compacta de f, pela unicidade e diferenciabilidade (campo de classe C^1), é uma superfície imersa de classe C^2 e dimensão 1, pois a trajetória $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é injetora, de classe C^2 e $x'(t) = f(x(t)) \neq 0$. De fato, $x'(t) = f(x(t))$, como f e $x(t)$ são C^1, pela regra da cadeia temos que x' é de classe C^1 e $x(t)$ de classe C^2.

Teorema 0.1.1 (da Variedade Estável)**.** *Seja $x_0 \in E$ uma singularidade hiperbólica do campo de vetores $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$. A variedade estável $W^s(x_0)$ é uma superfície imersa de classe C^1 e o espaço tangente a $W^s(x_0)$ é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$ gerado pelos autovetores generalizados associados aos autovalores de $Df(x_0)$ com parte real negativa.*

Demonstração. Ver [15] página 296. □

Observação 0.1.1. *O resultado dual vale para variedade instável.*

Teorema 0.1.2 (Hartman - Grobman)**.** *Seja $x_0 \in E$ uma singularidade do campo de vetores $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definido no aberto $E \subset \mathbb{R}^m$. Se x_0 é uma singularidade hiperbólica, então f em x_0 é localmente topologicamente conjugado ao campo linear $Df(x_0) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Ver [15] página 291. □

0.1.2 Resultados de Teoria da Medida

Neste capítulo, a tripla $(X, \mathcal{X}, \mu)$ denotará um espaço de medida, onde X é um conjunto qualquer, $\mathcal{X}$ a σ-álgebra associada e μ uma medida. O símbolo $M^+(X, \mathcal{X})$ será usado para denotar o espaço das funções $\mathcal{X}$-mensuráveis não negativas definidas em X e tomando seus valores em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Além disso, dado um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ o símbolo $\mathcal{B}_U$ será usado para denotar a classe dos borelianos de U, em particular $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ será usado para denotar a classe dos borelianos de $\mathbb{R}^n$. Da mesma maneira os símbolos Leb_U e $Leb_{\mathbb{R}^n}$ (ver [3] pag. 239 para esta definição), serão usado para denotar a classe dos conjuntos Lebesgue mensuráveis de U e de $\mathbb{R}^n$ respectivamente.

Agora apresentaremos algumas propriedades técnicas sobre conjuntos que serão usadas algumas vezes nesta seção.

Sejam $\mathcal{X}$ uma σ-álgebra e $(A_n) \subset \mathcal{X}$ uma sequência arbitrária. Então existe:

1. uma sequência $(E_k) \subset \mathcal{X}$ crescente $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_k \subset \cdots$ tal que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

2. uma sequência $(E_k) \subset \mathcal{X}$ decrescente $E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_k \supset \cdots$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

3. uma sequência $(F_k) \subset \mathcal{X}$ tal que $F_m \cap F_n = \emptyset$ para $n \neq m$ e $\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$;

Demonstração.

1. Defina $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$ desta maneira construímos os termos da sequência (E_k) procurada;

2. Defina $E_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$;

3. Dada uma sequência arbitrária (A_n) construa a sequência encaixada do item 1.. A partir dela defina $F_k = E_k \setminus E_{k-1}$ onde $E_0 = \emptyset$;

$\square$

Proposição 0.1.1. *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida.*

1. *Se $(A_n) \subset \mathcal{X}$ é uma sequência crescente, então $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$;*

2. *Se $(A_n) \subset \mathcal{X}$ é uma sequência decrescente e $\mu(A_{n_0}) < \infty$ para algum n_0 , então $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \mu(A_n)$;*

Demonstração.

1. Defina a sequência (E_k) por $E_1 = A_1$ e $E_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Esta sequência é disjunta e vale
$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$
além disso temos que $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = A_n$. Assim

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)\\
&= \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\\
&= \lim_n \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k)\\
&= \lim_n \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\\
&= \lim_n \mu(A_n)
\end{aligned}$$

2. Defina $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ e seja A_{n_0} tal que $\mu(A_{n_0}) < \infty$ $B_n = A_{n_0} \setminus A_n$ para $n \geq n_0$. Então $B_n \subset B_{n+1}$ para todo $n \geq n_0$ e $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n = A_{n_0} \setminus A$. Portanto, usando a propriedade anterior e o fato de $\mu(A_{n_0}) < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\mu(A_{n_0}) - \mu(A) &= \mu(A_{n_0} \setminus A)\\
&= \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} B_n\right)\\
&= \lim_n \mu(B_n)\\
&= \lim_n \mu(A_{n_0} \setminus A_n)\\
&= \lim_n \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n)\\
&= \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n).
\end{aligned}$$

Consequentemente $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$.

□

Teorema 0.1.3 (Teorema da Convergência Monótona)**.** *Seja* $(f_n)_n$ *uma sequência monótona crescente em* M^+ *que converge para* f *pontualmente. Então*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu. \tag{1}$$

Demonstração. Uma vez que f é o limite de funções mensuráveis temos que f é mensurável(ver [2], página 12, corolário 2.10). Como $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ temos que

$$\int f_n d\mu \leq \int f_{n+1} d\mu \leq \int f d\mu$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 1$. Portanto

$$\lim \int f_n d\mu \leq \lim \int f d\mu.$$

Agora considere $0 < \alpha < 1$ e seja φ uma função simples e mensurável satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$. Seja

$$A_n = \{x \in : f_n(x) \geq \alpha\varphi(x)\},$$

assim $A_n \in \mathcal{X}$, $A_n \subset A_{n+1}$ e $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Então vale a seguinte desigualdade

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int f_n d\mu \tag{2}$$

Uma vez que a função de conjunto definida por $\lambda(E) = \int_E \varphi d\mu$ para todo mensurável $E \in \mathcal{X}$ é uma medida e sequência (A_n) é encaixada com $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ temos que

$$\int \varphi d\mu = \lim \int_{A_n} \varphi d\mu.$$

tomando o limite em (2) encontramos a relação

$$\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu$$

e fazendo $\alpha \longrightarrow 1$ obtemos

$$\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Além disso, como φ é uma função simples arbitrária em M^+ satisfazendo $0 \leq \varphi \leq f$ concluímos que

$$\int f d\mu = \sup_{\varphi} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_n d\mu.$$

Unindo este fato com a desigualdade oposta obtida inicialmente obtemos (1). $\square$

Lema 0.1.1 (Lema de Fatou)**.** *Se* $(f_n)_n$ *é uma sequência em* $M^+(X, \mathfrak{X})$*, então*

$$\int \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Seja $g_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, \cdots\}$, assim $g_m \leq f_n$ sempre que $m \leq n$. Portanto

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu \qquad m \leq n,$$

logo

$$\int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu.$$

Uma vez que a sequência (g_m) é crescente e converge para o $\liminf f_n$, aplicamos o teorema da Convergência Monótona para obter

$$\begin{aligned} \int \liminf f_n d\mu &= \int g_m d\mu && (3) \\ &\leq \liminf \int f_n d\mu. && (4) \end{aligned}$$

□

Teorema 0.1.4 (da Convergência Dominada)**.** *Seja* $(f_n)_n$ *uma sequência de funções integráveis que converge* μ*-qtp para uma função real mensurável* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$ *para todo* n*, então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \int \lim_{n \longrightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Seja $E = \{x | f_n(x) \not\longrightarrow f(x)\}$. Inicialmente, vamos supor que a convergência é em todo o conjunto. Feito isso, basta aplicar o resultado a sequência $g_n = f_n \chi_{E^c}$ convergindo para $g = f_n \chi_{E^c}$. portanto, suponha que (f_n) converge para f em todo ponto. Uma vez que $|f_n| \leq g$ temos que $|f| \leq |g|$ portanto f é integrável. Uma vez que $g + f_n \geq 0$ aplique o lema de Fatou para obter

$$
\begin{aligned}
\int g d\mu + \int f d\mu &= \int (g+f) d\mu \\
&= \int \lim\,(g+f_n) d\mu \\
&= \int \liminf\,(g+f_n) d\mu \\
&\leq \int \liminf\,(g+f_n) d\mu \\
&\leq \liminf \int (g+f_n) d\mu \\
&= \liminf \left(\int g d\mu + \int f_n d\mu \right) \\
&= \int g d\mu + \liminf \int f_n d\mu,
\end{aligned}
$$

donde

$$\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu. \tag{5}$$

Agora façamos a mesma coisa para $g - f_n$, pois $g - f_n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
\int g d\mu - \int f d\mu &= \int (g-f) d\mu \qquad (6)\\
&= \int \lim\,(g-f_n) d\mu \qquad (7)\\
&= \int \liminf\,(g-f_n) d\mu \qquad (8)\\
&\leq \int \liminf\,(g-f_n) d\mu \qquad (9)\\
&\leq \liminf \int (g-f_n) d\mu \qquad (10)\\
&= \liminf \left(\int g d\mu - \int f_n d\mu \right) \qquad (11)\\
&= \int g d\mu + \liminf - \int f_n d\mu \qquad (12)\\
&= \int g d\mu - \limsup \int f_n d\mu, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

donde

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu. \tag{14}$$

Portanto

$$\limsup \int f_n d\mu \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu, \tag{15}$$

donde

$$\int f = \lim \int f_n d\mu.$$

□

Definição 0.1.6. Uma sequência de funções reais mensuráveis (f_n) é dita *convergir em medida* para uma função real mensurável f se

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \mu\left(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}\right) = 0 \tag{16}$$

para todo $\alpha > 0$. Uma sequência de funções reais mensuráveis (f_n) é dita *Cauchy em medida* se

$$\lim_{n,m \longrightarrow 0} \mu\left(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \alpha\}\right) = 0 \tag{17}$$

para todo $\alpha > 0$.

Teorema 0.1.5. *Seja (f_n) uma sequência de funções reais mensuráveis que é Cauchy em medida. Então existe uma subsequência que converge μ-qtp e em medida para uma função real e mensurável f.*

Demonstração. Considere uma subsequência $(g_k) \subset (f_n)$ tal que o conjunto $E_k = \{x | g_{k+1}(x) - g_k(x)| \geq 2^{-k}\}$ é tal que $\mu(E_k) < 2^{-k}$. Seja $F_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$ tal que $F_k \in \mathcal{X}$ e $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)}$. Se $i \geq k \geq j$ e $x \notin F_k$, então

$$\begin{aligned} |g_i(x) - g_j(x)| &\leq |g_i(x) - g_{i-1}(x)| + \cdots + |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \quad (18) \\ &\leq \frac{1}{2^{i-1}} + \cdots + \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^{j-1}}. \quad (19) \end{aligned}$$

Seja $F = \bigcap_{k=1}^{\infty}$ temos que $F \in \mathcal{X}$ e $\mu(F) = 0$. Segue-se que (g_j) converge em $X \setminus F$. Defina f por

$$f(x) = \begin{cases} \lim g_j(x) & \text{se} \quad x \notin F \\ 0 & \text{se} \quad x \in F \end{cases},$$

então (g_j) converge μ-qtp para a função real mensurável f. Fazendo $i \longrightarrow \infty$ em (4), concluímos que se $j \geq k$ e $x \notin F_k$, então

$$|f(x) - g_j(x)| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Isto mostra que a sequência (g_j) converge uniformemente para f no complementar de cada F_k. Para ver que (g_j) converge em medida para f, sejam α e ϵ números reais positivos e escolha k suficientemente grande tal que $\mu(F_k) < 2^{-(k-1)} < \inf(\alpha, \epsilon)$. Se $j \geq k$ a desigualdade acima mostra que

$$\begin{aligned} \{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\} &\subset \{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq 2^{-(k-1)}\} \\ &\subset F_k. \end{aligned}$$

Além disso, $\mu(\{x \in X : |f(x) - g_j(x)| \geq \alpha\}) \leq \mu(F_k) < \epsilon$ para todo $j \geq k$ e portanto (g_j) converge em medida para f. □

Definição 0.1.7. Seja $(X, \mathcal{X})$ um espaço mensurável. Uma *carga* é uma função real λ definida em uma σ-álgebra $\mathcal{X}$ tal que:

1. $\lambda(\emptyset) = 0$;
2. $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ para toda sequência $(A_n) \subset \mathcal{X}$ onde os A_n são conjuntos disjuntos;
3. Se $A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$, onde a sequência $(A_n) \subset \mathcal{X}$ é disjunta, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ é absolutamente convergente, i.e., $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda(A_n)| < +\infty$.

Observação 0.1.2. *Observe que, por definição, uma carga não assume os "valores" $+\infty$ e $-\infty$. Além disso, no item 3, se isto não fosse verdade a carga não estaria bem definida, uma vez que pelo teorema de Riemann, poderíamos reordenar os termos da série de modo que a soma daria qualquer número real.*

Definição 0.1.8. Seja λ uma carga em $\mathcal{X}$. Um conjunto P é dito ser *positivo* com relação a λ se $\lambda(E \cap P) \geq 0$ para todo $E \in \mathcal{X}$. Por outro lado, um conjunto N é dito ser *negativo* com relação a λ se $\lambda(E \cap N) \leq 0$ para todo $E \in \mathcal{X}$. Um conjunto M é dito ser um *conjunto nulo* para λ se $\lambda(E \cap M) = 0$ para todo $E \in \mathcal{X}$.

Observe que a união de conjuntos positivos é positivo. De fato, sejam P_1, P_2 dois conjuntos positivos e $E \in \mathcal{X}$. Seja $P = P_1 \cup P_2$ e observe que

$$\begin{aligned}
E \cap P &= (P_1 \cap E) \cup (P_2 \cap E) \\
&= (P_1 \cap E) \cup ([P_1 \cap (P_2 \cap E)] \cup [P_1^c \cap (P_2 \cap E)]) \\
&= ((P_1 \cap E) \cup [P_1 \cap (P_2 \cap E)]) \cup [P_1^c \cap (P_2 \cap E)] \\
&= [(P_1 \cap E) \cup P_1) \cap ((P_1 \cap E) \cup (P_2 \cap E)] \cup [P_1^c \cap (P_2 \cap E)] \\
&= [P_1 \cap ((P_1 \cap E) \cup (P_2 \cap E))] \cup [(P_1^c \cap E) \cap P_2] .
\end{aligned}$$

Uma vez que esta última união é disjunta temos

$$\begin{aligned}
\lambda(E \cap P) &= \lambda\left([P_1 \cap ((P_1 \cap E) \cup (P_2 \cap E))] \cup [(P_1^c \cap E) \cap P_2]\right) \\
&= \lambda\left([P_1 \cap ((P_1 \cap E) \cup (P_2 \cap E))]\right) + \lambda\left([(P_1^c \cap E) \cap P_2]\right) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

pois P_1 e P_2 são positivos.

Feito essa observação, podemos enunciar o teorema de Decomposição de Hahn que será a base para a prova do teorema de Radon-Nikodým.

Teorema 0.1.6 (Teorema de Decomposição de Hahn)**.** *Seja λ uma carga em $\mathcal{X}$ então existem conjuntos P e N tais que $X = P \cup N$ e $P \cap N = \emptyset$ tal que P é positivo e N é negativo com relação a λ.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ a classe de todos os conjuntos positivos. $\mathcal{P}$ é não vazia, uma vez que $\emptyset \in \mathcal{P}$. Sejam $\alpha = \sup\{\lambda(A) : A \in \mathcal{P}\}$ e $(A_n) \subset \mathcal{P}$ uma sequência de conjuntos tais que $\alpha = \lim \lambda(A_n)$ e seja $P = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Uma vez que a união de conjuntos positivos e um conjunto positivo, a sequência (A_n) pode ser escolhida de modo que seja monótona crescente, pois podemos definir uma nova sequência de positivos com estas mesmas propriedades fazendo $E_k = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$. Suponha que isto foi feito! P é positivo para λ pois

$$\begin{aligned}
\lambda(E \cap P) &= \lambda(E \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \\
&= \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E \cap A_n) \\
&= \lim \lambda(E \cap A_n) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

visto que todos os termos da sequência são maiores ou iguais que zero. Além disso temos que $\alpha = \lim \lambda(A_n) = \lambda(P) < \infty$.

Agora seja $N = X \setminus P$. N e P serão os nossos candidatos para formar a decomposição. Para mostrar que eles de fato formam a decomposição procurada devemos provar que N é negativo, pois já foi mostrado que P é positivo e as outras propriedades ($X = P \cup N$ e $N \cap P = \emptyset$) são obvias. Façamos isto por contradição supondo que esta afirmação é falsa. Então existe um mensurável $E \subset N$ tal que $\lambda(E) > 0$. E não pode ser um conjunto positivo, pois caso contrário $E \cup P$ seria positivo e teríamos $\lambda(E \cup P) = \lambda(E) + \lambda(P) > \alpha$, contradizendo a definição de α. Então E contém um conjunto de carga negativa. Seja n_1 o menor natural tal que E contém um conjunto E_1 com $\lambda(E_1) \leq \dfrac{-1}{n_1}$. Agora observe que

$$\lambda(E \setminus E_1) = \lambda(E) - \lambda(E_1) > \lambda(E) > 0.$$

Portanto $E \setminus E_1$ não pode ser um conjunto positivo pois se $P_1 = P \cup (E \setminus E_1)$ temos que P_1 é positivo e $\lambda(P_1) = \lambda(P \cup (E \setminus E_1)) = \lambda(P) + \lambda((E \setminus E_1)) > \alpha$ contradizendo mais uma vez a definição de α. Portanto $(E \setminus E_1)$ contém um conjunto de carga negativa. Seja n_2 o menor natural tal que $E \setminus E_1$ contém um conjunto mensurável E_2 tal que $\lambda(E_2) \leq \dfrac{-1}{n_2}$. Mais uma vez, como antes, $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ não é um conjunto positivo, assim nós tomamos o menor natural n_3 tal que $E \setminus (E_1 \cup E_2)$ contém um mensurável E_3 tal que $\lambda(E_3) \leq \dfrac{-1}{n_3}$. Repetindo este argumento, seja n_k o menor natural tal que existe um mensurável $E_k \subset E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-1}$ com $\lambda(E_k) \leq \dfrac{-1}{n_k}$. Assim nós encontramos uma sequência disjunta

(E_k) de conjuntos mensuráveis tais que $\lambda(E_k) \leq -\dfrac{1}{n_k}$. Seja $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, assim temos

$$\lambda(F) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k) \leq -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} < 0.$$

Visto que as cargas não assumem $-\infty$, temos que esta última série converge e que $\dfrac{1}{n_k} \longrightarrow 0$. Seja G um subconjunto de $E \setminus F$, como este conjunto não pode ser positivo tome $G \subset E \setminus F$ tal que $\lambda(G) < 0$. Para k suficientemente grande temos que $\lambda(G) < \dfrac{1}{n_k - 1}$ contradizendo o fato de que n_k é o menor natural tal que existe um $E_k \subset E \setminus E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{k-1}$ tal que $\lambda(E_k) \leq -\dfrac{1}{n_k}$. Consequentemente todo mensurável $G \subset E \setminus F$ deve ter $\lambda(G) \geq 0$. Portanto $E \setminus F$ é um conjunto positivo para λ. Uma vez que $\lambda(E \setminus F) = \lambda(E) - \lambda(F) > 0$, concluímos que $P \cup (E \setminus F)$ é um conjunto positivo com carga excedendo α, o que é uma contradição. Portanto $N = X \setminus P$ é negativo para λ e a decomposição foi obtida. □

Definição 0.1.9. Seja λ uma carga em $\mathcal{X}$ e sejam P e N uma decomposição de Hahn para λ. A *variação positiva* e *variação negativa* de λ, são as seguintes medidas finitas, definidas respectivamente por

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P) \qquad \lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N)$$

para todo mensurável $E \in \mathcal{X}$. A *variação total* de λ é a medida finita definida por

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) + \lambda^-(E).$$

O lema seguinte torna bem definida a definição acima. Isto é, mostra que as variações positiva e negativas de λ não dependem da decomposição de Hahn escolhida. Devido a importância secundária de λ^+, λ^- neste texto, a demonstração do referido lema não foi dada. Porém, o leitor que se interesse pode consultar [2], página 82, lema 8.3.

Lema 0.1.2. *Sejam P_1, N_1 e P_2, N_2 duas decomposições de Hahn para λ e $E \in \mathcal{X}$. Então*

$$\lambda(E \cap P_1) = \lambda(E \cap P_2) \quad \text{e} \quad \lambda(E \cap N_1) = \lambda(E \cap N_2).$$

Definição 0.1.10. Uma medida λ em $\mathcal{X}$ é dita ser *absolutamente contínua* com relação a medida μ em $\mathcal{X}$ se quando $E \in \mathcal{X}$ e $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$. Denotaremos este fato por $\lambda << \mu$. Uma carga λ é *absolutamente contínua* com relação a carga μ quando a variação total $|\lambda|$ de λ for absolutamente contínua com relação a $|\mu|$.

