Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

O Grupo de Schrödinger em Espaços de Zhidkov

Fábio Henrique de Carvalho

Maceió, Brasil
16 de Março de 2010

Fábio Henrique de Carvalho

O Grupo de Schrödinger em Espaços de Zhidkov

Dissertação de Mestrado submetida em 16 de março de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pos-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Adán J. Corcho Fernández

Maceió
Março 2010

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

C331g Carvalho, Fábio Henrique de.
O grupo de Schrödinger em espaços de Zhidkov / Fábio Henrique de Carvalho, 2010.
68 f. : il.

Orientador: Adán José Corcho Fernández.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2010.

Bibliografia: f. 66-67.
Índices: f. 68.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Schrödinger, Equação de. 3. Equações de evolução. 4. Zhidkov, Espaços de. I. Título.

CDU: 517.958

.

O Grupo de Schrödinger em Espaços de Zhidkov

Fábio Henrique de Carvalho

Dissertação de Mestrado submetida em 16 de março de 2010 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pos-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adán J. Corcho Fernández (UFAL/Orientador)

Prof. Dr. Mahendra Prasad Panthee (Universidade do Minho - UM, Portugal)

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros (UFAL)

"O binômio de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por isso (...)"
(Álvaro de Campos)

À minha mãe Maria.
À meus irmãos.
À Fabrisa.

Agradecimentos

Para que concluísse esse estágio de minha vida acadêmica, muitas pessoas merecem ser mencionadas. Para começar, é lógico, minha mãe Maria Anunciada de Carvalho, que conseguiu transformar um recém nascido, desenganado pelos médicos, em um homem; mas também a seu obstetra, Lício Henrique, a quem devo meu segundo nome mas, por sorte minha e por um momento de lucidez dela, não devo o primeiro.

Já durante minha vida escolar anterior ao ingresso no Mestrado, ainda no estado do Espírito Santo, gostaria de ressaltar o papel fundamental de três pessoas. A primeira, professor Sandro Daré Lorenzoni na escola estadual "Hunney Everest Piovesan"(ou, como é mais conhecida, "Polivalente de Campo Grande"), localizada em Cariacica - ES, que, após suas minuciosas aulas de matemática, tornou um adolescente pouco estudioso, que apenas tinha boas notas, num voraz leitor dos livros de Matemática - a culpa de ter primeiramente me inclinado a prestar vestibular e depois decidir pela Matemática, ao invés de Psicologia, Física ou Filosofia, é exclusivamente dele! A segunda, professora Luzia Maria Casatti, durante o seu curso de Álgebra, viu num aluno de graduação que estudava em um turno e lecionava nos demais, alguém que podia dar um pouco mais de si, e o fez se entusiasmar pela profissão tanto quanto ela. A terceira e última (mas não menos importante), professor Florêncio Ferreira Guimarães Filho, transformou o entusiasta num leitor curioso e crítico de demonstrações; o que teve como causa um feliz desempenho durante seu agradável e enriquecedor curso de Análise Real. Também a Florêncio, devo a informação sobre o Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

Aos colegas professores de matemática da Universidade Federal do Vale do São Francisco - UNIVASF, por terem propiciado a oportunidade de meu afastamento para cursar este mestrado, vão meus sinceros agradecimentos. Certamente, eles tiveram que trabalhar também por mim durante estes dois anos. Também agradeço aos professores e professoras, Adriana Moreno, José Aliçandro(com o cedilha mesmo), Carmem Sueze, Leonardo Cavalcanti, Maria Zucci e Vanessa Donzeli, do Colegiado de Engenharia Agrícola e Ambiental da UNIVASF, que passaram um dia inteiro aguardando para que a reunião que decidiu meu afastamento tivesse coro. A reunião que deveria começar pela manhã só pôde se concretizar a noite, após o fim das inúmeras atividades que o professor Mário Miranda tinha à frente da Pró Reitoria de Pesquisa, a ele também fica minha eterna gratidão. Por outro lado, fico feliz por não ter que prestar agradecimentos aos sete prefessores que faltaram à reunião (embora o Estatuto da instituição, em seu artigo 80, esclareça, pelo menos aos que sabem ler, a obrigatoriedade de presença nas sessões das instâncias deliberativas da universidade); assim fico à vontade para prestar meus agradecimentos apenas àqueles pelos quais tenho estima e admiro o caráter e hombridade, e compareceram para votar, a favor ou até mesmo contra (se fosse o caso) a solicitação.

Aos integrantes do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFAL, sejam eles docentes, discentes ou pessoal de apoio e limpeza, agradeço pelo fato de ter sido muito bem recebido; a Ufal e Maceió se tornaram mais um lar para mim, e já sinto as saudades da partida. Todos os amigos que fiz durante esses dois anos, tenho certeza que serão amigos para o resto de minha vida.

Alguns merecem menção especial: Darliton e Everson - "irmãos" por parte de orientador, que abriram caminho para a elaboração deste trabalho, sendo que o primeiro fez algumas sugestões prontamente acatadas; Kennerson, Isnaldo, Robério e Rodrigo, sempre dispostos a ajudar; Rafael, Alex Néo e Michel, pelos auxílios técnicos com as figuras e comandos até então desconhecidos por mim.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Matemática da UFAL, Adelailson, Dimas, Feliciano, Júlio (meu conterrâneo) e Krerley, pela cordialidade e pelas palavras que ajudaram a me acalmar nos últimos momentos pré-defesa. Adelailson, por exemplo, me tirou de um grande desespero ao me emprestar um projetor durante o "rufar dos tambores".

Agradeço também ao professor Clément Gallo, do Departamento de matemática e Estatística da Universidade McMaster, no Canadá, tanto por ter elaborado o artigo em que se basea este trabalho, quanto por atender prontamente e responder por e-mail uma dúvida que lhe remeti. A ele queria dizer que, assim como foi seu desejo, finalmente recuperei meu sono, mas perdê-lo lendo seu artigo foi muito enriquecedor para a minha vida acadêmica. Sempre que o motivo for parecido, ficarei contente em manter-me insone.

Aos membros da banca Prof. Dr. Amauri Barros, da UFAL, e Prof. Dr. Mahendra Prasad Panthee, da Universidade do Minho - Portugal, agradeço as inúmeras sugestões e aconselhamentos para melhorar este trabalho.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Adán Corcho, pela escolha do tema e pelo pronto atendimento de urgência nos momentos mais penosos. Por muitas vezes, debruçado sobre folhas e mais folhas de rascunho, julguei que ele tivesse superestimado minha capacidade. Mas, como sempre acreditei: "amamos algo, na direta proporção a que nos custa" e, sem dúvida, este trabalho custou muito. O Prof. Adán, além de um brilhante pesquisador é um sujeito que em pouco tempo conquistou minha admiração e simpatia, seu papel foi muito além da orientação. Já desde o primeiro dia em que cheguei a Maceió, sem saber que rumo iria tomar, recebeu-me como se fosse um conhecido de longa data, e isso não será esquecido.

A execução deste trabalho foi financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL, durante os cinco primeiros meses, e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, durante os dezenove meses restantes. A estas instituições devo meu reconhecimento e aplausos por fomentarem e ajudarem a divulgar a pesquisa científica e auxiliar na formação de recursos humanos para a pesquisa no Brasil.

"Não há país desenvolvido com universidade subdesenvolvida."
(Larent Schwartz)

Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo da boa colocação local e global do Problema de Cauchy associado à equação não linear de Schrödinger, com dado inicial não nulo no infinito.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais, equações de evolução, equação de Schrödinger, espaços de Zhidkov.

Abstract

This work is dedicated to the local and global well-possednes study of Cauchy's Problem associated to the nonlinear Schrödinger equation, to the initial data non-zero at infinity.

Palavras-chave: partial differential equations, evolution equations, Schrödinger equation, Zhidkov spaces.

Sumário

Introdução

O objetivo central deste trabalho é fazer um estudo detalhado do problema de valor inicial

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u + f\left(|u|^2\right) u & = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) & = \varphi, \end{cases} \tag{1}$$

associado à equação não linear de Schrödinger, onde a aplicação $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, é, pelo menos, diferenciável. A informação relevante, por ora, é a respeito do dado inicial; pretendemos estudar o problema quando φ não está no espaço das funções quadrado integráveis L^2, mas mantem algumas propriedades de regularidade, a saber: φ é limitada, uniformemente contínua, k vezes diferenciável e seu gradiente pertence ao espaço de Sobolev clássico de ordem $k-1$. Os conjuntos de aplicações φ com tais propriedades são denominados espaços de Zhidkov e denotados por X^k. Nos baseamos no trabalho desenvolvido primeiramente por Peter Zhidkov em [Zh], para dimensão 1 e, na sua posterior generalização, feita por Clément Gallo em [Ga], para o caso n-dimensional.

No capítulo 1, serão apresentadas algumas definições, como dos espaços de Lebesgue e de Schwartz, bem como da transformada de Fourier em L^1 e no espaço de Schwartz, além de alguns dos resultados utilizados no decorrer desta monografia. As propriedades e proposições listadas, na maior parte das vezes, tem sua validade confirmada por uma simples manipulação da definição e teoremas anteriores; quando não for descrita uma demonstração cabal de algum dos teoremas listados, deixaremos a indicação de uma demonstração completa na bibliografia.

Ainda no capítulo 1, introduziremos os espaços de Zhidkov, X^k, e apresentaremos alguns exemplos de funções que pertencem a X^k. Demonstraremos algumas propriedades importantes, tais como o fato de X^k ser uma álgebra e, como espaço, ser denso sobre X^{k-1}.

No capítulo 2, definiremos o grupo de Schrödinger sobre os espaços de Zhidkov, $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, e mostraremos que este é uniformemente contínuo sobre X^k. Para tanto, nos valeremos de propriedades importantes a respeito da integração em R^n, que serão detalhadas no apêndice. A continuidade uniforme do grupo $\{S(t)\}$ será exaustivamente explorada na obtenção de estimativas de boa colocação para o problema. Além disso, concluíremos que o gerador infinitesimal do grupo é o operador $i\Delta$.

O capítulo 3 é destinado ao estudo da boa colocação local do problema (1). Como ponto de partida, damos as definições de boa colocação local e de boa colocação global para equações de evolução e mostramos alguns resultados a respeito da existência e unicidade de soluções de (1) em um intervalo $[-T, T]$. Em síntese, mostramos que, se a norma em X^k do dado inicial é limitada, então existe um intervalo maximal e uma única solução clássica de (1) neste intervalo.

No quarto e último capítulo encontram-se alguns resultados a respeito das leis de conservação de energia para o problema (1), quando $n = 1$ ou $n = 2$. Para ilustrar, destacamos como exemplos a Equação de Gross-Pitaevskii - caso em que $f\left(|u|^2\right) = 1 - |u|^2$ em (1); bem como suas generalizações.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Os Espaços de Lebesgue e a Transformada de Fourier

Muitos dos avanços na generalização do conceito de integral são devidos ao matemático francês Henry Léon Lebesgue (1875-1941). Aqui e no decorrer do texto, a não ser que haja menção explícita em contrário, a integração é sempre no sentido dado por Lebesgue .

Definição 1.1.1. *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. O conjunto*

$$L^p(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \int_\Omega |\varphi(x)|^p dx < \infty \right\} \tag{1.1}$$

é um espaço vetorial cuja norma $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ é definida pondo, para cada função $\varphi \in L^p(\Omega)$,

$$\|\varphi\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Munido da norma $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ o espaço $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach; $L^1(\Omega)$ é o espaço das funções módulo integráveis e $L^2(\Omega)$ é o espaço das funções quadrado integráveis.

Também é um espaço vetorial o conjunto

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \|\varphi(x)\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\}, \tag{1.3}$$

onde a norma $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ é dada por

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |\varphi(x)|. \tag{1.4}$$

O espaço $L^{\infty}(\Omega)$ *é, simplesmente, o espaço das funções limitadas em* Ω; *e, assim como os anteriores, também é um espaço de Banach ([Fe], p. 78).*

A transformada de Fourier surge a partir das considerações do matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) a respeito da decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas, nos seus estudos sobre a condução do calor. Suas propriedades são importantíssimas no estudo de equações diferenciais, e faremos aqui um breve resumo de algumas delas.

Definição 1.1.2 (Transformada de Fourier). *Seja* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *a transformada de Fourier de* φ *é a função* $\widehat{\varphi}$ *(ou* $\mathscr{F}(\varphi)$*) definida por*

$$\mathscr{F}(\varphi)(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(\xi \cdot x)} dx, \tag{1.5}$$

onde $x = (x_1, \cdots, x_n), \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ *e* $(\xi \cdot x) = \sum_{j=1}^{n} x_j \xi_j$.

Valem algumas observações a respeito da transformada de Fourier, ver [Io]:

Propriedade 1.1.1. *A aplicação* $\varphi \longrightarrow \widehat{\varphi}$ *é linear. Além disso,* $\widehat{\varphi} \in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$\|\varphi\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\varphi\|_{L^1}.$$

Propriedade 1.1.2. $\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *é contínua.*

Propriedade 1.1.3 (Lema de Riemann-Lebesgue). *Seja* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\lim_{\|\xi\| \to 0} \widehat{\varphi}(\xi) = 0.$$

Propriedade 1.1.4. *Se* $T_h f(x) = f(x-h)$, *para* $h \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$\widehat{T_h f}(\xi) = e^{-i(h \cdot \xi)} \widehat{f}(\xi) \text{ e } \widehat{e^{-i(x \cdot \xi)} f(x)}(\xi) = (T_{-h} \widehat{f})(\xi).$$

Propriedade 1.1.5. *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \widehat{g}(y) dy. \tag{1.6}$$

Propriedade 1.1.6. *Se* $\overline{f}$ *é o conjugado de* f, *então*

$$\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(-\xi).$$

Uma ferramenta fundamental no estudo das equações diferenciais é dada pela convolução entre duas funções que destacamos a seguir.

Definição 1.1.3 (convolução). *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *a convolução de* f *e* g *é definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \tag{1.7}$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Agrupamos abaixo algumas das principais propriedades das convoluções, que podem ser utilizadas no decorrer do texto. Para maiores detalhes vale a pena consultar [Io].

Proposição 1.1.1. *São válidas as seguintes propriedades:*

1. *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^n), g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *onde* $p, q \in [1, \infty]$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ *para algum* $r \in [1, \infty]$, *então, vale a Desigualdade de Young para convoluções,*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

2. $f * g = g * f$.

3. $\lambda(f * g) = (\lambda f) * g = f * (\lambda g)$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$.

4. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

5. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

6. *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *então*

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Para finalizar esta seção, introduzimos a noção de diferenciabilidade em L^p.

Definição 1.1.4. *Uma função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *é diferenciável com relação à* k*-ésima variável se existe* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que, para*

$$h = h_k e_k \textit{ tem-se } \lim_{h_k \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right|^p dx = 0;$$

quando existe (e, neste caso, é única) uma tal função g *é chamada derivada parcial de* f *com relação à* k*-ésima coordenada na norma* L^p.

1.2 O Espaço de Schwartz e as Distribuições Temperadas

Laurent Schwartz(1915-2002), matemático e pensador dos mais influentes, é o inventor da Teoria das Distribuições e, por conta do seu desenvolvimento, foi o primeiro matemático francês a ser agraciado com a medalha Fields. É considerado um dos ícones da história recente da França.

Para definir o espaço de Schwartz, necessitamos de algumas noções preliminares. Uma notação importantíssima (e que será usada em todo o texto) é a noção de multi-índice que apresentamos a seguir. Aqui denotaremos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos inteiros positivos e por $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos números inteiros não negativos.

Definição 1.2.1. *Uma n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ é chamada um multi-índice.*

Sejam α e β são multi-índices, e seja $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Escrevemos:

(i) $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$;

(ii) $x^\alpha = x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} \cdots x^{\alpha_n}$;

(iii) $\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}}\right)\cdots\left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}\right)$

ou $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$;

(iv) $\alpha > \beta$ (respectivamente, $\alpha \geq \beta$) quando $\alpha_i > \beta_i$ (respectivamente, $\alpha_i \geq \beta_i$), para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$;

(v) Se $\alpha > \beta, \alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \cdots, \alpha_n - \beta_n)$;

(vi) $\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!$;

(vii) Se $\alpha > \beta, \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$.

Definição 1.2.2. *O espaço de Schwartz (ou das funções rapidamente decrescentes) em $\mathbb{R}^n$, que denotaremos por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, é formado pelas funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < \infty$, quaisquer que sejam os multi-índices α e β.*

O espaço de Schwartz goza das seguintes propriedades, que podem ser consultadas em [Io].

Propriedade 1.2.1. *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, e, quando munido da métrica*

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha|+|\beta|)} \frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}$$

é um espaço métrico completo.

Propriedade 1.2.2. *$C_0^\infty \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, mas $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ é um exemplo de função que está no complementar de C_0^∞ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Propriedade 1.2.3. *$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ é subconjunto próprio de $L^p(\mathbb{R}^n)$ e denso sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, para todo $p \in [1,\infty)$ (Observe que C_0^∞ também é denso sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$). Porém, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ não é denso sobre $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Temos ainda, aplicando a definição, as seguintes regras de derivação no espaço de Schwartz:

Teorema 1.2.1. *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Então, $x^\alpha f, \partial^\alpha f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ para todo multi-índice α. Valem ainda:*

(i) $\left(\partial^\alpha \hat{f}\right)(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}(\xi)$;

(ii) $\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (i)^{|\alpha|}|\xi^\alpha|\hat{f}(\xi)$.

Além disso, a transformada de Fourier no espaço de Schwartz é um isomorfismo e, por isso, temos a seguinte definição:

Definição 1.2.3. *Seja $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier inversa é definida pela fórmula*

$$\mathscr{F}^{-1}(\varphi)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi)} f(\xi)d\xi. \tag{1.8}$$

Nossa noção de convergência em $\mathscr{S}$ é definida do modo usual.

Definição 1.2.4. *Uma sequência $(\varphi)_{m=1}^\infty$ em $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ converge para uma certa função $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

$$\lim_{m\to\infty} \|\varphi_m - \varphi\|_{\alpha,\beta} = 0,$$

quaisquer que sejam os multi-índices α e β.

Neste caso, denotamos $\varphi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$.

Agora, para introduzir os espaços de Sobolev, necessitamos definir as distribuições temperadas (ou funções-teste), que nada mais são que funcionais lineares contínuos.

Definição 1.2.5. *Uma aplicação linear* $T : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *é uma distribuição temperada quando* T *é contínua; isto é, quando* $T(\varphi_m) \xrightarrow{\mathbb{C}} T(\varphi)$ *sempre que* $\varphi_m \xrightarrow{\mathscr{S}} \varphi$. *Denotamos por* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *o conjunto de todas as distribuições temperadas.*

Usamos a notação $\langle T, \varphi \rangle$, para representar a imagem em $\mathbb{C}$ de $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ pela distribuição temperada T.

Definição 1.2.6. *Dizemos que uma sequência* $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ *em* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *converge para* $T \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ *quando,*

$$\lim_{m \to \infty} \langle T_m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.9}$$

Neste caso, denotamos $\varphi_m \xrightarrow{\mathscr{S}'} \varphi$.

Dada uma função em L^p, com $p \geq 1$, é possível construir uma distribuição temperada como segue:

Proposição 1.2.1. *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $p \in [1, \infty)$. *A aplicação* T_f, *definida por*

$$\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx,$$

para toda $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, *é uma distribuição temperada.*

Esse resultado, que também pode ser consultado em [Io], nos remete à seguinte definição.

Definição 1.2.7. *Dizemos que uma distribuição temperada provém de uma função em* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *quando existe uma função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $T = T_f$.

Observação 1.2.1. *Nem toda distribuição temperada provém de uma função em* L^p, *o exemplo clássico é dado pela função delta de Dirac, definida por*

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x), \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Para finalizar esta seção, destacamos as seguintes regras, que relacionam as distribuições temperadas com a derivação e com a transformada de Fourier, respectivamente.

Definição 1.2.8. *Sejam* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* α *um multi-índice, definimos a derivada de ordem* α *da distribuição* T *pondo*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.10}$$

Definição 1.2.9. *Seja* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *podemos definir a transformadada de Fourier da distribuição* T, *bem como sua inversa, pondo, para toda função* $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \langle \mathscr{F}(T), \varphi \rangle &= \langle T, \mathscr{F}(\varphi) \rangle \ e \\ \left\langle \mathscr{F}^{-1}(T), \varphi \right\rangle &= \left\langle T, \mathscr{F}^{-1}(\varphi) \right\rangle. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Observação 1.2.2. *A transformada de Fourier* $\mathscr{F} : \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é um isomorfismo topológico.*

1.3 Os Espaços de Sobolev

Sergei Lvovich Sobolev(1908-1989) foi um dos fundadores do Instituto de Matemática da Akademgorodok (que surgiu como resultado da criação da Divisão Siberiana da Academia de Ciências Russa, da qual foi um dos idealizadores), atualmente, Instituto de Matemática Sobolev. Também atuou como vice-diretor do Instituto de Energia Atômica soviético, entre 1943 e 1957, onde participou do projeto da bomba atômica da extinta URSS.

