Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Fórmulas Integrais para a Curvatura r-Média e Aplicações

Viviane de Oliveira Santos

Maceió
Janeiro de 2010

Rio São Francisco

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Fórmulas Integrais para a Curvatura r-Média e Aplicações

Viviane de Oliveira Santos

Maceió, Brasil
29 de Janeiro de 2010

VIVIANE DE OLIVEIRA SANTOS

Fórmulas Integrais para a Curvatura r-Média e Aplicações

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 29 de janeiro de 2010 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.

Maceió
2010

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Maria Auxiliadora Gonçalves da Cunha

S237f Santos, Viviane de Oliveira.
Fórmulas integrais para a Curvatura r-Média e Aplicações. /Viviane de Oliveira Santos, 2010.
66 f. : il.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, 2010.

Bibliografia: f. 63-64.
Índice: f. 65-66.

1. Geometria diferencial. 2. Hipersuperfícies. 3. Curvatura r-média.
4. Estabilidade. I. Título.

CDU: 514.7

Fórmulas Integrais para a Curvatura r-Média e Aplicações

Viviane de Oliveira Santos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 29 de janeiro de 2010 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (Orientador)

Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros

Profa. Dra. Walcy Santos

Aos meus pais João de Deus e Rosangela Pereira.

Agradecimentos

Ao Professor Hilário Alencar por toda sua dedicação e contribuição ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, um exemplo que sempre seguirei em minha vida profissional; por todo apoio e orientação durante meus cursos de graduação e mestrado, pela amizade e por ter contribuído de modo especial em minha formação acadêmica, profissional e pessoal.

Ao Professor Adán José Corcho Fernández por acreditar em minha capacidade acadêmica, pela sua alegria e prazer ao ensinar, ver sua motivação foi um grande privilégio para mim.

Aos Professores Abdênago Barros e Walcy Santos pelas sugestões apresentadas sobre esta dissertação.

Ao Rodrigo Fernandes de Moura Melo pela ajuda em momentos acadêmicos, pela amizade e companheirismo, uma pessoa especial nesses dois anos de mestrado.

A Natália Rocha Pinheiro pela amizade e pelas infinitas caronas, as quais sempre foram repletas de ótimas conversas.

Ao Gregório Manoel da Silva Neto pelas sugestões para a melhoria deste trabalho.

Ao Márcio Henrique Batista pela ajuda na demonstração que o operador linearizado em formas espaciais é dado pelo divergente de um determinado campo.

Ao Glaudston da Silva por estar presente em minha vida, por ter me ajudado a superar alguns obstáculos que surgiram neste período e por sempre acreditar em meus sonhos.

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida durante o mestrado.

Resumo

Nesta dissertação, descrevemos resultados obtidos por Hilário Alencar e A. Gervasio Colares, publicado no Annals of Global Analysis and Geometry em 1998. Inicialmente, obtemos fórmulas integrais para a curvatura r-média, as quais generalizam fórmulas de Minkowski. Além disso, usando estas fórmulas, caracterizamos as hipersuperfícies compactas imersas no espaço Euclidiano, esférico ou hiperbólico cujo conjunto de pontos nestes espaços que não pertencem as hipersuperfícies totalmente geodésicas tangentes às hipersuperfícies compactas é aberto e não vazio. Outrossim, obtemos ainda resultados relacionados com a estabilidade.

As demonstrações destes resultados são obtidas através da fórmula integral de Dirichlet para o operador linearizado da curvatura r-média de uma hipersuperfície imersa no espaço Euclidiano, esférico ou hiperbólico, bem como do uso de um resultado recente provado por Hilário Alencar, Walcy Santos e Detang Zhou no preprint Curvature Integral Estimates for Complete Hypersurfaces.

Ressaltamos que esta dissertação foi baseada na versão corrigida por Hilário Alencar do artigo publicado no Annals of Global Analysis and Geometry.

Palavras-chave: Geometria diferencial; Hipersuperfície; Fórmula integral; Operador linearizado; Curvatura r-média; Estabilidade.

Abstract

In this dissertation, we describe results obtained by Hilário Alencar and A. Gervasio Colares, published on the Annals of Global Analysis and Geometry in 1998. Initially, we obtain integral formulas for the r-mean curvature, which generalize Minkowski formulas. Moreover, using these formulas, we characterize compact hypersurfaces immersed in the Euclidean, spherical or hyperbolic space whose the set of points in these spaces that doesn't belong to the totally geodesic hypersurfaces tangent to compact hypersurfaces is open and nonempty. Also, we still obtained results related with the stability.

The proofs of these results are obtained by using the Dirichlet integral formula for the r-mean curvature linearized operator of a hypersurface immersed in the Euclidean, spherical or hyperbolic space, as well as the use of a recent result proved by Hilário Alencar, Walcy Santos and Detang Zhou in the preprint Curvature Integral Estimates for Complete Hypersurfaces.

We point that this work was based on the version corrected by Hilário Alencar of the article published on the Annals of Global Analysis and Geometry.

Keywords: Differential geometry; Hypersurface; Integral formula; Linearized operator; r-mean curvature; Stability.