Observação 0.1.3. *Sempre que a medida μ da definição acima estiver subentendida e não houver perigo de confusão, diremos apenas que λ é absolutamente contínua. Em geral, neste texto, usaremos este termo quando μ for a medida de Lebesgue m.*

Teorema 0.1.7 (Radon-Nikodým)**.** *Sejam λ e μ medidas σ-finitas definidas em $\mathcal{X}$ e suponha que $\lambda << \mu$. Então existe uma função $f \in M^+(X, \mathcal{X})$ tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \qquad E \in \mathcal{X}. \tag{20}$$

Mais ainda, a função f é unicamente determinada μ-qtp.

Demonstração. Suponha inicialmente que as medidas λ e μ são finitas. Seja $c > 0$, $P(c)$ e $N(c)$ a decomposição de Hahn de X para a carga $\lambda - c\mu$. Se $k \in \mathbb{N}$ considere a seguinte sequência de conjuntos mensuráveis

$$A_1 = N(c), \qquad A_{k+1} = N\left((k+1)c\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Agora observe que os conjuntos A_k $k \in \mathbb{N}$ são disjuntos e

$$\bigcup_{j=1}^{k} N(jc) = \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Segue-se

$$A_k = N(kc) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} N(jc) = N(kc) \cap \bigcap_{j=1}^{k-1} P(jc).$$

Consequentemente, se E é um subconjunto mensurável de A_k então $E \subset N(kc)$ e $E \subset P\left((k-1)c\right)$, portanto

$$(k-1)c\mu(E) \leq \lambda(E) \leq kc\mu(E). \tag{21}$$

Agora defina o conjunto B por

$$B = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} P(jc),$$

assim teremos que $B \subset P(kc)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$0 \leq kc\mu(B) \leq \lambda(B)\lambda(X) < \infty$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto $\mu(B) = 0$. Uma vez que $\lambda << \mu$, concluímos que $\lambda(B) = 0$.

Defina f_c por:

$$f_c(x) = \begin{cases} (k-1)c & \text{se} \quad x \in A_k \\ 0 & \text{se} \quad x \in B \end{cases}$$

Dado um mensurável E temos que E, é a união disjunta, $E = (E \cap B) \cup (E \cap A_k)$, $k \in \mathbb{N}$, portanto segue-se de (2) que

$$\int_E f_c d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E (f_c + c) d\mu \leq \int_E f_c d\mu + c\mu(X).$$

Agora faça $c = c_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, e obtenha a seguinte sequência f_{c_n} de funções

Defina f_c por:

$$f_{c_n}(x) = \begin{cases} (k-1)2^{-n} & \text{se} \quad x \in A_k \\ 0 & \text{se} \quad x \in B \end{cases}.$$

Daí concluímos

$$\int_E f_{c_n} d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_{c_n} d\mu + 2^{-n}\mu(X) \tag{22}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $m \geq n$, e observe que

$$\int_E f_{c_n} d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_{c_m} d\mu + 2^{-m}\mu(X)$$

$$\int_E f_{c_m} d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_{c_n} d\mu + 2^{-n}\mu(X)$$

o que implica em

$$\left| \int_E f_n - f_m d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(X),$$

para todo $E \in \mathfrak{X}$. Seja E o conjunto dos pontos onde o integrando é positivo e negativo.

Desta forma concluímos que

$$\left|\int_E f_n - f_m d\mu\right| \leq 2^{-n+1}\mu(X),$$

sempre que $m \geq n$. Logo f_{c_n} converge em medida e em média para uma função f. Uma vez que $f_{c_n} \in M^+$, pelo teorema 1.4 podemos supor que $f \in M^+$. Mais ainda,

$$\left|\int_E f_{c_n} d\mu - \int_E f d\mu\right| \leq \int_E |f_{c_n} - f| d\mu \leq \int |f_{c_n} - f| d\mu,$$

portanto através de (3) concluímos

$$\lambda(E) = \lim \int f_{c_n} d\mu = \int_E f d\mu,$$

para todo $E \in \mathfrak{X}$. Isto completa a prova da existência no caso em que λ e μ são medidas finitas. Agora provemos a unicidade μ-qtp de f. Com este intuito, suponha que $f, h \in M^+$ e que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_E h d\mu$$

para todo $E \in \mathfrak{X}$. Decomponha X como união dos conjuntos $E_1 = \{x | f(x) \geq h(x)\}$ e $E_2 = \{x | f(x) < h(x)\}$. Assim

$$\begin{aligned}
\int |f - h| d\mu &= \int_{E_1} |f - h| d\mu + \int_{E_2} |h - f| d\mu \\
&= \int_{E_1} f - h d\mu + \int_{E_2} h - f d\mu \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto $f = g$ μ-qtp. Agora suponha que λ e μ são medidas σ-finitas. Seja (E_n) uma sequência de subconjuntos tal que $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E_n) < \infty$, $\lambda(E_n) < \infty$. Use o resultado anterior para obter uma função h_n definida em E_n tal que $h_n = 0$ no complementar de E_n e $\lambda(E) = \int_E h_n d\mu$. Se $n \leq m$ então $X_n \subset X_m$ e isto implica que

$$\int_E h_n d\mu = \int_E h_m d\mu$$

para todo mensurável $E \in X_n$. Pela unicidade de h_n temos que $h_n(x) = h_m(x)$ μ-qtp

$x \in E_n$ sempre que $n \geq m$. Agora defina $f_n = \sup\{h_1, h_2, \cdots, h_n\}$. Assim (f_n) é uma sequência monótona crescente em M^+ e seja $f = \lim f_n$. Se $E \in \mathcal{X}$ então

$$\lambda(E \cap E_n) = \int_E f_n d\mu.$$

Uma vez que $(E \cap E_n)$ é uma sequência crescente de conjuntos cuja união é E segue-se do teorema da Convergência Monótona que

$$\begin{aligned}
\lambda(E) &= \lim \lambda(E \cap E_n) \\
&= \lim \int f_n d\mu \\
&= \int_E f d\mu.
\end{aligned}$$

Para mostrar a unicidade de f o raciocínio é exatamente o anterior. $\square$

Definição 0.1.11. Sejam μ e λ medidas σ-finitas tais que $\lambda << \mu$. Então a função f tal que $\lambda(E) = \int_E f d\mu$ será camada de *derivada de Radon-Nikodým* de λ com relação a μ.

Observação 0.1.4. *Neste texto, frequentemente usaremos a expressão $\lambda = f\mu$ para indicar que f é a derivada de Radon-Nikodým de λ com relação a μ. Portanto quando definirmos uma medida λ por $\lambda = f\mu$ queremos dizer que, para um conjunto mensurável E, $\lambda(E) = \int_E f d\mu$.*

Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida, $(X', \mathcal{X}')$ um espaço mensurável e $f : X \longrightarrow X'$ uma função mensurável. A seguinte definição é do que vem a ser uma medida induzida em $(X', \mathcal{X}')$ por uma aplicação mensurável f cujo contradomínio é X'.

Definição 0.1.12. $f * \mu : \mathcal{X}' \longrightarrow \overline{R}$ definida por

$$f * \mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$$

é chamada de *medida imagem de μ por f*.

Teorema 0.1.8 (Teorema de Mudança de Variável). *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida, $f : X \longrightarrow X'$ uma função mensurável e $f * \mu$ a medida imagem.*

a) Seja $g : X' \longrightarrow \overline{R}$ uma função mensurável não negativa. Então

$$\int_{X'} gd(f*\mu) = \int_X g \circ f d\mu;$$

b) Uma função mensurável $g : X' \longrightarrow \overline{R}$ é $f*\mu$-integrável se, e somente se, $g\circ f$ é μ-integrável e neste caso vale

$$\int_{X'} gd(f*\mu) = \int_X g \circ f d\mu;$$

Observação 0.1.5. *Observe que no item b) não exigimos que $g \geq 0$. Além disso, exigimos apenas a mensurabilidade de f, o que mostra o nível de generalidade da última* (11).

Demonstração. a) Seja $A' \in \mathfrak{X}'$. Analisemos primeiramente o caso em $g = \chi_{A'}$ função característica do conjunto A'.

$$\begin{aligned}\int_{X'} \chi_{A'} d(f*\mu) &= f*\mu(A') \\ &= \mu(f^{-1}(A')) \\ &= \int_X \chi_{f^{-1}(A')} d\mu \\ &= \int_X \chi_{A'} \circ f d\mu\end{aligned}$$

O resultado se estende, sem dificuldades técnicas, para funções simples, e por isto, omitirei esta parte. Para o caso mais geral considere uma sequência (g_n) de funções simples tal que $0 \leq g_n \leq g_{n+1} \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $g_n \longrightarrow g$. Então

$$\begin{aligned}\int_{X'} gd(f*\mu) &= \int_{X'} \lim_n g_n d(f*\mu) && (23)\\ &= \lim_n \int_{X'} g_n d(f*\mu) && (24)\\ &= \lim_n \int_X g_n \circ f d\mu && (25)\\ &= \int_X \lim_n g_n \circ f d\mu && (26)\\ &= \int_X g\circ f d\mu, && (27)\end{aligned}$$

onde, nas implicações (23) $\Longrightarrow$ (24) e (25) $\Longrightarrow$ (26) foi usado o teorema da Convergência Monótona.

b) Decomponha g em sua parte positiva e negativa, i.e., escreva $g = g^+ - g^-$ onde

$$g^+(x) = \sup\{g(x), 0\} \quad \text{e} \quad g^-(x) = \sup\{-g(x), 0\}.$$

Assim, tome sequências $g_n^+ \uparrow g^+$ e $g_n^- \uparrow g^-$, temos assim

$$\begin{aligned}
\int_{X'} gd(f*\mu) &= \int_{X'} g^+ - g^- d(f*\mu) \\
&= \int_{X'} g^+ d(f*\mu) - \int_{X'} g^- d(f*\mu) \\
&= \int_{X'} \lim g_n^+ d(f*\mu) - \int_{X'} \lim g_n^- d(f*\mu) \\
&= \lim \int_X g_n^+ \circ f d\mu - \lim \int_X g_n^- \circ f d\mu \\
&= \int_X g^+ \circ f d\mu - \int_X g^- \circ f d\mu \\
&= \int_X g \circ f d\mu
\end{aligned}$$

□

Definição 0.1.13. Dada uma aplicação $f : X \longrightarrow X$ onde $(X, \mathcal{X}, \mu)$ é um espaço de medida. Dizemos que f *preserva medida* μ se $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{X}$. Neste caso, dizemos também que μ é f*-invariante*.

Um resultado imediato, mas que será usado muitas vezes é o

Corolário 0.1.1. *Seja f mensurável, então μ é invariante por f se, e somente se $f*\mu = \mu$.*

Demonstração. Se μ é f-invariante, então dado $A \in \mathcal{X}$

$$
\begin{aligned}
f * \mu(A) &= \mu(f^{-1}(A)) && (28)\\
&= \int \chi_{f^{-1}(A)} d\mu && (29)\\
&= \int \chi_A \circ f d\mu && (30)\\
&= \int \chi_A d(f * \mu) && (31)\\
&= f * \mu(A), && (32)
\end{aligned}
$$

onde (30) $\Longrightarrow$ (31) pelo teorema de Mudança de Variável. Logo $f*\mu = \mu$. Reciprocamente, se $A \in \mathcal{X}$ então $f * \mu(A) = \mu(A)$ implica em $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ pela definição de $f * \mu$. Concluindo a prova da proposição.

$\square$

Definição 0.1.14. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função, dizemos que g é *localmente lipschitziana* ou *localmente Lipschitz* se para todo $x \in U$ existe V_x vizinhança de x e uma constante C_x, tal que

$$\forall \quad x, y \in V_x, |g(y) - g(z)| \leq C_x|y - z|.$$

Proposição 0.1.2. *Seja $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana. Se $A \in Leb_U$ é tal que $m(A) = 0$, então $g(A) \in Leb_U$ e $m(g(A)) = 0$.*

Demonstração. Uma vez que todo aberto é uma reunião enumerável de compactos e m é uma medida, faremos a suposição que existe um compacto K tal que $A \subset K$. Para cada $x \in K$, existe uma vizinhança V_x de x e uma constante de Lipschitz C_x, tal que

$$\forall \quad y, z \in V_x, \qquad |g(x) - g(y)| \leq C_x|x - y|.$$

Como K é compacto podemos tomar um número finito dessas vizinhanças $V_{x_1}, \cdots, V_{x_m}$ e um número finito de constantes $C_{x_1}, \cdots, C_{x_m}$ com $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$. Seja $C = \max\{C_{x_1}, \cdots, C_{x_m}\}$. Dado $\epsilon > 0$ seja G aberto tal que $A \subset G$ e $m(G) < \epsilon$. Para cada $x \in A$ seja $Q(x)$ o cubo com centro em x tal que $Q(x) \subset G$ e $Q(x) \subset V_{x_i}$ para algum i. Se $y \in Q(x)$

$$\begin{aligned}|g(y)-g(x)| &\leq C_x|y-x| \\ &\leq C|y-x| \\ &\leq Cr(Q(x))\sqrt{n}\end{aligned}$$

onde $r(Q(x))$ é o raio (semi-lado) de $Q(x)$. Se $\widetilde{Q}(g(x))$ denota o cubo de centro $g(x)$ e raio (semi-lado) $Cr(Q(x))\sqrt{n}$, temos que

$$g(Q(x)) \subset \widetilde{Q}(g(x)).$$

Agora usaremos o seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [20] pag. 158 proposição 7.3.1 (olhe também a observação da página 163).

Lema 0.1.3. *Seja J a coleção de todos os cubos fechados com centro na origem de $\mathbb{R}^n$. Se $Q \in J$ indicaremos $Q(x) = x + Q$. Suponha que A é limitado e para cada $x \in A$ associe um cubo $Q(x)$. Então existe uma sequência de pontos $\{x_j\}_j \in A$ tais que*

1. *$A \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} Q(x_j)$;*
2. *todo ponto de $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} Q(x_j)$ pertencem no máximo a 4 conjuntos dos $Q(x_j)$, i.e., $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{Q(x_j)} \leq 4^n$.*

Portanto, pelo lema, existe uma subfamília de $\{Q(x)\}_{x\in A}$, digamos $\{Q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k} \leq 4^n.$$

Portanto temos

$$
\begin{aligned}
m^*(g(A)) &\leq m^*\left(g\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right)\right) \\
&= m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} g(Q_k)\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(g(Q_k)) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(\widetilde{Q}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (2Cr(Q_k)\sqrt{n})^n \\
&= C^n n^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} (2r(Q_k)\sqrt{n})^n \\
&= C^n n^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} m(Q_k) \\
&= C^n n^{\frac{n}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \int \chi_{Q_k} dm \\
&= C^n n^{\frac{n}{2}} \int \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k}\right) dm \\
&= C^n n^{\frac{n}{2}} \int_G \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_k}\right) dm \\
&\leq C^n n^{\frac{n}{2}} 4^n m(G) \\
&= (4Cn^{\frac{1}{2}})^n m(G) \\
&\leq (4Cn^{\frac{1}{2}})^n \epsilon.
\end{aligned}
$$

□

Como ϵ é arbitrário, temos que $m^*(g(A)) = 0$ ou seja $g(A) \in Leb_{\mathbb{R}^n}$ e $m(g(A)) = 0$.

Um resultado bastante conhecido, assim como sua demonstração, que pode ser encontrada em [6] é a

Proposição 0.1.3. *Seja $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então g é localmente lipschitziana.*

Agora segue o resultado conhecido como "fórmula de mudança de variável". Sua demonstração pode ser encontrada em [3] (pag. 338) ou em [20] (pag.178). Esta versão é precisamente a encontrada em [20] (pag.178), porém [3], trata este teorema de maneira mais detalhada, como por exemplo, separando o caso linear do não linear, bem como alguns outros detalhes.

Teorema 0.1.9 (Fórmula de Mudança de Variável)**.** *Seja $f : V \longrightarrow W$ uma bijeção C^1 de um aberto V de $\mathbb{R}^n$ numa aberto W de $\mathbb{R}^m$ $Df(x) \neq 0$ para todo $x \in V$. Então valem:*

a) Se $E \subset V$ é um conjunto Lebesgue-mensurável, então $f(E)$ é um Lebesgue-mensurável e

$$m(f(E)) = \int_E |Df|dm.$$

b) Se $g \in L^1(W)$, então $(g \circ f)|Df| \in L^1(V)$ e

$$\int_W gdm = \int_V (g \circ f)|Df|dm.$$

Demonstração. □

Teorema 0.1.10 (Teorema de Diferenciação de Lebesgue)**.** *Se f é m-integrável em $\mathbb{R}^n$. Seja $Q(x,r)$ um cubo de centro x e semi-lado $r > 0$. Então*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{m(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} f(y)dy = f(x) \qquad m - \text{qtp}.$$

Teorema 0.1.11 (Teorema de Densidade de Lebesgue)**.** *Seja A um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^1$. Seja, para cada $x \in A$, $\{I_n(x)\}_n$ uma sequência de intervalos fechados tais que $I_n(x) \longrightarrow x$. Então*

$$\frac{m(I_n(x) \cap A)}{m(I_n(x))} \longrightarrow \chi_A \qquad m - \text{qtp}.$$

Se f é m-integrável em $\mathbb{R}^n$. Seja $Q(x,r)$ um cubo de centro x e semi-lado $r > 0$. Então

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{m(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} f(y)dy = f(x) \qquad m - \text{qtp}.$$

Outro teorema bastante usado neste texto é o famoso

Teorema 0.1.12 (Teorema de Fubini)**.** *Sejam $(X, \mathcal{X}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos, $\pi = \mu \times \nu$ a medida produto em $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ de μ por ν. Se a função F em $Z = X \times Y$*

em $\mathbb{R}$ é integrável com respeito a π, então as funções reais $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $g : Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definidas por

$$f(x) = \int_Y F_x d\nu, \qquad g(y) = \int_X F^y d\mu$$

possuem integrais finitas e

$$\int_X f d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y g d\nu.$$

Em outras palavras

$$\int_X \left[\int_Y F d\nu\right] d\mu = \int_Z F d\pi = \int_Y \left[\int_X F d\mu\right] d\nu.$$

Agora enunciaremos um teorema cuja demonstração e detalhes podem ser vistos em [19]. Para isto, vamos relembrar algumas definições necessárias.

Definição 0.1.15. Um espaço topológico (X, τ) é dito ser *localmente compacto* se todo ponto de X possui uma vizinhança cujo o fecho é compacto.

Definição 0.1.16. Um espaço topológico (X, τ) é dito ser *Hausdorff* se dados dois pontos distintos $x, y \in X$, existem vizinhanças V_x e V_y, tais que $x \in V_x$, $y \in V_x$ e $V_x \cap V_y = \emptyset$.

Teorema 0.1.13 (de Representação de Riesz)**.** *Se X é um espaço topológico localmente compacto e Hausdorff, então todo funcional linear limitado e positivo, Φ, definido em $C_0(X, \mathbb{R})$ é representado por uma única medida boreliana regular μ, no seguinte sentido:*

$$\Phi f = \int f d\mu$$

para toda $f \in C_0(X, \mathbb{R})$. Além disso $||f|| = \mu(X)$.

Topologia no Espaço das Medidas

Nesta seção, será construída uma coleção de subconjuntos do conjunto das probabilidades borelianas definidas numa variedade compacta M. Este espaço de medidas será denotado por

$$\mathcal{S}(M).$$

Tal coleção satisfaz os axiomas de espaços topológicos.

A Topologia *fraca**

A ideia intuitiva de proximidade entre duas medidas é se elas dão origem a integrais de funções contínuas próximas. Para tornar esta ideia precisa temos a seguinte definição do que vem a ser uma vizinhança nesta topologia.

Definição 0.1.17. Dada uma medida $\mu \in \mathcal{S}(M)$, um conjunto finito $F = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ de funções contínuas $\phi_j : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e um número $\epsilon > 0$, definimos

$$V(\mu, F, \epsilon) = \{\eta \in S(M) : \left|\int \phi_j d\eta - \int \phi_j d\mu\right| < \epsilon \quad \forall \quad \phi_j \in F\}.$$

Portanto, as vizinhanças da topologia fraca* são definidas desta maneira, e variando o conjunto F e o número ϵ, temos toda a coleção, onde cada vizinhança de uma medida μ é denotada por $V(\mu, F, \epsilon)$.

A proposição seguinte caracteriza a convergência de medidas neste espaço.

Proposição 0.1.4. *Uma sequência $(\mu_n)_{n\in N} \subset S(M)$ converge para a medida $\mu \in S(M)$ na topologia fraca* se, e somente se,*

$$\int \phi d\mu_n \longrightarrow \int \phi d\mu \text{ para toda função contínua } \phi : M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Demonstração. Tome uma função contínua $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e defina o conjunto $F = \{\phi\}$. Como $\mu_n \longrightarrow \mu$ temos que dado $\epsilon > 0$ existe um n_0 tal que $\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon)$. Isto significa que

$$\left|\int \phi_n d\eta - \int \phi d\mu\right| < \epsilon.$$

Ou seja, $\int \phi d\mu_n$ converge para $\int \phi d\mu$.