Definição 1.3.1. *Seja* $s \in \mathbb{R}$. *O espaço de Sobolev de ordem* s, *classicamente denotado por* $H^s(\mathbb{R}^n)$, *é o subespaço de* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *definido por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n); \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}. \tag{1.12}$$

Denotaremos por $\widehat{\Lambda^s f}(\xi) = \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi)$ *a transformada de Fourier no espaço de Sobolev. A norma* $\|\cdot\|_{H^s}$, *ou* $\|\cdot\|_{s,2}$, *é definida por*

$$\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_{L^2}. \tag{1.13}$$

Observação 1.3.1. $H^o(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n); \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\} = L^2(\mathbb{R}^n)$.

A seguir, além de destacarmos um exemplo clássico de uma classe de funções no espaço de Sobolev H^s, para $s < \frac{1}{2}$, introduzimos a notação usada para denotar a função característica de um conjunto, que nos acompanhará no decorrer do texto.

Exemplo 1.3.1. *Para* $n = 1$, *consideremos a função característica do intervalo* $[a, b]$, *isto é,*

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1, & se\ x \in [a, b]; \\ 0, & se\ x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Temos

$$\widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(2\pi\xi)}{\pi\xi}, & \text{se } \xi \neq 0; \\ 2 & \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\|\chi_{[a,b]}\right\|_{H^s} &= \left\|\Lambda^s \chi_{[a,b]}\right\|_{L^2} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \widehat{\chi_{[a,b]}}(\xi)\right]^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+|\xi|^2\right)^s \frac{\operatorname{sen}^2(2\pi\xi)}{\pi^2\xi^2} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \end{aligned} \tag{1.14}$$

se, e somente se, $s < \frac{1}{2}$.

A seguir, agrupamos algumas propriedades dos espaços de Sobolev. Outras podem ser encontradas em [Io].

Proposição 1.3.1. *Sejam* $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, *então*

(i) *Se* $s_1 \geq s \geq 0$, *então* $H^{s_1}(\mathbb{R}^n) \subsetneq H^s(\mathbb{R}^n)$;

(ii) *Se o produto interno em* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está definido por*

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} \Lambda^s f(\xi) \Lambda^s g(\xi) d\xi,$$

para todos $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$, *então* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Hilbert;*

(iii) $S(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $H^s(\mathbb{R}^n)$;

(iv) *Se* $s_1 \leq s \leq s_2$, *com* $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2, \theta \in [0,1]$, *então*

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^{\theta} \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Demonstração. (i) Sejam $s \leq s_1$, então $(1+|\xi|^2)^s \leq (1+|\xi|^2)^{s_1}$ o que implica

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s_1} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.15}$$

Logo, se $f \in H^{s_1}(\mathbb{R}^n)$, a integral no segundo membro de (1.15) é finita e, portanto, a integral no primeiro membro também converge; assim, f também pertence a $H^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso, a inclusão é contínua.

As demonstrações dos demais itens podem ser encontradas em [Io] e [Po]. □

Observação 1.3.2. *Em particular, se* $s \geq 0$ *então* $H^s(\mathbb{R}^n) \subsetneq H^0(\mathbb{R}^n)$.

Uma caracterização importante dos espaços de Sobolev, que relaciona os espaços H^k e L^2, e que será útil à introdução dos espaços de Zhidkov, é dada pelo seguinte resultado.

Teorema 1.3.1. *Sejam* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* α *um multi-índice. Então,* $H^k(\mathbb{R}^n)$ *coincide com o espaço*

$$\left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n); \partial_x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ sempre que } |\alpha| \leq k\right\}.$$

Demonstração. Seja $f \in H^k(\mathbb{R}^n)$. Para todo multi-índice α temos:

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha| &= |\xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \cdots \xi_n^{\alpha_n}| \\ &\leq (1+|\xi_1|)^{\frac{\alpha}{2}} (1+|\xi|)^{\frac{\alpha_2}{2}} \cdots (1+|\xi|)^{\frac{\alpha_n}{2}} \\ &\leq (1+|\xi|)^{\frac{|\alpha|}{2}}. \end{aligned}$$

Combinando este fato ao Teorema 1.2.1, juntamente com o conhecido Teorema de Plancherel, temos:

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 &= \left\|\widehat{\partial^\alpha f}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|i^{|\alpha|} |\xi^\alpha| \hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^{2\alpha}| \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^\alpha \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Logo, sempre que $|\alpha| \leq k$, temos

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^k \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \leq c\,\|f\|_{k,2} < \infty.$$

Então, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e suponha que $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ sempre que $|\alpha| \leq k$. Daí,

$$\left(1+|\xi|^2\right)^k \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 = \sum_{j=0}^{k} c_j |\xi|^{2j} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2$$

que, por sua vez, é combinação linear de termos da forma $\left|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right|^2$, com $|\alpha| \leq k$.

Então, $\|f\|_{H^k} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^k \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2j} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty.$ $\square$

Para finalizar esta seção, introduzimos dois resultados relevantes para o andamento desta dissertação, ambos conhecidos como Mergulho de Sobolev, que relacionam as funções em H^s e C^k, e H^s e L^p, respectivamente. Maiores detalhes podem ser encontrados em [LP].

Teorema 1.3.2. *Sejam* $k \in \mathbb{N}_0$ *e* $s \in \mathbb{R}$, *tais que* $s > \frac{n}{2} + k$. *Então,* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está continuamente imerso no espaço* $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$, *das funções com* k *derivadas contínuas e que se anulam no infinito. Isto é, se* $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, *com* $s > \frac{n}{2} + k$, *então (após uma possível modificação de* f *sobre um conjunto de medida nula)* $f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $\|f\|_{C^k} = c_s \|f\|_{H^s}$.

Demonstração. Consideremos no primeiro caso, $k = 0$.

Seja $s \in \mathbb{R}, s > \frac{n}{2}$. Da desigualdade de Hölder (ver, por exemplo, [Io]) segue:

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{f}\right\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-\frac{s}{2}} \left|\hat{f}(\xi)\right| \left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} d\xi \\
&\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi|^2\right)^{-s} d\xi\right]^{\frac{1}{2}} \|\Lambda^s f\|_{L^2} = c_s \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Além disso, $\|f\|_{L^p} = \left\|\mathscr{F}^{-1}\left(\mathscr{F}(f)\right)\right\|_{L^p} \leq \left\|\hat{f}\right\|_{L^1} \leq c_s \|f\|_{H^s}$.

Para o caso geral, $k \geq 1$, seja $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > \frac{n}{2} + k$. Então, para todo multi-índice α, satisfazendo $|\alpha| \leq k < s - \frac{n}{2}$, temos $\partial^\alpha f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$. Do caso $k = 0$ segue $\partial^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, f é C^k. □

Teorema 1.3.3. *Seja* $n \in \mathbb{N}$, *e sejam* $s, p \in \mathbb{R}$ *tais que* $0 < s < \frac{n}{2}$ *e* $p = \frac{2n}{n-2s}$. *Então,* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *está continuamente imerso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$. *Além disso,*

$$\|f\|_{L^p} \leq c \|f\|_{H^s}.$$

Uma demonstração deste resultado pode ser consultada na página 51 de [LP].

1.4 Os Espaços de Zhidkov

Assim como introduzidos por P. E. Zhidkov em [Zh] para o caso unidimensional (ver também [Fe]) e, posteriormente, batizados e estendidos para o caso n-dimensional por Clemént Gallo em [Ga], trataremos aqui do espaço das funções limitadas, uniformemente contínuas, k vezes diferenciáveis com a seguinte condição adicional: para cada uma delas, o gradiente está no espaço de Sobolev clássico de ordem $k-1$. Mais especificamente, temos a seguinte definição:

Definição 1.4.1. *Sejam* k *e* n *números naturais. O espaço de Zhidkov* $X^k(\mathbb{R}^n)$ *é é o completamento do espaço*

$$\left\{\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C^k(\mathbb{R}^n);\ \varphi \text{ é uma função uniformemente contínua e } \nabla\varphi \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

na norma

$$\|\varphi\|_{X^k} := \|\varphi\|_{L^\infty} + \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^2}. \tag{1.16}$$

Exemplo 1.4.1. *Para cada* $t > 0$*, a função* $\phi_t : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\phi_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$ *(núcleo do calor) pertence a* $X^k(\mathbb{R}^n)$*, para todo* $k \in \mathbb{N}$*. Evidentemente* $\phi_t \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \bigcap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e é uniformemente contínua. Além disso,* $\partial_{x_i}\phi_t = -\frac{2x_i}{4t(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\phi_t$ *e, portanto,*

$$\nabla\phi(x) = -\frac{2x}{\pi^{\frac{n}{2}}(4t)^{\frac{n+2}{2}}}\phi(x).$$

Daí, $\partial^\alpha \phi_t(x) = C(t) x^\alpha \phi_t(x)$*, para todo multi-índice* α*.*

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha \phi_t\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |C(t)x^\alpha \phi_t(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= |C(t)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha}(4\pi t)^{-n} e^{-\frac{|x|^4}{16t}}\, dx\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Então, $\phi \in X^k$*.*

Exemplo 1.4.2. *Fixado* $k > \frac{n}{2}$*, sejam* $\varphi \in H^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $z \in \mathbb{C}$ *uma constante. Então,* $\phi := \varphi + z \in X^k(\mathbb{R}^n)$*. Em particular,* $H^k(\mathbb{R}^n) \subset X^k(\mathbb{R}^n)$*, sempre que* $k > \frac{n}{2}$*.*

Exemplo 1.4.3. *Para* $n = 1$ *as funções tangente hiperbólica e arco tangente estão em* $X^k(\mathbb{R}^n)$*, qualquer que seja* $k \in \mathbb{N}$*.*

Naturalmente, somos levados a algumas comparações com as propriedades conhecidas dos espaços métricos mais usuais. Por exemplo, se duas funções estão em C^k, o produto de ambas ainda está em C^k. Para os espaços de Zhidkov, a resposta à mesma pergunta é também positiva e é obtida como consequência da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg (Teorema C.0.6) e da fórmula de Leibniz:

Proposição 1.4.1. *O espaço* $X^k(\mathbb{R}^n)$ *é uma álgebra, o que significa que, para todas* $f, g \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *existe uma constante* C *tal que*

$$\|fg\|_{X^k} \leq C\,\|f\|_{X^k}\,\|g\|_{X^k}, \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Demonstração. Evidentemente, $\|fg\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^\infty}$. Por outro lado, dado um multi-índice α temos, da fórmula de Leibniz,

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g.$$

A desigualdade triangular nos permite escrever

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha(fg)\|_{L^2} &\leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g\right\|_{L^2} \\
&\leq \left\|f\partial^\beta g\right\|_{L^2} + \left\|\left(\partial^\beta f\right) g\right\|_{L^2} + \\
&\quad + \sum_{0\neq\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g\right\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\left\|f\partial^\beta g\right\|_{L^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x)\partial^\beta g(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left|\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\right| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\partial^\beta g(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \left\|\partial^\beta g\right\|_{L^2} \\
&\leq \|f\|_{X^k} \|g\|_{X^k}.
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Analogamente,

$$\left\|\left(\partial^\beta f\right) g\right\|_{L^2} \leq \left\|\partial^\beta f\right\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{X^k} \|g\|_{X^k}. \tag{1.20}$$

Nos resta, portanto, mostrar que

$$\sum_{0\neq\beta<\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \left\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g\right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{X^k} \|g\|_{X^k}.$$

Da Desigualdade de Young, temos

$$\left\|\partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} g\right\|_{L^2} \leq \left\|\partial^\beta f\right\|_{L^p} \left\|\partial^{\alpha-\beta} g\right\|_{L^{\tilde{p}}}$$

desde que $\frac{1}{p} + \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{2}$ (ou seja, $\tilde{p} = \frac{2p}{p-2}$ para $p \neq 2$). Aqui aparece uma dificuldade, não temos nenhuma hipótese a respeito da regularidade das funções do espaço de Zhidkov X^k quando vistas em L^∞. Além disso, uma imersão em um espaço de

Sobolev adequado nos levaria a formular uma hipótese ainda mais restritiva a respeito de k (a saber, $k > 2n$ ao invés de $k > \frac{n}{2}$).

Por outro lado, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg nos força a encontrar $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$ de modo a obter

$$\|\partial^\alpha f\|_{L^p} \leq C \sum_{|\gamma| \leq m < |\alpha| < k} \|\partial^\gamma f\|_{L^q}^\theta \, \|f\|_{L^r}^{1-\theta}, \tag{1.21}$$

onde $j = |\beta|,\ |\gamma| = m \leq \alpha,\ C = C(j, m, p, q, r)$ e

$$\frac{1}{p} - \frac{j}{n} = \theta\left(\frac{1}{q} - \frac{m}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{r}. \tag{1.22}$$

Tomando $q = 2$ e $r = \infty$ temos $\theta = \frac{2(n-jp)}{p(n-2m)}$. Assumindo que $\frac{j}{m} \leq \theta \leq 1$ e que $n > 2m$ segue

$$\begin{cases} 2n - 2jp & \leq p(n-2m), \\ n(2m - jp) & \leq mp(n-2m), \end{cases}$$

fazendo $m = |\gamma| = |\beta| + 1 = j + 1$,

$$\begin{cases} n(2-P) & \leq 2jp - 2(j+1)p & = -2p, \\ p & \leq \frac{2j+2}{j} & = 2 + \frac{2}{j}, \end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{cases} & n & \geq \frac{2}{1-\frac{2}{p}}, \\ 2 & \leq p & \leq 2 + \frac{2}{j}. \end{cases}$$

Uma conclusão semelhante é obtida ao considerar $n < 2m$; portanto, é possível obter θ satisfazendo a desigualdade (1.22). Substituindo (1.22) em (1.18), com o auxílio de (1.19) e (1.20) e procedendo da mesma forma a fim de obter uma estimativa semelhante para $\left\|\partial^{\alpha-\beta} g\right\|_{L^{\tilde{p}}}$, concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.4.2. $X^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ *é denso sobre* $X^k(\mathbb{R}^n)$, *para todo* $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Sejam $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ e $\phi_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$.

Definimos

$$\varphi_t(x) = \varphi * \phi_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\phi_t(y)dy.$$

Logo, $|\varphi_t(x)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_t(y)dy = \|\varphi\|_{L^\infty}$.

Portanto, $\varphi_t \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, temos

$$\partial_x^\alpha(\varphi * \phi_t(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_x^\alpha \varphi(x-y)\phi_t(y)dy = [(\partial_x^\alpha \varphi) * \phi_t](x). \tag{1.23}$$

Assim, se $1 \leq |\alpha| \leq k$,

$$\|\partial_x^\alpha(\varphi * \phi_t)\|_{L^2} = \|(\partial_x^\alpha \varphi) * \phi_t\|_{L^2} \leq \|\partial_x^\alpha \varphi\|_{L^2} \|\phi_t\|_{L^1} = \|\partial_x^\alpha \varphi\|_{L^2}.$$

No caso $|\alpha| = k+1$ temos

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \circ \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial_{x_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{\alpha_{i-1}}}{\partial_{x_{i-1}}} \circ \frac{\partial^{\alpha_i - 1}}{\partial_{x_i}} \circ \cdots \circ \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial_{x_n}} \right) = \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \circ \partial^\beta.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha(\varphi * \phi_t)\|_{L^2} &= \left\| \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \left(\partial^\beta (\varphi * \phi_t) \right) \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \left(\partial^\beta \varphi * \phi_t \right) \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \left(\phi_t * \partial^\beta \varphi \right) \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \phi_t * \partial^\beta \varphi \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \frac{\partial}{\partial_{x_i}} \phi_t \right\|_{L^1} \left\| \partial^\beta \varphi \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \partial^\beta \varphi \right\|_{L^2}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Então, $\varphi_t,\ \partial^\alpha \varphi_t \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq k+1$, o que significa que $\varphi_t \in X^{k+1}(\mathbb{R}^n)$, qualquer que seja $t > 0$.

Agora avaliemos $\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t - \varphi\|_{X^k}$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e a Desigualdade de Minkowski mostra-se que $\|\varphi_t - \varphi\|_{L^p} \to 0$, para todo $1 \le p \le \infty$ (uma demonstração para o caso $n = 1$ pode ser encontrada na página 20 de [Fe]). Com o auxílio da desigualdade (1.23) mostra-se que vale $\|\partial^\alpha(\varphi_t - \varphi)\|_{L^2} \to 0$. Portanto, dado qualquer $\epsilon > 0$, é possível encontrar T suficientemente grande tal que, para todo $t > T$, $\|\varphi_t - \varphi\|_{L^\infty} < \frac{\epsilon}{2}$ e $\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha(\varphi_t - \varphi)\|_{L^2} < \dfrac{\epsilon}{2}$. Isto garante o nosso resultado. $\square$

Proposição 1.4.3. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, *e seja* $p \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\begin{cases} p > n, & \textit{se } n \textit{ é par}, \\ p = 2n, & \textit{se } n \textit{ é ímpar}. \end{cases}$$

Então, $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $u \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *e, além disso, existe uma constante* $C > 0$ *tal que:*

$$|u(x) - u(y)| \le C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}, \tag{1.25}$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Suponha n par. Temos que $p > n$ e $k - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} > \frac{n}{2} - \frac{n}{p} = s$, portanto $H^{k-1} \subset H^s$ e ainda, do Teorema 1.3.3 segue, para $u \in X^k(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|\nabla u\|_{H^{k-1}(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|u\|_{X^k(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.26}$$

Analogamente, é possível mostrar a mesma desigualdade quando n é ímpar.

Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e sejam $r > 0$ tal que $Q = [-r, r]^n$ é um cubo contendo K. Pelo Teorema de Morrey (ver página 166 de [B]), é possível encontrar uma constante $C > 0$, que depende somente de n e p, tal que, quaisquer que sejam $x, y \in K, u \in H^k_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$|u(x) - u(y)| \le C|x-y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}. \tag{1.27}$$

De (1.26) e (1.27) juntamente com o fato $X^k(\mathbb{R}^n) \subset H^k_{loc}(\mathbb{R}^n)$ fica estabelecido o resultado desejado. $\square$

Proposição 1.4.4. *Fixados* $n, k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$, $\beta > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $t > 0$, *definamos* $g : (\beta, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ *do seguinte modo:*

$$g(r) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(x + 2\sqrt{2}tr\nu) d\nu.$$

Então, $g \in X^k((\beta, \infty))$ *e, para todo* $j \in \{1, ..., k\}$,

$$g^{(j)} \in L^2((\beta, \infty), r^{n-1} dr) \tag{1.28}$$

com

$$\|g^{(j)}\|_{L^2((\beta,\infty), r^{n-1}dr)} \leq (2\sqrt{2}t)^{j-\frac{n}{2}} |\mathbb{S}^{n-1}|^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{X^k}.$$

Demonstração. Seja $r \in (\beta, \infty)$, temos

$$|g(r)| \leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\varphi(x + 2\sqrt{2}tr\nu| d\nu \tag{1.29}$$

$$\leq \|\varphi\|_{X^k} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\nu \tag{1.30}$$

$$\leq |\mathbb{S}^{n-1}| \|\varphi\|_{X^k}, \tag{1.31}$$

portanto, $g \in L^\infty(\beta, \infty)$.

Seja agora $\epsilon > 0$. Como φ é uniformemente contínua, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|y - z| < \delta$ implica

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \frac{\epsilon}{|\mathbb{S}^{n-1}|}. \tag{1.32}$$

Tomando $r_1, r_2 \in (\beta, \infty)$ tais que $|r_1 - r_2| < \frac{\delta}{2\sqrt{t}}$, como

$$|(x + 2\sqrt{t}r_1\nu) - (x + 2\sqrt{t}r_2\nu)| = 2\sqrt{t}|r_1 - r_2| < \delta,$$

segue que

$$|\varphi(x + 2\sqrt{t}r_1\nu) - \varphi(x + 2\sqrt{t}r_2\nu)| < \frac{\epsilon}{|\mathbb{S}^{n-1}|}.$$

Daí,

$$|g(r_1) - g(r_2)| < \frac{\epsilon}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\nu = \epsilon$$

e, portanto, g é uniformemente contínua.