Índice

Introdução

Seja $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n na variedade Riemanniana N^{n+1} com segunda forma fundamental B. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores de B associados aos vetores $e_1, ...e_n$. As funções simétricas elementares S_r associadas a B são definidas por

$$S_r = \sum_{i_1<...<i_r} \lambda_{i_1}...\lambda_{i_r},\ 1 \leq r \leq n$$

e a *curvatura r-média* é definida por

$$H_r = \frac{1}{n_r} S_r,$$

onde $n_r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$.

Consideremos $S_0 = H_0 = 1$ e $S_r = H_r = 0$ se $r \notin \{0, 1, ..., n\}$. As funções S_1, S_2 e S_n são conhecidas como *curvatura média*, *escalar* e de *Gauss-Kronecker*, respectivamente.

A r-ésima *transformação de Newton* $P_r : T_pM \to T_pM$ é definida, indutivamente, por

$$P_0 = I \quad \text{e} \quad P_r = S_r I - BP_{r-1},\ r \geq 1.$$

Associado a cada transformação de Newton P_r, temos um operador diferencial de segunda ordem $L_r : C^\infty(M^n; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definido por

$$L_r f = \mathrm{tr}(P_r(\mathrm{Hess} f)),$$

onde Hess$f$ é a matriz Hessiana da função f.

Denominamos este operador de *operador linearizado* L_r. Em particular, quando $r = 0$, $L_0 f = \Delta f$. Por este motivo, dizemos que este operador generaliza, em certo sentido, o Laplaciano. Tal operador foi introduzido por Voss na conexão com argumentos variacionais, ver [19].

Ao considerarmos uma imersão isométrica $x : M^n \to Q_c^{n+1}$, onde Q_c^{n+1} é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c, Rosenberg em [17], p. 225, provou que L_r é um operador dado pelo divergente de um determinado campo, isto é,

$$L_r(f) = \mathrm{div}_M(P_r(\mathrm{grad}_M f))$$

para toda função suave $f : M \to \mathbb{R}$.

Se $x: M^n \to Q_c^{n+1}$ é uma imersão isométrica em uma forma espacial simplesmente conexa Q_c^{n+1}, X_t uma variação normal de x e η é um campo vetorial normal unitário em M^n, Reilly, ver [16], provou que

$$\frac{d}{dt}S_{r+1}(t)\bigg|_{t=0} = L_r f + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f,$$

onde $f = \left\langle \frac{\partial X_t}{\partial t}\bigg|_{t=0}, \eta \right\rangle$ e L_r é o operador linearizado de S_{r+1} obtido das variações normais de x.

Fixado um ponto $p \in Q_c^{n+1}$, sejam $\rho : Q_c^{n+1} \to \mathbb{R}$ a *função distância geodésica* ao ponto p e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Definimos o vetor posição $X : M^n \to Q_c^{n+1}$ com respeito a p, por

$$X(x(p)) = S_c(\rho(p))\mathrm{grad}_Q \rho(p),$$

onde S_c é a solução da equação $y'' + cy = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, isto é,

$$S_c(\rho(p)) = \begin{cases} \rho(p), \text{ se } \ c = 0; \\ \dfrac{\operatorname{sen}(\rho(p)\sqrt{c})}{\sqrt{c}}, \text{ se } \ c > 0; \\ \dfrac{\operatorname{senh}(\rho(p)\sqrt{-c})}{\sqrt{-c}}, \text{ se } \ c < 0. \end{cases}$$

Denotando $\theta_c(s) = S_c'(s)$ e X^T a componente de X tangente a M^n, apresentaremos resultados obtidos por Alencar e Colares publicado no Annals of Global Analysis and Geometry em 1998.

Teorema 0.1. *Sejam $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientada M^n e $0 \leq q \leq n$, $1 \leq s \leq n$ inteiros. Então, para qualquer c,*

(a) $$\int_{M^n} \Bigg(\langle X, \eta\rangle^q \Bigg\{ \left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{s-1} [\theta_c(\rho)((n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle) - c\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle] + (s-1)\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{s-2}(\theta_c(\rho))^2\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle \Bigg\} - q\langle X, \eta\rangle^{q-1}\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle \Bigg) dM = 0;$$

(b) $$\int_{M^n} \big(\langle X, \eta\rangle^q \left\{(\theta_c(\rho))^{s-1}[(n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle] - c(s-1)(\theta_c(\rho))^{s-2}\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle\right\} - q(\theta_c(\rho))^{s-1}\langle X, \eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle\big) dM = 0;$$

(c) $$\int_{M^n}\left(\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^q\left\{\langle X,\eta\rangle^{s-1}\left[-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho)-(S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle\right.\right.\right.$$
$$\left.-\langle \mathrm{grad}_M S_{r+1},X\rangle\right]+(s-1)\langle X,\eta\rangle^{s-2}\left\langle P_r(B^2(X^T)),X^T\right\rangle\Big\}$$
$$\left.-q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}\langle X,\eta\rangle^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)),X^T\right\rangle\right)dM=0.$$

O teorema anterior é uma versão corrigida por Alencar do artigo publicado em [1], cujos resultados originais não implicaram quaisquer mudanças nas aplicações.