Reciprocamente, suponha que $\int \phi d\mu_n$ converge para $\int \phi d\mu$ para toda função contínua ϕ, então dado qualquer $F = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ e ϵ, existe um n_0 tal que $\mu_n \in V(\mu, F, \epsilon)$ para $n > n_0$. Com efeito, se $F = \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N\}$ então para cada j existe n_j tal que

$$\left|\int \phi_j d\mu_n - \int \phi d\mu\right| < \epsilon \quad \text{para todo} \quad n > n_j.$$

Daí, tome $n_0 = \max\{n_1, \cdots, n_N\}$. $\square$

Outra caracterização da convergência de medidas é dada na seguinte proposição (para consultar a demonstração veja [1]).

Proposição 0.1.5. *Assuma que a sequência* (μ_n) *converge para a medida* μ *na topologia fraca*. Então*

1. $\limsup_{n \longrightarrow \infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$ *para todo conjunto compacto* $K \subset M$*;*
2. $\liminf_{n \longrightarrow \infty} \mu_n(U) \geq \mu(U)$ *para todo conjunto aberto* $U \subset M$*;*

Próximo passo será mostrar a metrizabilidade e a compacidade deste espaço. Usaremos o lema seguinte, onde $C^0(M)$ denotará o espaço métrico das funções contínuas $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja métrica é a da convergência uniforme:

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| : x \in M.$$

Lema 0.1.4. *Se* M *é um espaço métrico então* $C^0(M)$ *é separável, isto é, possui subconjuntos enumeráveis e densos.*

Teorema 0.1.14. $S(M)$ *munido da topologia fraca * é metrizável e compacto.*

Demonstração. Usamos o lema 1.2 para tomar um subconjunto $\mathcal{F} = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ enumerável e denso na bola unitária de $C^0(M)$.

Agora dado um par de medidas (μ_1, μ_2) defina

$$d(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int \varphi_n d\mu_1 - \int \varphi_n d\mu_1 \right|. \tag{33}$$

Vamos mostrar que esta expressão está bem definida e é uma métrica em $\mathcal{S}(M)$. Para isto, lembre que as funções φ_n estão na bola unitária, de modo que $\sup |\varphi_n| \geq 1$ e que as medidas μ_i são probabilidades, o que implica na limitação do termo geral da soma por $2 \cdot 2^{-n}$ e consequentemente, pelo teste de comparação, na convergência de (33).

Agora, para comprovarmos que esta expressão é uma métrica precisamos mostrar

1. $d(\mu_1, \mu_2) = 0 \Longleftrightarrow \mu_1 = \mu_2$;
2. $d(\mu_1, \mu_2) \geq 0 \Longleftrightarrow \mu_1 = \mu_2$;
3. $d(\mu_1, \mu_2) = d(\mu_2, \mu_1)$;
4. $d(\mu_1, \mu_2) \leq d(\mu_1, \mu_3) + d(\mu_3, \mu_2)$.

Entretanto, o único axioma não trivial para se provar é o 1.. Vamos prová-lo. A hipótese de $d(\mu_1, \mu_2) = 0$ implica que $\int \varphi_n d\mu_1 = \int \varphi_n d\mu_2$ para toda $\varphi_n \in \mathcal{F}$. Como para cada elemento φ na bola unitária, existe uma sequência $(\varphi_n) \subset \mathcal{F}$ convergindo para φ temos que a igualdade

$$\int \varphi d\mu_1 = \int \varphi d\mu_2 \tag{34}$$

vale para toda função φ na bola, pois a convergência uniforme implica na convergência das integrais. Como toda função de $C^0(M)$ possui algum múltiplo na bola unitária concluímos que a relação (34) vale para toda função contínua. Portanto $\mu_1 = \mu_2$.

Agora vamos mostrar que d gera a topologia. Dado $\delta > 0$ fixe N suficientemente grande, de modo que

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\delta}{2}$$

e seja $\mathcal{F}_N = \{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_N\}$ o conjunto formado pelos primeiros N elementos do conjunto $\mathcal{F}$. Além disso seja $\epsilon = \dfrac{\delta}{2}$. Afirmo $V(\mu, F, \epsilon) \subset B(\mu, \delta)$. De fato

$$\begin{aligned}
\nu \in V(\mu, F, \epsilon) &\implies \left| \int \varphi_n - \int \varphi_n \right| < \epsilon \text{ para todo } 1 \leq n \leq N \\
&\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left| \int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu \right| \\
&< \sum_{n=1}^{N} 2^{-n}\epsilon + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-n}\epsilon \\
&< \delta,
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação.

Reciprocamente, dado $\mathcal{F}_N = \{\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N\}$ e $\epsilon > 0$, e selecione elementos distintos de $\phi_{n_1}, \cdots, \phi_{n_N}$ distintos de $\mathcal{F}$ tais que

$$||\phi_{n_j} - \psi_j|| < \frac{\epsilon}{2} \text{ para todo } 1 \leq j \leq N.$$

Agora vamos fixar $\delta > 0$ suficientemente pequeno para que $2^{n_j}\delta < \dfrac{\epsilon}{4}$ para todo $1 \leq j \leq N$. Afirmo que $B(\mu, \delta) \subset V(\mu, \mathcal{F}_N, \epsilon)$. De fato

$$\begin{aligned}
\nu \in B(\mu,\delta) &\implies \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left|\int \varphi_n d\mu - \int \varphi_n d\nu\right| < \delta \\
&\implies \left|\int \varphi_{n_j} d\mu - \int \varphi_{n_j} d\nu\right| < 2^{n_j}\delta \text{ para todo } 1 \le j \le N \\
&\implies \left|\int \psi_j d\mu - \int \psi_j d\nu\right| < 2^{n_j}\delta + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \text{ para todo } 1 \le n \le N.
\end{aligned}$$

Isto prova a afirmação.

Agora vamos provar que o espaço em questão é compacto. Para isto, usaremos o teorema da Representação de Riesz enunciado nas preliminares de teoria da Medida. O objetivo é mostrar que toda sequência $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(M)$ admite uma sequência convergente na topologia fraca*, visto que, já mostramos que o espaço é metrizável.

Para isto $\mathcal{F} = \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto de $C^0(M)$ que enumerável e denso na bola unitária. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ a sequência de números reais $(\int \varphi_n d\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada por 1 o que implica na existência de uma subsequência convergente $(k_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$ onde

$$\int \varphi_n d\mu_{k_j^n} \text{ converge para algum número } \phi_n \in \mathbb{R} \text{ quando } j \longrightarrow \infty.$$

Podemos também escolher a subsequência $(k_j^{n+1})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(k_j^{n+1})_{j\in\mathbb{N}}$. Então defina $l_j = k_j^j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Agora observe que cada $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de cada $(k_j^n)_{j\in\mathbb{N}}$, a menos de um numero finito de termos. Portanto

$$\phi(\varphi) = \int \varphi_n d\mu_{j_j}^n \longrightarrow \phi_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Agora vejamos que

$$\phi(\varphi) = \lim_j \int \varphi d\mu_{l_j} \text{ existe, para toda função } \varphi \in C^0(M). \tag{35}$$

Para isto, suponha primeiro que φ está na bola unitária de $C^0(M)$. Dado $\epsilon > 0$ encontramos $\varphi_n \in \mathcal{F}$ tal que $||\varphi - \varphi_n|| \le \epsilon$. Então

$$\left|\int \varphi d\mu_{l_j} - \int \varphi_n d\mu_{l_j}\right| \le \epsilon$$

para todo j. Como $\int \varphi_n d\mu_{l_j} \longrightarrow \phi_n$, temos que

$$\limsup_j \int \varphi d\mu_{l_j} - \liminf_j \int \varphi d\mu_{l_j} \leq 2\epsilon.$$

Uma vez que o ϵ é arbitrário, concluímos que $\lim_j \int \varphi d\mu_{l_j}$ existe. Portanto provamos a relação (35) quando a função está na bola unitária. Para uma função φ qualquer, repita este procedimento para $\varphi' = \dfrac{\varphi}{||\varphi||}$ o que completa a prova de (35). Agora, suponha que a função φ é positiva em todo ponto, então $\phi(\varphi) \geq \min \varphi > 0$. Portanto, o operador linear $\phi : C^0 \longrightarrow \mathbb{R}$ é positivo. Além disso, $\phi(1) = 1$ portanto existe alguma probabilidade boreliana μ tal que

$$\phi(\varphi) = \int \varphi d\mu$$

para toda função contínua φ. Agora a igualdade em (35) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\int \varphi = \lim_j \int \varphi d\mu_{l_j} \text{ para toda } \varphi \in C^0(M).$$

Pela proposição 1.4 temos que a subsequência $(\mu_{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge para μ na topologia fraca*. E isto completa a prova deste teorema.

$\square$

Os próximo resultado será usados mais a frente. Para detalhes da demonstração o leitor pode consultar [1] ou [13].

Proposição 0.1.6. *Sejam ν uma probabilidade num espaço métrico compacto M, $\varphi : M \longrightarrow [0, +\infty)$ ν-integrável e μ_i, $i \geq 1$, uma sequência de probabilidades em M convergindo μ na topologia fraca*. Se $\mu_i \leq \varphi\nu$ para todo $i \geq 1$ então $\mu \leq \varphi\nu$.*

Demonstração. Seja B um conjunto mensurável. Para $\epsilon > 0$, seja $K_\epsilon \subset B$ um compacto tal que $\mu(B \setminus K_\epsilon)$ e $(\varphi\nu)(B \setminus K_\epsilon)$ são ambos menores do que ϵ. Seja A_ϵ uma vizinhança aberta de K_ϵ definida por $A_\epsilon = \{z : d(z, K_\epsilon) < r\}$ para um r suficientemente pequeno de modo que $\mu(A_\epsilon \setminus K_\epsilon)$ e $(\varphi\nu)$ $\mu(K_\epsilon \setminus K_\epsilon)$ sejam ambos menores do que ϵ e tal que a fronteira de A_ϵ tenha medida μ nula. Então $\mu = \lim \mu_i$ implica $\mu_i(A_\epsilon) \leq (\varphi\nu)(A_\epsilon)$. Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$ nós temos $\mu(B) \leq (\varphi\nu)(B)$. $\square$

0.1.3 Teoria Ergódica e Medidas Físicas

Ergodicidade

Teorema 0.1.15 (Teorema Ergódico de Birkhoff)**.** *Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação e $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida onde μ é f-invariante.*

1. *Se $\varphi \in L^1(X, \mu)$ então o limite*
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))$$
existe em μ-qtp $x \in X$;

2. *Se $\varphi \in L^p(X, \mu)$ com $1 \leq p < \infty$ então a função $\widetilde{\varphi}$ definida por*
$$\widetilde{\varphi}(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))$$
pertence a $L^p(X, \mu)$ e satisfaz
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \left\|\widetilde{\varphi} - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))\right\|_p = 0, \tag{36}$$
$$\widetilde{\varphi} \circ f = \widetilde{\varphi}, \qquad \mu - \text{qtp } x \in X \tag{37}$$

3. *Para toda $\varphi \in L^p$ temos*
$$\int \widetilde{\varphi} d\mu = \int \varphi d\mu.$$

Definição 0.1.18. Dizemos que um conjunto mensurável $A \subset X$ é invariante por f se $f^{-1}(A) = A$. Uma função mensurável $\psi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante por f se $\psi \circ f = \psi$.

Definição 0.1.19. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação e $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de medida onde μ é f-invariante. Dizemos que f é *ergódica* para μ se para todo conjunto $A \in \mathcal{X}$, f-invariante vale $\mu(A) = 0$ ou $\mu(A) = 1$

Observação 0.1.6. *Outros termos que são utilizados para dizer que f é ergódica para μ são: μ é ergódica para f ou o sistema (f, μ) é ergódico. Além disso, para expressar o limite*

$\lim_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(x))$, *o chamamos de tempo médio, tempo médio de tempo médio de Birkhoff ou média temporal.*

A próxima proposição caracterizará um sistema ergódico e, consequentemente, nos ajudará a entendê-los. Além disso, a proposição nos fornecerá algumas ferramentas para provar quando uma transformação f é ergódica.

Proposição 0.1.7. *As seguintes propriedades são equivalentes:*

(1) O sistema (f, μ) é ergódico;

(2) Se $\varphi \in L^1(X, \mu)$ é f-invariante, então φ é constante μ-qtp;

(3) Se $\varphi \in L^p(X, \mu)$ é f-invariante, então φ é constante μ-qtp;

(4) Para todo $A, B \in \mathcal{X}$ temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mu(f^{-j}(A) \cap B) = \mu(A)\mu(B);$$

(5) $\varphi \in L^1(X, \mu)$ temos que

$$\widetilde{\varphi}(x) = \int \varphi d\mu, \qquad \mu\text{-qtp } x \in X.$$

Demonstração. (3) $\Longrightarrow$ (1). Se A é f-invariante, então a função característica χ_A é f invariante. De fato

$$\begin{aligned} \chi_A \circ f &= \chi_{f^{-1}(A)} \\ &= \chi_{(A)}. \end{aligned}$$

Como $\chi_A \in L^P(X, \mu)$ temos que χ_A é constante. Logo deve ser 0 μ-qtp ou 1 μ-qtp. Portanto, $\mu(A) = \int \chi_A d\mu = 0$, no primeiro caso, ou $\mu(A) = \int \chi_A d\mu = 1$ no segundo caso.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Se $\varphi \in L^1(X, \mu)$ é f-invariante o conjunto $A_c = \{x|\varphi(x) \leq c\}$ é f-invariante para cada c. Uma vez que f é ergódica, temos que $\mu(A_c) = 0$ ou 1. Isto implica que φ é constante μ-qtp.

(2) $\Longrightarrow$ (5). Uma vez que, pelo teorema Ergódico de Birkhoff $\widetilde{\varphi} \in L^1$ e, além disso, $\widetilde{\varphi}$ é f-invariante, temos que $\widetilde{\varphi}$ é constante μ-qtp. Daí temos

$$\begin{aligned}\int \varphi d\mu &= \int \widetilde{\varphi} d\mu \\ &= \widetilde{\varphi} \int 1 d\mu \\ &= \widetilde{\varphi}\mu(X) \\ &= \widetilde{\varphi} \quad \mu-\mathrm{qtp},\end{aligned}$$

pois $\mu(X) = 1$.

(5) $\Longrightarrow$ (4). Por (5) e pelo teorema Ergódico de Birkhoff temos

$$\mu(A) = \int \chi_A d\mu = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(f^j(x)).$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\mu(A)\mu(B) &= \mu(A)\int \chi_B d\mu & (38)\\
&= \int (\mu(A))\,(\chi_B) d\mu & (39)\\
&= \int \left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_A\circ f^j\right)(\chi_B)d\mu & (40)\\
&= \int \left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_A\circ f^j\,(\chi_B)\right)d\mu & (41)\\
&= \int \left(\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\chi_{f^{-j}(A)}\chi_B\right)d\mu & (42)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\int\left(\sum_{j=0}^{n-1}\chi_{f^{-j}(A)}\chi_B\right)d\mu & (43)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\int\left(\sum_{j=0}^{n-1}\chi_{f^{-j}(A)\cap B}\right)d\mu & (44)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int\chi_{f^{-j}(A)\cap B}d\mu & (45)\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mu(f^{-j}(A)\cap B)d\mu, & (46)
\end{aligned}$$

onde em (42) $\Longrightarrow$ (43) foi usado o teorema da Convergência Dominada, pois o integrando em questão é dominado pela função constante $g \equiv 1$ que é integrável, uma vez que a medida é uma probabilidade.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Se A é f-invariante, aplicamos (4) nos conjuntos A e A^c observando que, pela f-invariância, $f^{-j}(A) = A$ para todo j. Portanto temos

$$\begin{aligned}
\mu(A)\mu(A^c) &= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mu(f^{-j}(A)\cap A^c)d\mu\\
&= \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mu(A\cap A^c)d\mu\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Caso $\mu(A)=0$ o resultado está provado. Se $\mu(A)\neq 0$ então $\mu(A^c)=0$, o que implica em $\mu(A)=1$, pois μ é uma probabilidade.

$\square$

Proposição 0.1.8. *Se existe um conjunto denso $F\subset L^1$ tal que*

$$\widetilde{\varphi}=\int \varphi d\mu, \qquad \mu\text{-qtp}$$

para toda $\varphi\in F$, então f é ergódica.

Demonstração. Uma vez que a sequência $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j$, pelo teorema Ergódico de Birkhoff, converge para $\widetilde{\varphi}$, em $L^1(X,\mu)$, precisamos mostrar apenas que para $\varphi\in L^1(X,\mu)$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j-\int\varphi d\mu\right|\right|_1=0.$$

De fato, uma vez provada esta propriedade, dado um ϵ existirá um n_0 tal que para $n\geq n_0$ valem

$$\left|\left|\widetilde{\varphi}-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j\right|\right|_1\leq\frac{\epsilon}{2}\ \ e\ \ \left|\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j-\int\varphi d\mu\right|\right|_1\leq\frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto, somando essas desigualdades e aplicando a desigualdade de Minkowski (a desigualdade triangular para a norma $||\ \ ||_1$), teremos

$$\left|\left|\widetilde{\varphi}-\int\varphi d\mu\right|\right|_1\leq\left|\left|\widetilde{\varphi}-\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j\right|\right|_1+\left|\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ f^j-\int\varphi d\mu\right|\right|_1\leq\frac{\epsilon}{2}+\leq\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Como isto vale, para todo $\epsilon>0$, temos que

$$\widetilde{\varphi}=\int\varphi d\mu, \qquad \mu\text{-qtp}.$$

Então vamos à prova. Dada $\varphi\in L^1(X,\mu)$, tome $\epsilon>0$ e $g\in F$ tal que $||\varphi-g||_1\leq\dfrac{\epsilon}{3}$. Seja n_0 tal que $n\geq n_0$ implica

$$\left|\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}g\circ f^j-\int g d\mu\right|\right|_1\leq\frac{\epsilon}{3}.$$

Então para $n \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f - \int \varphi d\mu \right\|_1 &\leq \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g \circ f \right\|_1 \\
&+ \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g \circ f - \int g d\mu \right\|_1 + \left| \int g d\mu - \int \varphi d\mu \right| \\
&= \frac{1}{n} \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f - \sum_{j=0}^{n-1} g \circ f \right\|_1 \\
&+ \left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} g \circ f - \int g d\mu \right\|_1 + \left| \int g d\mu - \int \varphi d\mu \right|.
\end{aligned}$$

Agora observe que, pelo Teorema de Mudança de Variável e lembrando que μ é f-invariante, temos

$$\begin{aligned}
\left|\left|\varphi \circ f^j - g \circ f^j\right|\right|_1 &= \left|\left|(\varphi - g) \circ f^j\right|\right|_1 \\
&= \int \left|(\varphi - g) \circ f^j\right| d\mu \\
&= \int |(\varphi - g)| \circ f^j d\mu \\
&= \int |(\varphi - g)| d(f^j * \mu) \\
&= \int |(\varphi - g)| d\mu \\
&= ||\varphi - g||_1 ,
\end{aligned}$$

e como
$$\left| \int g d\mu - \int \varphi d\mu \right| \leq \int |g - \varphi| d\mu = ||g - \varphi||_1 ,$$

concluímos que

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi \circ f^j - \int \varphi d\mu \right\|_1 \leq ||g - \varphi||_1 + \frac{\epsilon}{3} + ||g - \varphi||_1 = \epsilon.$$

□

Medidas Físicas

Agora daremos a definição do que é uma medida física ou medida de *Sinai-Ruelle-Bowen (SRB)*. Para isto, considere a

Definição 0.1.20. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável sobre um espaço de probabilidade $(X, \mathcal{X}, \mu)$, onde μ é uma probabilidade f-invariante, i.e., $\mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{X}$. Seja δ_p a medida de Dirac do ponto $p \in X$. A *bacia ergódica* de μ, denotada por $B(\mu)$ é o conjunto dos pontos $z \in X$ tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(z)} \xrightarrow{w^*} \mu, \qquad \text{quado } n \longrightarrow \infty. \tag{47}$$

Onde o símbolo w^* significa que a convergência é na topologia fraca*. Equivalentemente, em virtude da proposição 1.4, a *bacia ergódica* de μ, denotada por $B(\mu)$, é o conjunto dos pontos $z \in X$ tal que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z)) = \int \varphi d\mu \quad \text{ para toda função contínua } \varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}. \tag{48}$$

Definição 0.1.21. Uma medida de probabilidade μ que é f-invariante é chamada de medida *física* ou *Sinai-Ruelle-Bowen(SRB)* para f se sua bacia ergódica $B(\mu)$ tem medida de Lebesgue positiva, i.e., $m(B(\mu)) > 0$.