Seja agora $j \in \{1,...,k\}$. Temos

$$
\begin{aligned}
&\int_\beta^\infty |g^{(j)}(r)|^2 r^{n-1}\,dr = \\
&\quad = \int_\beta^\infty \left| \partial_r^j \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \varphi(x+2\sqrt{t}r\nu)\,d\nu \right|^2 r^{n-1}\,dr \\
&\quad \leq \int_\beta^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |D^j(\varphi(x+2\sqrt{t}r\nu))(\nu,\nu,...,\nu)|^2 (2\sqrt{t})^{2j} r^{n-1}\,d\nu dr \\
&\quad \leq (2\sqrt{t})^{2j} \int_{2\sqrt{t}\beta}^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |D^j(\varphi(x+2R\nu))(\nu,\nu,...,\nu)|^2 \frac{R^{n-1}\,d\nu dr}{(2\sqrt{t})^n} \\
&\quad \leq (2\sqrt{2}t)^{2j-n} |\mathbb{S}^{n-1}| \|\varphi\|_{X^k(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}
\tag{1.33}
$$

Portanto, $|\nabla g| \in H^{k-1}(\beta,\infty)$.

$\square$

Capítulo 2

O Grupo de Schrödinger em Espaços de Zhidkov

2.1 Família Contínua de Operadores de Schrödinger sobre X^k

Consideremos o problema de Cauchy associado à equação linear de Schrödinger

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u &= 0, \\ u(\cdot,0) &= \varphi(\cdot). \end{cases} \tag{2.1}$$

Quando o dado inicial φ pertence ao espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ sabe-se que $S(t)\varphi$, definido por

$$S(t)\varphi(x) = \mathscr{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\mathscr{F}(\varphi)(\xi)\right), \tag{2.2}$$

é um grupo uniformemente contínuo de operadores em H^s, especificamente:

(i) $S(0)\varphi = \varphi$, ou seja, $S(0) = I$;

(ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$;

(iii) $S(-t) = [S(t)]^{-1}$;

(iv) $\lim\limits_{t \to 0} \|S(t) - I\| = 0$.

Nosso objetivo fundamental nesta seção é descrever propriedades de $S(t)$ quando o dado inicial pertence a X^k, e não necessariamente a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Trabalhando sem muita formalidade,

$$\begin{aligned}
S(t)\varphi(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x\cdot\xi)}e^{-it|\xi|^2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y\cdot\xi)}\varphi(y)dyd\xi\\
&= (2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-it|\xi|^2}e^{-i2\sqrt{t}(z\cdot\xi)}\varphi(x+2\sqrt{t}z)(4t)^{\frac{n}{2}}dzd\xi\\
&= \pi^{-n}t^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i[|\sqrt{t}\xi|^2+2\sqrt{t}(z\cdot\xi)+|z|^2]}e^{i|z|^2}\varphi(x+2\sqrt{t}z)dzd\xi\\
&= \pi^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i|\sqrt{t}\xi+z|^2}t^{\frac{n}{2}}d\xi\right]e^{i|z|^2}\varphi(x+2\sqrt{t}z)dz\\
&= \pi^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i|w|^2}dw\right]e^{i|z|^2}\varphi(x+2\sqrt{t}z)dz.
\end{aligned}$$

Como as integrais acima não estão definidas em todo o $\mathbb{R}^n$, é necessário introduzir uma pequena perturbação na exponencial complexa; como

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(-i+\epsilon)|w|^2}dw = \pi^{\frac{n}{2}}e^{-in\frac{\pi}{4}},$$

adotaremos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Sejam* $n\in\mathbb{N},\ k>\frac{n}{2}$ *e* $\varphi\in X^k(\mathbb{R}^n)$. *Sejam* $t\in\mathbb{R}$ *e* $x\in\mathbb{R}^n$, *definimos a família de operadores* $\{S(t)\}$, *pondo*

$$S(t)\varphi(x)=\begin{cases} e^{-in\frac{\pi}{4}}\pi^{-\frac{n}{2}}\lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x+2\sqrt{t}z)dz, & t\geq 0\\ e^{in\frac{\pi}{4}}\pi^{-\frac{n}{2}}\lim\limits_{\epsilon\to 0}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{(-i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x+2\sqrt{-t}z)dz, & t<0.\end{cases} \tag{2.3}$$

A primeira pergunta a respeito da família de operadores $\{S(t)\}$, obviamente, é se ela está bem definida. A resposta para isto é sim, e é obtida como consequência do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Seguiremos os passos dados em [Ga] apenas para o caso $t\geq 0$; o caso $t<0$ é análogo.

Lema 2.1.1. *Se* $\varphi\in X^k$ *então,* $S(t)\varphi\in X^k$.

Demonstração. Considere a função radial $\psi\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, não decrescente ao longo de toda semi-reta à partir da origem, tal que

$$\psi(x)=\begin{cases}0, & \text{se } x\in\overline{B_1(0)},\\ 1, & \text{se } x\in\mathbb{R}^n\backslash\overline{B_1(0)}.\end{cases}$$

Para todo $\beta>0$, usaremos a notação adicional $\psi_\beta(\cdot)$ para representar $\psi\left(\frac{\cdot}{\beta}\right)$. Por vezes abusaremos da notação representando $\psi_\beta(|\cdot|)$ por $\psi_\beta(\cdot)$.

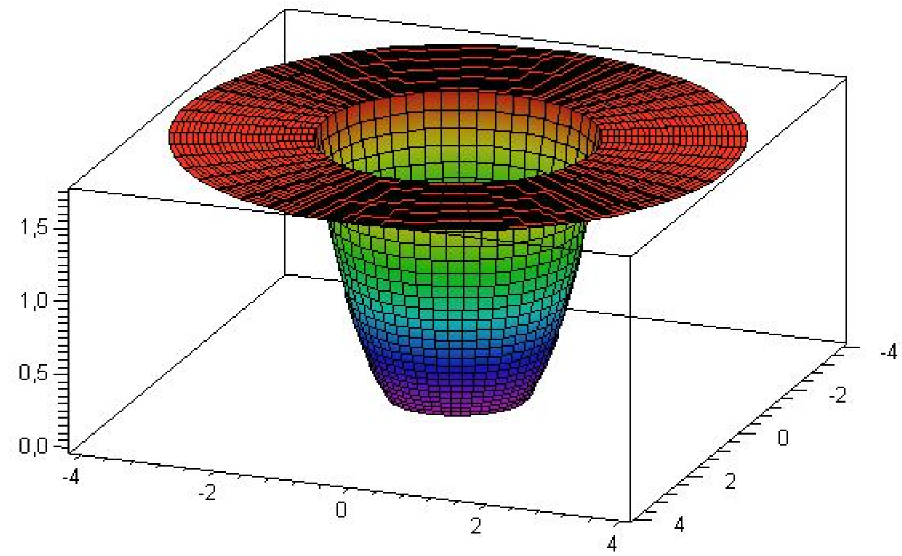

Figura 2.1: Gráfico da função ψ para n=2

A função ψ é chamada função "bump".

Assumamos que $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. O limite dado em (2.3) está bem definido. De fato, sejam fixados $t, \beta, \epsilon > 0$, podemos decompor a integral em (2.3) em duas partes:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2} \varphi(x + 2\sqrt{2}tz)\,dz \quad = I_1 + I_2,$$

onde:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2} (1 - \psi_\beta(z))\varphi(x + 2\sqrt{2}tz)\,dz$$

e

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2} \psi_\beta(z)\varphi(x + 2\sqrt{2}tz)\,dz.$$

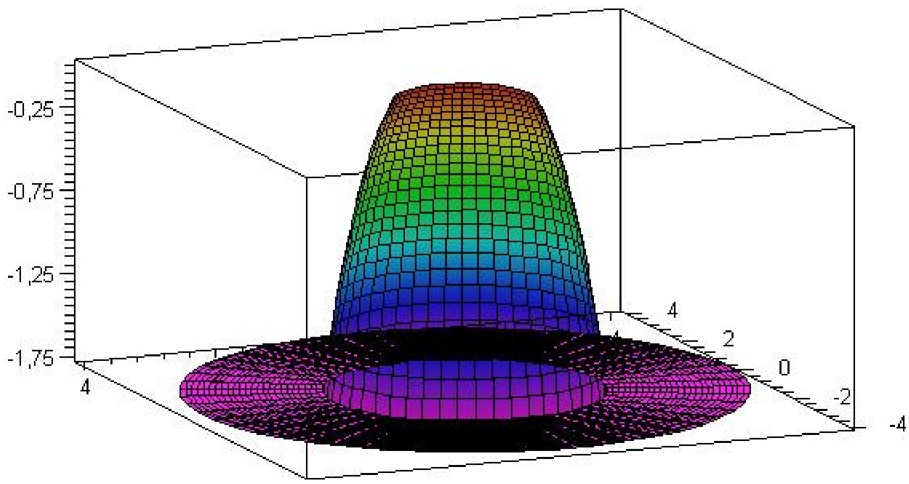

Figura 2.2: Gráfico da função 1-ψ para n=2

Consideremos primeiramente a integral I_1. Como,

$$\left|e^{(i-\epsilon)|z|^2}\left(1-\psi_\beta(z)\right)\varphi(x+\sqrt{t}z)\right| \leq \left|1-\psi_\beta(z)\right|\|\varphi\|_{L^\infty} = \begin{cases} \|\varphi\|_{L^\infty}, & \text{se } |z|<2\beta, \\ 0, & \text{se } |z|\geq 2\beta. \end{cases} \tag{2.4}$$

Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o limite de I_1 quando ϵ tende a zero existe e,

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\left(1-\psi_\beta(z)\right)\varphi(x+\sqrt{t}z)dz\right| \leq \left|B_{2\beta}(0)\right|\|\varphi\|_{L^\infty} = (2\beta)\,|B_1(0)|\,\|\varphi\|_{L^\infty}. \tag{2.5}$$

Para a integral I_2, usamos a mudança para coordenadas polares $z=r\upsilon$, onde $r\in\mathbb{R}$ e $\upsilon\in\mathbb{S}^{n-1}$, e a notação da Proposição 1.4.4 obtendo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\psi_\beta(z)\varphi(x+\sqrt{t}z)dz &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{(i-\epsilon)|r\upsilon|^2}\psi_\beta(r)\varphi(x+\sqrt{t}r\upsilon)d\upsilon dr \\
&= \int_0^\infty e^{(i-\epsilon)|r|^2}\psi_\beta(r)r^{n-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\varphi(x+\sqrt{t}r\upsilon)d\upsilon\right)dr \\
&= \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2}\psi_\beta(r)r^{n-1}g(r)dr \\
&= \int_\beta^\infty\left[\left(\frac{1}{2(i-\epsilon)r}\frac{d}{dr}\right)^k\left(e^{(i-\epsilon)r^2}\right)\right]\psi_\beta(r)r^{n-1}g(r)dr \\
&= \left(\frac{-1}{2(i-\epsilon)}\right)^k\int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^k\left[\psi_\beta(r)r^{n-1}g(r)\right]dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\tfrac{-1}{2(i-\epsilon)}\right)^k \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} \frac{1}{r^{2k-n+1-j}} \frac{d^j}{dr} \left[\psi_\beta(r) g(r)\right] dr \\
&= \left(\tfrac{-1}{2(i-\epsilon)}\right)^k \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} \left[\sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} g^{(\ell)}(r) \psi_\beta^{(j-\ell)}(r)\right] r^{n-1} dr \\
&= \left(\tfrac{-1}{2(i-\epsilon)}\right)^k \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g^{(\ell)}(r) \psi_\beta^{(j-\ell)}(r) r^{n-1} dr. \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Novamente usamos o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, agora em cada uma das parcelas de (2.6).

Para $\ell = 0$ e $j \in \{0, ..., k\}$, temos da Proposição 1.4.4:

$$\left| e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g(r) \psi_\beta^{(j)}(r) r^{n-1} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|}{r^{2k-n+1}},$$

quando j=0.

Já no caso em que $j \in \{1, ..., k\}$ e $r \leq 2\beta$,

$$\left| e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g(r) \psi_\beta^{(j)}(r) r^{n-1} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|}{r^{2k-n+1}} \left(\frac{r}{\beta}\right)^j \left\|\psi^{(j)}\right\|_{L^\infty}.$$

Finalmente, quando $j \in \{1, ..., k\}$ e $r > 2\beta$ temos:

$$\left| e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g(r) \psi_\beta^{(j)}(r) r^{n-1} \right| = 0.$$

Portanto, podemos escrever,

$$\left| e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g(r) \psi_\beta^{(j)}(r) r^{n-1} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|}{r^{2k-n+1}} 2^j \left\|\psi^{(j)}\right\|_{L^\infty}.$$

Como $k > \frac{n}{2}$, $2k - n + 1 > 1$ e $\displaystyle\int_\beta^\infty \frac{dr}{r^{2k-n+1}} = \frac{\beta^{n-2k}}{2k-n} < \infty$, segue

$$\left| \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g(r) \psi_\beta^{(j)}(r) r^{n-1} dr \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|}{(2k-n)\beta^{2k-n}} 2^j \left\|\psi^{(j)}\right\|_{L^\infty}. \quad (2.7)$$

Já no caso $\ell \geq 1, j \in \ell, ..., k$, observemos que

$$\left|\psi_\beta^{(j-\ell)}(r)\right| = \left|\psi^{(j-\ell)}(\frac{r}{\beta})\right| \leq \frac{1}{\beta^{j-\ell}} \|\psi\|_{L^\infty},$$

e, portanto,

$$\left|e^{(i-\epsilon)r^2}\frac{1}{r^{2k-j}}g^{(\ell)}(r)\psi_\beta^{(j-\ell)}(r)r^{n-1}\right| \leq \frac{1}{\beta^{2k-j}}\left\|\psi_\beta^{(j-\ell)}\right\|_{L^\infty}\frac{1}{r^{2k-j}}\left|g^{(\ell)}(r)\right|r^{n-1}.$$

Como $2k > n$ e $k > j$ temos $2k-j > \frac{n}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_\beta^\infty \left(\frac{1}{r^{2k-j}}\right)^2 r^{n-1}dr &= \lim_{B\to\infty}\int_\beta^B \left(\frac{1}{r^{2(2k-j)-(n-1)}}\right)dr \\
&= \lim_{B\to\infty}\left[\frac{B^{2j-4k+n}}{2j-4k+n} - \frac{\beta^{2j-4k+n}}{2j-4k+n}\right] \\
&= -\frac{\beta^{2j-4k+n}}{2j-4k+n} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Então, a aplicação $r \longmapsto \frac{1}{r^{2k-j}}$ está em $L^2((\beta,\infty), r^{n-1}dr)$.

Lançando mão mais uma vez da Proposição 1.4.4 e da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue:

$$\begin{aligned}
\int_\beta^\infty \frac{1}{r^{2k-j}}\left|g^{(\ell)}(r)\right|r^{n-1}dr &\leq \left(\int_\beta^\infty \frac{1}{r^{2(2k-j)}}r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\beta^\infty \left|g^{(\ell)}(r)\right|r^{n-1}dr\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{4k-2j-n}\beta^{2k-j-\frac{n}{2}}}(2\sqrt{t})^{\ell-\frac{n}{2}}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{X^k}.
\end{aligned}$$

O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante:

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2}\frac{1}{r^{2k-j}}g^{(\ell)}(r)\psi^{(j-\ell)}(r)r^{n-1}dr\right| \\
&\leq \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{4k-2j-n}\beta^{2k-j-\frac{n}{2}}}\left|\mathbb{S}^{n-1}\right|^{\frac{1}{2}}\left\|\psi^{(j-\ell)}\right\|_{L^\infty}\|\varphi\|_{X^k}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Observemos que, para todo $j \in \{1,...,k\}$, é possível encontrar uma constante C tal que

$$\left(2\sqrt{t}\right)^{j-\frac{n}{2}} \leq C\left(t^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}} + t^{\frac{k-\frac{n}{2}}{2}}\right). \tag{2.9}$$

Isto é evidentemente verdadeiro para $t = 0$. Para todos $t > 0$, e $j \in \{1,...,k\}$, $\left(2\sqrt{t}\right)^j = 2^j\left(\sqrt{t}\right)^j$. Assim, se $t \geq 1$ é possível encontrar $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\left(2\sqrt{t}\right)^j \leq C_1\left(\sqrt{t}\right)^k$, e se $0 < t < 1$ é possível encontrar $C_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\left(2\sqrt{t}\right)^j \leq C_2\sqrt{t}$. De qualquer maneira, $\left(2\sqrt{t}\right)^j \leq C\left(\sqrt{t} + \left(\sqrt{t}\right)^k\right)$. Multiplicando ambos os membros desta desigualdade por $\left(\sqrt{t}\right)^{-\frac{n}{2}}$ obtém-se (2.9).

Fixando agora $\beta = 1$ em (2.8), com o auxílio de (2.9), obtemos para todo $t > 0$,

$$\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq C\left(1 + t^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}} + t^{\frac{k-\frac{n}{2}}{2}}\right)\|\varphi\|_{X^k}. \tag{2.10}$$

Isto é, $S(t)\varphi \in L^\infty$.

Mostremos agora que, para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq k$, a derivada multi-índice $\partial^\alpha S(t)\varphi \in L^2$. De $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ e $|\alpha| \leq k$, segue $\partial^\alpha\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $S(t)\partial^\alpha\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Como os operadores $S(t)$ e ∂^α comutam, temos

$$\|\partial^\alpha S(t)\varphi\|_{L^2} = \|S(t)\partial^\alpha\varphi\|_{L^2}.$$

$\square$

2.2 A continuidade da família de operadores $\{S(t)\}$

Nosso objetivo agora é mostrar que se $t \to 0$ então $S(t)\varphi \to \varphi$ em X^k. Primeiramente, verifiquemos a convergência em L^∞. Para tanto, damos a seguinte definição:

Definição 2.2.1. *Sejam $\ell \in \{0,...,k\}$ e $h \in L^2((\beta,\infty), r^{n-1}dr)$, definimos*

$$T_h^\ell := \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} h(r) g^{(\ell)}(r) r^{n-1} dr \tag{2.11}$$

e diremos que tal integral é "do tipo $T^{(\ell)}$". No caso em que h pode ser escrita sob a forma

$$h(r) = \frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q} \text{ com } 2q - n > 0, \tag{2.12}$$

diremos que a ordem de T_h^ℓ em β é $p + q - \frac{n}{2}$. Se $h = \sum_{i=1}^{n} c_i h_i$, onde cada h_i é da forma descrita em (2.12)*, definimos a ordem de h em β como a ordem mais baixa dentre as ordens dos monômios não nulos do somatório acima (observe que a ordem de h depende de sua decomposição).*

Voltemos nossa atenção novamente à integral I_2. Através das igualdades (2.6) obtivemos

$$I_2 = \left(\frac{-1}{2(i-\epsilon)}\right)^k \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} \sum_{\ell=0}^{j} \binom{j}{\ell} \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} g^{(\ell)}(r) \psi_\beta^{(j-\ell)}(r) r^{n-1} dr.$$

Isto é, I_2, de certo modo, representa uma combinação linear de termos do tipo T^ℓ. A fim de estimar uma ordem para a combinação dos termos em (2.6) podemos fazer uma nova decomposição para I_2 em termos do tipo T^ℓ de acordo com o seguinte resultado, que nos será útil no objetivo desta seção.