As fórmulas em (a) e (b) generalizam as fórmulas de Minkowski obtidas por Hsiung em [12] e Bivens em [8], respectivamente.

Corolário 0.1. *Sejam $x: M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então*

(a) $\displaystyle\int_{M^n}[H_r + H_{r+1}\langle X,\eta\rangle]dM = 0;$

(b) $\displaystyle\int_{M^n}[H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X,\eta\rangle]dM = 0.$

Teorema 0.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e uma imersão isométrica $x: M^n \to Q_c^{n+1}$ com curvatura H_{r+1} constante não-nula, onde $0 \le r \le n-1$. Se $c > 0$, assuma que $x(M^n)$ está contida em um hemisfério aberto de Q_c^{n+1}. Então, o conjunto de pontos*

$$W = Q_c^{n+1} - \bigcup_{p\in M}(Q_c^n)_p,$$

que são omitidos em Q_c^{n+1} pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas $(Q_c^n)_p$ tangentes a $x(M^n)$ é não-vazio, se e somente se, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1}.

No caso em que $r = 0$, o Teorema 0.2 foi provado por Alencar e Frensel em [4].

Corolário 0.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e uma imersão isométrica $x: M^n \to Q_c^{n+1}$ com curvatura H_{r+1} constante não-nula. Se $c > 0$, suponha também que $x(M^n)$ está contida em um hemisfério aberto. Então W é não-vazio, se e somente se, x é r-estável.*

Teorema 0.3. *Seja $x: M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n conexa, compacta e orientada. Seja $p_0 \in Q_c^{n+1}$ relativo ao qual*

$$H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X,\eta\rangle$$

não muda de sinal para algum $0 \le r \le n-1$. Se $c > 0$, assuma que $x(M^n)$ está contida em um hemisfério aberto de Q_c^{n+1} centrado em p_0. Então, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

Inicialmente, estenderemos os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. Definiremos variedades diferenciáveis e métricas Riemannianas. A partir daí, discutiremos sobre conexões, operadores diferenciáveis, curvaturas e imersões isométricas.

Na segunda parte, estudaremos a r-ésima transformação de Newton, o operador linearizado e demonstraremos algumas propriedades destes operadores. Em seguida, demonstraremos o Teorema 0.1 e o Corolário 0.1, obtendo assim fórmulas integrais para a curvatura r-média.

Finalmente, apresentaremos algumas aplicações das fórmulas obtidas envolvendo esferas geodésicas e estabilidade, as quais foram enunciadas no Teorema 0.2, no Corolário 0.2 e no Teorema 0.3.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, iremos estender os métodos do Cálculo Diferencial a espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. As demonstrações dos resultados deste capítulo que foram omitidas podem ser encontradas no livro Geometria Riemanniana escrito por Manfredo do Carmo, ver [9]. Ao longo deste trabalho, variedades compactas serão compactas sem bordo.

1.1 Variedades Diferenciáveis e Métricas Riemannianas

Nesta seção, apresentaremos a definição de variedade diferenciável. O conceito será dado para uma dimensão n qualquer. A palavra diferenciável significará de classe C^∞. Introduziremos em cada ponto de uma variedade diferenciável uma maneira de medirmos comprimentos de vetores tangentes que varia diferenciavelmente com o ponto.

Definição 1.1.1. Uma *variedade diferenciável* de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M que satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$;

(b) Para todo par α, β tal que $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$ e $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W) \circ \mathbf{x}_\alpha(W)$ são diferenciáveis;

(c) A família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ é máxima relativa às condições (a) e (b).

O par $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ (ou a aplicação $\mathbf{x}_\alpha$), com $p \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$, é denominado uma *parametrização* ou *sistema de coordenadas* de M em p e $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ é chamada *vizinhança coordenada* em p. Uma família $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ que satisfaz (a) e (b) é denominada uma *estrutura diferenciável* em M.

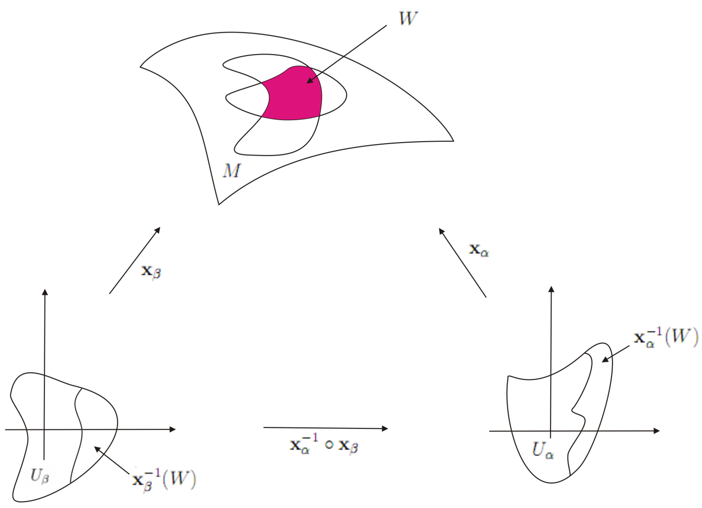

Figura 1.1: Representação geométrica da definição de variedade

Observação 1.1.1. O conjunto $\zeta = \{A \subset M; \mathbf{x}_\alpha^{-1}(A \cap \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha))$ é aberto do $\mathbb{R}^n$ para todo $\alpha\}$ define uma topologia em M.