Proposição 0.1.9. *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável que é μ-ergódica. Então $\mu(B(\mu)) = 1$.*

Demonstração. Uma vez que $C^0(X;\mathbb{R})$ é um espaço métrico separável, com a métrica da convergência uniforme, i.e, $d(h_1, h_2) = \sup\{|h_1(x) - h_2(x); x \in X|\}$ para $h_1, h_2 \in C^0(X;\mathbb{R})$, tome um conjunto enumerável e denso, $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C^0(X;\mathbb{R})$, em $C^0(X;\mathbb{R})$. Para cada φ_k o teorema de Birkhoff garante a existência de um conjunto B_{φ_k} com $\mu(B_{\varphi_k}) = 1$ tal que para todo $z \in B_{\varphi_k}$ vale

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \varphi(f^j(z)) = \int \varphi d\mu.$$

Seja

$$B = \bigcap_k B_{\varphi_k},$$

então $\mu(B) = 1$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mu(B^c) &= \mu\left(\left(\bigcap_k B_{\varphi_k}\right)^c\right) \\
&= \mu\left(\bigcup_k B^c_{\varphi_k}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

pois os $B^c_{\varphi_k}$ tem medida μ nula. Vamos mostrar que $B \subset B(\mu)$. Para isto, seja $z \in B$, e φ uma função contínua e $\epsilon > 0$, observe que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(z)) - \int \varphi d\mu\right| &\leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(z)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_k(f^j(z))\right| \\
&+ \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_k(f^j(z)) - \int \varphi_k d\mu\right| + \left|\int \varphi_k d\mu - \int \varphi d\mu\right|.
\end{aligned}$$

Como $\varphi_k(z) \longrightarrow \varphi(z)$, seja k_0, tal que para $k > k_0$ ocorra

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(z)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_k(f^j(z))\right| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{49}$$

Temos também que

$$\int \varphi_k d\mu \longrightarrow \int \varphi d\mu$$

pois $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ uniformemente. Portanto seja k_1, tal que $k > k_1$ ocorra

$$\left|\int \varphi_k d\mu - \int \varphi d\mu\right| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{50}$$

Logo faça $k > \max\{k_1, k_0\}$. Agora, considere um n_0 tal que $n > n_0$ implique

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_k(f^j(z)) - \int \varphi_k d\mu\right| \leq \frac{\epsilon}{3}. \tag{51}$$

Some estas desigualdades para obter, se $n \geq n_0$

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(z)) - \int \varphi d\mu\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(z)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_k(f^j(z))\right|$$
$$+\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi_k(f^j(z)) - \int \varphi_k d\mu\right| + \left|\int \varphi_k d\mu - \int \varphi d\mu\right| \leq \epsilon.$$

Portanto $B \subset B(\mu)$ e consequentemente $1 = \mu(B) \leq \mu(B(\mu)) \leq 1$ o que implica $\mu(B(\mu)) = 1$. $\square$

Corolário 0.1.2. *Seja $(X, \mathcal{X}, \mu)$ um espaço de probabilidade e $f : X \longrightarrow X$ uma transformação mensurável que é μ-ergódica, onde μ é absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue. Então μ é uma medida física para f.*

Demonstração. Se $m(B(\mu)) = 0$, então $\mu(B(\mu)) = 0$. Uma contradição pela proposição anterior. $\square$

Vamos estender esta definição para sistemas dinâmicos contínuos, i.e., para fluxos. Seja ϕ^t, $t \geq 0$, um semi-fluxo em X, i.e., ϕ^0 é a transformação identidade, e cada $\phi^t : X \longrightarrow X$, $t \geq 0$ é uma transformação mensurável em X com $\phi^{t+s} = \phi^t \circ \phi^s$, para todo t, s. Uma medida é μ é invariante pelo semi-fluxo se ela for ϕ^t-invariante para todo $t \geq 0$.

Definição 0.1.22. A *bacia ergódica* de μ, denotada por $B(\mu)$, é o conjunto dos pontos $z \in X$ tal que dada qualquer função contínua $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \varphi(\phi^t(z))dt \longrightarrow \int \varphi d\mu \qquad \text{quando } T \longrightarrow \infty. \tag{52}$$

Definição 0.1.23. Dizemos que μ é uma medida *física* ou *Sinai-Ruelle-Bowen(SRB)* para o fluxo ϕ^t se a bacia ergódica de ϕ^t tem medida de Lebesgue positiva, isto é, $m(B(\mu)) > 0$.

0.1.4 Funções de Variação Limitada

Definição 0.1.24. Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Dado $x \in [a, b]$ defina a *variação de f no ponto x* por

$$var_f(x) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|; a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = x\}.$$

A *variação de* f é denotada por $var(f)$ e definida por

$$var(f) := var_f(b).$$

Definição 0.1.25. A função f é dita ser de *variação limitada* se

$$var(f) = var_f(b) < \infty.$$

O espaço vetorial das funções de variação limitada será denotado por BV. Observe que isto faz sentido. Considere funções $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada, $c \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b]$ e $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a,b]$. Assim

$$\begin{aligned} |(f+cg)(x_j) - (f+cg)(x_{j-1})| &= |f(x_j) - f(x_{j-1}) + c\,[g(x_j) - g(x_{j-1})]\,| \\ &\leq |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |c||g(x_j) - g(x_{j-1})| \\ \Longrightarrow \sum_{j=1}^{n} |(f+cg)(x_j) - (f+cg)(x_{j-1})| &\leq \sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})| + |c| \sum_{j=1}^{n} |g(x_j) - g(x_{j-1})| \\ &\Longrightarrow var_{f+cg}(x) \leq var_f(x) + |c| var_g(x). \end{aligned}$$

Em particular, fazendo $x = b$ concluímos que, de fato, BV constitui um subespaço vetorial de $C^0([a,b], \mathbb{R})$.

Exemplo 0.1.2. Seja $D \subset [a,b]$ um conjunto denso em $[a,b]$ tal que o seu complementar D^c também seja um conjunto denso em $[a,b]$. Considere a função característica deste conjunto, i.e, $f = \chi_D$. Dado $n \in \mathbb{N}$, construa uma partição particular de $[a,b]$ de maneira que $x_j \in D$ e $x_{j+1} \in D^c$ para $0 < j < n$. Assim

$$\sum_{j=1}^{n} |\chi_D(x_j) - \chi_D(x_{j-1})| = (n-2) + |\chi_D(b) - \chi_D(x_{n-1})| + |\chi_D(x_1) - \chi_D(a)| \geq n-2.$$

De modo que $var(\chi_D) = \sup\{\sum_{j=1}^{n} |f(x_j) - f(x_{j-1})|; a = x_0 < x_1 < \cdots x_n = b\} \geq n-2$. Portanto, fazendo $n \longrightarrow \infty$ concluímos que χ_D não possui variação limitada.

Exemplo 0.1.3. Usando o exemplo anterior concluímos que $\chi_{\mathbb{Q}}$ e $\chi_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ não são funções de variação limitada.

Exemplo 0.1.4. Suponha que f é não decrescente. Temos $f(x_j) - f(x_{j-1}) \geq 0$ de modo que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})| &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)-f(x_{j-1}) \\ &= f(b)-f(a).\end{aligned}$$

Assim, $var(f) < \infty$.

Exemplo 0.1.5. Suponha que f é não crescente. Como BV é um espaço vetorial e $-f$ é não decrescente concluímos, pelo exemplo anterior, que f é de variação limitada, pois $f = -(-f)$.

Teorema 0.1.16. *Suponha que $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ tem variação limitada, então*

1. *Para todos os $x, y \in [a,b]$ com $x > y$ vale*

$$|f(x) - f(y)| \leq var_f(x) - var_f(y); \tag{53}$$

2. *Para todo $s \in [a,b]$ os limites $\lim\limits_{x \longrightarrow s^{\pm}} f(x)$ existem;*
3. *O conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável.*

Demonstração. **Do item 1.:** Dada uma partição $a = y_0 < y_1 \cdots y_n = y$ de $[a,y]$, uma vez que $a = y_0 < y_1 \cdots y_n = y < x$ é uma partição particular de $[a,x]$ temos

$$var_f(x) \geq \sum_{j=1}^{n}|f(y_j) - f(y_{j-1})| + |f(x) - f(y)|$$

Visto que $a = y_0 < y_1 \cdots y_n = y$ é uma partição arbitrária de $[a,y]$, tomando o supremo sobre as partições do lado direito da desigualdade, concluímos que

$$var_f(x) \geq var_f(y) + |f(x) - f(y)|,$$

e portanto,

$$var_f(x) - var_f(y) \geq |f(x) - f(y)|.$$

Do item 2.: Uma vez que $var(f) < \infty$ e se $x > y$ vale $var_f(x) \geq var_f(y) + |f(x) - f(y)|$ temos que $var_f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função não decrescente que assume apenas valores finitos. Portanto os limites laterais $\lim_{x \longrightarrow s^{\pm}} var_f(x)$ existem. Suponha que $x \longrightarrow s^+$ e tome $s < y < x$, assim

$$|f(x) - f(y)| \leq |var_f(x) - var_f(y)| \longrightarrow 0 \text{ sempre que } x, y \longrightarrow s^+ ,$$

pois os limites laterais $\lim_{x \longrightarrow s^{\pm}} var_f(x)$ existem. Portanto também existem os limites laterais para f. O caso em que $x \longrightarrow s^-$ se trata com o mesmo raciocínio.

Do item 3.: Usando a relação (1) concluímos que se var_f é contínua no ponto x o mesmo valerá para f. Como $var_f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ é monótona não decrescente temos que seus pontos de descontinuidade é enumerável. Portanto o mesmo vale para f. □

Corolário 0.1.3. *Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de variação limitada. Então f é contínua m-qtp $x \in [a, b]$.*

Demonstração. Um conjunto enumerável tem medida de Lebesgue nula. □

A seguinte proposição será usada frequentemente neste texto.

Proposição 0.1.10. *Suponha $([a, b], \mathcal{B}_{[a,b]}, \mu)$ é um espaço de probabilidade e $\mu << m$, onde m é a medida de Lebesgue restrita a $[a, b]$. Suponha que $\mu = fm$ onde f é uma função de variação limitada. Então existe um intervalo $J \subset [a, b]$ tal que $f(x) > \delta > 0$ para todo $x \in J$.*

Demonstração. Seja $E \subset [a, b]$ tal que $m(E) > 0$ e $f > 0$ em m-qtp $x \in E$. Como f é contínua em m-qtp $x \in [a, b]$ temos que f é contínua em m-qtp $x \in E$. Então deve existir um $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) > 0$ e f é contínua em x_0. Portanto dado $\delta = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$ existe um intervalo $J = [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \subset [a, b]$ tal que para todo $x \in J$ $|f(x_0) - f(x)| < \delta$ e isto implica que $f(x) \in (\dfrac{f(x_0)}{2}, \dfrac{3f(x_0)}{2})$. Ou seja $f > \delta$ em J. □

Definição 0.1.26. A variação $var_\eta(f|\eta)$ sobre um intervalo $\eta \subset M$ é definido por

$$var_\eta(f|\eta) = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$$

onde o supremo é tomado sobre o conjunto $\Re_\eta$ de todas as partições finitas $\inf \eta \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq \sup \eta, \quad n \leq 1$ de η.

A seguir estão enumeradas mais algumas propriedades com respeito a funções de variação limitada. Para detalhes o leitor pode consultar [14].

P1. $var_\eta(\varphi_1 + \varphi_2) \leq var_\eta\varphi_1 + var_\eta\varphi_2$;

P2. $var_\eta(\varphi_1 \cdot \varphi_2) \leq var_\eta\varphi_1 \sup_\eta |\varphi_2| + \sup_\eta |\varphi_1| var_\eta\varphi_2$;

P3. $var_\eta(\varphi_1 \cdot \psi) \leq var_\eta\varphi_1 \sup_\eta |\psi| + \sup_\eta |D\psi| \int \varphi dm$, se ψ é C^1;

P4. $var_\eta|\varphi| \leq var_\eta\varphi$;

P5. $var_\eta(\varphi \circ h) = var_{h(\eta)}\varphi$ se $h :\longrightarrow h(\eta)$ é uma homeomorfismo;

P5. $var_\eta \int \varphi(t,\cdot)d\theta(t) \leq \int var_\eta\varphi(t,\cdot)d\theta(t)$ para toda probabilidade θ no espaço T e para toda $\varphi : T \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ com $var\varphi(t,\cdot) < \infty$ para todo $t \in T$;

Agora apresentamos um importante resultado, o teorema de Helly, que será utilizado na prova de um importante teorema. Para demonstrá-lo precisaremos do teorema de Cantor-Tychonov, de análise na reta. Para ver a demonstração deste último o leitor pode consultar [4].

Lema 0.1.5 (Cantor-Tychonov). *Seja $X \subset \mathbb{R}$ enumerável. Toda sequência simplesmente limitada de funções $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ possui uma subsequência simplesmente convergente.*

Demonstração. Ver [4]. □

Lema 0.1.6 (Teorema de Helly). *Seja $\psi_n : M \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ uma sequência de funções em M e assuma que existem constantes $K_1 > 0$ e $K_2 > 0$ tais que $\sup \psi_n \leq K_1$ e $var\psi_n \leq K_2$ para todo $n \geq 1$. Então existe uma subsequência $(\psi_{n_k})_k$ e uma função $\psi_0 : M \longrightarrow \mathbb{R}$ com $\sup \psi_0 \leq K_1$ e $var(\psi)_0 \leq K_2$ tal que $(\psi_{n_k})_k$ converge para ψ_0 quando $k \to \infty$ m-qtp e em $L^1(m)$.*

Demonstração. Defina as sequências $(\psi_n^+)_n$ e $(\psi_n^-)_n$ por $\psi_n^+(x) = var(\psi_n|_{[0,x]})$ e $\psi_n^-(x) = \psi_n^+ - \psi_n$. Assim definidas, as sequências $(\psi_n^\pm)_n$ são uniformemente limitadas e seus termos são funções não decrescentes. Sendo uniformemente limitadas são, em particular, simplesmente limitadas e quando consideradas suas restrições sobre $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, i.e. $\psi_n^\pm|_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, temos uma sequência de funções que satisfaz as condições do teorema de Cantor-Tychonov, i.e. existe uma subsequência de índices $(n_k)_k$ tais que $\psi_{n_k}^\pm(q)$ converge para um número real $\psi_0^\pm(q)$, para todo número racional $q \in [0,1]$. Como cada $\psi_n^\pm$ é uma função não decrescente, temos que $\psi_0^\pm(q_1) \leq \psi_0^\pm(q_2)$ sempre que $q_1 \leq q_2$. Portanto, podemos estender a função $\psi_0^\pm$ para todo o intervalo $[0,1]$ da seguinte maneira:

$$\psi_0^\pm(x) = \inf\{\psi_0^\pm(q) : q \in [x,1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Agora vejamos que $\psi^{\pm}_{n_k}(x)$ converge para $\psi^{\pm}_0(x)$ para todo ponto de continuidade x de $\psi^{\pm}_0$, um conjunto cujo complementar é enumerável. De fato, dado um ponto de continuidade x, e qualquer $\delta > 0$, podemos fixar racionais q_1 e q_2 com $q_1 \leq x \leq q_2$ tais que

$$\psi^{\pm}_0(x) - \delta \leq \psi^{\pm}_0(q_1) \leq \psi^{\pm}_0(x) \leq \psi^{\pm}_0(q_2) \leq \psi^{\pm}_0(x) + \delta.$$

Então para um k suficientemente grande,

$$\psi^{\pm}_0(x) - 2\delta \leq \psi^{\pm}_0(q_1) - \delta \leq \psi^{\pm}_{n_k}(q_1) \leq \psi^{\pm}_{n_k}(x) \leq \psi^{\pm}_{n_k}(q_2) \leq \psi^{\pm}_0(q_2) + \delta \leq \psi^{\pm}_0(x) + 2\delta$$

o que prova afirmação.

Agora considere $\widetilde{\psi}^{\pm}_0$ a função contínua a direita que coincide com $\psi^{\pm}_0$ em todo ponto de continuidade de $\psi^{\pm}_0$ e defina $\psi_0 = \widetilde{\psi}^{+}_0 - \widetilde{\psi}^{-}_0$. Segue-se que ψ_{n_k} converge para ψ_0, exceto, possivelmente, num conjunto enumerável E. Em particular, $\psi_{n_k} \to \psi_0$ m-qtp e em L^1. Finalmente,

$$|\psi_0(a)| = \lim_k |\psi_{n_k}(a)| \leq K_1 \text{ e}$$

$$\sum_{j=1}^{s} |\psi_0(a_j) - \psi_0(b_j)| = \lim_k \sum_{j=1}^{s} |\psi_{n_k}(a_j) - \psi_{n_k}(b_j)| \leq \sup_k var(\psi_{n_k}) \leq K_2,$$

para todo a e $a_1 \leq b_1 \leq \cdots \leq a_s \leq b_s$ em $[0,1] \setminus E$. Uma vez que ψ_0 é contínua a direita temos que $\sup \psi_0 \leq K_1$ e $var(\psi_0) \leq K_2$. □

0.2 Modelo Geométrico de Lorenz

Nesta seção faremos um breve estudo do seguinte sistema de equações polinomiais

$$\dot{x} = 10y - 10x \tag{54}$$
$$\dot{y} = 28x - y - xz \tag{55}$$
$$\dot{z} = xy - \frac{8}{3}z \tag{56}$$

mais conhecido como *equações de Lorenz*. Este sistema foi introduzido inicialmente em 1963 pelo meteorologista Edward Lorenz em seus estudos climáticos. O objetivo será construir um fluxo que possua propriedades similares as da solução determinada pelas equações polinomiais (54), (55) e (56) porém mais fáceis de serem estudadas. O ponto de partida será o teorema de Hartman-Grobman enunciado nas preliminares deste texto, que conjugará topologicamente, numa vizinhança da origem, o fluxo determinado pelas equações de Lorenz, com o fluxo linear determinado pela sua diferencial calculada na origem. A partir daí faremos algumas hipóteses sobre a "solução" e chamaremos o resultado da construção de *fluxo geométrico de Lorenz*. Simultaneamente Afraimovich em [17] e Guckenheimer e Williams [18] construíram um modelo geométrico para o fluxo observado por Lorenz.

Comecemos observando que os autovalores da derivada do campo na origem

$$\begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{8}{3} \end{bmatrix}$$

são $\lambda_1 = 11,83$, $\lambda_2 = -22,83$, $\lambda_3 = -\dfrac{8}{3}$ e, portanto, pelo Teorema de Hartman-Grobman, numa vizinhança da singularidade $\sigma_0 = (0,0,0)$, o fluxo definido pelas equações de Lorenz é topologicamente conjugado ao fluxo linear definido pela derivada do campo numa vizinhança origem. Isto é, ao fluxo

$$X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t}),$$

onde (x_0, y_0, z_0) é uma condição inicial próxima da origem.

Observando a relação

$$0 < \frac{\lambda_1}{2} \leq -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2 \tag{57}$$

iniciaremos nossa análise considerando um campo linear $(x', y', z') = (\lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z)$, definido no cubo $[-1,1]^3$, onde os λ_i satisfazem a relação (57). As trajetórias deste campo são dadas pelo fluxo definido por

$$X^t(x_0, y_0, z_0) = (x_0 e^{\lambda_1 t}, y_0 e^{\lambda_2 t}, z_0 e^{\lambda_3 t}) \tag{58}$$

onde (x_0, y_0, z_0) é uma condição inicial próxima de $(0,0,0)$.

Considere as regiões $S = \left\{(x, y, 1) : |x| \leq \dfrac{1}{2}, |y| \leq \dfrac{1}{2}\right\}$,

$$S^- = \{(x, y, 1) \in S : x < 0\}, \qquad S^+ = \{(x, y, 1) \in S : x > 0\}$$

e

$$S^* = S^- \cup S^+ = S \setminus \Gamma, \qquad \text{onde} \qquad \Gamma = \{(x, y, 1) \in S : x = 0\}.$$

Suponha que S é uma seção transversal para o fluxo de modo que toda trajetória eventualmente cruza S na direção negativa do eixo z. Agora considere as regiões $\Sigma = \{(x, y, z) : |x| = 1\} = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ onde $\Sigma^{\pm} = \{(x, y, z) : x = \pm 1\}$. Para cada condição inicial $(x_0, y_0, 1) \in S^*$ o tempo τ tal que $X^t(x_0, y_0, 1) \in \Sigma$ é obtido pela equação

$$|x_0 e^{\lambda_1 t}| = 1,$$

isto é, depende apenas de x_0. Mais precisamente $\tau(x_0) = -\dfrac{1}{\lambda_1} \log |x_0|$, onde $x_0 \neq 0$ e $\tau(x_0) \longrightarrow \infty$ quando $x_0 \longrightarrow 0$.