Lema 2.2.1. *Sejam $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2n+1}\right)$ e $m > 0$ tais que $m \geq \frac{n-2}{2\alpha}$, então a integral I_2 pode ser reescrita como combinação linear de termos do tipo T^ℓ com $\ell \in \{0, ..., k\}$, de modo que para $\ell \neq 0$ e $\ell \neq k$, a ordem dos termos do tipo T^ℓ na combinação linear é maior do que ou igual a m.*

Demonstração. Sejam $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $2q - p > 0$. Consideremos a aplicação h dada por $h(r) = \frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q}$. Fixado $\ell \in \{1, ..., k\}$, usamos integração por partes em (2.11) obtendo:

$$
\begin{aligned}
T_h^\ell &= \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} h(r) g^{(\ell)}(r) r^{n-1} dr \\
&= \int_\beta^\infty \left[\left(\frac{1}{2(i-\epsilon)r} \frac{d}{dr} \right)^{k-\ell} e^{(i-\epsilon)r^2} \right] h(r) g^{(\ell)}(r) r^{n-1} dr \\
&= \left(\frac{-1}{2(i-\epsilon)} \right)^k \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k h(r) g^{(\ell)}(r) \right] r^{n-1} dr \\
&= \left(\frac{-1}{2(i-\epsilon)} \right)^k \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} \frac{1}{r^{2k-n+1-j}} \frac{d^j}{dr} \left(\frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q} g^{(\ell)}(r) \right) dr.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
T_h^\ell = \; & \left(\tfrac{-1}{2(i-\epsilon)} \right)^k \sum_{j=0}^{k} a_{k,j} \times \\
& \times \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{1}{r^{2k-j}} \left(\sum_{c=0}^{j} \binom{j}{c} \left(\frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q} \right)^{(j-c)} g^{(\ell+c)}(r) \right) r^{n-1} dr,
\end{aligned}
$$

o que nos fornece após a troca de ordem do sinal de integração com o somatório e aplicações sucessivas da regra de derivação de quociente de funções,

$$
T_h^\ell = \left(\tfrac{-1}{2(i-\epsilon)} \right)^{k-\ell} \sum_{j=0}^{k-\ell} a_{k-\ell,j} \sum_{c=0}^{j} \binom{j}{c} \sum_{b=0}^{j-c} \binom{j-c}{b} (-q)(-q-1)(-q-2) \times \cdots \times
$$

$$
[-q-(j-c-b-1)] \int_\beta^\infty e^{(i-\epsilon)r^2} \frac{\psi_\beta^{(p+b)}(r) g^{(\ell+c)}(r)}{r^{2(k-\ell)+q-c-b}} r^{n-1} dr.
$$

Como $k \geq 1$, $2q - n > 0$ e $2[2(k-\ell)+q-c-b]-n > 2(k-\ell)+2q-n$, podemos escrever T_h^ℓ como combinação linear de termos do tipo $T^{(\ell)}, T^{(\ell+1)}, \cdots, T^{(k)}$, cada um deles correspondendo a um valor de c. Em particular, os termos do tipo $T^{(\ell)}$ correspondem a $c = 0$ e sua ordem na soma acima é dada por

$$p + 2(k-\ell) + q - \frac{n}{2} = \underbrace{p + q - \frac{n}{2}}_{\text{ordem de } T_h^\ell} + 2\underbrace{(k-\ell)}_{\geq 1}.$$

Concluí-se daí que, após uma modificação como acima, a ordem dos termos do tipo $T^{(\ell)}$ recebe um incremento igual ou superior a 2.

Considere agora, para $\ell \in \{0, \cdots, k-1\}$, a afirmação: a integral I_2 pode ser reescrita como soma de termos do tipo $T^{(\gamma)}$, onde $0 \leq \gamma \leq k$; de modo que para $1 \leq \gamma \leq \ell$, os termos do tipo $T^{(\gamma)}$ na soma tem ordem $\geq m$. Representaremos esta afirmação por H_ℓ.

Como $I_2 = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{k} T_{h^{(\ell)}}^\ell(.)$, com $h^{(\ell)}(r) = \displaystyle\sum_{j=\ell}^{k} \binom{j}{\ell} \frac{\psi_\beta^{(j-\ell)}(r)}{r^{2k-j}}$, de $2(2k-j)-n \leq 2k-n > 0$, e da expressão já obtida anteriomente para I_2 segue que H_0 é válida. Seja $\ell \in \{1, \cdots, k-1\}$ e suponha agora que a afirmação seja válida para $H_{\ell-1}$, queremos mostrar que ela também é válida para H_ℓ.

De fato, temos pela hipótese de indução que I_2 pode ser reescrita sob a forma $I_2 = \displaystyle\sum_{\gamma=0}^{k} \lambda_\gamma T_{h_\gamma}^\gamma$, onde h_γ é uma combinação linear de termos do tipo $\frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q}$, de modo que para $\gamma \in \{1, \cdots, \ell-1\}$, a ordem de $T_{h_\gamma}^\gamma$ é no mínimo m. Procedendo novamente como em (2.13) obtemos uma nova expressão para I_2 onde os termos do tipo $T^{(\gamma)}$, com $\gamma \leq \ell - 1$, permanecem os mesmos, e a ordem dos termos do tipo $T^{(\ell)}$ recebe um incremento de $2(k-\ell) \geq 2$. Repetindo o processo um número finito de vezes, observa-se que os termos do tipo $T^{(\ell)}$ tem ordem maior ou igual que m e, portanto a afirmação H_ℓ é verdadeira.

Em tempo, observermos que se $h(r) = \frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q}$, $\ell \in \{1, ..., k\}$ e $2q - n > 0$, então

$$\left|T_h^\ell\right| \leq \int_\beta^\infty \left|\frac{\psi_\beta^{(p)}(r)}{r^q}\right| \left|g^{(\ell)}(r)\right| r^{n-1} dr \tag{2.14}$$

$$\leq \frac{\left\|\psi^{(p)}\right\|_{L^\infty}}{\beta^q} \int_\beta^\infty \frac{1}{r^q} \left|g^{(\ell)}(r)\right| r^{n-1} dr \tag{2.15}$$

$$\leq \frac{\left\|\psi^{(p)}\right\|_{L^\infty}}{\sqrt{2q-n}} \|\varphi\|_{X^k} \left|\mathbb{S}^{n-1}\right|^{\frac{1}{2}} \frac{(2\sqrt{t})^{\ell-\frac{n}{2}}}{\beta^{p+q-\frac{n}{2}}}, \tag{2.16}$$

aqui usamos mais uma vez a desigualdade de Cauchy-Schwartz e a Proposição 1.4.4. Quando $\beta > 1$ e a ordem de T_h^ℓ é maior ou igual que m, então

$$\left|T_h^\ell\right| \leq C\frac{(2\sqrt{t})^{\ell-\frac{n}{2}}}{\beta^m}. \tag{2.17}$$

Como $\ell \geq 1$ e $m \geq \frac{n-2}{2\alpha}$ temos $\ell - \frac{n}{2} + \alpha m \geq \ell - \frac{n}{2} + \frac{n-2}{2} = \ell - 1 \geq 0$. Fazendo $\beta = \frac{\widetilde{\beta}}{(2\sqrt{t})^\alpha}$, onde $t \leq 1$, podemos escolher $\widetilde{\beta} > 2^\alpha$ suficientemente grande tal que para todo $t \leq 1$

$$\frac{(2\sqrt{t})^{\ell-\frac{n}{2}+\alpha m}}{\widetilde{\beta}^m} < \delta, \ell \in \{1,...,k\}$$

e

$$\frac{\left|\mathbb{S}^{n-1}\right| \|\varphi\|_{L^\infty} 2^j \left\|\psi^{(j)}\right\|_{L^\infty}}{(2k-n)\widetilde{\beta}^{2k-n}}(2\sqrt{t})^{\alpha(2k-n)} \leq \delta, j \in \{0,...,k\}.$$

O Lema 2.2.1 juntamente com as desigualdades (2.7) e (2.16) implicam na existência de uma constante $C > 0$ (independente de δ) tal que, para todo $\epsilon > 0$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\psi_{\widetilde{\beta}/(2\sqrt{t})^\alpha}(z)\varphi(x+2\sqrt{t}z)dz\right| \leq C\delta. \tag{2.18}$$

Aplicando a Proposição 1.4.3, na página 23, com $p = 2n$ segue

$$\left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}(1-\psi_\beta(z))\varphi(x+2\sqrt{t}z)dz - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}(1-\psi_\beta(z))\varphi(x)dz\right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathbb{R}^n}(1-\psi_\beta(z))\left|\varphi(x+2\sqrt{t}z)-\varphi(x)\right|dz\\
&\leq \int_{|z|<2\beta} C(2\sqrt{t}2\beta)^{\frac{1}{2}}\,||\nabla\varphi||_{L^p}\,dz\\
&\leq C(2\sqrt{t})^{\frac{1}{2}}\beta^{n+\frac{1}{2}} = C(2\sqrt{t})^{\frac{1}{2}-\alpha(n+\frac{1}{2})}\widetilde{\beta}.
\end{aligned}$$

Pela nossa escolha de α, $\frac{1}{2}-\alpha\left(n-\frac{1}{2}\right) > 0$. Assim, podemos tomar $t_0 < 1$ tal que para todo $t \leq t_0$,

$$C(2\sqrt{t})^{\frac{1}{2}-\alpha\left(n-\frac{1}{2}\right)}\widetilde{\beta}^{n+\frac{1}{2}} \leq \delta. \tag{2.19}$$

Portanto, para $t \leq t_0$,

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x+2\sqrt{t}z)\,dz - \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x)\,dz\right| \\
&\leq \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\psi_\beta(z)\varphi(x+2\sqrt{t}z)\,dz\right| + \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\psi_\beta(z)\varphi(x)\,dz\right| + \\
&\quad + \left|\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}(1-\psi_\beta(z))[\varphi(x+2\sqrt{t}z)-\varphi(x)]\,dz\right| \\
&\qquad \leq C\delta + C\delta + \delta.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Como

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\,dz = \pi^{\frac{n}{2}} e^{in\frac{\pi}{4}},$$

das desigualdades (2.18) a (2.20) decorre que $u(\cdot,t) \to \varphi(\cdot)$ em L^∞ quando t tende a 0 por valores positivos. Analogamente, é possível mostrar o mesmo para $t < 0$, e portanto, $S(t)\varphi$ é contínua em $t = 0$. Como veremos na próxima seção, $\{S(t)\}$ é um grupo, e a propriedade terá sua validade confirmada para para todo $t \in \mathbb{R}$.

Para finalizar, algumas considerações sobre o caso geral: $k > \frac{n}{2}$ (até o momento, só consideramos o caso $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$). Seja α um multi-índice, $1 \leq |\alpha| \leq k$. Dado $t > 0$, como a integral na expressão de $u(x,t)$ converge, podemos escrever

$$\partial^\alpha u(x,t) = \pi^{-\frac{n}{2}} e^{-in\frac{\pi}{4}} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\partial^\alpha\varphi(x+2\sqrt{t}z)\,dz \tag{2.21}$$

e $\partial^\alpha\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, usando mais uma vez o fato de ser $\{S(t)\}$ um grupo, temos imediatamente que $\partial^\alpha u(\cdot,t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e, além disso

$$\|\partial^\alpha u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\partial^\alpha\varphi(\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

De maneira análoga, é possível mostrar o mesmo para $t < 0$.

Portanto, se $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ então $u(\cdot,t) \in X^k(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \in \mathbb{R}$; ou seja, a aplicação $t \longmapsto S(t)\varphi \in C(\mathbb{R}, X^k(\mathbb{R}^n))$. $\square$

Além disso, como $S(\cdot)\varphi$ é limitada em $[-1,1]$, temos que $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(X^k)}$ é limitado em [-1,1]; o que, em conjunto com (2.10), nos fornece a seguinte consequência:

Corolário 2.2.1. *Se* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $t \in \mathbb{R}$ *então existe uma constante* $C > 0$, *dependente apenas de* n *e* k, *tal que*

$$\|S(t)\varphi\|_{X^k} \leq C\,(1+|t|^\rho)\,\|\varphi\|_{X^k}, \tag{2.22}$$

onde

$$\rho = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se n é par,} \\ \frac{1}{4}, & \text{se n é ímpar.} \end{cases}$$

2.3 Gerador Infinitesimal do grupo $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$

Nesta seção seguiremos de perto a notação e os resultados expostos no capítulo 1 de [P] e no capítulo 3 de [CH]. Assim, se X é um espaço de Banach, uma família de operadores lineares $\{T(t)\}$, a um parâmetro $t \in \mathbb{R}$, definidos em X é um grupo de operadores lineares quando $T(0) = I, T(t_1+t_2) = T(t_1)\circ T(t_2)$ e $T(-t) = T^{-1}(t)$, onde I é o operador identidade e $t_1, t_2, t \in \mathbb{R}$. Caso tenhamos as propriedades apenas para $t_1, t_2, t \in \mathbb{R}_+$, diremos que $\{T(t)\}$ é um semi-grupo. Em geral, representaremos por $D(T)$ o domínio de $\{T(t)\}$ e diremos que $\{T(t)\}$ é fortemente contínuo quando

$$\lim_{t\to 0} \|T(t)-I\| = 0. \tag{2.23}$$

O operador linear A cujo domínio é $D(A) = \left\{\varphi \in X; \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T(t)\varphi-\varphi}{t} \text{ existe}\right\}$ é definido por $A\varphi := \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{T(t)\varphi-\varphi}{t} = T'(0)\varphi$, para todo $\varphi \in D(A)$, é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\}$.

De volta ao nosso caso particular, primeiramente observemos que a família $\{S(t)\}$ é um grupo, chamado o grupo de Schrödinger .

Lema 2.3.1. *A família de operadores* $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *definida em* (2.3) *é um grupo.*

Demonstração. Obviamente, se escrevemos $c = e^{-in\frac{\pi}{4}}\pi^{-\frac{n}{2}}$, então

$$S(0)\varphi(x) = c\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\varphi(x)dz = \varphi(x).$$

Consideremos agora $t_1, t_2 > 0$. Faremos, por simplicidade, a demonstração no caso $n = 1$. No caso, geral a demonstração segue os mesmos passos.

Temos

$$\phi(x) = S(t_1)\varphi(x) = c\lim_{\epsilon_1\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{(i-\epsilon_1)|z_1|^2}\varphi(x+2\sqrt{t_1}z_1)dz_1,$$

e

$$\begin{aligned}
&S(t_2)\circ S(t_1)\varphi(x) = S(t_2)\phi(x)\\
&= c\lim_{\epsilon_2\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{(i-\epsilon_2)|z_2|^2}\phi(x+2\sqrt{t_2}z_2)dz_2\\
&= c^2\lim_{(\epsilon_1,\epsilon_2)\to(0,0)}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{(i-\epsilon_1)|z_1|^2+(i-\epsilon_2)|z_2|^2}\varphi(x+2\sqrt{t_1}z_1+2\sqrt{t_2}z_2)dz_1dz_2.
\end{aligned}$$

Sem perda de generalidades, podemos tomar $\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2$. Façamos a mudança das variáveis z_1 e z_2 para as variáveis z e w, de acordo com as seguintes equações:

$$\begin{cases} t_1 & + & t_2 & = & t, \\ Az_1 & + & Bz_2 & = & z, \\ Bz_1 & - & Az_2 & = & w, \end{cases}$$

onde $A = \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t_1+t_2}}$ e $B = \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1+t_2}}$.

Deste modo, $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z|^2 + |w|^2$ e $t_2^{1/2} dz_1 + t_1^{1/2} dz_2 = (t_1 - t_2)^{1/2} dw$, portanto:

$$dz_1 = \frac{t_1^{1/2} t^{1/2} dz + t_2^{1/2} t^{1/2} dw}{t_1 + t_2} \text{ e } dz_2 = \frac{t_2^{1/2} t^{1/2} dz - t_1^{1/2} t^{1/2} dw}{t_1 + t_2}.$$

Logo,

$$dz_1 dz_2 = \frac{t}{t_1 + t_2} dw dz = dw dz,$$

e daí:

$$\begin{aligned} & S(t_2) \circ S(t_1) \varphi(x) = \\ & = c^2 \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{(i-\epsilon)(|z|^2 + |w|^2)} \varphi(x + 2\sqrt{t_1 + t_2} z) dw dz \\ & = c^2 \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} e^{(i-\epsilon)|w|^2} dw \right] e^{(i-\epsilon)|z|^2} \varphi(x + 2\sqrt{t_1 + t_2} z) dz \\ & = c \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} e^{(i-\epsilon)|z|^2} \varphi(x + 2\sqrt{t_1 + t_2} z) dz \\ & = S(t_1 + t_2) \varphi(x). \end{aligned}$$

Para finalizar, basta observar que $S(t) \circ S(-t) \varphi(x) = S(0) \varphi(x)$. □

O operador $i\Delta$ está definido para funções ao menos duas vezes diferenciáveis e, portanto, podemos defini-lo no espaço de Zhidkov $X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$. Mais especificamente, aplicaremos este operador do seguinte modo:

Lema 2.3.2. *Se* $\varphi \in X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ *temos*

$$i\Delta\varphi(x) = \frac{1}{2t} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2} D^2 \varphi(x) \cdot (2\sqrt{t} z, 2\sqrt{t} z) dz, \qquad (2.24)$$

onde $D^2\varphi$ *é a matriz hessiana de* φ *e* $D^2\varphi(x)\cdot(2\sqrt{t}z, 2\sqrt{t}z)$ *é a representação da forma quadrática*

$$2\sqrt{t}\begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_1}(x) & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}(x) \end{bmatrix} 2\sqrt{t}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De fato, temos

$$D^2\varphi(x)\cdot(2\sqrt{t}z, 2\sqrt{t}z) = 4t\left[\sum_{k=1}^{n} z_k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k}(x) + 2\sum_{1\le j<\ell\le n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j\partial x_\ell}(x)z_jz_\ell\right].$$

Observe que como $j \neq \ell$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j\partial x_\ell}(x)z_jz_\ell dz = 0,$$

pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j\partial x_\ell}(x)z_jz_\ell dz = \prod_{p=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-\epsilon)z_p^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j\partial x_\ell}(x)z_jz_\ell dz_p = 0. \tag{2.25}$$

Se $p \neq j$ e $p \neq \ell$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-\epsilon)z_p^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j\partial x_\ell}(x)z_jz_\ell dz_p = 0$, pois a aplicação $z_p \mapsto e^{(i-\epsilon)z_p^2}$ é par. Caso tenhamos $p = j$ ou $p = \ell$, podemos integrar diretamente obtendo também $\frac{1}{2(i-\epsilon)}e^{(i-\epsilon)z_p^2}]_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}D^2\varphi(x)\cdot(2\sqrt{t}z, 2\sqrt{t}z)dz = 4t\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\sum_{k=1}^{n} z_k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k}(x)dz.$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2t}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}D^2\varphi(x)\cdot(2\sqrt{t}z,2\sqrt{t}z)dz\\
&=\frac{1}{2t}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}4t\sum_{k=1}^{n} z_k^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k}(x)dz\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{i-\epsilon}\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k}(x)\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-\epsilon)|z|^2}2z_k^2dz_k\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{i-\epsilon}\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k}(x)\left(-\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}dz\right)\\
&=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{-1}{i-\epsilon}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k}(x)\\
&=i\Delta\varphi(x),
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

onde, na terceira igualdade em (2.26), usamos integração por partes. $\square$

Nosso objetivo agora é mostrar que $i\Delta$ é o gerador infinitesimal do grupo de Schrödinger.

Teorema 2.3.1. *Seja* $k > \frac{n}{2}$. *O gerador infinitesimal do grupo* $S(t)_{t\in\mathbb{R}}$ *é* $i\Delta$, *com* $D(i\Delta) = X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que para $\varphi \in X^{k+4}(\mathbb{R}^n)$ então, quando $t \to 0$,

$$
\frac{S(t)\varphi-\varphi}{t}\xrightarrow{X^k} i\Delta\varphi, \tag{2.27}
$$

o que implica $\left(X^{k+4}(\mathbb{R}^n), i\Delta\right) \subset (D(A), A)$, onde $A = S'(0)$.