Diremos que M é *compacta* quando M é um espaço topológico compacto.

Definição 1.1.2. Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é *diferenciável* em $p \in M$ se dada uma parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \to N$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ em p tal que $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$ e a aplicação

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \tag{1.1}$$

é diferenciável em $\mathbf{x}^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto. A aplicação (1.1) é chamada *expressão* de φ nas parametrizações $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

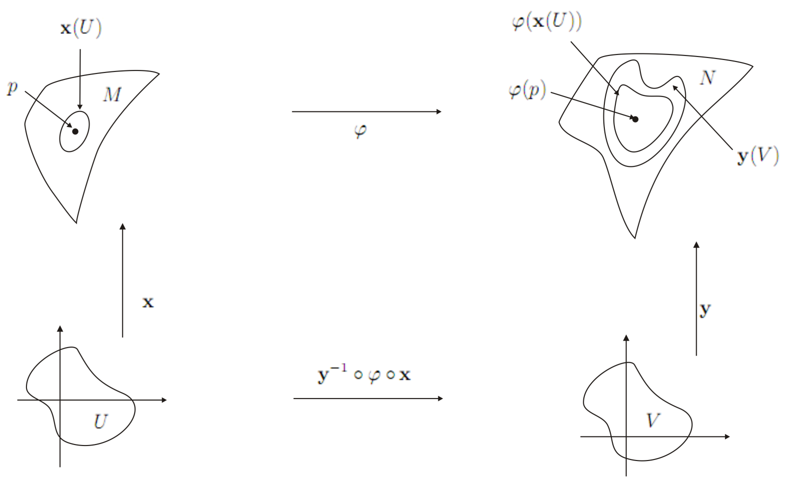

Figura 1.2: Representação geométrica da definição de aplicação diferenciável

Exemplo 1.1.1. Se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é uma parametrização, então $\mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável. De fato, para qualquer parametrização $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^n \to M$ em p, temos que $\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{y} : \mathbf{y}^{-1}(W) \to \mathbf{x}^{-1}(W)$, onde $W = \mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)$, é diferenciável. Isso mostra que U e $\mathbf{x}(U)$ são difeomorfos (isto é, toda variedade é localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^n$).

Definição 1.1.3. Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ é denominada uma *curva* (diferenciável) em M. Sejam $\alpha(0) = p \in M$ e $\mathcal{D}$ o conjunto das funções diferenciáveis definidas em M. O *vetor tangente* à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

Um *vetor tangente* em p é o vetor em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM. O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_pM\}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, denominado *fibrado tangente*.

Proposição 1.1.1. *Sejam M^n, N^m variedades diferenciáveis e $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Dados $p \in M$ e $v \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ e seja $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.*

A aplicação linear $d\varphi_p$ dada na proposição anterior é denominada *diferencial* de φ em p.

Definição 1.1.4. Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \to N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disso, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, dizemos que φ é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \to N$ é um mergulho, dizemos que M é uma *subvariedade* de N.

Se $\varphi : M^m \to N^n$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $(n - m)$ é chamada *codimensão* da imersão φ.

Exemplo 1.1.2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. A aplicação f é uma imersão diferenciável tal que $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^1$. Assim, $\mathbb{S}^1$ é uma subvariedade diferenciável do $\mathbb{R}^2$.

Definição 1.1.5. Dizemos que uma variedade diferenciável M é *orientável* se admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$ tal que, para todo par α, β com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, a matriz da diferencial da mudança de coordenadas $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$ tem determinante positivo. Caso contrário, dizemos que M é *não-orientável*. Se M é orientável, a escolha da parametrização que satisfaça essa definição é denominada *orientação* de M e, neste caso, dizemos que M é *orientada*.

Definição 1.1.6. Um *campo de vetores* X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.

Às vezes é conveniente pensar em campos de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to F$ do conjunto $\mathcal{D}$ das funções diferenciáveis em M no conjunto F das funções em M, definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde f indica a expressão de f na parametrização $\mathbf{x}$. Neste contexto, dizemos que X é *diferenciável* se, e somente se, $Xf \in \mathcal{D}$ para todo $f \in \mathcal{D}$.

A interpretação de X como um operador em $\mathcal{D}$ permite considerarmos os iterados de X. O problema é que, na maioria das vezes, XY e YX de campos de vetores X e Y em M não são campos de vetores. Entretanto, podemos afirmar o seguinte resultado:

Lema 1.1.1. *Sejam X e Y campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável M. Então, existe um único campo de vetores Z tal que*

$$Zf = (XY - YX)f, \ \forall f \in \mathcal{D}.$$

O campo de vetores $Z = XY - YX$ é denominado *colchete* de X e Y, o qual será denotado por $[X, Y]$.