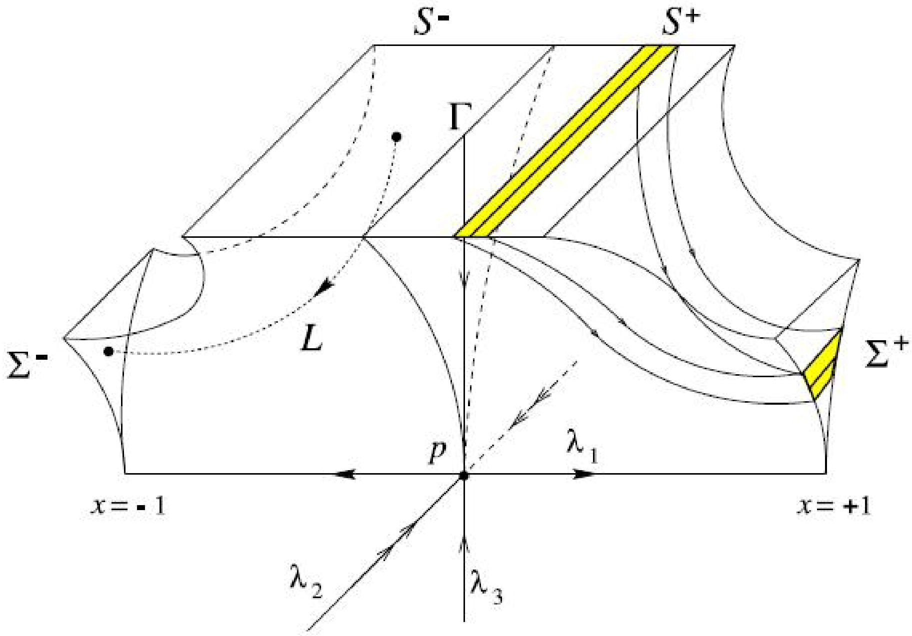

Figura 1: Regiões

Temos então

$$\begin{aligned} X^\tau(x_0, y_0, 1) &= (sgn(x_0), y_0 e^{\lambda_2 \tau(x_0)}, e^{\lambda_3 \tau(x_0)}) \\ &= (sgn(x_0), y_0 |x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, |x_0|^{-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}), \end{aligned}$$

onde $sgn(x) = \dfrac{x}{|x|}$.

Observe que $0 < -\lambda_3 < \lambda_1 < -\lambda_2$, portanto $0 < \alpha = -\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1} < 1 < \beta = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Agora, seja $L : S^* \longrightarrow \Sigma$ dada por:

$$L(x, y, 1) = \left(sgn(x), y|x|^{\beta}, |x|^{\alpha}\right).$$

Parametrizando a fronteira de $S^{\pm}$, observamos que $L(S^{\pm})$ tem a forma de um triângulo(nos planos $x = \pm 1$) sem os vértices $(\pm 1, 0, 0)$, pois estes pontos seriam a imagem do segmento $\Gamma = \{(x, y, 1) \in S : x = 0\}$, que não está contido na região S^*. De agora em diante, nós denotaremos por $\Sigma^{\pm}$ o fecho de $L(S^{\pm})$, ou seja, inclua os vértices $(\pm 1, 0, 0)$. Usando contas análogas, observe que os segmentos $S^* \cap \{x = x_0\}$ são levados em segmentos $\Sigma \cap \{z = z_0\}$.

Os conjuntos $\Sigma^{\pm}$ devem retornar para a secção transversal S através de um fluxo descrito por uma composição adequada de uma rotação $R_{\pm}$, uma expansão $E_{\pm\theta}$ e uma translação $T_{\pm}$. Além disso, assumimos que os "triângulos" $L(S^{\pm})$ são comprimidos na y-direção e esticados na x-direção.

Observe que o ponto de equilíbrio na origem é hiperbólico, com autovalores $\lambda_1 \approx 11,83$, $\lambda_2 \approx -22.83$ e $\lambda_3 \approx -2,67$, portanto, pelo teorema da variedade estável, sua variedade estável $W^s(0)$ e instável $W^u(0)$ estão bem definidas e são de dimensão 2 e 1 respectivamente.

Para $(x, y, z) \in \Sigma^{\pm}$ rotação $R_{\pm}$ é dada pela matriz

$$\mathbf{R}_{\pm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A expansão E_{θ}, que ocorre ao longo do eixo x, é dada pela matriz

$$\mathbf{E}_{\theta} = \begin{pmatrix} \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfazendo as condições $\theta 2^{-\alpha} < 1$ e $\theta\alpha 2^{1-\alpha} > 1$. A primeira condição garante que a imagem da aplicação resultante esteja contida em S, enquanto que a segunda garante que a aplicação seja seccionalmente expansora.

As translações $T_{\pm} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ são escolhidas de modo que a direção instável, partindo da origem, seja levada na fronteira de S (a direção instável é λ_1, olhe a figura para entender melhor) e que as imagens de $\Sigma^{\pm}$ sejam disjuntas. Assim, a composição $T_{\pm} \circ E_{\pm} \circ R_{\pm}$ leva segmentos $\Sigma^{\pm} \cap \{z = z_0\}$ em segmentos $S \cap \{x = x_1\}$. A construção acima nos permite descrever, para $t \in \mathbb{R}^+$, a órbita $X^t(x)$ para cada $x \in S$. Seja $W = \{X^t(x), x \in \Sigma, t \in \mathbb{R}^+\}$ o conjunto onde o fluxo X^t atua. O fluxo geométrico de Lorenz é então a dupla (W, X^t)

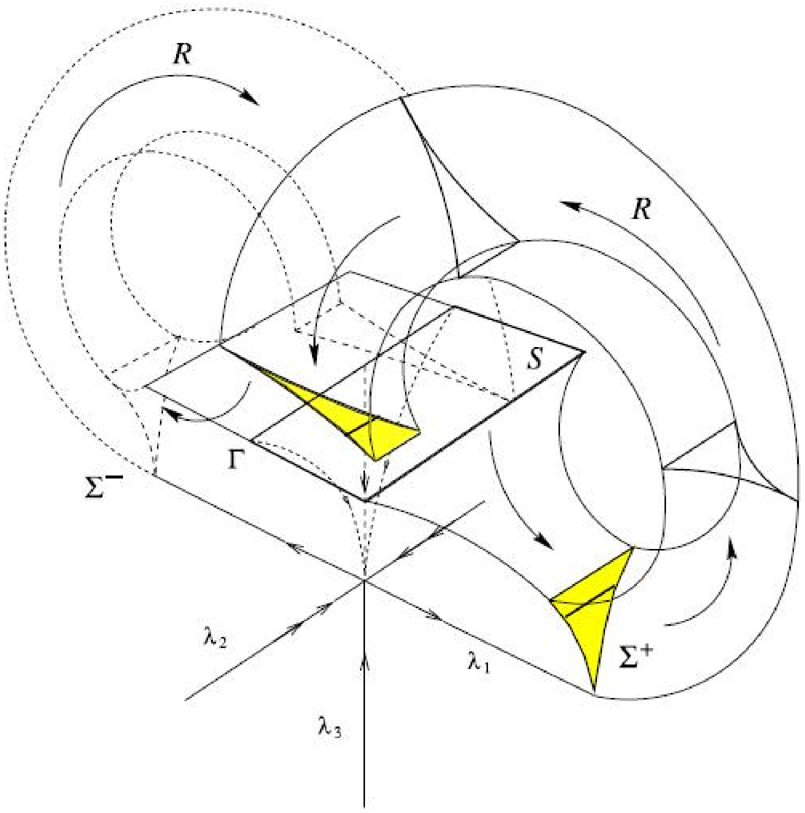

Figura 2: Regiões

Definimos então a aplicação de primeiro retorno de Poincaré, $P : S^* \longrightarrow S$ como

$$P(x,y) = \begin{cases} T_+ \circ E_{+\theta} \circ R_+ \circ L(x,y,1), & \text{se } x > 0 \\ T_- \circ E_{-\theta} \circ R_- \circ L(x,y,1), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Observando a característica da composição $T_{\pm} \circ E_{\pm} \circ R_{\pm}$ em levar segmentos $\Sigma^{\pm} \cap \{z = z_0\}$ em segmentos $S \cap \{x = x_1\}$ com a definição da aplicação L definida acima, concluímos que se Π é uma folheação de S em segmentos $S \cap \{x = x_0\}$ a imagem $P(\gamma_{x_0})$ da folha $\gamma_{(x_0)} = S \cap \{x = x_0\}$ está contida na folha $\gamma_{P(\gamma_{x_0})}$. Isto é, a folheação Π é invariante por P. Diante disso P tem a forma $P(x,y) = (f(x), g(x,y))$ para alguma função $f : I \setminus \{0\} \longrightarrow I$

e $g(I \setminus \{0\}) \times I \longrightarrow I$ onde $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Observe que

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x^\alpha), & \text{se } x < 0 \\ f_0(x^\alpha), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde $f_i = (-1)^i \theta \cdot x + b_i, \qquad i = 0, 1;$

e

$$g(x, y) = \begin{cases} g_1(x^\alpha, y, x^\beta), & \text{se } x < 0 \\ g_0(x^\alpha, y, x^\beta), & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

onde $g_1 | I^- \times I \longrightarrow I$ e $g_0 | I^+ \times I \longrightarrow I$ são aplicações, com $I^- = [-\frac{1}{2}, 0)$, $I^+ = (0, \frac{1}{2}]$.

Algumas propriedades da aplicação f: Seguem algumas propriedades da aplicação f que são consequências da construção feita acima:

1. a simetria das equações de Lorenz implica que $f(-x) = -f(x)$;
2. f é descontínua em $x = 0$ com limites laterais $f(0^-) = \frac{1}{2}$ e $f(0^+) = -\frac{1}{2}$, pois P não é definida em Γ, pois $\Gamma \subset W^s(0, 0, 0)$;
3. f é diferenciável em $I \setminus \{0\}$ e $f'(x) > \sqrt{2}$;
4. os limites laterais de f' em $x = 0$ são $f'(0^-) = +\infty$ e $f'(0^+) = -\infty$.

Expressões para a derivada DP Relembre que $P = T_\pm \circ E_\pm \circ R_\pm \circ L$. Usando a regra da cadeia e a definição de cada aplicação temos que para cada $(x, y) \in S^*$ e $x > 0$:

$$\mathbf{DL(x, y, 1)} = \begin{pmatrix} \beta y x^{\beta - 1} & x^\beta \\ \alpha x^{\alpha - 1} & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{DP(x, y)} = \begin{pmatrix} \theta \alpha x^{\alpha - 1} & 0 \\ \beta y x^{\beta - 1} & x^\beta \end{pmatrix}.$$

Para $x < 0$ o cálculo é semelhante.

Propriedades da aplicação g:

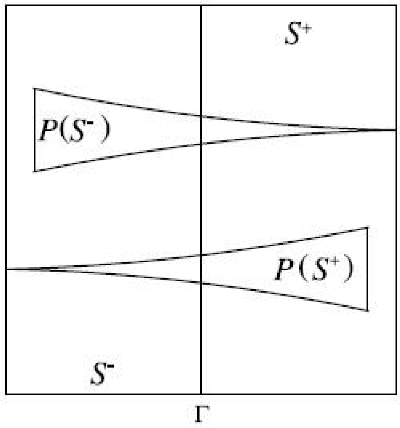

Figura 3: Regiões

1. Para todo $(x, y) \in S^*$ e $x > 0$, temos $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^\beta$. Como $\beta > 1$, $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ existe $0 < \lambda < 1$ tal que
$$|\frac{\partial g}{\partial y}| \leq \lambda.$$
O mesmo vale para $x < 0$.

2. Para todo $(x, y) \in S^*$ e $x \neq 0$, temos $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \beta x^{\beta-\alpha}$. Como $\beta - \alpha > 0$ e $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ temos que
$$|\frac{\partial g}{\partial y}| < \infty.$$

Observe que da primeira propriedade, nós obtemos o fato de g contrair os segmentos de reta $S \cap \{x = x_0\}$. Isto é, existe $C > 0$ tal que para cada $\gamma \in \Pi$ e para cada $y_1, y_2 \in \gamma$ temos

$$|P^n(y_1) - P^n(y_2)| \leq C\lambda^n |y_1 - y_2|. \tag{59}$$

0.3 Medida Física para Transformações Expansoras por Partes

Neste capítulo, a variedade M será o intervalo fechado $[0, 1]$. Aqui demonstraremos a existência de uma medida SRB para transformações expansoras por pedaços $f : M \longrightarrow$

M. O motivo desta construção é o fato da função unidimensional de Lorenz satisfazer esta propriedade, e se tornar naturalmente, um caso particular. Isto é, se f é a função unidimensional de Lorenz,

$$\frac{1}{|Df|_{\eta_1}|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{|Df|_{\eta_1}|}$$

são de variação limitada, onde $\eta_1 = [-\frac{1}{2}, 0)$ e $\eta_1 = (0, \frac{1}{2}]$. Vejamos:

Em cada um dos subintervalos, ocorre que a derivada é monótona. Isto decorre do fato de que nestes ramos a função f é côncava em um e convexa no outro, pois é a composição de uma função afim com uma função convexa. Logo

$$\frac{1}{|Df|_{\eta_1}|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{|Df|_{\eta_2}|}$$

também serão funções monótonas. Pelo exemplo 0.1.4 temos que

$$\frac{1}{|Df|_{\eta_1}|} \quad \text{e} \quad \frac{1}{|Df|_{\eta_2}|}$$

são funções de variação limitada. Este fato, como veremos logo a frente, faz desta aplicação um caso particular de uma aplicação *seccionalmente expansora*(ou *Expansoras por Partes*).

A seguir enunciaremos algumas hipóteses sobre uma transformação $f : M \longrightarrow M$ que assumiremos como válidas. As duas primeiras, 1. e 2., definem o vem a ser uma transformação seccionalmente expansora.

1. Existe $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = 1$ tal que a restrição de f a cada $\eta_i = (a_{i-1}, a_i)$ é de classe C^1, com $|Df(x)| > 0$ para todo $x \in \eta_i$ e $i = 1, \cdots, l$. Além disso, a função $g_{\eta_i} = \dfrac{1}{|Df|_{\eta_i}|}$ possui variação limitada para todo $i = 1, \cdots, l$.

Seja $P^{(1)}$ alguma partição de M em intervalos η tal que $\eta_i \subset \eta \subset \overline{\eta_i}$ e $f|_\eta$ é contínua. Além disso, para $n \geq 1$, seja $P^{(n)}$ uma partição de M tal que $P^{(n)}(x) = P^{(n)}(y)$ se, e somente se, $P^{(1)}(f^j(x)) = P^{(1)}(f^j(y))$ para todo $j = 0, \cdots, n-1$. Para um subintervalo $\eta \in P^{(n)}$, denote $g_\eta^{(n)} = \dfrac{1}{|Df^n|_\eta|}$. A segunda condição é:

2. Existe $C_1 > 0$ e $\lambda_1 < 1$ tal que $\sup g_\eta^{(n)} \leq C_1 \lambda_1^n$ para todo $\eta \in P^{(n)}$ e para todo $n \geq 1$.

No que segue, $C_1 > 0$ será fixada suficientemente grande de modo que $var g_{\eta_i} \leq C_1$ para todo $i = 1, \cdots, l$.

Agora definiremos o operador $\mathcal{L} : BV(M : \mathbb{R}) \longrightarrow BV(M : \mathbb{R})$ chamado de *operador de Perron-Frobenius* ou *Operador de Transferência* da aplicação f da seguinte maneira:

$$\mathcal{L}\varphi = \sum_{\eta \in P^{(1)}} \left[(g_\eta \varphi) \circ (f|_\eta)^{-1}\right] \chi_{f(\eta)} = \sum_{\eta \in P^{(1)}} \left[(\frac{\varphi}{|Df|}) \circ (f|_\eta)^{-1}\right] \chi_{f(\eta)} \tag{60}$$

Note que pela propriedade 1. $f|_\eta : \eta \longrightarrow f(\eta)$ é estritamente monótona e consequentemente injetiva, portanto, cada $y \in f(\eta)$ possui uma única pré-imagem x e a inversa $(f|_\eta)^{-1}$ está bem definida.

Próximo teorema é conhecido como a desigualdade de Lasota-Yorke, ela nos mostrará que este operador está bem definido, fazendo $n = 1$ na desigualdade, bem como nos ajudará a provar outros resultados. Para demonstrá-lo precisaremos de uma desigualdade preliminar.

Proposição 0.3.1. *Existem $\lambda_2 \in (\lambda_1, 1)$ e $C_2 > 0$ tal que*

$$var g_\eta^{(n)} \leq C_2 \lambda_2^n \tag{61}$$

para todo $\eta \in P^{(n)}$ e $n \geq 1$.

Demonstração. Dado $\eta \in P^{(n)}$ e $0 \leq j \leq n$, seja $\xi_j \in P^{(j)}$, $\widetilde{\eta}_j \in P^{(1)}$ e $\zeta_j \in P(n-j-1)$ definida por $\eta \subset \xi_j$, $f^j(\eta) \subset \widetilde{\eta}_j$, e $f^{j+1}(\eta) \subset \zeta_j$.

$$\begin{aligned} var g_\eta^{(n)} &\leq \sum_{j=0}^{n-1} \sup g_{\zeta_j}^{(n-j-1)} \cdot var g_{\overline{\eta}_j} \cdot \sup g_{\xi_j}^{(j)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} C_1 \lambda_1^{n-j-1} \cdot C_1 \cdot C_1 \lambda_1^j \\ &= (C_1^3/\lambda_1) n \lambda_1^n. \end{aligned}$$

Agora fixe $\lambda_2 \in (\lambda_1, 1)$ e $C_2 = \sup\{(C_1^3 \lambda_1) n (\lambda_1 \lambda_2)^n : n \geq 1\}$. Concluímos que

$$var g_\eta^{(n)} \leq C_2 \lambda_2^n \tag{62}$$

para todo $\eta \in P^{(n)}$ e $n \geq 1$.

$\square$

Teorema 0.3.1 (Desigualdade de Lasota-Yorke). *Existe* $C_0 > 0$ *e* $\lambda_0 < 1$ *tal que*

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq C_0\lambda_0^n var(\varphi) + C_0 \int |\varphi| dm$$

para todo $n \geq 1$ *e toda função* φ *de variação limitada.*

Demonstração. Pela definição do operador $\mathcal{L}$ temos

$$\mathcal{L}^n\varphi = \sum_{\eta \in P^{(n)}} (g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}\chi_{f^n(\eta)}, \text{ para todo } n \geq 1 \ .$$

Agora, usando as propriedades $P1.$, $P2.$ e $P5.$ encontraremos a seguinte desigualdade

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \sum_{\eta \in P^{(n)}} \big[\big(var g_\eta^{(n)} + 2\sup g_\eta^{(n)}\big) \cdot \sup|(\varphi|\eta)| + \sup g_\eta^{(n)} \cdot var(\varphi|\eta)\big]. \tag{63}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
var(\mathcal{L}^n\varphi) &\leq \sum_{\eta \in P^{(n)}} var((g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}\chi_{f^n(\eta)}) \\
&\leq \sum_{\eta \in P^{(n)}} var((g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1} \sup|\chi_{f^n(\eta)}|) + \sup\big(|(g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}|\big) var(\chi_{f^n(\eta)}) \\
&= \sum_{\eta \in P^{(n)}} var((g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}) + 2\sup\big(|(g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}|\big) \\
&= \sum_{\eta \in P^{(n)}} var_\eta((g_\eta^{(n)}\varphi)) + 2\sup\big(|(g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}|\big) \\
&= \sum_{\eta \in P^{(n)}} var_\eta(g_\eta^{(n)}) \sup|\varphi|\eta| + \sup|g_\eta^{(n)}| var(\varphi|\eta) + 2\sup\big|(g_\eta^{(n)}\varphi) \circ (f^n|\eta)^{-1}\big| \\
&\leq \sum_{\eta \in P^{(n)}} var_\eta(g_\eta^{(n)}) \sup|\varphi|\eta| + \sup|g_\eta^{(n)}| var(\varphi|\eta) + 2\sup\big|(g_\eta^{(n)}\varphi)\big| \\
&\leq \sum_{\eta \in P^{(n)}} var_\eta(g_\eta^{(n)}) \sup|\varphi|\eta| + \sup|g_\eta^{(n)}| var(\varphi|\eta) + 2\sup\big|(g_\eta^{(n)})\big| \sup|(\varphi|\eta)| \\
&= \sum_{\eta \in P^{(n)}} \big(var_\eta(g_\eta^{(n)}) + 2\sup\big|(g_\eta^{(n)})\big|\big) \sup|\varphi|\eta| + \sup(|g_\eta^{(n)}|) var(\varphi|\eta) \\
&= \sum_{\eta \in P^{(n)}} \big(var_\eta(g_\eta^{(n)}) + 2\sup(g_\eta^{(n)})\big) \sup|\varphi|\eta| + \sup(g_\eta^{(n)}) var(\varphi|\eta).
\end{aligned}$$

Assim

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \sum_{\eta\in P^{(n)}} \big(var_\eta(g_\eta^{(n)}) + 2\sup{(g_\eta^{(n)})}\big)\sup|\varphi|\eta| + \sup{(g_\eta^{(n)})}var(\varphi|\eta). \tag{64}$$