Seja $t > 0$. Observamos que,

$$
\frac{S(t)\varphi-\varphi}{t}(x)=\frac{1}{t}e^{-in\frac{\pi}{4}}\pi^{-\frac{n}{2}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}[\varphi(x+2\sqrt{t}z)-\varphi(x)]dz. \tag{2.28}
$$

Como

$$
\int_{\mathbb{R}^n} e^{(i-\epsilon)|z|^2}\nabla\varphi(x).2\sqrt{t}zdz=\prod_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(i-\epsilon)z_j^2}\sum_{k=1}^{n}2\sqrt{t}z\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi(x)=0, \tag{2.29}
$$

da fórmula de Taylor com resto integral (ver página 262 de [Li]) temos

$$
\varphi(x+2\sqrt{t}z)-\varphi(x)=\nabla\varphi(x).2\sqrt{t}z+\int_0^1(1-s)D^2\varphi(x+2s\sqrt{t}z)(2\sqrt{t}z,2\sqrt{t}z)ds \tag{2.30}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{S(t)\varphi-\varphi}{t}-i\Delta\varphi\right)(x)\\
&\quad=4\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}e^{(i-\epsilon)|z|^2}\times\\
&\quad\times\int_0^1(1-s)\left[D^2\varphi(x+2s\sqrt{t}z)(2\sqrt{t}z,2\sqrt{t}z)-D^2\varphi(x)\right](z,z)\,ds\,dz\\
&\quad=4\frac{e^{-in\frac{\pi}{4}}}{\pi^{\frac{n}{2}}}\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1(1-s)\times\\
&\quad\times\int_{\mathbb{R}^n}e^{(i-\epsilon)|z|^2}[D^2\varphi(x+2s\sqrt{t}z)(2\sqrt{t}z,2\sqrt{t}z)-D^2\varphi(x)](z,z)\,dz\,ds.
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}e^{(i-\epsilon)|z|^2}[D^2\varphi(x+2s\sqrt{t}z)(2\sqrt{t}z,2\sqrt{t}z)-D^2\varphi(x)](z,z)\,dz\\
&=\left(-\tfrac{1}{2(i-\epsilon)}\right)^2\int_{\mathbb{R}^n}e^{(i-\epsilon)|z|^2}\Delta^2\varphi(x+2s\sqrt{t}z)(2s\sqrt{t}z)^2dz\\
&\quad-\tfrac{1}{2(i-\epsilon)}\int_{\mathbb{R}^n}e^{(i-\epsilon)|z|^2}[\Delta\varphi(x+2s\sqrt{t}z)-\Delta\varphi(x)]\,dz,
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

portanto,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{S(t)\varphi-\varphi}{t}-i\Delta\varphi\right)(x)=\\
&\qquad=-4\left\{t\int_0^1(1-s)s^2S(ts^2)\Delta^2\varphi(x)\,ds\;+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2i}\int_0^1(1-s)\left[S(ts^2)\Delta\varphi-\Delta\varphi\right](x)\,ds\right\}.
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

Como $\Delta^2\varphi\in H^k(\mathbb{R}^n)\subset X^k(\mathbb{R}^n)$, já que $k>\frac{n}{2}$, temos que o operador $\{S(ts^2)\Delta^2\varphi\}_{t,s\in[0,1]}$ é limitado em X^k e, logo

$$-4t\int_0^1(1-s)s^2S(ts^2)\Delta^2\varphi(x)\,ds\xrightarrow{X^k}0,\ \text{quando } t\to 0.$$

Por outro lado, de $\Delta\varphi\in H^{k+2}(\mathbb{R}^n)\subset X^{k+2}(\mathbb{R}^n)\subset X^k(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\left(S(ts^2)\Delta\varphi-\Delta\varphi\right)\xrightarrow{X^k}0,\ \text{quando } t\to 0,$$

uniformemente para $s \in [0,1]$. Isto conclui a prova de nossa primeira afirmação, isto é $\varphi \in X^{k+4}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \in D(A)$ e $A\varphi = i\Delta\varphi$.

Consideremos agora $\varphi \in X^{k+2}$. Queremos mostrar que ainda vale a inclusão $\big(X^{k+2}(\mathbb{R}^n), i\Delta\big) \subset (D(A), A)$.

Já temos que $X^{k+4}(\mathbb{R}^n) \subset X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ e, como consequência imediata da Proposição 1.4.2 na página 22, $X^{k+4}(\mathbb{R}^n)$ é denso sobre $X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$. Logo existe uma sequência $(\phi_0^l)_{l\in\mathbb{N}} \subset X^{k+4}(\mathbb{R}^n)$ convergindo para φ em $X^{k+2}(\mathbb{R}^n) \subset X^k(\mathbb{R}^n)$, quando $l \to \infty$. Como o operador $i\Delta$ é contínuo, $i\Delta\phi_0^l$ converge para $i\Delta\varphi$ em $H^k \subset X^k$ quando $l \to \infty$. Isto significa que $(\varphi, i\Delta\varphi)$ pertence ao fecho do conjunto $\big\{(\phi, i\Delta\phi); \phi \in X^{k+4}(\mathbb{R}^n)\big\}$ em $X^k \times X^k$. Como o gerador infinitesimal de um semi-grupo fortemente contínuo é um operador fechado (ver [P]), temos que $\varphi \in D(A)$ e $A\varphi = i\Delta\varphi$ o que significa que $\big(X^{k+2}(\mathbb{R}^n), i\Delta\big) \subset (D(A), A)$.

$\square$

Capítulo 3

Existência de soluções

3.1 Existência Local

Esta seção será dedicada ao estudo da boa colocação local do problema de valor inicial

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + F(u) &= 0, \\ u(\cdot,0) &= \varphi(\cdot), \end{cases} \tag{3.1}$$

com $k > \frac{n}{2}$, $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ e $F : X^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow X^k(\mathbb{R}^n)$. Aqui, e em todo o restante do texto, nossa noção de boa colocação local e de boa colocação global é a que se dá naturalmente para equações de evolução (ver, por exemplo, [IN]):

Definição 3.1.1 (Boa Colocação)**.** *Sejam* X *e* Y *espaços de Banach e seja* T_0 *um número real tal que* $0 < T_0 < \infty$. *Considere* $t \in [0, T_0]$ *e* $F : [0, T_0] \times Y \longrightarrow X$ *contínua com respeito às topologias correspondentes. Dizemos que o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} u_t &= F(t,u) \in X, \\ u(\cdot,0) &= \varphi \in Y, \end{cases} \tag{3.2}$$

tem boa colocação local (ou é bem posto localmente) quando ocorrem, simultaneamente:

(i) Existem $T \in (0, T_0]$ *e* $u \in C([0, T_0]; Y)$ *tais que* (3.2) *é satisfeito.*

(ii) Existe no máximo uma solução de (3.2) *em qualquer vizinhança da origem contida em* $(0, T_0)$.

(iii) A aplicação $\varphi \longmapsto u$ *é contínua em relação às topologias dos espaços de Banach* Y *e* $C([0, T_0], Y)$, *respectivamente.*

Notemos que, nossa existência local de solução pressupõe que esta solução permaneça no espaço de Banach Y *ao qual pertence nossa condição inicial* φ;

tal propriedade é chamada persistência da solução. Quando ao menos uma das três condições acima deixa de ser satisfeita o problema é dito mal posto (podemos também dizer que o problema tem má colocação).

No caso em que $T_0 = \infty$ *e são válidas as três condições acima dizemos que* (3.2) *tem boa colocação global (ou é bem posto globalmente).*

Observemos que (3.1) equivale a

$$\begin{cases} u_t &= i\Delta u + iF(u), \\ u(\cdot,0) &= \varphi(\cdot); \end{cases} \tag{3.3}$$

e, além disso, podemos considerar $iF = f : I \longrightarrow X^k(\mathbb{R}^n)$, onde I é um intervalo da reta. Suporemos f diferenciável o que, juntamente com o Teorema do Valor Médio implica f e F localmente Lipschitzianas. Aproveitaremos, neste momento, alguns resultados que, em sua maior parte, podem ser encontrados em [CH].

Lema 3.1.1. *Sejam* $T > 0, \varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $f \in C([0,T], X^k(\mathbb{R}^n))$.

Se $u \in C^1([0,T], X^k(\mathbb{R}^n))$ *é solução de* (3.1) *então*

$$u(t) = S(t)\varphi(\cdot) + i\int_0^t S(t-\tau)F(u(\cdot,\tau))d\tau, \tag{3.4}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração. Consideremos $0 \le t \le T$ e defina para todo $\tau \in [0,T]$

$$w(\tau) = S(t-\tau)u(\tau). \tag{3.5}$$

Se $h \in (0, t-\tau)$ temos

$$\begin{aligned} \frac{w(\tau+h)-w(\tau)}{h} &= \frac{S(t-\tau-h)u(\tau+h)-S(t-\tau)u(\tau)}{h} \\ &= S(t-\tau-h)\frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h} - \frac{S(t-\tau-h+h)-S(t-\tau-h)}{h}u(\tau) \\ &= S(t-\tau-h)\left\{\frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h} - \frac{S(h)-I}{h}u(\tau)\right\}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.3.1, $\lim_{h\to 0}\dfrac{S(h)-I}{h} = i\Delta$. Logo,

$$\lim_{h\to 0}\frac{w(\tau+h)-w(\tau)}{h} = S(t-\tau)\{u_t(\tau) - i\Delta u\} = S(t-\tau)f(\tau).$$

Mas, $S(t-\cdot)f(\cdot) \in C([0,T], X^k(\mathbb{R}^n))$. Portanto, para todo $\tau \in [0,t)$, temos que $w \in C^1([0,t), X^k(\mathbb{R}^n))$ e $w'(\tau) = S(t-\tau)f(\tau)$.

Para $s < t$ temos $\int_0^s w'(\tau)d\tau = w(s) - w(0) = \int_0^s S(t-\tau)f(\tau)d\tau$, isto é,

$$w(s) = S(s)u(0) + \int_0^s S(s-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Finalmelnte, fazendo $u(0) = \varphi$ (ou, mais precisamente, $u(\cdot,0) = \varphi(\cdot)$) e $f(\tau) = iF(u(\cdot,\tau))$ garantimos o resultado.

□

Mostremos agora que uma tal solução está bem definida, pois é univocamente determinada.

Lema 3.1.2. *Sejam* $T > 0, \varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$. *Se* $u, v \in C([0,T], X^k(\mathbb{R}^n))$ *são duas soluções do problema* (3.1)*, então* $u = v$.

Demonstração. Considere $M = \sup_{t\in[0,T]} \max\{\|u(t)\|_{X^k}, \|v(t)\|_{X^k}\}$. Como F é localmente lipschitziana temos,

$$\|F(u(\cdot,\tau)) - F(v(\cdot,\tau))\|_{X^k} \leq L(M)\,\|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|_{X^k},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_{X^k} &\leq \int_0^t \Big\|S(t-\tau)\big(F(u(\cdot,\tau)) - F(v(\cdot,\tau))\big)\Big\|_{X^k} d\tau \\
&\leq \int_0^t \Big\|C\big(1+(t-\tau)^\rho\big)\big(F(u(\cdot,\tau)) - F(v(\cdot,\tau))\big)\Big\|_{X^k} d\tau \qquad (3.6)\\
&\leq CL(M)\big(1+T^\rho\big)\int_0^t \|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|_{X^k} d\tau.
\end{aligned}$$

Do Lema de Gronwall (ver página 21 de [Ro]), se $\phi(t) \leq C_1 + C_2\int_0^t \lambda(\tau)d\tau$ então, $\phi(t) \leq C_1 \exp\left[C_2\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right]$, para quase todo $t \in (0,T)$. Temos, em (3.6), $C_2 = CL(M)\,((1+T^\rho))$ e $C_1 = 0$ logo, $\|u(t) - v(t)\|_{X^k} = 0$, para quase todo $t \in (0,T)$, o que implica $u = v$. □

Observação 3.1.1. *Da demosntração acima, podemos garantir ainda*

$$\|u(t) - v(t)\|_{X^k} \leq CL(M)\int_0^t \big(1+(T-\tau)^\rho\big)\,\|u(\cdot,\tau) - v(\cdot,\tau)\|_{X^k} d\tau. \qquad (3.7)$$

Teorema 3.1.1. *Sejam* $M > 0$ *e* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *tais que* $\|\varphi\|_{X^k} \leq M$. *Então, existe um tempo positivo* $T = T(M)$ *e uma única solução* $u \in C([0,T(M)], X^k(\mathbb{R}^n))$ *do problema* (3.1).

Demonstração. Basta mostrar que existe tal solução já que a unicidade resulta imediatamente do Lema 3.1.2. Para tanto, tomemos M e φ como nas condições acima e assumamos $T \leq 1$.

Fixado $K > 0$, definamos o subconjunto de $C\big([0,T], X^k(\mathbb{R}^n)\big)$,

$$E := \Big\{ u \in C\big([0,T], X^k(\mathbb{R}^n)\big); \|u(\cdot,t)\|_{X^k} \leq K,\ \forall t \in [0,T] \Big\}.$$

Consideremos para todos os elementos u e v de E a métrica proveniente da norma de $C([0,T], X^k(\mathbb{R}^n))$, ou seja,

$$d(u,v) = \max_{t \in [0,T]} \|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{X^k},$$

de modo que E torna-se também um espaço métrico completo.

Dada $u \in E$, definimos Φ_u pondo,

$$\Phi_u(t) := S(t)\varphi + i \int_0^t S(t-\tau) F(u(\cdot,\tau))d\tau,\ \ \forall t \in [0,T].$$

Aplicando a desigualdade triangular e a propriedade 2.22, vista no Corolário 2.2.1 da página 36, segue, para $\rho \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right\}$,

$$\begin{aligned}
\|\Phi_u(t)\|_{X^k(\mathbb{R}^n)} &\leq \|S(t)\varphi\|_{X^k} + \left\| \int_0^t S(t-\tau)F(u(\cdot,\tau))d\tau \right\|_{X^k} \\
&\leq C\left(1+t^\rho\right)\|\varphi\|_{X^k} + \int_0^t C\left(1+(t-\tau)^\rho\right)\|F(u(\cdot,\tau))\|_{X^k}\, d\tau \\
&\leq 2CM + 2C\int_0^t \|F(u(\cdot,\tau))\|_{X^k}\, d\tau,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

já que $t, \tau, t-\tau \in [0,T]$, e $T \leq 1$.

Temos

$$\begin{aligned}
\|F(u(\tau))\|_{X^k} &= \|F(0) + F(u(\tau)) - F(0)\|_{X^k} \\
&\leq \|F(0)\|_{X^k} + \|F(u(\tau)) - F(0)\|_{X^k} \\
&\leq \|F(0)\|_{X^k} + L(K)\,\|u(\tau)\|_{X^k} \\
&\leq \|F(0)\|_{X^k} + KL(K).
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Podemos escolher $K = 4CM + 2C\|F(0)\|_{X^k}$ e supor

$$T = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{4CL(K)}\right\}. \tag{3.10}$$

Observemos que $\frac{1}{4CL(K)} \leq \frac{M+\|F(0)\|_{X^k}}{\|F(0)\|_{X^k}+KL(K)}$, pois $2CL(K) \geq 1$. Portanto,

$$\|F(0)\|_{X^k} + KL(K) \leq \frac{M + \|F(0)\|_{X^k}}{T}$$

e, de (3.8) e (3.9) segue

$$\|\Phi_u(t)\|_{X^k(\mathbb{R}^n)} \leq 2CM + 2Ct\frac{M + \|F(0)\|_{X^k}}{T} \leq K,$$

o que significa que Φ está bem definida e leva elementos de E em elementos de E.

Para todos $u, v \in E$, tem-se

$$\begin{aligned}
d(\Phi_u(t), \Phi_v(t)) &= \max_{t\in[0,T]} \|\Phi_v(t) - \Phi_u(t)\|_{X^k} \\
&\leq L(K)\int_0^T \max_{t\in[0,T]} \|S(T-\tau)[v(\tau) - u(\tau)]\|_{X^k}\, d\tau \\
&\leq L(K)\int_0^T C\left(1 + (T-\tau)^\rho\right) \max_{t\in[0,T]} \|v(\tau) - u(\tau)\|_{X^k}\, d\tau \\
&\leq 2CT(M)L(K)d(u,v).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para que Φ seja uma contração basta, por exemplo, que $T(M)L(K) = \frac{1}{2}$, ou seja, é suficiente escolher $T(M) = \frac{1}{4CL(K)}$.

Mas, de (3.11), como $T(M) \leq \frac{1}{4CL(K)}$, segue que Φ é uma contração em E e, portanto, possui um único ponto fixo $u \in E$ que, pela construção do subespaço E, satisfaz a condição do enunciado. □

Observação 3.1.2. *Observe que a unicidade obtida à partir da contração na demonstração do Teorema 3.1.1 se reduz ao espaço E, ali definido. Por outro lado, a unicidade obtida no Lema 3.1.2, à partir do Lema de Gronwall, é mais geral, valendo em todo o espaço* X^k.

Analogamente, podemos também fazer os procedimentos descritos nas demonstrações anteriores para intervalos de números reais negativos. Para tanto, basta tomar $-T$ ao invés de T nos Lemas 3.1.1 e 3.1.2 e, $-t$ ao invés de t na Proposição 3.1.1, com $t, T > 0$. Como consequência, podemos agrupar os resultados anteriores no seguinte resultado:

Teorema 3.1.2. *Seja* $M > 0$. *Então, existem* $T_+(M) > 0$ *e* $T_-(M) < 0$ *tais que, para toda* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *com* $\|\varphi\|_{X^k} \leq M$, *existe uma única solução de* (3.1)

$$u \in C([T_-(M), T_+(M)], X^k(\mathbb{R}^n)).$$

Nosso interesse agora será um pouco mais focado nas extremidades de um tal intervalo $[T_-(M), T_+(M)]$. Para iniciar, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3. *Existe uma função* $T^* : X^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (0, +\infty]$ *tal que para toda* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *é possível encontrar* $u \in C([0, T^*(\varphi)], X^k(\mathbb{R}^n))$ *de maneira que, para todo* $T \in (0, T^*(\varphi))$, *u é a única solução de* (3.4) *em* $C([0, T], X^k(\mathbb{R}^n))$. *Além disso, vale apenas uma das condições abaixo:*

(i) $T^*(\varphi) = \infty$, *ou;*

(ii) $T^*(\varphi) < \infty$ *e* $\lim\limits_{t \nearrow T^*(\varphi)} \|u(t)\|_{X^k} = \infty$.

Demonstração. Sejam $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ e

$$T^*(\varphi) = \sup\left\{T > 0;\ \exists u \in C([0, T], X^k(\mathbb{R}^n)) \text{ solução de (3.4)}\right\}.$$

Pela proposiçao 3.1.1 temos $T^*(\varphi) > 0$. Por outro lado, o Lema 3.1.2 nos permite construir uma única solução maximal $u \in C([0, T^*(\varphi)), X^k(\mathbb{R}^n))$ da equação (3.4).

Suponhamos $T^*(\varphi) < \infty$. Fixado $t \in [0, T^*(\varphi)]$, sejam

$$u(t) = S(t)\varphi + i\int_0^t S(t-\tau)F(u(\cdot,\tau))d\tau$$

e $M_t = \|u(t)\|_{X^k(\mathbb{R}^n)}$. Consideremos a equação integral

$$v(\tau) = S(\tau)u(t) + i\int_0^\tau S(\tau-\sigma)F(v(\cdot,\sigma))d\sigma.\ \forall \tau \in [0, T(M)].$$

Definamos agora $w \in C([0, t+T(M)], X^K(\mathbb{R}^n))$, dada por

$$w(\tau) = \begin{cases} u(\tau), & \text{se } \tau \in [0,t]; \\ v(\tau - t), & \text{se } \tau \in (t, t+T(M)]. \end{cases}$$

É fácil verificar que w é solução de (3.4) com $T = t + T(M)$. Do Lema 3.1.2 e da definição de $T^*(\varphi)$ segue $T^*(\varphi) \geq t + T(M)$. Daí,

$$\frac{1}{T^*(\varphi) - t} \leq \frac{1}{T(M)}. \tag{3.12}$$

Evidentemente, quando $t \to T^*(\varphi)$, não pode ser $T(M)$ finito em (3.10). Fazendo $T(M) = \frac{1}{4CL(K)}$, segue de $K = 4CM + 2C\|F(0)\|_{X^k}$ e $M = \|u(t)\|_{X^k}$,

$$4CL\big(4C\|u(t)\|_{X^k} + 2C\|F(0)\|_{X^k}\big) = \frac{1}{T(M)} \geq \frac{1}{T^*(\varphi) - t} \tag{3.13}$$

e, portanto,

$$\lim_{t \nearrow T^*(\varphi)} \|u(t)\|_{X^k(\mathbb{R}^n)} = +\infty.$$

□

Observação 3.1.3. *Nas mesmas condições do Teorema 3.1.3 é possível obter uma única solução u de* (3.4) *em* $C([-T,0], X^k(\mathbb{R}^n))$, *sempre que* $T_*(\varphi) < -T < 0$, *onde*

$$T_*(\varphi) = \inf\big\{-T > 0;\ \exists u \in C([-T,0], X^k(\mathbb{R}^n)) \text{ solução de (3.4)}\big\}.$$

Além disso, vale uma e só uma das propriedades:

(i) $T_*(\varphi) = -\infty$, *ou;*

(ii) $|T_*(\varphi)| < \infty$ *e* $\lim_{t \searrow T_*(\varphi)} \|u(t)\|_{X^k} = \infty.$

Como aplicação direta dos resultados anteriores, temos o seguinte resultado em [Ga]:

Teorema 3.1.4. *Dada* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$, *existem* $T_*(\varphi) \in [-\infty, 0)$ *e* $T^*(\varphi) \in (0, +\infty]$ *tais que:*

a) existe uma única solução maximal $u \in C([T_*(\varphi), T^*(\varphi)], X^k(\mathbb{R}^n))$ *e, para todos* $T_-, T_+ \in \mathbb{R}$ *satisfazendo* $T_*(\varphi) < T_- < 0 < T_+ < T^*(\varphi)$, *u é a única solução da equação integral*

$$u(t) = S(t)\varphi(x) + i\int_0^1 S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, t \in [T_-, T_+].$$

b) $T_*(\varphi) = -\infty$ *ou* $\lim_{t \searrow T_*(\varphi)} \|u(\cdot,t)\|_{X^k} = +\infty.$

c) $T^*(\varphi) = +\infty$ *ou* $\lim_{t \nearrow T^*(\varphi)} \|u(\cdot,t)\|_{X^k} = +\infty.$

3.2 Regularidade da Solução

Voltemos nossa atenção ao tipo de regularidade da solução u encontrada através dos resultados acima. Sejam $T > 0, t \in [0,T]$ e
$i\Delta : X^{k+2}(\mathbb{R}^n) \subset X^k(\mathbb{R}^n) \to X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ o gerador do grupo $\{S(t)\}$. O problema

$$\begin{cases} u_t &= i\Delta u(t) + F(u), \quad t \in [0,T], \\ u(0) &= \varphi, \end{cases} \tag{3.14}$$

é chamado problema de evolução. O problema homogêneo associado a (3.14) é obtido fazendo $F(u) \equiv 0$. Uma função $u : [0,T] \to X$ é uma solução clássica do problema de evolução acima quando u é contínua em [0,T], satisfaz (3.14), $u(t) \in X^{k+2}(\mathbb{R}^n), \forall t \in (0,T]$, e u é continuamente diferenciável em (0,T].