Definição 1.1.7. Uma *métrica Riemanniana* (ou *estrutura Riemanniana*) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \ , \ \rangle_p$ (isto é, uma forma bilinear simétrica e positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $\mathbf{x}(x_1, x_2, ..., x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, ..., 1, ..., 0)$, então $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}(q), \dfrac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$ é uma função diferenciável em U.
As funções $g_{ij}(= g_{ji})$ são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* (ou os g_{ij} da métrica) no sitema de coordenadas $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \to M$.

A definição de métrica Riemanniana não depende da escolha do sistema de coordenadas.

Definição 1.1.8. Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é denominada uma *variedade Riemanniana.*

Definição 1.1.9. Consideremos M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f : M \to N$ (isto é, f é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma *isometria* se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \ \forall p \in M, \ \forall u, v \in T_pM. \tag{1.2}$$

Definição 1.1.10. Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f : M \to N$ é uma *isometria local* em $p \in M$, se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f : U \to f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo (1.2). Dizemos que a variedade Riemanniana M é *localmente isométrica* à variedade N se para todo p em M existem uma vizinhança U de p em M e uma isometria local $f : U \to f(U) \subset N$.

Exemplo 1.1.3. (Variedades Imersas) Seja $f : M^n \to N^{n+k}$ uma imersão. Se N possui uma estrutura Riemanniana, f induz uma estrutura Riemanniana em M dada por $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$, $u, v \in T_pM$. A métrica de M é chamada a *métrica induzida* por f e dizemos que f é uma *imersão isométrica.*

1.2 Conexões Afins e Conexão Riemanniana

Nosso interesse em conexões afins reside no fato que a escolha de uma métrica Riemanniana em uma variedade M determina univocamente uma certa conexão afim de M. Podemos, deste modo, derivar de uma certa forma campos de vetores em M. Indicaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais diferenciáveis definidas em M.

Definição 1.2.1. Uma *conexão afim* ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{array}{rcccl} \nabla & : & \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ & & (X, Y) & \longrightarrow & \nabla_X Y \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(b) $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(c) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Proposição 1.2.1. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial V ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo vetorial $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado* derivada covariante *de V ao longo de c, tal que*

(a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$;

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$;

(c) Se V é um campo vetorial induzido de $Y \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y,$$

onde V, W são campos vetoriais ao longo de c e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

Definição 1.2.2. Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo vetorial V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é *paralelo* quando $\frac{DV}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

Definição 1.2.3. Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão afim e $\langle\ ,\ \rangle$ uma métrica Riemanniana. A conexão ∇ é dita *compatível* com a métrica $\langle\ ,\ \rangle$ quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, tivermos $\langle P, P' \rangle = k$, onde k é uma constante.

Proposição 1.2.2. *Seja M uma variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par V, W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$, tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I. \tag{1.3}$$

Corolário 1.2.1. *Uma conexão ∇ em uma variedade Riemanniana M é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,\ \ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Definição 1.2.4. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita *simétrica* quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Teorema 1.2.1 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Tal conexão é denominada *conexão de Levi-Civita* (ou *Riemanniana*) de M.

Definição 1.2.5. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma *geodésica* em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ no ponto t_0; se γ é geodésica em t, para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma *geodésica.*

Exemplo 1.2.1. *Podemos mostrar que qualquer geodésica do parabolóide de revolução que não é meridiano se auto-intersecta uma infinidade de vezes.*

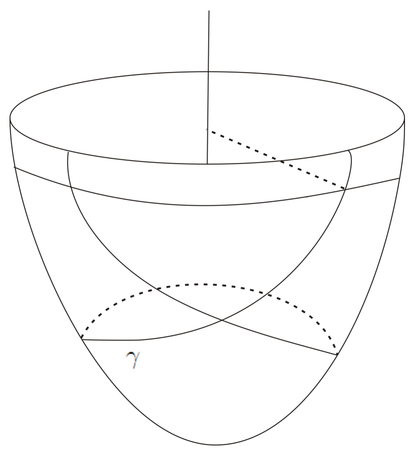

Figura 1.3: Geodésicas de um parabolóide

O próximo resultado permite introduzirmos o conceito de aplicação exponencial.

Proposição 1.2.3. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável,*

$$\gamma : (-2, 2) \times \mathcal{U} \to M,$$

onde $\mathcal{U} = \{(p, w) \in TM; p \in V, w \in T_pM, |w| < \epsilon\}$, tal que $t \to \gamma(t, p, w), t \in (-2, 2)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade w, para cada $p \in V$ e cada $w \in T_pM$, $|w| < \epsilon$.

Sejam $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela Proposição 1.2.3. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \to M$, dada por

$$\exp(p, v) = \gamma(1, p, v) = \gamma\left(|v|, p, \frac{v}{|v|}\right), \quad (p, v) \in \mathcal{U},$$

é chamada a *aplicação exponencial* em $\mathcal{U}$.