Agora usando O teorema do valor médio e $P4$.:

$$\sup|(\varphi|\eta)| \leq var|\varphi|\eta| + \frac{1}{m(\eta)}\int_\eta |\varphi|dm \leq var(\varphi|\eta) + \frac{1}{m(\eta)}\int|\varphi|dm \tag{65}$$

Agora, substituindo (61) e (65) em (64), obtemos

$$\begin{aligned}
var(\mathcal{L}^n\varphi) &\leq \sum_{\eta\in P^{(n)}}\left[(C_2\lambda_2^n + 2C_1\lambda_1^n)\cdot\left(var(\varphi|\eta) + \frac{1}{m(\eta)}\int|\varphi|dm\right) + C_1\lambda_1^n var(\varphi|\eta)\right] \\
&\leq 4C_2\lambda_2^n\sum_{\eta\in P^{(n)}} var(\varphi|\eta) + 3C_2\lambda_2^2\sum_{\eta\in P^{(n)}}\frac{1}{m(\eta)}\int|\varphi|dm \\
&\leq 4C_2\lambda_2^n\sum_{\eta\in P^{(n)}} var(\varphi|\eta) + 3C_2\lambda_2^2\sum_{\eta\in P^{(n)}}\sup\{\frac{1}{m(\eta)}:\eta\in P^{(n)}\}\int|\varphi|dm \\
&= 4C_2\lambda_2^n\sum_{\eta\in P^{(n)}} var(\varphi|\eta) + 3C_2\lambda_2^2\sup\{\frac{1}{m(\eta)}:\eta\in P^{(n)}\}\sum_{\eta\in P^{(n)}}\int|\varphi|dm \\
&= 4C_2\lambda_2^n\sum_{\eta\in P^{(n)}} var(\varphi|\eta) + 3C_2\lambda_2^2\sup\{\frac{1}{m(\eta)}:\eta\in P^{(n)}\}\int|\varphi|dm\sum_{\eta\in P^{(n)}}1 \\
&= 4C_2\lambda_2^n\sum_{\eta\in P^{(n)}} var(\varphi|\eta) + 3C_2\lambda_2^2\sup\{\frac{1}{m(\eta)}:\eta\in P^{(n)}\}\int|\varphi|dm\#(P^{(n)}) \\
&\leq C_3\lambda_3^n var(\varphi) + K_3(n)\int|\varphi|dm
\end{aligned}$$

onde $C_3 = 4C_2$, $\lambda_3 = \lambda_2$ e $K_3(n) = 3C_2\lambda_2(\#P^{(n)})\sup\{\frac{1}{m(\eta)}:\eta\in P^{(n)}\}$. Temos então

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq C_3\lambda_3^n var(\varphi) + K_3(n)\int|\varphi|dm. \tag{66}$$

Próximo passo é tirar a dependência de K_3 de n. Com este intuito, fixe $N \geq 1$ tal que $C_3\lambda_3^N \leq \dfrac{1}{2}$ e denote $\widehat{K} = max\{K_3(n) : 1 \leq n \leq N\}$. Então dado $n \geq 1$ escrevamos $n = qN + r$ com $q \geq 0$ e $1 \leq r \leq N$. Usando esta limitação sucessivas vezes temos

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \left(1 + \cdots + \frac{1}{2^q}\right) \widehat{K} \int |\varphi| dm + \frac{1}{2^q} C_3 \lambda_3^r var(\varphi). \tag{67}$$

De fato:

$$\begin{aligned}
var(\mathcal{L}^n\varphi) &= var(\mathcal{L}^N \mathcal{L}^{n-N}\varphi) \\
&\leq C_3 \lambda_3^N var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) + K_3(N) \int |\mathcal{L}^{n-N}\varphi| dm \\
&\leq C_3 \lambda_3^N var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) + \widehat{K} \int |\mathcal{L}^{n-N}\varphi| dm \\
&\leq \frac{1}{2} var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) + \widehat{K} \int |\mathcal{L}^{n-N}\varphi| dm \\
&= \frac{1}{2} var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) + \widehat{K} \int |\varphi| dm
\end{aligned}$$

Portanto

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \frac{1}{2} var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) + \widehat{K} \int |\varphi| dm \tag{68}$$

Diante desta desigualdade, aplique-a fazendo a substituição de n por $n - N$ para obter seguinte:

$$\begin{aligned}
var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) &= var(\mathcal{L}^N \mathcal{L}^{n-2N}\varphi) \\
&\leq \frac{1}{2} var(\mathcal{L}^{n-2N}\varphi) + \widehat{K} \int |\varphi| dm.
\end{aligned}$$

Agora substitua esta última desigualdade em (68) para obter

$$\begin{aligned}
var(\mathcal{L}^n\varphi) &\leq \frac{1}{2} var(\mathcal{L}^{n-N}\varphi) + \widehat{K} \int |\varphi| dm \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} var(\mathcal{L}^{n-2N}\varphi) + \widehat{K} \int |\varphi| dm\right] + \widehat{K} \int |\varphi| dm \\
&= \frac{1}{2^2} var(\mathcal{L}^{n-2N}\varphi) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \widehat{K} \int |\varphi| dm.
\end{aligned}$$

Portanto

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \frac{1}{2^2}var(\mathcal{L}^{n-2N}\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm. \tag{69}$$

Agora use (68) novamente, substituindo n por $n-2N$:

$$\begin{aligned} var(\mathcal{L}^{n-2N}\varphi) &= var(\mathcal{L}^N\mathcal{L}^{n-3N}\varphi) \\ &\leq \frac{1}{2}var(\mathcal{L}^{n-3N}\varphi) + \widehat{K}\int|\varphi|dm. \end{aligned}$$

Substitua esta última desigualdade em (69):

$$\begin{aligned} var(\mathcal{L}^n\varphi) &\leq \frac{1}{2^2}var(\mathcal{L}^{n-2N}\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm \\ &\leq \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}var(\mathcal{L}^{n-3N}\varphi) + \widehat{K}\int|\varphi|dm\right] + \left(1+\frac{1}{2}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm \\ &= \frac{1}{2^3}var(\mathcal{L}^{n-3N}\varphi) + \frac{1}{2}\widehat{K}\int|\varphi|dm + \left(1+\frac{1}{2}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm \\ &= \frac{1}{2^3}var(\mathcal{L}^{n-3N}\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm. \end{aligned}$$

Esta quantidade de passos é suficiente para perceber que em q passos nós teremos

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \frac{1}{2^q}var(\mathcal{L}^{n-qN}\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{q-1}}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm.$$

E equivalentemente

$$var(\mathcal{L}^n\varphi) \leq \frac{1}{2^q}var(\mathcal{L}^{r}\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{q-1}}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm. \tag{70}$$

Em (68) substitua n por r e obtenha

$$\begin{aligned} var(\mathcal{L}^r\varphi) &\leq C_3\lambda_3^r var(\varphi) + K_3(r)\int|\varphi|dm \\ &\leq C_3\lambda_3^r var(\varphi) + \widehat{K}\int|\varphi|dm. \end{aligned}$$

Substituindo, esta última desigualdade em (70) obtemos o desejado, i.e.,

$$\begin{aligned}
var(\mathcal{L}^n\varphi) &\leq \frac{1}{2^q}var(\mathcal{L}^r\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{q-1}}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm \\
&\leq \frac{1}{2^q}\left[C_3\lambda_3^r var(\varphi) + \widehat{K}\int|\varphi|dm\right] + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{q-1}}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm \\
&= \frac{1}{2^q}C_3\lambda_3^r var(\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{q-1}}+\frac{1}{2^q}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm \\
&= \frac{1}{2^q}C_3\lambda_3^r var(\varphi) + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^q}\right)\widehat{K}\int|\varphi|dm,
\end{aligned}$$

e isto é a relação desejada.

Agora, para concluir, escolha $C_0 \geq \max\{2\widehat{K}, C_3\}$ e $\max\{2^{\frac{-1}{N}}, \lambda_3\} \leq \lambda_0 < 1$.

□

Corolário 0.3.1. *Seja $C(a)$ o cone de funções $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$ e $var\varphi \leq a\int\varphi dm$. Então, se a é suficientemente grande, existe $N \geq 1$ tal que*

$$\mathcal{L}^N(C(a)) \subset C(\frac{a}{2}).$$

Demonstração. Seja $\lambda = \dfrac{1}{2}$ e $N \geq 1$ tal que $C_0\lambda_0^N \leq \dfrac{1}{4}$. Então, para $\varphi \in C(a)$,

$$vsr(\mathcal{L}^\varphi) \leq \frac{1}{4}var\varphi + C_0\int\varphi dm \leq \left(\frac{a}{4+C_0}\right)\int\varphi dm = \frac{a}{2}\int\varphi dm$$

sempre que $a \geq 2C_0$.

□

Uma vez provado que o operador de transferência está bem definido, próxima proposição nos dá uma importante relação, chamada de relação de dualidade. Esta fórmula está diretamente relacionada com a utilidade do operador.

Proposição 0.3.2. *Para $\varphi, \psi \in L^1(m)$ vale*

$$\int(\mathcal{L}\varphi)\psi dm = \int\varphi(\psi\circ f)dm. \tag{71}$$

Consequentemente, para $\varphi, \psi \in BV(M:\mathbb{R})$ vale (71).

Demonstração. De fato

$$
\begin{aligned}
\int \varphi\,(\psi \circ f) dm &= \sum_{j=1}^{l} \int_{\eta_j} (\varphi)\,(\psi \circ f) dm & (72)\\
&= \sum_{j=1}^{l} \int_{f(\eta_j)} \left(\varphi \circ \left(f|_{\eta_j}\right)^{-1}\right) \psi |Df|^{-1} dm & (73)\\
&= \sum_{j=1}^{l} \int \left(\frac{\varphi}{|Df|^{-1}} \circ \left(f|_{\eta_j}\right)^{-1}\right) \psi \chi_{f(\eta_j)} dm & (74)\\
&= \int \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\varphi}{|Df|^{-1}} \circ \left(f|_{\eta_j}\right)^{-1}\right) \psi \chi_{f(\eta_j)} dm & (75)\\
&= \int (\mathfrak{L}\varphi)\,\psi dm & (76)
\end{aligned}
$$

onde (72) $\Longrightarrow$ (73) devido a fórmula de mudança de variável e as demais implicações são contas diretas.

$\square$

Esta proposição nos ajudará a conectar propriedades ergódicas de f com propriedades espectrais do operador $\mathfrak{L}$. Em particular, pontos fixos de $\mathfrak{L}$ definem medidas f-invariantes e absolutamente contínuas com relação a m (medida de Lebesgue). Esta relação se tornará clara com a seguinte proposição:

Teorema 0.3.2. *Seja $\varphi_0 \in L^1(m)$ e não negativa tal que $\mathfrak{L}(\varphi_0) = \varphi_0$. Então a medida de probabilidade μ_0 definida por $\mu_0 = \dfrac{\varphi_0 m}{\int \varphi_0 dm}$ é f-invariante e absolutamente contínua. Reciprocamente, se uma medida finita μ_0, f-invariante, é tal que $\mu_0 << m$, então $\varphi_0 = \dfrac{d\mu_0}{dm}$ satisfaz $\mathfrak{L}\varphi_0 = \varphi_0$.*

Demonstração. Precisaremos do seguinte lema:

Lema 0.3.1. *Sejam λ, μ medidas σ-finitas no espaço mensurável X tal que $\lambda << \mu$ e $h = \dfrac{d\lambda}{d\mu}$. Se g é mensurável e não-negativa, então*

$$\int g d\lambda = \int g h d\mu.$$

Demonstração do lema: Suponha que $g = \chi_E$, para algum mensurável E. Então

$$\begin{aligned}
\int g d\lambda &= \int \chi_E d\lambda \\
&= \lambda(E) \\
&= \int_E h d\mu \\
&= \int \chi_E h d\mu \\
&= \int g h d\mu
\end{aligned}$$

Por linearidade, o resultado vale para funções simples. Agora, considere uma sequência crescente $(g_n)_n$ de funções simples, tal que $g_n \uparrow g$. Usando o teorema da Convergência Monótona, temos:

$$\begin{aligned}
\int g d\lambda &= \int \lim g_n \lambda \\
&= \lim \int g_n d\lambda \\
&= \lim \int g_n h d\mu \\
&= \int \lim g_n h d\mu \\
&= \int g h d\mu.
\end{aligned}$$

Observe, nas contas acima que, uma vez que $h \geq 0$ a sequência $(hg_n)_n$ é monótona não decrescente tal que $hg_n \longrightarrow hg$, de modo que pudemos aplicar o teorema da Convergência Monótona novamente para esta sequência. Concluímos, desta forma, a demonstração do lema.

Voltando a demonstração do teorema, relembre que a medida μ_0 é f-invariante se, e somente se, $f * \mu_0 = \mu_0$. Portanto, para um conjunto mensurável E temos:

$$\begin{aligned}
f * \mu_0(E) &= \mu_0(f^{-1}(E)) && (77)\\
&= \int \chi_{f^{-1}(E)} d\mu_0 && (78)\\
&= \int \chi_E \circ f d\mu_0 && (79)\\
&= \int (\chi_E \circ f)(\frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm})dm && (80)\\
&= \int (\frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm})(\chi_E \circ f)dm && (81)\\
&= \int (\mathfrak{L}\frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm})(\chi_E)dm && (82)\\
&= \int_E (\mathfrak{L}\frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm})dm && (83)\\
&= \int_E (\frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm})dm && (84)\\
&= \frac{\varphi_0}{\int \varphi_0 dm} m(E) && (85)\\
&= \mu_0(E) && (86)
\end{aligned}$$

onde (78) $\Rightarrow$ (79) segue da igualdade $\chi_{f^{-1}(E)} = \chi_E \circ f d\mu_0$, (79) $\Rightarrow$ (80) da relação $\varphi_0 = \dfrac{d\mu_0}{dm}$ e do lemma, (7) $\Rightarrow$ (8) da proposição (3.2), (83) $\Rightarrow$ (84) do fato de $\mathfrak{L}\varphi_0 = \varphi_0$ e as demais diretamente das respectivas definições.

Reciprocamente, suponha que $\mu_0 << m$, $\varphi_0 = \dfrac{\mu_0}{dm}$ e μ_0 é f-invariante. Sendo f-invariante, vale $f * \mu_0 = \mu_0$ e, pelo teorema de Mudança de Variável, temos, para todo E mensurável:

$$
\begin{aligned}
\int_E \mathcal{L}\varphi_0 dm &= \int (\mathcal{L}\varphi_0)(\chi_E) dm && (87)\\
&= \int (\varphi_0)(\chi_E \circ f) dm && (88)\\
&= \int (\chi_E \circ f)(\varphi_0) dm && (89)\\
&= \int (\chi_E \circ f) d\mu_0 && (90)\\
&= \int (\chi_E) d\,(f * \mu_0) && (91)\\
&= \int (\chi_E) d\mu_0 && (92)\\
&= \int (\chi_E)\varphi_0 dm && (93)\\
&= \int_E \varphi_0 dm && (94)
\end{aligned}
$$

onde (87) $\Rightarrow$ (88) segue da proposição (3.2), em (88) $\Rightarrow$ (89) o integrando foi comutado, (89) $\Rightarrow$ (90) é consequência do lema (3.1), (90) $\Rightarrow$ (91) segue do teorema de Mudança de Variável, (91) $\Rightarrow$ (92) da f-invariância de μ_0 e (92) $\Rightarrow$ (93) novamente do lema (3.1).

Diante disto, seja $A = \{x|\mathcal{L}\varphi_0(x) \geq \varphi_0(x)\}$:

$$
\begin{aligned}
\int |L\varphi_0 - \varphi_0| dm &= \int_A |L\varphi_0 - \varphi_0| dm + \int_{A^c} |L\varphi_0 - \varphi_0| dm && (95)\\
&= \int_A L\varphi_0 - \varphi_0 dm + \int_{A^c} \varphi_0 - L\varphi_0 dm && (96)\\
&= 0 + 0 && (97)\\
&= 0 && (98)
\end{aligned}
$$

onde (96) $\Rightarrow$ (97) pela observação feita acima que $\int_E \mathcal{L}\varphi_0 dm = \int_E \varphi_0 dm$ para todo mensurável E. Portanto temos $\mathcal{L}\varphi_0 = \varphi_0$ m-qtp e como $\mu_0 << m$ o resultado vale m_0-qtp. $\square$

Um corolário da proposição 3.2 é o fato de $\mathcal{L}$ ser um operador limitado, cuja norma é igual a 1.

Corolário 0.3.2. *O operador $\mathcal{L}$ é limitado e $||\mathcal{L}||_1 = 1$.*

Demonstração. Primeiramente observe que $|\mathcal{L}\varphi| \leq \mathcal{L}|\varphi|$. De fato

$$\begin{aligned}
|\mathcal{L}\varphi| &= \left|\sum_{\eta\in P(1)} \frac{\varphi}{|Df|} \circ (f|\eta)^{-1}\chi_{f(\eta)}\right| \\
&\leq \sum_{\eta\in P(1)} \left|\frac{\varphi}{|Df|} \circ (f|\eta)^{-1}\right|\chi_{f(\eta)} \\
&= \sum_{\eta\in P(1)} \left|\frac{\varphi}{|Df|} \circ (f|\eta)^{-1}\right|\chi_{f(\eta)} \\
&= \sum_{\eta\in P(1)} \frac{|\varphi|}{|Df|} \circ (f|\eta)^{-1}\chi_{f(\eta)} \\
&= \mathcal{L}|\varphi|.
\end{aligned}$$

Agora observe que por um lado temos,

$$\begin{aligned}
||\mathcal{L}\varphi||_1 &= \int |\mathcal{L}\varphi| dm \\
&\leq \int \mathcal{L}|\varphi| dm \\
&= \int (\mathcal{L}|\varphi|)(1) dm \\
&= \int (|\varphi|)(1 \circ f) dm \\
&= \int |\varphi| dm \\
&= 1 \int |\varphi| dm \\
&= 1 \cdot ||\varphi||_1
\end{aligned}$$

onde, respectivamente foi usado o fato de $|\mathcal{L}\varphi| \leq \mathcal{L}|\varphi|$ e a proposição 3.2. E isto implica que $||\mathcal{L}|| \leq 1$.

Por outro lado, fazendo $\varphi \equiv 1$ temos

$$\begin{aligned}
||\mathcal{L}1||_1 &= \int |\mathcal{L}1| dm \\
&= \int \mathcal{L}|1| dm \\
&= \int (\mathcal{L}1)(1) dm \\
&= \int (1)(1 \circ f) dm \\
&= \int 1 dm \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daí $||\mathcal{L}|| \geq 1$. Portanto $||\mathcal{L}|| = 1$ e $\mathcal{L}$ é um operador limitado.

□

Teorema 0.3.3. *A aplicação f possui uma probabilidade μ_0, f-invariante e absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue m. Além disso, se μ é outra medida f-invariante e absolutamente contínua, então $\mu = \varphi m$ onde φ possui variação limitada.*

Demonstração. Defina a sequência $\varphi_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{L}^j 1$. Pela desigualdade de Lasota-Yorke, observando que $var 1 = 0$, $(\varphi_n)_n$ possui variação limitada uniformemente, i.e.

$$var\varphi_n \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} var(\mathcal{L}^j 1) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} C_0 \int dm = C_0.$$

Além disso, temos

$$\int \varphi_n dm = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int \mathcal{L}^j 1 dm = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \int dm = 1 \text{ para todo } n \geq 1$$

e então $(\varphi_n)_n$ é também uniformemente limitada, i.e

$$\sup \varphi_n \leq var\varphi_n + \int \varphi_n dm \leq C_0 + 1.$$

Consequentemente, pelo teorema de Helly, existe uma subsequencia $(\varphi_{n_k})_k$ que converge em $L^1(m)$ para uma função φ_0 de variação limitada. Agora observe que

$$\mathcal{L}\varphi_{n_k} = \varphi_{n_k} + \frac{1}{n_k}(\mathcal{L}^{n_k}1 - 1). \tag{99}$$

De fato, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\varphi_{n_k} &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^j 1\right) \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\mathcal{L}^j 1 \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=1}^{n_k}\mathcal{L}^j 1 + \frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_k} \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k}\mathcal{L}^j 1 - \frac{1}{n_k} \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k}\mathcal{L}^j 1 - \frac{1}{n_k} \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^j 1 + \frac{1}{n_k}\mathcal{L}^{n_k}1 - \frac{1}{n_k} \\
&= \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^j 1 + \frac{1}{n_k}\left(\mathcal{L}^{n_k}1 - 1\right) \\
&= \varphi_{n_k} + \frac{1}{n_k}\left(\mathcal{L}^{n_k}1 - 1\right).
\end{aligned}$$

Além disso, $\mathcal{L}$ é um operador limitado em $L^1(m)$ o que nos dá, passando (99) ao limite, que $L\varphi_0 = \varphi_0$, i.e. φ_0 é um ponto fixo para L implicando na f-invariância da probabilidade μ definida por $\mu = \varphi_0 m$.