Nessas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *Para todo* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$, *o problema homogêneo associado a* (3.14) *possui uma única solução clássica u.*

Demonstração. Usaremos o método de iterações de Picard. Já sabemos que o operador $i\Delta$ é limitado. Consideremos

$$\alpha = \|i\Delta\|_{X^k}.$$

Definimos $\phi : C([0,T], X^k(\mathbb{R}^n)) \to C([0,T], X^k(\mathbb{R}^n))$ por

$$(\phi u)(t) = \varphi + \int_0^t i\Delta u(\tau)d\tau. \tag{3.15}$$

Se denotamos $\|u\|_{L_T^\infty X^k} = \max\limits_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{X^k}$, então

$$\begin{aligned} \|\phi u(t) - \phi v(t)\|_{X^k} &\leq \int_0^T \|i\Delta\|_{X^k} \|u(\tau) - v(\tau)\|_{X^k} d\tau \\ &\leq \alpha T \|u - v\|_{L_T^\infty X^k}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Logo, se supomos

$$\|\phi^n u(t) - \phi^n v(t)\|_{X^k} \leq \frac{\alpha^n t^n}{n!} \|u - v\|_{L_T^\infty X^k}, \tag{3.17}$$

para algum $n \geq 1$ e para todo $t \in [0,T]$, segue

$$\begin{aligned} \left\|\phi^{n+1} u(t) - \phi^{n+1} v(t)\right\|_{X^k} &\leq \int_0^t \|i\Delta\|_{X^k} \|\phi^n u(\tau) - \phi^n v(\tau)\|_{X^k} d\tau \\ &\leq \alpha \int_0^1 \frac{\alpha^n \tau^n}{n!} \|u - v\|_{L_T^\infty X^k} d\tau \\ &= \frac{\alpha^{n+1} t^{n+1}}{(n+1)!} \|u - v\|_{L_T^\infty X^k}. \end{aligned}$$

Portanto, (3.17) vale para todo natural n.

Para n suficientemente grande, $\frac{\alpha^n t^n}{n!} < 1$ e ϕ possui um único ponto fixo em $C([0,T],X^k(\mathbb{R}^n))$, isto é, existe $u \in C([0,T],X^k(\mathbb{R}^n))$ tal que

$$u(t) = \varphi + \int_0^t i\Delta u(\tau)d\tau. \tag{3.18}$$

Como u é contínua temos de (3.18), $\frac{d}{dt}u(t) = i\Delta u(t)$. Então, u é solução do problema homogêneo associado a (3.14) e, como toda solução do problema homogêneo associado a (3.14) é também solução de (3.18), a solução do problema homogêneo é única.

□

Como aplicação direta do resultado acima temos o seguinte Teorema em [Ga]

Teorema 3.2.2. *Sejam* $\varphi \in X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ *e* $F : X^k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow X^k(\mathbb{R}^n)$. *Então, a solução* $u \in C([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^k(\mathbb{R}^n))$ *da equação*

$$u(t) = S(t)\varphi + i\int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, t \in [T_-,T_+] \tag{3.19}$$

descrita nos Teoremas 3.1.2 e 3.1.4 é uma solução clássica do problema (3.1) *em* $X^k(\mathbb{R}^n)$, *ou seja,*

$$u \in C([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^{k+2}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^k(\mathbb{R}^n)).$$

Demonstração. É claro que $u \in C([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^{k+2}(\mathbb{R}^n))$. Para mostrar que $u \in C^1([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^k(\mathbb{R}^n))$, basta derivar (3.19) em relação a t. Como $S(t)\varphi$ é a solução do problema

$$\begin{cases} iu_t & + & \Delta_x u & = & 0, \\ & & u(\cdot,0) & = & \varphi(\cdot), \end{cases}$$

temos $\frac{d}{dt}S(t)\varphi(x) = i\Delta_x\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$, já que $i\Delta : X^{k+2}(\mathbb{R}^n) \to X^k(\mathbb{R}^n)$. Logo, de $F : X^k(\mathbb{R}^n) \to X^k(\mathbb{R}^n)$, segue

$$\frac{d}{dt}u(t) = i\Delta_x\varphi + iF(u(t)) \in C([T_*(\varphi),T^*(\varphi)],X^k(\mathbb{R}^n)).$$

Logo, u é solução clássica de (3.1).

□

Proposição 3.2.1. *Seja* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *de classe* C^{k+1}. *Então,* $F : X^k(\mathbb{R}^n) \to X^k(\mathbb{R}^n)$ *definida por* $F(u) = f(|u|^2)u$ *é de classe* C^1.

Demonstração. Seja $u \in X^k(\mathbb{R}^n)$. Queremos mostrar que $F(u) \in X^k(\mathbb{R}^n)$ e que $F'(u)$ é uma aplicação continua de $X^k(\mathbb{R}^n)$ em $X^k(\mathbb{R}^n)$.

Observemos inicialmente que $u \in L^\infty$ e, do fato de f ser de classe C^{k+1}, decorre que $f(|u|^2)$ é limitado e, portanto, $F(u) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Utilizando mais uma vez a fórmula de Leibniz e a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, a exemplo do que foi feito na demonstração da Proposição 1.4.1, mostra-se que, para todo multi-índice α com $1 \leq |\alpha| \leq k$, tem-se $\partial^\alpha F(u) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, e, portanto, $\partial^\alpha F(u) \in X^k(\mathbb{R}^n)$.

Por outro lado, como $|u|^2 = u\overline{u}$, temos, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, $\frac{\partial}{\partial x_j} F(u) = [f'(|u|^2)\overline{u} + f(|u|^2)] \frac{\partial}{\partial x_j} u + (u)^2 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u}$ contínua. Daí, $F'(u)$ é contínua e, repetindo o argumento feito para F(u) acima verifica-se que, se $u \in X^k(\mathbb{R}^n)$ então, $F'(u) \in X^k(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Proposição 3.2.2. *Sejam* $n \in \mathbb{N}, k > \frac{n}{2} + 1, \varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}_+)$. *Para cada* $\ell \in \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \cdots, k\}$, *seja* $u \in C([T_*(\ell), T^*(\ell)], X^\ell(\mathbb{R}^n))$ *a solução da equação integral*

$$u(t) = S(t)\varphi + i\int_0^t S(t-\tau)F(u(\tau))d\tau, t \in [T_-, T_+],$$

com $F(u) = f(|u|^2)u$, *onde* $(T_*(\ell), T^*(\ell))$ *é o intervalo maximal de existência de u em* $X^\ell(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

$$T^* := T^*(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1) = \cdots = T^*(k)$$

e, analogamente,

$$T_* := T_*(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1) = \cdots = T_*(k).$$

Demonstração. $X^{k+1}(\mathbb{R}^n) \subset X^k(\mathbb{R}^n)$ logo, para todo $\ell \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, $T^* \geq T^*(\ell)$. Suponhamos que $T^* > T^*(\ell)$ e seja $t \in (T_*, T^*)$. Temos

$$u(t) = S(t)\varphi + i\int_0^t S(t-\tau)f(|u(\tau)|^2)u(\tau)d\tau$$

e, portanto,

$$\|u(t)\|_{X^\ell} \leq \|S(t)\|_{\mathscr{L}(X^\ell,X^\ell)} \|\varphi\|_{X^\ell} + \int_0^t \|S(t)\|_{\mathscr{L}(X^\ell,X^\ell)} \left\|f(|u(\tau)|^2)u(\tau)\right\|_{X^\ell} d\tau.$$

Como $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(X^\ell,X^\ell)}$ é limitada para $t \in [0, T^*(\ell)]$, e $u\colon [0, T^*(\ell)] \to X^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}(\mathbb{R}^n)$ é uma aplicação contínua, existe $M > 0$ tal que, para todo $t \in [0, T^*(\ell)]$, temos

$\|u(t)\|_{X^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor +1}} \leq M$. Assim, vale também $\|u(t)\|_{L^\infty} \leq M$ e, como $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}_+)$ é limitada para $t \in [0, T^*(\ell)]$, e $\|u(\tau)\|_{X^\ell} \leq \|u(t)\|_{L^\infty}$ existe $\widetilde{M} > 0$ tal que:

$$\left\| f(|u(\tau)|^2)u(\tau) \right\|_{X^\ell} \leq \widetilde{M} \, \|u(\tau)\|_{X^\ell} .$$

Logo,

$$\|u(t)\|_{X^\ell} \leq C \left[\|\varphi\|_{X^\ell} + \widetilde{M} \int_0^t \|u(s)\|_{X^\ell} \, ds \right],$$

e, portanto, $\|u(t)\|_{X^\ell}$ não pode tender a infinito quanto $t \nearrow T^*(\ell)$, o que contradiz a hipótese de ser $(T_*(\ell), T^*(\ell))$ o intervalo (aberto) maximal de definição da aplicação $u : (T_*(\ell), T^*(\ell)) \to X^\ell(\mathbb{R}^n)$. Então, $T^* = T^*(\ell)$.

Analogamente, temos também $T_* = T_*(\ell)$.

$\square$

Capítulo 4

Leis de Conservação e Boa Colocação Global

4.1 Leis de Conservação

Sejam $\varphi \in X^{k+2}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}_+)$. Consideremos

$$u \in C([T_*,T^*],X^{k+2}(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([T_*,T^*],X^k(\mathbb{R}^n))$$

a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u + f(|u|^2)u & = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) & = \varphi(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Nosso objetivo agora é mostrar a conservação da energia para (4.1) nos casos $n = 1$ ou $n = 2$. Temos, inicialmente, o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1. *Seja* $V(r) := -\int_0^r f(\tau)d\tau$. *Suponhamos que* $\int_{\mathbb{R}^n} V(|\varphi(x)|^2)dx$ *converge. Então, para todo* $t \in (T_*,T^*)$, $\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx$ *também converge, e a energia é conservada; isto é,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla u(x,t)|^2 + V(|u(x,t)|^2)\right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla \varphi(x)|^2 + V(|\varphi(x)|^2)\right] dx. \tag{4.2}$$

Demonstração. Temos $V(|u|^2) = -\int_0^{|u|^2} f(\tau)d\tau$ e,

$$\partial_t V(|u|^2) = -2f(|u|^2)(u_t\bar{u} + u\bar{u}_t).$$

Multiplicando a primeira equação em (4.1) e sua equação conjugada por $\overline{u}_t$ e u_t, respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} i|u_t|^2+\overline{u}_t\Delta_x u & = -\overline{u}_t f(|u|^2)u, \\ -i|u_t|^2+u_t\overline{\Delta_x u} & = -u_t f(|u|^2)u. \end{cases} \tag{4.3}$$

Daí, somando membro a membro,

$$\begin{aligned} 2\text{Re}(\overline{u}_t\Delta_x u) &= -f(|u|^2)(u\overline{u}_t+u_t\overline{u}) \\ &= -f(|u|^2)(u\overline{u})_t \\ &= -f(|u|^2)(|u|^2)_t \\ &= \partial_t V(|u|^2). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Para todos $t\in(T_*,T^*), x\in\mathbb{R}^n$, integrando (4.4) no intervalo $[0,t]$, tem-se

$$2\text{Re}\left(\int_0^t \Delta u(x,\tau)\overline{u}_t(x,\tau)d\tau\right)=V(|u(x,t)|^2)-V(|\varphi(x)|^2). \tag{4.5}$$

Consideremos agora uma função $\theta\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\theta(r)=\begin{cases} 1, & \text{se } r\leq 1 \\ 0, & \text{se } r\geq 2. \end{cases}$$

Para $R>0$, definimos $\theta_R(x):=\theta\left(\frac{|x|}{R}\right), x\in\mathbb{R}^n$. Temos então,

$$\begin{aligned} \|\nabla\theta_R\|_L^2(\mathbb{R}^n) &= \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla\theta\left(\frac{|x|}{R}\right)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\theta'(|y|)R^{-1}\right|^2 R^n dy\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= R^{\frac{n}{2}-1}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left|\theta'(|y|)\right|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como $\theta'(|\cdot|)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, a última integral é finita, em particular, $\{\nabla\theta_R\}_{R\geq 1}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Multiplicando agora (4.5) por $\theta_R(x)$ e integrando sobre $\mathbb{R}^n$ obtemos:

$$\begin{aligned} &2\text{Re}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^t \Delta u(x,\tau)\overline{u}_t(x,\tau)d\tau\right)\theta_R(x)dx\right] \\ &=\int_{\mathbb{R}^n}V(|u(x,\tau)|^2)\theta_R(x)dx-\int_{\mathbb{R}^n}V(|\varphi(x)|^2)\theta_R(x)dx. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Usando o Teorema de Fubini e integrando por partes no lado esquerdo de (4.7), temos:

$$2\mathrm{Re}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^t \Delta u(x,\tau)\overline{u}_t(x,\tau)d\tau\right)\theta_R(x)dx\right]$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u(x,t)|^2-|\nabla\varphi(x)|^2\right)\theta_R(x)dx - 2\mathrm{Re}\left[\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x,\tau)\nabla\theta_R(x)\overline{u}_t(x,\tau)dxd\tau\right].$$

Por conveniência, assumamos $t>0$. Como $\nabla\theta_R$ tem suporte compacto em $\Omega=\{x\in\mathbb{R}^n;|x|\geq R\}$, a desigualdade de Cauchy-Schwartz implica

$$\left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x,\tau)\nabla\theta_R(x)\overline{u}_t(x,\tau)dxd\tau\right|$$

$$\leq \sup_{\tau\in[0,t]}\|u_t(\tau)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\left(\int_0^t\|\nabla u(\tau)\|_{L^2(\Omega)}\,d\tau\right)\|\nabla\theta_R\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

e esta última quantidade converge para 0 quando $R\to\infty$. Por outro lado, quando $R\to\infty$, temos $\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla u(x,t)|^2-|\nabla\varphi(x)|^2\right)\theta_R(x)dx$ convergindo para

$$\|\nabla u(x,t)\|_{L^2}^2-\|\nabla\varphi(x)\|_{L^2}^2.$$

Então, se assumimos que existe o limite

$$\int_{\mathbb{R}^n}V(|\varphi(x)|^2)dx := \lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}V(|\varphi(x)|^2)\theta_R(x)dx,$$

o que depende da nossa escolha da função θ, e tomamos o limite em (4.7), obtemos a partir de (4.5):

$$\int_{\mathbb{R}^n}V(|u(x,t)|^2)dx-\int_{\mathbb{R}^n}V(|\varphi(x)|^2)dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^n}2\mathrm{Re}\left[\int_0^t\Delta u(x,\tau)\overline{u}_t(x,\tau)d\tau dx\right]\\
&= \lim_{R\to\infty}2\mathrm{Re}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^t\Delta u(x,\tau)\overline{u}_t(x,\tau)d\tau\right)\theta_R(x)dx\right]\\
&= \lim_{R\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^n}V(|u(x,\tau)|^2)\theta_R(x)dx-\int_{\mathbb{R}^n}V(|\varphi(x)|^2)\theta_R(x)dx\right].
\end{aligned}$$

Portanto, $\int_{\mathbb{R}^n}V(|u(x,t)|^2)dx=\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}V(|u(x,\tau)|^2)\theta_R(x)dx$, e a energia é conservada. □

Observação 4.1.1. *Vale aqui mencionar que uma demonstração para* $n \geq 3$ *não poderia ser obtida do mesmo modo. De fato, uma função* $\theta_R \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, *com* $\theta_R(x) = 1$ *sempre que* $|x| \leq R$, *e tal que* $\nabla\theta_R$ *seja limitada em* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *não existe para* $n/geq3$.

Sejam agora $\theta, \theta_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funções não crescentes, de classe C^∞, tais que, em $\mathbb{R} - (0,1)$

$$\theta(x) = \theta_0(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \leq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Para $R > 0$, defina $\theta_R^+(x) = \theta(x-R)\theta_0(-x)$ e $\theta_R^-(x) = \theta_R^-(x)$.

Proposição 4.1.1. *Se* $\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} V(|\varphi(x)|^2)\theta_R^\pm(x)dx$ *existe, então*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} V(|u(x,t)|^2)\theta_R^\pm(x)dx$$

também existe.

Demonstração. Basta trocar θ_R por $\theta_R^\pm$ na demonstração da Proposição 4.1.1 obtendo:

$$\int_{\mathbb{R}} \left[V(|u(x,t)|^2) - V(|\varphi(x)|^2) + |\nabla u(x,t)|^2 - |\nabla\varphi(x)|^2\right]\theta_R^\pm(x)dx =$$

$$= \mp 2\text{Re}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \nabla u(x,\tau)\left[\nabla\theta(\pm x - R)\theta_0(\mp x) - \theta(\pm x - R)\nabla\theta_0(\mp x)\right]\overline{u}_t(x,\tau)dxd\tau\right].$$

Avaliando o limite quando $R \to \infty$, como $\{\nabla\theta(\pm x - R)\}_{R\geq 0}$ é limitado em L^2 temos

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} V(|u(x,\tau)|^2)\theta_R^\pm(x)dx - lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} V(|\varphi(x)|^2)\theta_R^\pm(x)dx =$$

$$= -\int_{\mathbb{R}} \left[|\nabla u(x,\tau)|^2 - |\nabla\varphi(x)|^2\right]\theta_0(\pm x)dx$$
$$\pm 2\text{Re}\left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} \nabla u(x,\tau)\nabla\theta_0(\pm x)\overline{u}_t(x,\tau)dxd\tau\right].$$

Observe que o limite $\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} V(|u(x,\tau)|^2)\theta_R^\pm(x)dx$ depende apenas de θ_0 mas não de ϕ no caso em que $\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}} V(|\varphi(x)|^2)\theta_R^\pm(x)dx$ não existe. $\square$

Proposição 4.1.2. *Sejam* $n \in \mathbb{N}$, $k > \frac{n}{2}$ *e* $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$. *Então, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *a aplicação* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$, *definida por*

$$f(t) = \varphi(x + t(y - x)),$$

é absolutamente contínua.

Demonstração. Sejam $x \neq y$ em $\mathbb{R}^n$ e considere uma sequência $\{\upsilon_\ell\}_{\ell\in\mathbb{N}}$ de funções em $C^k(\mathbb{R}^n)$ convergindo para φ (onde o limite é considerado em X^k). Como toda função contínua definida em um intervalo fechado é absolutamente contínua, para cada ℓ

$$f_\ell : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ definida por } f_\ell(t) = \upsilon_\ell(x + t(y-x)),$$

é absolutamente contínua. Afirmamos que os módulos das aplicações f_ℓ são uniformemente limitados.