A aplicação exponencial é diferenciável e usaremos a restrição da exp a um aberto do espaço tangente T_pM, isto é, definiremos

$$\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$$

por $\exp_p(v) = \exp(p, v)$. De agora em diante, indicaremos por $B_\epsilon(0)$ uma bola aberta de centro na origem 0 de T_pM e de raio ϵ. Além da $\exp_p$ ser diferenciável, temos que $\exp_p(0) = p$.

Geometricamente, $\exp_p(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de p, sobre a geodésica que passa por p com velocidade igual a $\dfrac{v}{|v|}$.

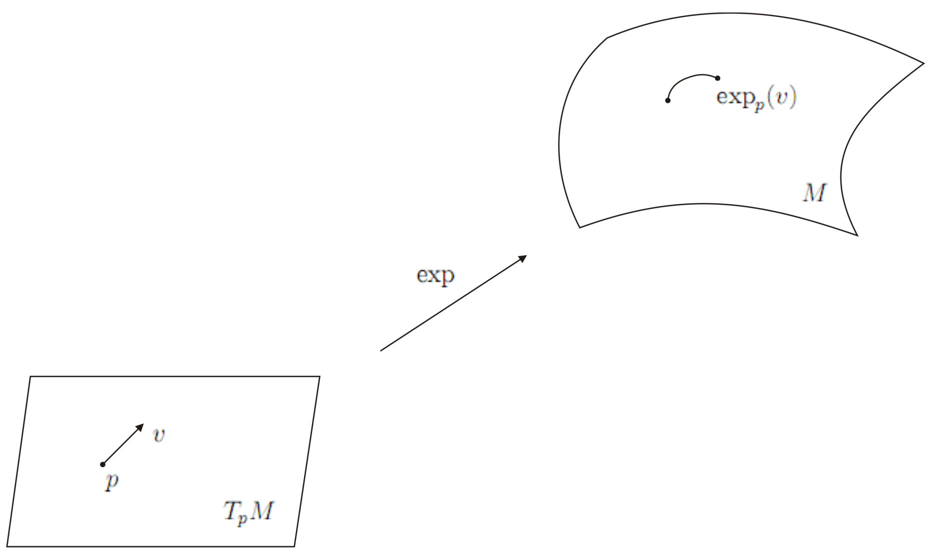

Figura 1.4: A aplicação exponencial

Proposição 1.2.4. *Dado $p \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$ é um difeomorfismo da bola $B_\epsilon(0)$ de centro na origem de T_pM e raio ϵ sobre um aberto de M.*

Exemplo 1.2.2. Se $M = \mathbb{R}^n$, a derivação covariante coincide com a usual. Assim, as geodésicas são retas parametrizadas proporcionalmente ao comprimento de arco e a exponencial é a identidade.

Lema 1.2.1 (de Gauss)**.** *Sejam $p \in M$ e $v \in T_pM$ tal que $exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então*

$$\left\langle (dexp_p)_v(v), (dexp_p)_v(w) \right\rangle = \langle v, w \rangle .$$

Seja $V \subseteq T_pM$ uma vizinhança da origem tal que $exp_p|_V$ é um difeomorfismo. O conjunto $U = \exp_p(V)$ é denominado *vizinhança normal* (ou *geodésica*) de p. Se $B_\epsilon(0)$ é a bola de centro na origem de T_pM e raio ϵ, então $B_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(0))$ é denominado *bola normal* (ou *geodésica*) de centro p e raio ϵ.

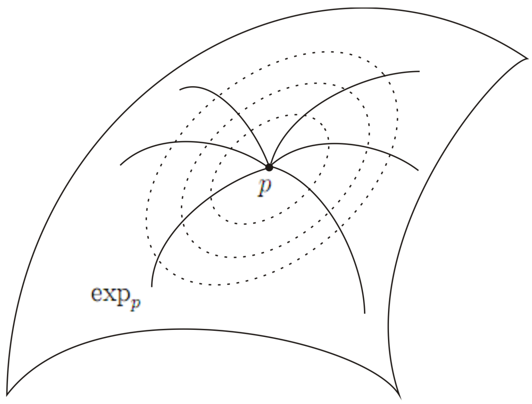

Figura 1.5: Bolas geodésicas

Observação 1.2.1. Decorre, usando o Lema de Gauss, que a fronteira de uma bola normal $S_\epsilon(p) = \exp_p(\partial B_\epsilon(0))$ é uma *hipersuperfície* (subvariedade de codimensão 1) em M ortogonal as geodésicas que partem de p, a qual denominamos esfera normal (ou geodésica) de centro p e raio ϵ.

Definição 1.2.6. Uma variedade Riemanniana M é (geodesicamente) *completa* se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial $\exp_p$ está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.2.7. Dizemos que um conjunto $\{X_1, ..., X_n\}$ de campos de vetores é um *referencial* quando todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode ser escrito como $X = \sum_i a_i X_i$. O referencial é dito *ortonormal* quando $\langle X_i(p), X_j(p) \rangle = \delta_{ij}$, para todo $i, j = 1, ..., n$ e $p \in M$. Um *referencial geodésico* em $p \in M$ é o campo de vetores ortonormais $\{e_1, ..., e_n\} \in \mathfrak{X}(M)$ definidos numa vizinhança $V \subset M$ de p, tal que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0, \forall i, j = 1, ..., n$.