Para provar a outra afirmação, suponha que μ é f-invariante e absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue. Então temos $\mu = \psi m$ com $||\psi||_1 = 1$ e $\mathcal{L}\psi = \psi$. Mostremos que ψ coincide em m-qtp com alguma ψ de variação limitada. Para isto, considere uma sequência de funções $(\psi_l)_l$, cujos termos são de variação limitada, que converge para ψ em $L^1(m)$. Admita que $||\psi_l|| \leq 2$ para todo l. A proposição 3.1 nos fornece

$$var\left(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{L}^j\psi_l\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}C_0\left(\lambda_0^j var\psi_l + \int|\psi_l|dm\right) \to C_0\int|\psi_l|dm \leq 2C_0$$

temos também

$$||\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\mathcal{L}^j\psi_l||_1 \leq ||\psi_l||_1 \leq 2.$$

Logo, pelos mesmo argumentos anteriormente usados, a sequência $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathcal{L}^j\psi_j$ satisfaz as hipóteses do teorema de Helly. Segue-se que existe uma função $\overline{\psi}_l$ e uma subsequência $(n_k)_k$ tal que $\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^j\psi_j$ converge para $\overline{\psi}_l$ em $L^1(m)$. Além disso teremos $var\overline{\psi}_l \leq 2C_0$ e $||\overline{\psi}_l||_1$. Diante destes dois últimos fatos, podemos aplicar novamente o teorema de Helly na sequência $(\overline{\psi}_l)_l$, e concluir que alguma subsequência $(\overline{\psi}_{l_j})_j$ converge em $L^1(m)$ para alguma função φ tal que $var\varphi \leq 2C_0$. Além disso,

$$||\overline{\psi}_l - \psi||_1 = \lim ||\frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1}\mathcal{L}^j(\psi_l - \psi)||_1 \leq ||\psi_l - \psi||_1$$

implica que $\overline{\psi}_l$ converge em $L^1(m)$ para ψ. Portanto, $\psi = \varphi$ m-qtp e teremos $\mu = \psi m = \varphi m$. $\square$

Agora defina a função $g_\eta^n : M \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g_\eta^n(y) = \frac{1}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1}(y)$ se $y \in f^n(\eta)$ e $g_\eta^n(y) = 0$ se $y \notin f^n(\eta)$.

Lema 0.3.2. *Para toda função integrável $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ e todo $n \geq 1$ o iterado da medida de Lebesgue por f^n pode ser escrito $f^n * (\varphi m) = \varphi_n m$, com*

$$\varphi_n = \sum_\eta g_\eta^n \cdot \left(\varphi \circ (f^n|_\eta)^{-1}\right)$$

onde a soma é feita sobre os $\eta \in P^(n)$ tais que $m(\eta) > 0$.

Demonstração. Dado um mensurável B, por definição temos

$$\begin{aligned} f^n * (\varphi m|\eta)(B) &= \varphi m\left(f^{-n}(B) \cap \eta\right) \\ &= \int_{f^{-n}(B)\cap\eta} \varphi dm. \end{aligned}$$

Agora façamos a mudança de variável $y = (f^n|\eta)^{-1} : f(\eta) \cap B \longrightarrow f$, para obter

$$
\begin{aligned}
f^n * (\varphi m|\eta)(B) &= \int_{f^{-n}(B)\cap\eta} \varphi dm \\
&= \int_{B\cap f^n(\eta)} \frac{\varphi}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1} dm \\
&= \int \frac{\varphi}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1} \chi_{B\cap f^n(\eta)} dm \\
&= \int \frac{\varphi}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1} \chi_B \chi_{f^n(\eta)} dm \\
&= \int_B \frac{\varphi}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1} \chi_{f^n(\eta)} dm \\
&= \int_B \left(\frac{1}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1} \chi_{f^n(\eta)} \right) \cdot \big(\varphi \circ (f^n|\eta)^{-1}\big) dm \\
&= \int_B g_\eta^n \cdot \big(\varphi \circ (f^n|\eta)^{-1}\big) dm,
\end{aligned}
$$

onde esta última igualdade segue, do fato, da expressão $\left(\frac{1}{|Df^n|} \circ (f^n|\eta)^{-1} \chi_{f^n(\eta)} \right)$ ser zero fora de $f^n(\eta)$. Isto prova que a densidade de cada $f^n * (\varphi m|\eta)$ é dada por $g_\eta^n \cdot (\varphi \circ (f^n|\eta)^{-1})$. Escrevendo

$$
f^n * (\varphi m) = \sum_{\eta \in P^n} f^n * (\varphi m|\eta),
$$

onde os intervalos $\eta \in P^n$ tais que $m(\eta) = 0$ não fazem influência nesta soma, a demonstração do lema se conclui fazendo esta soma sobre os subintervalos de P^n tais que $m(\eta) > 0$. □

Proposição 0.3.3. *Dado um conjunto $A \subset [0,1]$, f-invariante, com medida de Lebesgue positiva, existe uma probabilidade absolutamente contínua com relação a Lebesgue e f-invariante ν_A, tal que $\nu_A(A) = 1$.*

Demonstração. Para provar esta proposição, usaremos um lema que é um corolário da proposição 1.6. Para os detalhes da demonstração veja [13].

Lema 0.3.3. *Todo ponto de acumulação da sequência $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f^j * m$ é uma medida f-invariante e absolutamente contínua com respeito a medida de Lebesgue.*

Seja $\widehat{A}$ o conjunto dos $x \in A$ tal que toda vizinhança de x intersecta A num conjunto cuja medida de Lebesgue é positiva. Pelo teorema de derivação de Lebesgue $m(\widehat{A}) = m(A) > 0$. Além disso

$$\widehat{A} \subset \left(f^{-1}(\widehat{A})\right) \cup \left(\bigcup_i c_i\right) \tag{100}$$

onde c_i é uma singularidade de f. De fato, se $x \in \widehat{A}$ não é um ponto singular, então f restrita a uma vizinhança suficientemente pequena de x é um difeomorfismo local. Como esta vizinhança intersecta A num conjunto de medida positiva, o mesmo deve acontecer com $f(x)$. Logo $f(x) \in \widehat{A}$, o que prova a inclusão. Isto também implica que

$$\widehat{A} \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(\widehat{A})\right) \cup \left(\bigcup_i c_i\right). \tag{101}$$

Seja $(m|_{\widehat{A}})$ a restrição normalizada da medida de Lebesgue a $\widehat{A}$, e considere a sequência de probabilidades

$$\mu_{A,n} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f^j * (m|_{\widehat{A}}).$$

Observe que $(m|_{\widehat{A}}) = \varphi m$ onde $\varphi = \dfrac{\chi_{\widehat{A}}}{m(\widehat{A})}$. Agora usando o lema 3.2, seja φ_n a densidade correspondente a $f^n * (m|_{\widehat{A}})$ e ϕ_n a densidade correspondente a $f^n * m$. Então vale

$$\varphi_j \leq \frac{1}{m(\widehat{A})}\phi_j \leq \frac{C_0+1}{m(\widehat{A})} \text{ para todo } j \geq 0.$$

Isto implica que $\mu_{A,n}$ admite uma densidade limitada por $\dfrac{C_0+1}{m(\widehat{A})}$ para todo $n \geq 1$ Segue-se do lema 3.3 que todo ponto de acumulação da sequência $\mu_{A,n}$ é uma probabilidade absolutamente contínua com relação a Lebesgue e f-invariante. Chame de μ_A um desses pontos de acumulação. A relação (101) implica $f^j * (m|\widehat{A})(\widehat{A}) \geq (m|\widehat{A})(\widehat{A}) = 1$ para todo $j \geq 1$, isto nos dá $\mu_{A,n}(\widehat{A}) = 1$ para todo $n \geq 1$ e pela proposição [] $\mu_A\left(\widehat{A}\right) = 1$. Por outro lado, pelo teorema 3.3 $\mu_A = \varphi_A m$ onde φ_A possui variação limitada. Ou seja, existe um intervalo $J \subset [0,1]$ tal que

$$\varphi_A > \delta \quad \text{em } J, \text{ para um } \delta > 0. \tag{102}$$

Isto implica que as restrições de μ_A e m a J são medidas equivalentes. De fato, sabemos que $\mu_A << m$, agora suponha que $\mu_A(E) = 0$ para um conjunto mensurável $E \subset J$.

Então $\int_E \varphi dm = \int \chi_E \varphi dm = 0$, logo $\chi_E \varphi = 0$ m-qtp, portanto $\chi_E = 0$ m-qtp, daí $m(E) = \int \chi_E dm = 0$. Portanto como $\mu_A\left(\widehat{\widehat{A}}\right) = 1$ temos que $\widehat{\widehat{A}}$ intersecta J num conjunto de medida de Lebesgue total em J. Em particular $\widehat{A}$ tem algum ponto em J e pela definição de $\widehat{A}$ temos que $A \cup J$ tem medida de Lebesgue positiva e, integrando (102) em A, temos $\mu_A(A) \geq \delta m(A \cap J) > 0$.

Agora defina ν_A como a restrição normalizada de μ_A ao conjunto A, i.e,

$$\nu_A(B) = \frac{\mu_A(B \cap A)}{\mu_A(A)} \text{para todo mensurável } B.$$

Temos então $\nu(A) = 1$ e $\nu << \mu_A << m$. Além disso, ν_A é f-invariante

$$\begin{aligned} \nu_A(f^{-1}(B)) &= \frac{\mu_A(f^{-1}(B) \cap A)}{\mu_A} & (103)\\ &= \frac{\mu_A(f^{-1}(B) \cap f^{-1}(A))}{\mu_A} & (104)\\ &= \frac{\mu_A(f^{-1}(B \cap A))}{\mu_A} & (105)\\ &= \frac{\mu_A(B \cap A)}{\mu_A} & (106)\\ &= \nu_A(B). & (107) \end{aligned}$$

onde (103) $\Longrightarrow$ (104) pela f-invariância de A e (105) $\Longrightarrow$ (106) pela f-invariância de μ_A. O que conclui a prova do resulado.

□

Proposição 0.3.4. *Todo conjunto $A \subset [0, 1]$, f-invariante, com medida de Lebesgue positiva, possui medida de Lebesgue total numa vizinhança de algum ponto singular: existe $\epsilon > 0$ e um ponto singular c de f tal que $m([c - \epsilon, c + \epsilon] \setminus A) = 0$.*

Demonstração. Seja ν uma probabilidade f-invariante e absolutamente contínua tal que $\nu(A) = 1$. Pelo teorema 3.3, $\nu = \varphi m$ onde φ é uma função de variação limitada. Isto implica que existe um intervalo $J \subset [0, 1]$ tal que o ínfimo de φ em J é estritamente positivo (veja demonstração da proposição 3.3 anterior) implicando na equivalência entre ν e m em J. Portanto, como

$$\nu(J \setminus A) = \nu(J \cap A^c) = 0 \Longrightarrow m(J \setminus A) = 0 \text{ (observe no lema anterior a definição de } \nu) \tag{108}$$

temos que, se J contém uma singularidade de f o resultado está provado. Suponha então que J não contém uma singularidade. Considere os iterados $f^n(J)$ do intervalo J, a propriedade de expansividade implica que

$$l(f^n(J)) \geq C_1\lambda_1^n l(J) \text{ onde } l(J) \text{ significa o “comprimento do intervalo } J\text{”},$$

sempre que $f^n(J)$ não contém uma singularidade para $0 \leq j \leq n-1$. Como o comprimento de $[0,1]$ é finito, deve existir um primeiro N tal que $f^N(J)$ contém uma singularidade. Isto quer dizer que $f^N|J$ é um difeomorfismo com sua imagem (lembre que a derivada é sempre maior que zero onde ela está definida). Sendo um difeomorfismo, $f^N|J$ transforma conjuntos de medida de Lebesgue nula em conjuntos de medida de Lebesgue nula, além disso $f^N(J)$ é um intervalo. Portanto por (108) e pela invariância de A temos

$$m(f^N(J) \setminus A) = m(f^N(J) \setminus f^N(A) = m(f^N(J \setminus A) = 0.$$

□

Teorema 0.3.4. *A aplicação f possui um número finito, limitado pelo número de pontos singulares de f, de medidas ergódicas absolutamente contínuas com relação a m.*

Demonstração. Seja μ uma medida ergódica f-invariante e absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue. Pelo teorema 3.3 $\mu = \varphi m$ onde $\varphi = \dfrac{d\mu}{dm}$ possui variação limitada. Portanto, pela proposição 1.10, existe um intervalo $J \subset M$ tal que $\varphi > 0$ em J e em $f^n(J)$ para todo $n \geq 1$. Isto implica que μ é equivalente a m em J. Com efeito, sabemos que $\mu << m$, agora suponha que $\mu(E) = 0$ para um conjunto mensurável $E \subset J$. Então $\int_E \varphi dm = \int \chi_E \varphi dm = 0$, logo $\chi_E\varphi = 0$ m-qtp, portanto $\chi_E = 0$ m-qtp, daí $m(E) = \int \chi_E dm = 0$. Agora considere $A' \subset f(J)$ tal que $\varphi = 0$ em A'. Então $\mu(f^{-1}(A')) = \mu(A') = \int_{A'} \varphi d\mu = 0$ pois μ é f-invariante. Como $f^{-1}(A') = (f^{-1}(A') \cap J) \cup (f^{-1}(A') \cap J^c)$ temos que $0 = \mu\left(f^{-1}(A') \cap J\right) + \mu\left(f^{-1}(A') \cap J^c\right) = 0+0$ o que nos dá $\mu\left(f^{-1}(A') \cap J\right) = 0$ e consequentemente $m\left(f^{-1}(A') \cap J\right)$, pois $m << \mu$ em J. Agora, seja $F_\eta = \eta \cap (f^{-1}(A') \cap J)$ para todo $\eta \in P^{(1)}$. Como $f|_\eta$ é C^1 temos que f é localmente Lipschitz em cada η, e portanto preserva a medida nula de subconjuntos de η. Daí, observe que

$$\left(f^{-1}(A') \cap J\right) = \left(\bigcup_{\eta \in P^{(1)}} \eta \cap \left(f^{-1}(A') \cap J\right)\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{j} \{x_i\}\right)$$

onde x_i são os pontos singulares de f. Portanto $m(f\left(f^{-1}(A') \cap J\right)) = m(A') = 0$ e

$\varphi > 0$ em $f^(J)$, e o mesmo vale para $f^n(J)$ para todo $n \geq 1$. Resulta que μ e m são equivalentes de $f^n(J)$ para todo $n \geq 1$. Como μ é ergódica temos que μ-qtp $x \in f^n(J)$ é genérico para μ, e pela equivalência com m, m-qtp $x \in f^n(J)$ é genérico para μ, i.e, o tempo médio $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x))$ converge para $\int \varphi d\mu$, para toda função contínua φ. Por outro lado, se a_i é uma das singularidades, considere $\overline{n}$ o primeiro n tal que $a_i \in f^n(J)$, caso contrário, o comprimento de $f^n(J)$ seria ilimitado quando $n \longrightarrow \infty$ o que contradiz o fato de $f^n(J) \subset I$. Isto nos diz que duas destas medidas distintas, μ_1 e μ_2, devem resultar em dois $f^{\overline{n}'}(J)$ $f^{\overline{n}''}(J)$ disjuntos. De fato, se $f^{\overline{n}'}(J) \cap f^{\overline{n}''}(J) \neq \emptyset$, então m-qtp(Lebesgue) $x \in f^{\overline{n}'}(J) \cap f^{\overline{n}''}(J)$ é μ genérico. Isto implica que deve existir um $x \in f^{\overline{n}'}(J) \cap f^{\overline{n}''}(J)$ tal que $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu_1$ e $\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) = \int \varphi d\mu_2$ para toda φ contínua. O que nos dá $\int \varphi d\mu_1 = \int \varphi d\mu_2$ e consequentemente $\mu_1 = \mu_2$. Portanto, existem no máximo $l-1$ (l é o número de subintervalos da partição $P^{(1)}$) destas medidas. $\square$

Observação 0.3.1. *Para a transformação f do modelo geométrico de Lorenz, tomamos $l = 2$.*

Finalizamos esta seção com a seguinte proposição:

Proposição 0.3.5. *Para a aplicação f de Lorenz, se μ_0 é uma medida f-invariante e absolutamente contínua com respeito a Lebesgue, então μ_0 é ergódica. Além disso $m(B(\mu_0)) = 1$.*

Demonstração. Suponha que existe um conjunto mensurável $A \subset [0,1]$ com $f^{-1}(A) = A$ com $0 < \mu_0(A) < 1$. Então

$$\mu_1(B) = \frac{\mu_0(B \cap A)}{\mu_0(A)} \text{ e } \mu_2(B) = \frac{\mu_0(B \cap A^c)}{\mu_0(A^c)}$$

definem duas medidas f-invariantes e absolutamente contínuas com relação a Lebesgue. Pelo teorema 3.3 as densidades $\varphi_i = \frac{d\mu_i}{dm}$ são funções cuja variação é limitada.

Logo existem intervalos J_1 e J_2 tal que $\varphi_1 > 0$ em J_1 e $\varphi_2 > 0$ em J_2. Afirmo que $J_1 \subset A$ m-qtp e $J_2 \subset A^c$ m-qtp. Ou equivalentemente $m(J_1 \cap A^c) = 0$ e $m(J_2 \cap A) = 0$. De fato, se $m(J_1 \cap A^c) > 0$ então por um lado $\int_{A^c \cap J_1} \frac{d\mu_1}{dm} dm > 0$, mas isto implica que $\mu_1(J_1 \cap A^c) > 0$, uma contradição, pois

$$\begin{aligned}\mu_1(J_1 \cap A^c) &= \frac{\mu_0((J_1 \cap A^c) \cap A)}{\mu_0(A)} \\ &= \frac{\mu_0(\emptyset)}{\mu_0(A)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Logo $J_1 \subset A$ m-qtp e, pela mesma justificativa, $J_2 \subset A^c$ m-qtp. Isto nos diz que A e A^c possuem interior não vazio m-qtp e consequentemente possuem medida de Lebesgue positiva. Desta forma A e A^c satisfazem as hipóteses da proposição 3.3, ou seja existem $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$ tal que $m([c-\epsilon_1, c+\epsilon_1] \setminus A) = 0$ e $m([c-\epsilon_2, c+\epsilon_2] \setminus A^c) = 0$. Tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ teremos que

$$m([c-\epsilon, c+\epsilon] \setminus A) = 0 \tag{109}$$

e

$$m([c-\epsilon, c+\epsilon] \setminus A^c) = 0. \tag{110}$$

Porém,

$$\begin{aligned} m([c-\epsilon, c+\epsilon] \setminus A) = 0 &\Longrightarrow m([c-\epsilon, c+\epsilon] \cap A^c) = 0 \\ &\Longrightarrow [c-\epsilon, c+\epsilon] \subset A,\ m\text{-qtp} \\ &\Longrightarrow m([c-\epsilon, c+\epsilon] \cap A) > 0 \\ &\Longrightarrow m([c-\epsilon, c+\epsilon] \setminus A^c) > 0 \end{aligned}$$

o que por (110) é uma contradição. Portanto μ_0 é ergódica e portanto física.

Agora provemos que $m\left(B(\mu_0)\right) = 1$. Se isto não ocorre, então $m(B(\mu_0))^c > 0$ e como $B(\mu_0)$ é invariante, temos que $B(\mu_0)^c$ também o é. Use a notação $A = B(\mu_0)^c$ Pela proposição 3.4 existe uma medida de probabilidade μ_A tal que $\mu_A(A) = 1$, além disso, μ_A é f-invariante e pela proposição 3.5 (a parte já provada dela), é ergódica. Como $\mu_A(A) = 1$ temos que $\mu_A(B(\mu_0)) = 0$, e por sua vez, $\mu_0(A) = 0$ temos que $\mu_0(B(\mu_0)) = 1$. Portanto $\mu_0 \neq \mu_A$ o que contradiz a unicidade de μ_0. Portanto $m\left(B(\mu_0)\right) = 1$.

□

Unindo o teorema 3.3 com a proposição 3.5 obtemos o

Teorema 0.3.5. *A transformação unidimensional f de Lorenz possui uma única medida ergódica e absolutamente contínua com relação a medida de Lebesgue que será denotada por μ_f. Consequentemente μ_f é uma medida física para f e, mais ainda, sua bacia ergódica tem medida de Lebesgue total, i.e, $m\left(B(\mu_f)\right) = 1$.*

0.4 Medida Física para a Aplicação de Poincaré

Neste seção, $p : S \longrightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ denotará a projeção canônica, i.e., $p(x, y) = x$ e $C^0\left(S; \mathbb{R}\right)$ denotará o espaço de Banach das funções contínuas munido com a norma do sup, i.e., $||\psi|| = \sup |\psi(x)|$.