De fato, para cada ℓ, como υ_ℓ converge para $\varphi \in X^k$, temos que υ_ℓ é limitada. Escolhidos $m \in \mathbb{N}, \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}, \{\beta_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, com $0 \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m < \beta_m \leq 1$ e tais que $\sum_{j=1}^{m}(\beta_j - \alpha_j) < \delta$, então, para todo ℓ, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} |f_\ell(\beta_j) - f_\ell(\alpha_j)| &= \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{\alpha_j}^{\beta_j} f_\ell'(s)\,ds \right| \\
&\leq \int_{\cup_{j=1}^{m}(\alpha_j,\beta_j)} |f_\ell'(s)|\,ds \\
&\leq \left(\int_{\cup_{j=1}^{m}(\alpha_j,\beta_j)} ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\cup_{j=1}^{m}(\alpha_j,\beta_j)} |f_\ell'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f_\ell'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_\ell'(s)|^2 ds &= \int_0^1 |(y-x)\cdot \nabla \upsilon_\ell(x + s(y-x))|^2 ds \\
&\leq |y-x| \int_0^{|y-x|} \left| \nabla \upsilon_\ell \left(x + s\frac{y-x}{|y-x|} \right) \right|^2 ds.
\end{aligned}$$

Portanto, escrevendo $\Omega = \left\{ x + t\frac{y-x}{|y-x|}, t \in \mathbb{R} \right\}$, existe uma constante $C > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^1 |f_\ell'(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} &\leq |y-x|^{\frac{1}{2}} \, \|\nabla \upsilon_\ell|_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C|y-x|^{\frac{1}{2}} \, \|\nabla \upsilon_\ell\|_{H^{k-1}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C|y-x|^{\frac{1}{2}} \sup_\ell \|\upsilon_\ell\|_{X^k(\mathbb{R}^n)}, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

onde, na segunda passagem, foi utilizada a desigualdade (5.6) proveniente da demonstração do Teorema do Traço (ver Apêndice).

□

Proposição 4.1.3. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função uniformemente contínua. Se* $\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta_R^{\pm} dx$ *existe, então* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

Demonstração. Suponhamos que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \neq 0$. Logo, existiria $\epsilon > 0$ tal que para todo $A > 0$, seria possível encontrar $x > A$ com $|f(x)| > \epsilon$. Mas, f é uniformemente contínua e, portanto, existe $\delta > 0, \delta < 2$, tal que $|x - y| < \delta$ implica $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, é possível construir uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to \infty$ com $|f(y)| \geq \frac{\epsilon}{2}$ quando $|y - x_n| \leq \delta$. Os termos da sequência podem ser escolhidos de tal modo que cada intervalo $(x_n - \delta, x_n + \delta)$ contenha apenas um deles. Sem perda de generalidade, podemos assumir $f(x_n) > 0$. Seja

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x \leq 0 \\ 0, \text{ se } x \geq \frac{\delta}{2}, \end{cases}$$

então, usando a notação anterior, como θ é uma função não crescente,

$$\begin{aligned} \theta_{x_n+\frac{\delta}{2}}(y) &= \theta\left(\frac{y}{x_n + \frac{\delta}{2}}\right) \\ &\geq \theta\left(\frac{y}{x_n - \delta}\right) = \theta_{x_n-\delta}(y) \end{aligned} \tag{4.10}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\theta_{x_n-\delta}(y)dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\theta_{x_n+\frac{\delta}{2}}(y)dy \right| \\ &\qquad = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\left[\theta_{x_n+\frac{\delta}{2}}(y) - \theta_{x_n-\delta}(y)\right] dy \\ &\qquad \geq \int_{x_n-\frac{\delta}{2}}^{x_n+\frac{\delta}{2}} f(y)dy \\ &\qquad \geq \frac{\delta\epsilon}{2}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

o que contradiz nossa hipótese de existência do limite $\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\theta_R^{\pm} dx$.

Então, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. □

Nosso objetivo agora é mostrar a Proposição 4.1.1 para $\varphi \in X^k(\mathbb{R}^n)$, com $k > \frac{n}{2}$. Para isso assumiremos uma hipótese adicional a respeito da não linearidade de f, além da seguinte notação: Sejam $n = k \in \{1,2\}$. Suponhamos que $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}_+)$ e que, para algum $\rho_0 > 0$, tenhamos $f(\rho_0) = 0$ e $f'(\rho_0) < 0$.

Definamos

$$V(r) := -\int_{\rho_0}^{r} f(\tau)d\tau.$$

Se $n = 1$, assuma que $\{r, V(r) = 0\}$ é discreto; se $n = 2$, assuma que V é não-negativa em $\mathbb{R}_+$.

Temos, $V(\rho_0) = 0, V'(\rho_0) = -f(\rho_0) = 0$ e $V''(\rho_0) = -f'(\rho_0) > 0$.

Dado $0 < \delta_0 < \rho_0$, é possível encontrar $0 < C_1 < 1 < C_2$ tais que

$$C_1 \frac{V''(\rho_0)}{2}(r-\rho_0)^2 \leq V(r) \leq C_2 \frac{V''(\rho_0)}{2}(r-\rho_0)^2. \tag{4.12}$$

Nestas condições, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.2. *Sejam* $n = k \in \{1,2\}, \varphi \in X^k(\mathbb{R}^n), x \mapsto V(|\varphi_0(x)|^2) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e suponha que existam* $0 < \delta_1 < \delta_0$ *e* $A > 0$ *tais que* $|x| \geq A$ *impliquem na desigualdade* $||\varphi_0(x)|^2 - \rho_0| < \delta_1$. *Se* (T_*, T^*) *é o intervalo maximal de solução de* (4.1) *então, a energia*

$$E(u(t)) := \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u(x,t)|^2 + V(|u(x,t)|^2)]dx \tag{4.13}$$

é finita e conservada para todo $t \in (T_*, T^*)$.

Demonstração. Consideremos a identidade aproximada $\rho_\ell \leq 1$, com $\int \rho_\ell = 1$, *supp* $\rho_\ell \subset B(0, \frac{1}{\ell})$ e $\rho_\ell \geq 0$. Primeiramente daremos uma estimativa para $\left|\rho_0 - |\rho_\ell * \varphi(x)|^2\right|$ com ℓ suficientemente grande e $|x| \geq A$. Podemos considerar dois casos:

Caso 1) se $|\rho_\ell * \varphi(x)| \geq \sqrt{\rho_0}$, então

$$|\rho_0 - |\rho_\ell * \varphi(x)|^2| \leq (\sqrt{\rho_0} + \|\varphi\|_{L^\infty})(|\rho_\ell * \varphi(x)| - \sqrt{\rho_0});$$

Caso 2) se $|\rho_\ell * \varphi(x)| < \sqrt{\rho_0}$, então

$$|\rho_0 - |\rho_\ell * \varphi(x)|^2| \leq (\sqrt{\rho_0} + \|\varphi\|_{L^\infty})(\sqrt{\rho_0} - |\rho_\ell * \varphi(x)|).$$

Para o primeiro caso, temos:

$$\begin{aligned} 0 < |\rho_\ell * \varphi(x)| - \sqrt{\rho_0} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)(|\varphi(y)| - \sqrt{\rho_0})dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\,||\varphi(y)| - \sqrt{\rho_0}|\,dy. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Já no segundo caso, note que se $|x| \geq A$,

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|^2 &\geq \rho_0 - |\rho_0 - |\varphi(x)|^2| \\ &\geq \quad p_0 - \delta_1 > 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Seja $\alpha := \sqrt{\rho_0 - \delta_1}$, para cada $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escolher $\upsilon \in \mathbb{C}$ tal que $|\upsilon| = 1$ e $\upsilon\overline{\varphi(x)} \in i\mathbb{R}$. Dado qualquer $y \in \mathbb{R}^n$, podemos decompor $\varphi(y)$, na $\mathbb{R}-$ base $\{\varphi(x), \upsilon\}$ de $\mathbb{C}$, com

$$\varphi(y) = \mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}]\frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|^2} + P_\upsilon(\varphi(y))\upsilon,$$

onde $P_\upsilon(\varphi(y))$ é a projeção de $\varphi(y)$ sobre υ. Com efeito, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ são tais que $\varphi(y) = \lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\upsilon$ então,

$$\begin{aligned} \varphi(y)\overline{\varphi(x)} &= \lambda_1\varphi(x)\overline{\varphi(x)} + \lambda_2\upsilon\overline{\varphi(x)} \\ &= \lambda_1|\varphi(x)|^2 + \lambda_2\upsilon\overline{\varphi(x)}, \end{aligned}$$

e, pela escolha de $\upsilon, \lambda_1 = \mathrm{Re}(\varphi(y)\overline{\varphi(x)})\frac{1}{|\varphi(x)|^2}$.

Logo:

$$\begin{aligned} 0 &< \sqrt{\rho_0} - |\rho_\ell * \varphi(x)| \\ &\leq \sqrt{\rho_0} - \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\varphi(y)dy\right| \\ &\leq \sqrt{\rho_0} - \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}]\frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|^2}dy\right| - \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)P(\varphi(y))\upsilon dy\right| \\ &\leq \sqrt{\rho_0} - \left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}]\frac{\varphi(x)}{|\varphi(x)|^2}dy\right|. \end{aligned}$$

Procedendo como na Proposição 1.4.3, podemos escolher $p \in \mathbb{N}$ e $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|x-y| \leq \frac{1}{\ell_0}$ implica $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^{1-\frac{n}{p}}\,\|\nabla\varphi\|_{L^p} \leq \frac{\alpha}{2}$.

Como $\mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}] = |\varphi(x)|^2 + \mathrm{Re}[(\varphi(y) - \varphi(x))\overline{\varphi(x)}]$, temos, para $\ell \geq \ell_0$ e $y \in B(x, \frac{1}{\ell_0})$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}] &\geq |\varphi(x)|^2 - |\varphi(y) - \varphi(x)||\overline{\varphi(x)}| \\ &\geq \rho_0 - \delta_1 - \frac{\alpha}{2}\sqrt{\rho_0 - \delta_1} = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}] \geq \frac{\alpha^2}{2}$. Então, para $\ell \geq \ell_0$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sqrt{\rho_0} - |\rho_\ell * \varphi(x)| \\
&\leq \sqrt{\rho_0} - \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\mathrm{Re}[\varphi(y)\overline{\varphi(x)}]\frac{1}{|\varphi(x)|}dy \\
&= \sqrt{\rho_0} - |\varphi(x)| + \frac{1}{|\varphi(x)|}\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\mathrm{Re}[(\varphi(y)-\varphi(x))\overline{\varphi(x)}]dy \\
&\leq |\sqrt{\rho_0} - |\varphi(x)|| + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|dy. \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Tomemos $\epsilon > 0$, como $\rho_\ell * \varphi \overset{L^\infty}{\to} \varphi$, existe $\ell_1 \geq \ell_0$ tal que $\ell \geq \ell_1$ implica $\left\||\rho_\ell * \varphi|^2 - |\varphi|^2\right\|_{L^\infty} \leq \delta_0 - \delta_1$. Logo, sempre que $|x| > A$ e $\ell > \ell_1$, temos $\left||\rho_\ell * \varphi(x)|^2 - \rho_0\right| \leq \delta_0$. Portanto, para $|x| > A$ e $\ell > \ell_1$, se tomamos $r = |\rho_\ell * \varphi(x)|^2$ em (4.12) temos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq V\left(|\rho_\ell * \varphi(x)|^2\right) \\
&\leq C_2\frac{V''(\rho_0)}{2}\left||\rho_\ell * \varphi(x)|^2 - \rho_0\right|^2. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Sejam $B \geq A+1$, $\ell \geq \ell_1$, e considere o seguinte conjunto

$$A_{\rho_0} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \geq B \text{ e } |\rho_\ell * \varphi(x)| - \sqrt{\rho_0} \geq 0\}.$$

Se $\chi_{A_{\rho_0}}$ denota a função característica do conjunto A_{ρ_0}, as desigualdades (4.14), (4.16) e (4.17) implicam

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} V\left(|\rho_\ell * \varphi(x)|^2\right) &\leq C_2\frac{V''(\rho_0)}{2}\left(\sqrt{\rho_0} + \|\varphi\|_{L^\infty}\right)^2 \int_{|x|\geq B} [|\rho_\ell * \varphi(x)| - \sqrt{\rho_0}]^2\, dx \\
&\leq C_2\frac{V''(\rho_0)}{2}\left(\sqrt{\rho_0} + \|\varphi\|_{L^\infty}\right)^2 \times \\
&\times \int_{|x|\geq B}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\,||\varphi(y)| - \sqrt{\rho_0}|\,dy\right)^2 \chi_{A_{\rho_0}}\right. \\
&\left. + \left(|\sqrt{\rho_0} - |\varphi(x)|| + \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|dy\right)^2\left(1-\chi_{A_{\rho_0}}\right)\right] dx.
\end{aligned}$$

Então, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} V\left(|\rho_\ell * \varphi(x)|^2\right) \leq \\
&\leq C_2\frac{V''(\rho_0)}{2}\left(\sqrt{\rho_0} + \|\varphi\|_{L^\infty}\right)^2 \int_{|x|\geq B}\left[\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)\,||\varphi(y)| - \sqrt{\rho_0}|^2\,dy\right. \\
&\left. + 2||\varphi(x)| - \sqrt{\rho_0}|^2 + 2\left(\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\ell(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|dy\right)^2\right] dx. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq B}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\ell(x-y)||\varphi(y)|-\sqrt{\rho_0}|^2 dy\,dx\\
\leq\ & \int_{|x|\geq B}\int_{|y|\geq B-\frac{1}{\ell}}\rho_\ell(x-y)\frac{||\varphi(y)|^2-\rho_0|^2}{\rho_0}dy\,dx\\
\leq\ & \frac{1}{\rho_0}\int_{|y|\geq B-\frac{1}{\ell}}||\varphi(y)|^2-\rho_0|^2 dy\\
\leq\ & \frac{2}{C_1\rho_0 V''(\rho_0)}\int_{|y|\geq B-\frac{1}{\ell}}V(|\varphi(x)|^2dx, \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq B}2|\sqrt{\rho_0}-|\varphi(x)||^2dx\\
\leq\ & \frac{2}{\rho_0}\int_{|x|\geq B}|\rho_0-|\varphi(x)|^2|^2dx\\
\leq\ & \frac{4}{C_1\rho_0V''(\rho_0)}\int_{|x|\geq B}V(|\varphi(x)|^2dx, \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

e, para a terceira integral no segundo membro de (4.18) usaremos a Proposição 4.1.2. Da continuidade absoluta da aplicação $t\mapsto\varphi(x+t(y-x)), t\in[0,1]$, podemos escrever

$$|\varphi(y)-\varphi(x)|=\left|\int_0^1(y-x)\nabla\varphi(x+t(y-x))dt\right|.$$

Daí, fazendo as mudanças de variáveis, $\tilde{y}=ty+(1-t)x$ e $\tilde{x}=\frac{x-\tilde{y}}{t}$, respectivamente, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq B}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\ell(x-y)|\varphi(y)-\varphi(x)|dy\right)^2dx\\
\leq\ & \int_{|x|\geq B}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\ell(x-y)|y-x|^2\int_0^1\nabla\varphi(x+t(y-x))dt\,dy\,dx\\
\leq\ & \frac{1}{\ell^2}\int_0^1\int_{|x|\geq B}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\ell(\frac{\tilde{y}-x}{t})|\nabla\varphi(\tilde{y}))\frac{d\tilde{y}}{t^n}dx\,dt\\
\leq\ & \frac{1}{\ell^2}\int_0^1\int_{|x|\geq B}\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\ell(-\tilde{x})|\nabla\varphi(\tilde{y}))d\tilde{x}\,d\tilde{y}\,dt\\
=\ & \frac{\|\nabla\varphi\|_{L^2}}{\ell^2}. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Tomando B suficientemente grande, podemos assumir que

$$(\sqrt{\rho_0}+\|\varphi\|_\infty)^2\frac{C_2}{C_1\rho_0}\left[\int_{|y|\geq B-1}V(|\varphi|^2)dy+2\int_{|x|\geq B}V(|\varphi|^2)dx\right]<\frac{\epsilon}{2}. \tag{4.22}$$

Escolhidos $\ell_2 \geq \ell_1$ tais que

$$2C_2\frac{V''(\rho_0)}{2}(\sqrt{\rho_0}+\|\varphi\|_\infty)^2\frac{\|\nabla\varphi\|_{L^2}}{\ell_2^2}<\frac{\epsilon}{2}. \tag{4.23}$$

De volta à desigualdade (4.18), com o auxílio das desigualdades (4.19), (4.20), (4.21), (4.22) e (4.23), temos:

$$\int_{|x|\geq B}V(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2)dx<\epsilon. \tag{4.24}$$

Como $\rho_\ell*\varphi\to\varphi$ em L^∞, podemos considerar B suficientemente grande e assumir

$$\int_{|x|\geq B}V(|\varphi|^2)dx<\epsilon; \tag{4.25}$$

e, além disso, que existem $\ell_3\geq\ell_2$ tais que, para $\ell>\ell_3$,

$$\int_{|x|<B}\left|V\left(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2\right)-V\left(|\varphi(x)|^2\right)\right|dx<\epsilon.$$

Evidentemente,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\left|V\left(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2\right)-V\left(|\varphi(x)|^2\right)\right|dx=\\ &=\int_{|x|<B}\left|V\left(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2\right)-V\left(|\varphi(x)|^2\right)\right|dx+\\ &\qquad+\int_{|x|\geq B}\left|V\left(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2\right)-V\left(|\varphi(x)|^2\right)\right|dx,\end{aligned}$$

donde, após aplicar a desigualdade triangular lançando mão das desigualdades (4.24) e (4.25) na última parcela, obtém-se, para $\ell\geq\ell_3$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|V\left(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2\right)-V\left(|\varphi(x)|^2\right)\right|dx<3\epsilon,$$

o que significa que $V\left(|(\rho_\ell*\varphi)(x)|^2\right)\to V\left(|\varphi(x)|^2\right)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\ell\in\mathbb{N}$. Consideremos $u_\ell(t)$ a solução de

$$\begin{cases} iu_t+\Delta_x u+f(|u|^2)u &=0, \quad x\in\mathbb{R}^n, t\in\mathbb{R}_+,\\ u(x,0) &=\varphi,\end{cases}$$

e denotemos por $(T_*(\ell), T^*(\ell))$ seu intervalo maximal de existência. Da Proposição 4.1.1 temos que, para $t \in (T_*(\ell), T^*(\ell))$, vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla u_\ell(t)|^2 + V(|u_\ell(t)|^2)\right] dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla \rho_\ell * \varphi|^2 + V(|\rho_\ell * \varphi|^2)\right] dx. \quad (4.26)$$

Considere $T_* < \widetilde{T}_1 < \widetilde{T}_2 < T^*$. Como vale a continuidade em relação ao dado inicial φ, existem $K, \delta > 0$ tais que $\|\rho_\ell * \varphi - \varphi\|_{X^k} < \delta$ implica
$T_*(\ell) < \widetilde{T}_1 < \widetilde{T}_2 < T^*(\ell)$ e $\|u_\ell - u(t)\|_{X^k} \leq K \|\rho_\ell * \varphi - \varphi\|_{X^k}, t \in [\widetilde{T}_1, \widetilde{T}_2]$.

Em particular, como $\rho_\ell * \varphi \to \varphi$ em $X^k(\mathbb{R}^n)$, vale $\nabla u_\ell(t) \to \nabla u(t)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla \rho_\ell * \varphi = \rho_\ell \nabla \varphi \to \nabla \varphi$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Resta mostrar que $V\left(|\rho_\ell * \varphi|^2\right) \to V\left(|\varphi|^2\right)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ o que faremos no que se segue.

Para o primeiro caso $(n = 1)$, já temos que $V\left(|\rho_\ell * \varphi|^2\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para $\ell \geq \ell_3$. Tomando θ como na Proposição 4.1.1 segue

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} V\left(|\rho_\ell * \varphi(x)|^2\right) \theta_R^{\pm}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} V\left(|\rho_\ell * \varphi(x)|^2\right) \theta_0(\pm x) dx.$$

Além disso, $\displaystyle\lim_{R \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} V\left(|u_\ell(x,t)|^2\right) \theta_R^{\pm}(x) dx$ existe para cada $\ell \in \mathbb{N}$ e não depende da escolha de θ. Portanto, $V\left(|u_\ell(x,t)|^2\right) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, por conta da Proposição 4.1.3 acima.