1.3 Operadores Diferenciáveis

Nesta seção, definiremos operadores importantes num contexto de variedades. Apresentaremos também algumas propriedades desses operadores. Ao longo desta seção, M será uma variedade Riemanniana.

Definição 1.3.1. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos o *gradiente* de f como o campo de vetores $\text{grad}_M f$ tal que

$$\langle \text{grad}_M f(p), v\rangle = df_p(v), \; p \in M, \; v \in T_pM.$$

Resulta da definição, que para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\text{grad}_M f \in \mathfrak{X}(M)$ é o único campo de vetores tangentes e diferenciáveis sobre M caracterizado por

$$\langle \text{grad}_M f, X\rangle = X(f).$$

Proposição 1.3.1. *O gradiente satisfaz às seguintes propriedades:*

(a) $\text{grad}_M(f+g) = \text{grad}_M f + \text{grad}_M g$;

(b) $\text{grad}_M(fg) = f\text{grad}_M g + g\text{grad}_M f$;

(c) $\text{grad}_M(f^q) = qf^{q-1}\text{grad}_M f$;

(d) Se $\{e_1, ..., e_n\}$ *é um referencial ortonormal em* M*, então*

$$\text{grad}_M f = \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{D}(M)$ *e todo inteiro positivo* q*. Aqui denotamos* $f^q = ff...f$*,* q*-vezes.*

Demonstração. Consideremos $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

$$(a)\; \begin{aligned}\langle \text{grad}_M(f+g), X\rangle &= X(f+g) = X(f) + X(g) = \langle \text{grad}_M f, X\rangle + \langle \text{grad}_M g, X\rangle \\ &= \langle \text{grad}_M f + \text{grad}_M g, X\rangle .\end{aligned}$$

$$(b)\; \begin{aligned}\langle \text{grad}_M(fg), X\rangle &= X(fg) = fX(g) + gX(f) = f\langle \text{grad}_M g, X\rangle + g\langle \text{grad}_M f, X\rangle \\ &= \langle f\text{grad}_M g + g\text{grad}_M f, X\rangle .\end{aligned}$$

(c) Demonstraremos a afirmação usando o processo de indução finita. Se $q = 1$, não há nada a fazer. Se $q = 2$, usando o item (b), a equação deste item é satisfeita.
Agora, suponhamos que nossa igualdade vale para $q - 1$, isto é,

$$\text{grad}_M(f^{q-1}) = (q-1)f^{q-2}\text{grad}_M f.$$

Usando o item (b) e a igualdade anterior, temos

$$\begin{aligned}\text{grad}_M(f^q) &= \text{grad}_M(ff^{q-1}) = f\text{grad}_M f^{q-1} + f^{q-1}\text{grad}_M f \\ &= f(q-1)f^{q-2}\text{grad}_M f + f^{q-1}\text{grad}_M f \\ &= qf^{q-1}\text{grad}_M f.\end{aligned}$$

(d) Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM. Então $\text{grad}_M f = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, onde $a_i = \langle \text{grad}_M f, e_i \rangle$. Por outro lado, usando a Definição 1.3.1,

$$\langle \text{grad}_M f, e_i \rangle = df(e_i) = e_i(f),$$

o que conclui nossa demonstração.

$\square$

Definição 1.3.2. Definimos o *traço* de um operador $T : V \to V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, como sendo o traço de qualquer matriz associada a T.

Note que se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de V, então

$$T(v) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v), e_i \rangle \, e_i.$$

Como as colunas da matriz de T na base $\{e_1, ..., e_n\}$ são vetores $T(e_i)$, podemos escrever a matriz do operador T na base $\{e_1, ..., e_n\}$ como

$$(\langle T(e_i), e_j \rangle)_{n \times n}$$

e, portanto,

$$\text{tr } T = \sum_{i=1}^{n} \langle T(e_i), e_i \rangle \, .$$

Definição 1.3.3. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Definimos a *divergência* como a função $\text{div}_M X : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$\text{div}_M X(p) = \text{tr } (Y(p) \to \nabla_Y X(p)), \; p \in M.$$

Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM, então

$$\text{div}_M X = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i} X, e_i \rangle \, .$$

Proposição 1.3.2. *A divergência satisfaz às seguintes igualdades:*

(a) $\text{div}_M(X + Y) = \text{div}_M X + \text{div}_M Y$*;*

(b) $\text{div}_M(fX) = X(f) + f\text{div}_M X = \langle \text{grad}_M f, X \rangle + f\text{div}_M X$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ *e* $f \in \mathcal{D}(M)$*;*

(c) Se $\{e_1, ..., e_n\}$ *é um referencial geodésico, então*

$$\text{div}_M X = \sum_{i=1}^{n} e_i(f_i),$$

onde $X = \sum_i f_i e_i$.