Agora, a partir da existência de uma medida SRB para a aplicação unidimensional de Lorenz f, construiremos uma medida física para a aplicação P de Poincaré. Para isto, fixemos a notação μ_f para a única medida ergódica absolutamente contínua, e SRB, da aplicação unidimensional de Lorenz f.

Sejam Π a folheação de S, cujas folhas são os segmentos verticais $\gamma_x = \{x \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ com $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $P : S^* \longrightarrow S$ a aplicação de primeiro retorno definida no capítulo 2. Para esta aplicação, valem as propriedades:

A1 A imagem de qualquer $\gamma_x \in \Pi$ diferente de Γ, está contida no elemento $\gamma_{P(x)} \in \Pi$;

A2 O comprimento de $P^n(\gamma_x)$ tende para zero quando $n \longrightarrow \infty$, uniformemente, para todos os γ_x tais que o iterado $P^n(\gamma_x)$ está definido.

Para uma função contínua $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}$, defina as funções $\psi_- : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\psi_+ : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$\psi_-(x) = \inf_{(x,y)\in p^{-1}(x)} \psi(x, y) \quad \text{e} \quad \psi_+(x) = \sup_{(x,y)\in p^{-1}(x)} \psi(x, y).$$

Lema 0.4.1. *Dada qualquer função contínua $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}$, ambos os limites*

$$\lim_{n\to\infty} \int (\psi \circ P^n)_- d\mu_f \text{ e } \lim_{n\to\infty} \int (\psi \circ P^n)_+ d\mu_f$$

existem e coincidem.

Demonstração. Seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq \epsilon$ sempre que $|x_1 - x_2| \leq \delta$. Uma vez que Π é uniformemente contraída por P, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $diam(P^n(\gamma_x)) \leq \delta$ para todo $\gamma_x \in \Pi$ e todo $n \geq n_0$. Por definição

$$(\psi \circ P^{n+k})_-(x) - (\psi \circ P^n)_-(f^k(x)) = \inf(\psi|_{P^{n+k}(\gamma_x)}) - \inf(\psi|_{P^n(\gamma_{f^k(x)})}) \tag{111}$$

Agora observe que $P^{n+k}(\gamma_x) \subset P^n(\gamma_{f^k(x)})$, o que implica na limitação da expressão do lado direito de (111) por

$$(\sup(\psi|_{P^n(\gamma_{f^k(x)})}) - \inf(\psi|_{P^n(\gamma_{f^k(x)})})) \leq \epsilon.$$

Portanto

$$\left| \int (\psi \circ P^{n+k})_- d\mu_f - \int (\psi \circ P^n)_- \circ f^k d\mu_f \right| \leq \epsilon.$$

Além disso, usando o teorema de mudança de variáveis, podemos substituir a segunda integral por $\int (\psi \circ P^n)_- d\mu_f$ pois μ_f é f-invariante. Como $\left(\int (\psi \circ P^n)_- d\mu_f\right)_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, temos que esta sequência é convergente. Mais ainda,

$$0 \leq |(\psi \circ P^n)_+(x) - (\psi \circ P^n)_-(x)| = \left|\sup \psi|_{P^n(\gamma_x)} - \inf \psi|_{P^n(\gamma_x)}\right| \leq \epsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Logo, as duas sequência do lema possuem o mesmo limite. □

Proposição 0.4.1. *Existe uma probabilidade μ_P em S tal que*

$$\int \psi d\mu_P = \lim_{n\to\infty} \int (\psi \circ P^n)_+ d\mu_f = \lim_{n\to\infty} \int (\psi \circ P^n)_- d\mu_f$$

para toda função contínua $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}$. Além disso, μ_P é única e P-invariante.

Demonstração. Sejam $\hat{\mu}(\psi)$ o valor dos dois limites e $A^x_\psi = \{\psi(x,y), (x,y) \in p^{-1}(x)\}$. Observe que $\psi_+(x) = \sup A^x_\psi$ e $\psi_-(x) = \inf A^x_\psi$. Portanto, dadas ψ_1 e ψ_2 temos que $A^x_{\psi_1} + A^x_{\psi_2} \subset A^x_{\psi_1+\psi_2}$ o que implica em $\inf A^x_{\psi_1} + \inf A^x_{\psi_2} = \inf A^x_{\psi_1} + A^x_{\psi_2} \geq \inf A^x_{\psi_1+\psi_2}$ e $\sup A^x_{\psi_1} + \sup A^x_{\psi_2} = \sup A^x_{\psi_1} + A^x_{\psi_2} \leq \sup A^x_{\psi_1+\psi_2}$. Concluímos então que $(\psi_1)_- + (\psi_2)_- \geq (\psi_1 + \psi_2)_-$ e $(\psi_1)_+ + (\psi_2)_+ \leq (\psi_1 + \psi_2)_+$, em particular temos $(\psi_1 \circ P^n)_- + (\psi_2 \circ P^n)_- \geq (\psi_1 \circ P^n + \psi_2 \circ P^n)_- = ((\psi_1 + \psi_2) \circ P^n)_-$ e $(\psi_1 \circ P^n)_+ + (\psi_2 \circ P^n)_+ \leq (\psi_1 \circ P^n + \psi_2 \circ P^n)_+ = ((\psi_1 + \psi_2) \circ P^n)_+$. Com essas observações temos que

$$\int (\psi_1 \circ P^n)_- d\mu_f + \int (\psi_2 \circ P^n)_- d\mu_f \geq \int ((\psi_1 + \psi_2) \circ P^n)_- d\mu_f$$

e
$$\int (\psi_1 \circ P^n)_+ d\mu_f + \int (\psi_2 \circ P^n)_+ d\mu_f \leq \int ((\psi_1 + \psi_2) \circ P^n)_+ d\mu_f,$$
e passando ao limite quando $n \to \infty$, chegaremos a essas duas relações $\widehat{\mu}(\psi_1 + \psi_2) \leq \widehat{\mu}(\psi_1) + \widehat{\mu}(\psi_2)$ e $\widehat{\mu}(\psi_1 + \psi_2) \geq \widehat{\mu}(\psi_1) + \widehat{\mu}(\psi_2)$. Portanto, concluímos a seguinte relação de aditividade
$$\widehat{\mu}(\psi_1 + \psi_2) = \widehat{\mu}(\psi_1) + \widehat{\mu}(\psi_2).$$
Além disso, para $\alpha \in \mathbb{R}$ temos $\widehat{\mu}(\alpha\psi) = \alpha\widehat{\mu}(\psi)$. Mais ainda, o funcional $\widehat{\mu}$ é limitado. De fato tome $\psi \neq 0$ contínua e $\widetilde{\psi} = \dfrac{\psi}{||\psi||}$ e observe que

$$\begin{aligned}
\left(\widetilde{\psi} \circ P^n\right)_+ &\leq \sup \widetilde{\psi} = 1 \\
&\Rightarrow \int \left(\widetilde{\psi} \circ P^n\right)_+ d\mu_f \leq \mu_f(S) \\
&\Rightarrow \lim_n \int \left(\widetilde{\psi} \circ P^n\right)_+ d\mu_f \leq \mu_f(S) \\
&\Rightarrow \widehat{\mu}(\widetilde{\psi}) = \widehat{\mu}\left(\frac{\psi}{||\psi||}\right) \leq \mu_f(S) \\
&\Rightarrow \widehat{\mu}\left(\psi\right) \leq \mu_f(S)||\psi||.
\end{aligned}$$

Portanto o funcional linear $\widehat{\mu} : C^0\left(S;\mathbb{R}\right)$ é limitado. Agora tome $\psi \in C^0\left(S;\mathbb{R}\right)$, com $\psi \geq 0$, daí

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in p^{-1}(x)} \psi(x) &\geq 0 \\
&\Rightarrow \psi_+ \geq 0 \\
&\Rightarrow \int \psi \circ P^n d\mu_f \geq 0 \\
&\Rightarrow \lim_n \int \psi \circ P^n d\mu_f \geq 0 \\
&\Rightarrow \widehat{\mu}(\psi) \geq 0
\end{aligned}$$

portanto o funcional é positivo. Estes fatos reunidos colocam $\widehat{\mu}$ nas hipóteses do teorema de Representação de Riesz que afirma a existência de uma única medida μ_P em S tal que $\widehat{\mu}(\psi) = \int \psi d\mu_P$ para toda função contínua $\psi \in C^0\left(S;\mathbb{R}\right)$. Para mostrar a P-invariância de μ_P observemos que

$$\widehat{\mu}(\psi \circ P) = \lim_n \int (\psi \circ P^{n+1})_- d\mu_f = \widehat{\mu}(\psi),$$

e então

$$\begin{aligned} \widehat{\mu}(\psi) &= \int \psi d\mu_P & (112) \\ &= \int \psi \circ P d\mu_P & (113) \\ &= \int \psi d(P * \mu_P) & (114) \end{aligned}$$

segue-se, pela unicidade do teorema de Representação de Riesz, que $P * \mu_P = \mu_P$. Portanto μ_P é P-invariante.

□

Lema 0.4.2. *Seja $\psi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ P^k)_\pm (f^j(x)) = \int (\psi \circ P^k)_\pm d\mu_f$$

para todo $k \geq 1$. Então $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi(P^j(x,y))) = \int \psi d\mu_P$ para todo $(x,y) \in p^{-1}(x)$.

Demonstração. Primeiramente, vamos fixar $\epsilon > 0$, um $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, como na hipótese, e observar que

$$P^j(x,y) = \left(f^j(x), g\left(f^{j-1}(x), g\left(f^{j-2}, \cdots, g(f(x), g(x,y))\right)\right)\right).$$

Isto implica que $P^j(x,y) \in p^{-1}(f^j(x))$. Portanto temos

$$\inf_{(x,y)\in p^{-1}(f^j(x))} \psi \circ P^k(x,y) \leq \psi \circ P^k(P^j(x,y)) \leq \sup_{(x,y)\in p^{-1}(f^j(x))} \psi \circ P^k(x,y)$$

e usando a definição de $(\psi \circ P^k)\pm$ temos

$$(\psi \circ P^k)_-(f^j(x)) \leq \psi \circ P^k(P^j(x,y)) \leq (\psi \circ P^k)_+(f^j(x)) \tag{115}$$

para todo $(x,y) \in p^{-1}(x)$ e para todo $k, j \geq 1$.

Além disso, pela Proposição 4.1 temos que $\mu_P(\psi) = \lim \mu_f((\psi \circ P^k)_\pm)$, isto implica que existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_P(\psi) - \frac{\epsilon}{2} \leq \mu_f((\psi \circ P^k)_\pm) \leq \mu_P(\psi) + \frac{\epsilon}{2} \tag{116}$$

para todo $k \geq k_0$. Por outro lado, por hipótese existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mu_f((\psi \circ P^k)_\pm) - \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} ((\psi \circ P^k)_\pm)(f^j(x)) \leq \mu_f((\psi \circ P^k)_\pm) + \frac{\epsilon}{2}, \tag{117}$$

para todo $n \geq n_0 = n_0(k)$.

Somando as desigualdades (116) e (117) temos

$$\mu_P(\psi) - \epsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} ((\psi \circ P^k)_\pm)(f^j(x)) \leq \mu_P(\psi) + \epsilon. \tag{118}$$

Agora some a desigualdade (115) em $j = 0 \cdots n-1$ para obter

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ P^k)_-(f^j(x)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ P^k(P^j(x,y)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ P^k)_+(f^j(x)).$$

Unindo este último fato com (118) obtemos

$$\mu_P(\psi) - \epsilon \leq \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ P^k)(P^j(x,y)) \leq \mu_P(\psi) + \epsilon \tag{119}$$

para todo $n \geq n_0 = n_0(k)$. Como ϵ pode ser tomado arbitrariamente pequeno e n arbitrariamente grande, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\psi \circ P^j(x,y)) \longrightarrow \int \psi d\mu_P.$$

□

Teorema 0.4.1. *O sistema (P, μ_P) é ergódico.*

Demonstração. Vamos utilizar a proposição 1.8 da seção sobre teoria Ergódica. Segundo esta proposição, precisamos mostrar que

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(x,y)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \varphi d\mu_P \qquad \mu\text{-qtp}$$

apenas para as funções φ de um conjunto denso $F \subset L^1$. Escolheremos $F = C^0(S, \mathbb{R})$.

Portanto, dada $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, temos que $(\varphi \circ P^k)_{\pm} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada e portanto μ_f-integrável. Logo, existe $B_{\varphi\circ P^k} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(\varphi\circ P^k)_{\pm}(f^j(x)) = \int (\varphi\circ P^k)_{\pm} d\mu_f,$$

onde $\mu_f(B_{\varphi\circ P^k}) = 1$, pois μ_f é ergódica. Pelo lema 4.2, no conjunto $p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k}) \subset B_\varphi$ vale

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(x,y)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int \varphi d\mu_P$$

onde B_φ é o conjunto dos pontos $z \in S$ tais que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi\circ P^j(z) = \int \varphi d\mu_P.$$

Portanto, para que μ_P seja ergódica, resta mostrar que $\mu_P(B_\varphi) = 1$.

Uma vez que o espaço $C^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \mathbb{R})$ das funções contínuas $\psi : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ é denso em $L^1([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \mu_f)$, tome uma sequência $(\psi_n)_n \subset C^0([-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; \mathbb{R})$ de funções contínuas tal que $\psi_n \overset{L^1(\mu_f)}{\longrightarrow} \chi_{B_{\varphi\circ P^k}}$. Uma vez que $\chi_{p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})} = \chi_{B_{\varphi\circ P^k}} \circ p$ temos que

$$\psi_n \circ p \overset{L^1(\mu_P)}{\longrightarrow} \chi_{p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})} = \chi_{B_{\varphi\circ P^k}} \circ p. \tag{120}$$

Agora observe

$$\begin{aligned}
\int \psi_n \circ p d\mu_P &= \lim_{k\to\infty} \int \left(\psi_n \circ p \circ P^k\right)_ d\mu_f & (121)\\
&= \lim_{k\to\infty} \int \left(\psi_n \circ f^k\right) d\mu_f & (122)\\
&= \lim_{k\to\infty} \int (\psi_n) d(f^k * \mu_f) & (123)\\
&= \lim_{k\to\infty} \int (\psi_n) d\mu_f & (124)\\
&= \int \psi_n d\mu_f & (125)
\end{aligned}$$

onde (121) $\Longrightarrow$ (122), pois como observado no início da prova do lema 4.2, P^k tem a forma

$$P^k(x,y) = \left(f^k(x), g\left(f^{k-1}(x), g\left(f^{k-2}, \cdots, g(f(x), g(x,y))\right)\right)\right);$$

(122) $\Longrightarrow$ (123) segue do teorema de mudança de variáveis; (123) $\Longrightarrow$ (124) da f-invariância (e portanto da f^k-invariância) de μ_f e (124) $\Longrightarrow$ (125) pois a expressão não depende mais do índice k.

Uma vez que nós temos a convergência $\psi_n \overset{L^1(\mu_f)}{\longrightarrow} \chi_{B_{\varphi\circ P^k}}$, temos também a convergência das integrais. De fato, para um n suficientemente grande e $\epsilon > 0$ arbitrário

$$\begin{aligned}
\left|\int \psi_n d\mu_f - \mu_f(B_{\varphi\circ P^k})\right| &= \left|\int \psi_n d\mu_f - \int \chi_{B_{\varphi\circ P^k}} d\mu_f\right|\\
&= \left|\int \left(\psi_n - \chi_{B_{\varphi\circ P^k}}\right) d\mu_f\right|\\
&\leq \int |\psi_n - \chi_{B_{\varphi\circ P^k}}| d\mu_f\\
&= ||\psi_n - \chi_{B_{\varphi\circ P^k}}||_1\\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Por um lado temos,

$$\int \psi_n d\mu_f \longrightarrow \mu_f(B_{\varphi\circ P^k i}) = 1,$$

por (120) e observando que

$$(120) \Longrightarrow \int \psi_n \circ p d\mu_P \to \int \chi_{p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})} d\mu_P$$

temos

$$\begin{aligned}\int \psi_n d\mu_f &= \int \psi_n \circ p d\mu_P \\ &\to \int \chi_{p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})} d\mu_P \\ &= \mu_P(p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})),\end{aligned}$$

portanto, pela unicidade do limite, $\mu_P(p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})) = 1$. Consequentemente, como $B_\varphi \supset p^{-1}(B_{\varphi\circ P^k})$, temos que $\mu_P(B_\varphi) = 1$. Logo μ_P é ergódica.

□

Concluímos este trabalho mostrando que μ_P é uma medida física para P.

Teorema 0.4.2. *μ_P é uma medida física para P.*

Demonstração. Seja $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Como S é compacto, φ é uniformemente contínua. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| < \epsilon \text{ sempre que } |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)| < \delta.$$

Além disso, dado $(a, y_1), (a, y_2) \in p^{-1}(B(\mu_f))$, a contração uniforme das folhas, equação (59) (propriedade 2, página 44, capítulo 2), nos diz que $|P^n(a, y_1) - P^n(a, y_2)| \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Portando seja n_0 tal que $n > n_0$ implique em

$$|P^n(a, y_1) - P^n(a, y_2)| < \delta.$$

Portanto

$$|\varphi(P^n(a, y_1)) - \varphi(P^n(a, y_2))| < \epsilon \text{ sempre que } n > n_0,$$

daí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_2))\right| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_2))\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2))\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n_0}\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2)) + \sum_{j=n_0+1}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2))\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\left|\sum_{j=0}^{n_0}\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2))\right| + \frac{1}{n}\left|\sum_{j=n_0+1}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2))\right| \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n_0}\left|\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2))\right| + \frac{1}{n}\sum_{j=n_0+1}^{n-1}\left|\varphi(P^j(a,y_1)) - \varphi(P^j(a,y_2))\right| \\
&\leq \frac{1}{n}C + \frac{1}{n}\sum_{j=n_0+1}^{n-1}\epsilon \\
&\leq \frac{1}{n}C + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\epsilon \\
&\leq \frac{1}{n}C + \epsilon,
\end{aligned}$$

fazendo $n \longrightarrow \infty$, temos

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_2))\right| \leq \epsilon.$$

Como o ϵ é arbitrário, temos que o tempo médio de Birkhoff é igual para todo ponto em $p^{-1}(a)$ onde $a \in B(\mu_f)$, i. e.,

$$\left|\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_1)) - \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(a,y_2))\right| = 0.$$

.

implica que para todo ponto $(x,y) \in p^{-1}(x) \subset p^{-1}(B(\mu_f))$ para $x \in B(\mu_f)$ os tempos médios de Birkhoff são iguais, para toda função contínua $\varphi : S \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(x,y_1)) - \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(P^j(x_2,y_2))\right]$$

para todos $(x,y_1),(x,y_2),\in p^{-1}(x)$ com $x \in B(\mu_f)$. Consequentemente, $p^{-1}(B(\mu_f)) \subset B(\mu_P)$ como $m(p^{-1}(B(\mu_f))) = 1$ temos que $m(B(\mu_P)) = 1$. $\square$

Referências Bibliográficas

[21] Oliveira, K. I. M., *Um primeiro curso em Teoria Ergódica e Aplicações*, Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[21] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, WILEY, 1995.

[21] Rana, I. K., *An Introduction to Measure and Integration*, American Mathematical Society, 2002.

[21] Brin, M. e Stuck, G., *Introduction to Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2002.

[21] Lima, E. L., *Curso de Análise Volume 1*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, Decima Segunda Edição, 2009.

[21] Lima, E. L., *Curso de Análise Volume 2*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, Decima Segunda Edição, 2009.

[21] Lima, E. L., *Espaços Métricos*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, Quarta Edição, 2007.

[21] Pacifico, M. J. e , V.D. Araújo *Three Dimensional Flows*, A Series of Modern Surveys in Mathematics, New York: Springer, 2010.

[21] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*, Monografias de Matemática # 15, IMPA, 1973.

[21] Camacho, C. e Neto, A. L., *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[21] J. Milnor, *Teoria Geométrica das Folheações*, University Press of Virginia 1965.

[21] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley 1989.

[21] M. Viana, *Leture Notes on Attractors and Physical Measures* .

[21] M. Viana, *Stochastic Dynamics of Deterministic Systems* , Brazilian Mathematical Colloquium, Rio de Janeiro: IMPA, 1997.

[21] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

[21] J. Palis Jr. e W. Melo, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA, 1978.

[21] V. S. Afraimovich V. V. Bykov e L. P. Shil'nikov, *On the appearance and structure of the Lorenz attractor*, Dokl. Acad. SCI. USSR 234 (1977), 336 - 339.

[21] J. Guckenheimer e R. F. Williams, *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. Inst. Hauters Études Sci. 50 (1979), 59-72.

[21] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, 3 edition, 1987.

[21] P. J. Fernandez, *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, 2 edição, 2007.

[21] A. Lasota, J. A. Yorke. *On the Existence of Invariant Measures for Piecewise Monotonic Transformations*, Trans. Amer. Math. Soc., 186:481-488, 1973.