Agora, $\{r; V(r) = 0\}$ é, por hipótese, um conjunto discreto e $u_\ell(t)$ é contínua e limitada na reta, logo existe $r_\pm^\ell(t) \in \mathbb{R}$ tal que

$$V\left(r_\pm^\ell(t)\right) = 0 \text{ e } \lim_{x \to \infty} |u_\ell(x,t)|^2 = r_\pm^\ell(t).$$

Fixados $t \in (T_*(\ell), T^*(\ell))$ e $h \in \mathbb{R}$ tais que $t + h \in (T_*(\ell), T^*(\ell))$ sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\epsilon > 0$. Temos da desigualdade triangular

$$\begin{aligned} \left|r_\pm^\ell(t+h) - r_\pm^\ell(t)\right| \leq \left|r_\pm^\ell(t+h) - u_\ell(x,t+h)\right| + |u_\ell(x,t+h) - u_\ell(x,t)| \\ + \left|u_\ell(x,t) - r_\pm^\ell(t)\right|. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Podemos escolher h suficientemente pequeno de modo que

$$\|u_{ell}(t+h) - u_\ell(t)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Isso é possível já que $u_\ell \in C((T_*(\ell), T^*(\ell), X^k) \subset C((T_*(\ell), T^*(\ell), L^\infty)$. Podemos ainda escolher $|x|$ suficientemente grande de modo que

$$\left|r_\pm^\ell(t+h) - u_\ell(x,t+h)\right| < \frac{\epsilon}{3} \text{ e } \left|u_\ell(x,t) - r_\pm^\ell(t)\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, $\left|r_{\pm}^{\ell}(t+h)-r_{\pm}^{\ell}(t)\right|<\epsilon$. Isso significa que a aplicação $r_{\pm}^{\ell}$ é contínua assumindo valores em um conjunto discreto, isto significa que $r_{\pm}^{\ell}$ é constante.

Para $\ell \geq \ell_3$, temos $\left\||\rho_\ell * \varphi|^2-|\varphi|^2\right\|_{L^\infty} \leq \delta_0-\delta_1$ e $r_{\pm}^{\ell}(0)=\rho_0$. Logo, para todos $\ell \geq \ell_3$ e $t \in (T_*(\ell), T^*(\ell))$ temos

$$\lim_{x\to\pm\infty} |u_\ell(x,t)|^2=\rho_0.$$

Sejam $\ell \geq \ell_4 \geq \ell_3$, podemos afirmar

$$\begin{aligned}
&\left\||u_\ell(t)|^2-|u(t)|^2\right\|_{L^\infty}= \\
&\quad =\|(u_\ell(t)-u(t))\cdot(u_\ell(t)+u(t))\|_{L^\infty} \\
&\quad \leq \|u_\ell(t)-u(t)\|_{L^\infty}\|u_\ell(t)+u(t)\|_{L^\infty} \\
&\quad \leq \|u_\ell(t)-u(t)\|_{L^\infty}(\|u_\ell(t)-u(t)\|_{L^\infty}+2\|u(t)\|_{L^\infty}) \\
&\quad \leq K\|\rho_\ell*\varphi-\varphi\|_{X^k}\left(K\|\rho_\ell*\varphi-\varphi\|_{X^k}+2\sup_{t\in[\widetilde{T}_1,\widetilde{T}_2]}\|u(t)\|_{L^\infty}\right) \\
&\quad \leq \tfrac{\delta_0-\delta_1}{2}.
\end{aligned}$$

Seja $D>0$ e suponha $||u_{\ell_4}(x,t)-\rho_0|\leq\delta_1$ sempre que $|x|\geq D$. Nestas condições, para $\ell\geq\ell_4, |x|\geq D$, temos $V(|u_\ell(x,t)|)$ não negativa pois:

$$\begin{aligned}
&||u_\ell(x,t)|^2-\rho_0| \\
&\quad \leq ||u_\ell(x,t)|^2-|u(x,t)|^2|+||u(x,t)|^2-|u_{\ell_4}(x,t)|^2|+||u_{\ell_4}(x,t)|^2-\rho_0| \\
&\quad \leq 2\tfrac{\delta_0-\delta_1}{2}+\delta_1=\delta_0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geq D} V\left(|u_\ell(x,t)|^2\right)dx \\
&\quad =\int_{-\infty}^{\infty}\left[|\nabla\rho_\ell*\varphi|^2+V\left(|\rho_\ell*\varphi|^2\right)\right]dx \\
&\qquad -\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u_\ell(x,t)|^2dx-\int_{|x|\leq D}V\left(|u_\ell(x,t)|^2\right)dx.
\end{aligned}$$

Portanto, quando $\ell\to\infty$, da igualdade (4.26) segue que $\int_{|x|\geq D} V\left(|u_\ell(x,t)|^2\right)dx$ converge para

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[|\nabla\varphi|^2+V\left(|\varphi|^2\right)\right]dx-\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u(x,t)|^2dx-\int_{|x|\leq D}V\left(|u(x,t)|^2\right)dx,$$

e a sequência $\{V\left(|u_\ell(\cdot,t)|^2\right)\chi_{\{|x|\geq D\}}\}_{\ell\geq\ell_4}$ é limitada em L^1. Como $u_\ell(t)$ converge para $u(t)$, $V\left(|u_\ell(t)|^2\right)$ converge para $V\left(|u(t)|^2\right)$, $V\left(|u(t)|^2\right)\in L^1$ e

$$\int V\left(|u(t)|^2\right)dx \leq \liminf_{\ell\to\infty}\int V\left(|u_\ell(t)|^2\right)dx.$$

Fazendo $\ell \to \infty$ na equação (4.26) segue:

$$\int \left[|\nabla u(t)|^2 + V(|u(t)|^2)\right] dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla \varphi|^2 + V(|\varphi|^2)\right] dx. \tag{4.28}$$

Analogamente, tomando $t < 0$, é possível mostrar que

$$\int \left[|\nabla u(t)|^2 + V(|u(t)|^2)\right] dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla \varphi|^2 + V(|\varphi|^2)\right] dx. \tag{4.29}$$

e, portanto, vale (4.2) no caso $n = 1$.

Para o caso $n = 2$, já temos por hipótese $V \geq 0$. Além disso, para $\ell \geq \ell_3$ a aplicação $x \to V\left(|u_\ell(x,t)|^2\right)$ está em L^1 e, portanto, podemos repetir os mesmos argumentos para verificar a validade de (4.2) neste segundo caso. $\square$

4.2 Boa Colocação Global

Para $n = 1$, as leis de conservação obtidas na seção anterior implicam a boa existência global para uma solução de (1) no espaço $X^1(\mathbb{R})$, conforme o seguinte resultado em [Ga].

Teorema 4.2.1. *Sejam* $n = k = 1$. *Suponha* $f \in C^{k+1}$, $\rho_0 > 0$, $V(r) = -\int_{\rho_0}^{r} f(\tau)d\tau$ *e* $\varphi \in X^1(\mathbb{R})$ *nas mesmas condições do Teorema 4.1.2. Se, para algum* $C > 0$, *tem-se* $V(r) \geq C\,(\rho_0 - r)^2$, *então* $u \in C_b\big(\mathbb{R}, X^1(\mathbb{R})\big)$.

Demonstração. Considere (T_*, T^*) o intervalo maximal de existência da solução u de (1). Definamos a energia em $t = 0$ por

$$E_0 = \int_{\mathbb{R}} \left[|\partial_x \varphi(x)|^2 + V(|\varphi(x)|^2)\right] dx.$$

O Teorema 4.1.2 garante que a energia é conservada para $t \in (T_*, T^*)$. Do Teorema 3.1.3 e da Observação 3.1.3 temos que, se T^* é finito, então $\|u(t)\|_{X^1} \to \infty$ quando $t \to T^*$ ou $t \to T_*$ Como $V \geq 0$, da conservação de energia segue que, para todo t,

$$E_0 = \int_{\mathbb{R}} \left[|\partial_x u(x,t)|^2 + V(|u(x,t)|^2)\right] dx,$$

e, portanto, $\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(x,t)|^2 dx \leq E_0$. Portanto, para mostrar que $\|u(t)\|_{X^1}$ não tende a ∞ em um tempo finito, é suficiente mostrar que $\|u(t)\|_{L^\infty}$ não tende a ∞ em tempo finito.

Do teorema do mergulho de Sobolev temos $H^1(\mathbb{R}) \subset L^\infty(\mathbb{R})$, e, portanto,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty}^2 &\leq \rho_0 + \left\| |u(t)|^2 - \rho_0 \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \rho_0 + C \left\| |u(t)|^2 - \rho_0 \right\|_{H^1} \\ &\leq \rho_0 + C \sqrt{\left\| |u(t)|^2 - \rho_0 \right\|_{L^2}^2 + \left\| \partial_x \left(|u(t)|^2 - \rho_0 \right) \right\|_{L^2}^2}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

De (4.30) e da hipótese $V(r) \geq C(\rho_0 - r)^2$, segue

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^\infty}^2 &\leq \rho_0 + C \sqrt{E_0 + 4 \|u(t)\|_{L^\infty}^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 \, dx} \\ &\leq \rho_0 + C\sqrt{E_0} + 2C \|u(t)\|_{L^\infty} \sqrt{E_0}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Portanto, $\|u(t)\|_{L^\infty}$ não pode tender a ∞ em tempo finito, o que implica que a solução u está definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto, juntamente com o que foi mostrado no capítulo 3, significa que o problema (1) tem boa colocação global. Além disso, $\|u(t)\|_{L^\infty}$ é limitada em $\mathbb{R}$ e, logo, $(u(t))_{t\in\mathbb{R}}$ é limitada em $X^1(\mathbb{R})$. $\square$

4.3 Algumas Aplicações

Exemplo 4.3.1 (A Equação de Gross-Pitaevskii)**.** *Seja* $n = 1$ *ou* $n = 2$ *e tomemos* $f(|u|^2) = 1 - |u|^2$ *em* (1)*, isto é, consideremos*

$$iu_t + \Delta u + \left(1 - |u|^2\right) u = 0. \tag{4.32}$$

Então, fazendo $r = |u|^2$*, temos* $f(1) = 0, f'(1) = -1$ *e*

$$V(r) = -\int_1^r f(s)ds = \frac{(r-1)^2}{2} \geq 0.$$

Portanto, estão garantidas as hipóteses do Teorema 4.1.2, e a energia é conservada.

O Exemplo 4.3.1 é um caso particular da equação de decaimento cúbico, obtida ao considerar $f(|u|^2) = \rho_0 - |u|^2$ em (1). Mais geralmente, temos:

Exemplo 4.3.2. *Sejam* $\alpha > 0$, $p \geq \frac{1}{2}$ *se* $n = 1$, *e* $p \geq 1$, *se* $n = 2$. *Tomemos em* (1), $f(|u|^2) = \alpha\left(\rho_0^p - |u|^{2p}\right)$, *isto é, consideremos*

$$iu_t + \Delta u + \alpha\left(\rho_0^p - |u|^{2p}\right) u = 0. \tag{4.33}$$

Fazendo, como no Exemplo 4.32, $r = |u|^2$ *observamos que, para* $n = 1$*, a função* $f(r) = \alpha\left(\rho_0^p - r^p\right)$ *só é diferenciável na origem quando* $p = 1$ *ou* $p \geq 2$*; e para* $n = 2$*,* f *só é diferenciável se* $p = 1$*,* $p = 2$ *ou* $p \geq 3$*. Portanto, a hipótese* $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}_+)$ *nos é negada.*

Entretanto, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} F: & X^k(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & X^k(\mathbb{R}^n) \\ & u & \longmapsto & f(|u|^2)u \end{array}$$

é de classe C^1*, o que é suficiente para a conclusão do Teorema 4.1.2 nos demais casos.*

No caso $n = 1$ *e* $p \geq 1$*, temos*

$$\begin{aligned} V(r) &= \alpha\rho_0^p(\rho_0 - r) + \frac{1}{p+1}\left(r^{p+1} - \rho_0^{p+1}\right) \\ &\geq \alpha\rho_0^{p-1}(\rho_0 - r)\frac{\rho_0 - r}{2} = \frac{\alpha\rho_0^{p-1}}{2}(\rho_0 - r)^2, \end{aligned} \tag{4.34}$$

satisfazendo assim a hipótese do Teorema 4.2.1. Portanto, neste caso, o problema (1) *tem boa colocação global.*

Apêndice A

Mudança de Coordenadas

Definição A.0.1. *Seja* Ω *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$. *Uma aplicação* $h : \to \mathbb{R}^n$ *é uma mudança de coordenadas em* Ω *quando* h *é um difeormofismo em* Ω; *isto é:*

(i) $h \in C^1(\Omega)$;

(ii) h *é injetiva;*

(iii) a derivada de h *é injetiva ou, equivalentemente,* $\det Dg(x) \neq 0$, *para todo* $x \in \Omega$.

Exemplos e aplicações de mudanças de coordenadas podem ser encontradas em bons livros de Cálculo Diferencial e Integral. Dedicamos esta seção à apresentação da mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas que utilizamos exaustivamenste no decorrer do texto.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação integrável. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, sempre podemos escrever $x = \rho\upsilon$, onde $\rho \in \mathbb{R}$ e $\upsilon \in \mathbb{S}^{n-1}$, isto é, $\|\upsilon\| = 1$. Assim, considerando ρ fixado na reta temos $dx = \rho^{n-1} d\upsilon$ e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\upsilon)\rho^{n-1}\,d\upsilon \right) d\rho.$$

Apêndice B

Teorema do Traço

Trascrevemos abaixo algumas considerações, encontradas em [AB], a respeito do traço de uma aplicação.

Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e considere a aplicação $f : \Omega \to \mathbb{R}$. O traço de f é a sua restrição ao bordo de Ω, quando é possível defini=la; isto é,

$$\text{traço}(f) = f|_{\partial\Omega}.$$

Dados $0 < k < n$ em $\mathbb{N}$, podemos decompor $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$. Se $\phi \in C^0(\mathbb{R}^n)$, então a aplicação restrição

$$R : C^0(\mathbb{R}^n) \to C^0(\mathbb{R}^{n-k})$$

é definida por

$$R\phi(\overline{x}) = \phi(\overline{x}, 0),\ \forall \overline{x} \in \mathbb{R}^{n-k}$$

(aqui 0 representa a origem de $\mathbb{R}^k$).

Teorema B.0.1. *Sejam $0 < k < n$ em $\mathbb{N}$. Então, é possível extender a aplicação R a uma aplicação linear limitada de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^{s-\frac{k}{2}}(\mathbb{R}^{n-k})$, desde que $s > \frac{k}{2}$.*

Demonstração. Seja $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Temos que o espaço de Schwartz é denso em H^s e $H^{s-\frac{k}{2}}$ (obseve que $H^s \subset H^{s-\frac{k}{2}}$).Podemos considerar, portanto, $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ e, neste espaço, a aplicação R está bem definida. Considere $v = Ru \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-k})$. Da transformada de Fourier segue, para $y \in \mathbb{R}^{n-k}$, a expressão

$$v(y) = (2\pi)^{-\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} e^{i(\eta \cdot y)} \hat{v}(\eta)\, d\eta.$$

Fazendo $\xi = (\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, segue

$$\begin{aligned} v(y) &= u(y,0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i[\xi \cdot (y,0)]} \hat{u}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-\frac{n-k}{2}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} e^{i(\eta \cdot y)} \left[(2\pi)^{-\frac{k}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} \hat{u}(\eta,\zeta)\, d\zeta \right] d\eta. \end{aligned}$$

Multiplicando o integrando por $(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^{-\frac{s}{2}}$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos:

$$|\hat{v}(\eta)|^2 \leq (2\pi)^{-k}\int_{\mathbb{R}^k}|\hat{u}(\eta,\zeta)|^2(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^s d\zeta \int_{\mathbb{R}^k}(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^{-s}d\zeta.$$

Como $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^k}(1+|\eta|^2+|\zeta|^2)^{-s}d\zeta$ é finita para $s>\frac{k}{2}$. Portanto, existe uma constante $C>0$ tal que

$$|\hat{v}(\eta)|^2\left(1+|\eta|^2\right)^{s-\frac{k}{2}} \leq C^2\int_{\mathbb{R}^k}|\hat{u}(\eta,\zeta)|^2\left(1+|\eta|^2+|\zeta|^2\right)^s d\zeta.$$

Integrando em relação à variável η segue:

$$\|v\|_{H^{s-\frac{k}{2}}(\mathbb{R}^{n-k})} \leq C\,\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}, \tag{B.1}$$

o que significa que R é um operador linear limitado sobre $H^{s-\frac{k}{2}}(\mathbb{R}^{n-k})$. $\square$

Apêndice C

Alguns Resultados Adicionais

Aqui listamos alguns resultados adicionais utilizados neste trabalho. Assumiremos aqui os conceitos de conjunto mensurável e função mensurável como conhecidos (na notação do Capítulo 1, podemos considerar as funções $f \in L^p$.) Para detalhes consultar [AB].

1. *O Teorema da Convergência Monótona de Lebesgue.*

   Teorema C.0.2. *Se* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência de funções mensuráveis satisfazendo, para quase todo* $x \in \Omega$, *a condição*

   $$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_{n-1}(x) \leq f_n(x) \leq \cdots,$$

   então

   $$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) dx. \tag{C.1}$$

2. *O Lema de Fatou*

   Teorema C.0.3. *Seja* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis, não negativas. Então,*

   $$\int_\Omega \left(\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right) dx \leq \liminf_{n \to \infty} \int_\Omega f_n(x)dx. \tag{C.2}$$

3. *O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*

Teorema C.0.4. *Seja* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções mensuráveis e suponha que cada uma delas converge pontualmente, para quase todo* $x \in \Omega$. *Se existe uma função mensurável* g *tal que, para quase todo* $x \in \Omega$,

$$\|f_n(x)\| \leq |g(x)|, \forall n \in \mathbb{N}$$

então,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx = \int_\Omega \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx. \tag{C.3}$$

4. *O Teorema de Fubini*

Teorema C.0.5. *Seja* f *uma função mensurável em* $\mathbb{R}^{n+m}$. *Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^{n+m}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)dy\right) dx. \tag{C.4}$$

5. *A Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg*

Teorema C.0.6. *Sejam* $q, r \in [1, +\infty)$ *e* $j, m \in \mathbb{N}_0$ *tais que* $0 \leq j \leq m$. *Então, para todo* $\theta \in [\frac{j}{m}, 1]$, *existe uma contante* $C = C(j, m, q, r, \theta)$ *que depende de* j, m, q, r, *e* θ *tal que*

$$\|\partial^\alpha u\|_{L^p} \leq C \sum_{|\gamma|\leq m<|\alpha|<k} \|\partial^\gamma u\|_{L^q}^\theta \|u\|_{L^r}^{1-\theta}. \tag{C.5}$$

Referências Bibliográficas

[AB] ARBOGAST, Todd; BONA, Jerry. *Methods of Applied Mathematics*. Fall and Spring Semesters 1999-2001. Austin: University of Texas (1999)

[An] ANGULO, Jaime. *Existence and Stability of Solitary Wave Solutions to Nonlinear Dispersive Evolution Equations*. In: Publicações Matemáticas. 24º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA (2003).

[B] BREZIS, Haïm. *Análisis funcional - Teoría y aplicaciones*. Madrid: Alianza Editorial (1984)

[Bo] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2ª ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher (1998).

[Ca] CAZENAVE, Thierry. *Semilinear Schrödinger Equations*. Courant Lecture Notes, 10 (2003).

[CH] CAZENAVE, Thierry; HARAUX, Alain. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford Science Publications (1998).

[Ev] EVANS, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. In: Graduate Studies in Mathematics. Providence: American Mathematical Society (1998).

[Eves] EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP (2004).

[Fe] FEITOSA, Éverson F. S. *O Problema de Cauchy para a Equação de Schrödinger com dados não nulos no infinito*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática - UFAL (2008).

[Ga] GALLO, Clemént. *Scrödinger group on Zhidkov spaces*. In: Advanced Differential Equations, 9 (2004), 509-538.

[Io] IÓRIO, Rafael José; IÓRIO, Valéria. *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*. Projeto Euclides,Rio de Janeiro: IMPA (1988).

[IN] IÓRIO, Rafael José; NUNES, Wagner Vieira L. *Introdução às Equações de Evolução não Lineares*. 18º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio Janeiro: IMPA (1991).

[Li] LIMA, E. Lages. *Análise Real, vol. 2*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, IMPA (2006).

[LP] LINARES, Felipe; PONCE, Gustavo. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*. In: Publicações Matemáticas. 3ª ed. Rio Janeiro: IMPA (2008).

[P] PAZY, Amnon. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Diferential Equations*. 2ª ed. Applied Mathematical Sciences, 44. New York: Springer-Verlag (1983).

[Po] PONCE, Gustavo. *Notas sobre el Problema de Valores Iniciales Asociado a la Ecuación de Onda*. III Escuela de Verano en Geometria Diferencial, Ecuaciones Diferenciales Parciales y Análisis Numérico. Santafé de Bogotá: Universidad de los Andes (1995).

[Ro] ROMÃO, Darliton C. *Um estudo sobre a boa colocação local da equação não linear de Schrödinger cúbica unidimensional em espaços de Sobolev periódicos*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática - UFAL (2009).

[Zh] ZHIDKOV, P. E. *Korteweg-de-Vries and nonlinear Schrödinger equations: qualitative theory*. Lecture Notes in Mathematics, 1756. New York: Springer-Verlag (2001).

Índice Remissivo