Demonstração. Consideremos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in \mathcal{D}(M)$.

$$\begin{aligned}(a)\ \mathrm{div}_M(X+Y) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(X+Y), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X, e_i\rangle + \langle\nabla_{e_i}Y, e_i\rangle \\ &= \mathrm{div}_M X + \mathrm{div}_M Y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ \mathrm{div}_M(fX) &= \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}(fX), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle f\nabla_{e_i}X + e_i(f)X, e_i\rangle \\ &= f\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}X, e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\langle e_i(f)X, e_i\rangle = f\mathrm{div}_M X + \left\langle X, \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i\right\rangle \\ &= f\mathrm{div}_M X + \langle X, \mathrm{grad}_M f\rangle = f\mathrm{div}_M X + X(f).\end{aligned}$$

(c) Seja $X = \sum_{j=1}^{n} f_j e_j$, onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial geodésico. Então

$$\begin{aligned}\mathrm{div}_M X &= \mathrm{div}_M\left(\sum_{j=1}^{n} f_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\nabla_{e_i}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j e_j\right), e_i\right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left\langle\sum_{j=1}^{n} f_j\nabla_{e_i}e_j, e_i\right\rangle + \sum_{i=1}^{n}\left\langle e_i\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right)e_j, e_i\right\rangle.\end{aligned}$$

Como o referencial é geodésico, obtemos

$$\mathrm{div}_M X = \sum_{i=1}^{n} e_i(f_i).$$

□

Definição 1.3.4. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos a *Hessiana* de f por

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}f\ :\ \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) &\longrightarrow C^{\infty}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \langle\nabla_X(\mathrm{grad}_M f), Y\rangle.\end{aligned}$$

Proposição 1.3.3. *A Hessiana satisfaz às seguintes propriedades:*

(a) $\mathrm{Hess}f(X+Y, Z) = \mathrm{Hess}f(X, Z) + \mathrm{Hess}f(Y, Z)$*;*

(b) $\mathrm{Hess}(f+g)(X, Y) = \mathrm{Hess}f(X, Y) + \mathrm{Hess}\ g(X, Y)$*;*

(c) $\mathrm{Hess}(fg)(X, Y) = f\mathrm{Hess}\ g + g\mathrm{Hess}f + \langle X(f)\mathrm{grad}_M g, Y\rangle + \langle X(g)\mathrm{grad}_M f, Y\rangle$*;*

(d) $\mathrm{Hess}(f^q)(X, Y) = q[f^{q-1}\mathrm{Hess}f(X, Y) + \langle X(f^{q-1})\mathrm{grad}_M f, Y\rangle]$;

(e) $\mathrm{Hess}f(X, Y) = \mathrm{Hess}f(Y, X)$

para quaisquer $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$*,* $f, g \in \mathcal{D}(M)$ *e todo inteiro* q*.*

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

$$\begin{aligned}(a)\ \mathrm{Hess}f(X+Y,Z) &= \langle \nabla_{X+Y}(\mathrm{grad}_M f), Z\rangle \\ &= \langle \nabla_X(\mathrm{grad}_M f), Z\rangle + \langle \nabla_Y(\mathrm{grad}_M f), Z\rangle \\ &= \mathrm{Hess}f(X,Z) + \mathrm{Hess}f(Y,Z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\ \mathrm{Hess}(f+g)(X,Y) &= \langle \nabla_X(\mathrm{grad}_M(f+g)), Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X(\mathrm{grad}_M f), Y\rangle + \langle \nabla_X(\mathrm{grad}_M g)), Y\rangle \\ &= \mathrm{Hess}f(X,Y) + \mathrm{Hess}\ g(X,Y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(c)\ \mathrm{Hess}(fg)(X,Y) &= \langle \nabla_X \mathrm{grad}_M(fg), Y\rangle = \langle \nabla_X(f\mathrm{grad}_M g + g\mathrm{grad}_M f), Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X(f\mathrm{grad}_M g), Y\rangle + \langle \nabla_X(g\mathrm{grad}_M f), Y\rangle \\ &= \langle f\nabla_X \mathrm{grad}_M g + X(f)\mathrm{grad}_M g, Y\rangle \\ &\quad + \langle g\nabla_X \mathrm{grad}_M f + X(g)\mathrm{grad}_M f, Y\rangle \\ &= \langle f\nabla_X \mathrm{grad}_M g, Y\rangle + \langle X(f)\mathrm{grad}_M g, Y\rangle \\ &\quad + \langle g\nabla_X \mathrm{grad}_M f, Y\rangle + \langle X(g)\mathrm{grad}_M f, Y\rangle \\ &= f\mathrm{Hess}g + g\mathrm{Hess}f + \langle X(f)\mathrm{grad}_M g, Y\rangle + \langle X(g)\mathrm{grad}_M f, Y\rangle.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(d)\ \mathrm{Hess}(f^q)(X,Y) &= \langle \nabla_X \mathrm{grad}_M(f^q), Y\rangle = \langle \nabla_X(qf^{q-1}\mathrm{grad}_M f), Y\rangle \\ &= q\,\langle \nabla_X(f^{q-1}\mathrm{grad}_M f), Y\rangle \\ &= q[\langle f^{q-1}\nabla_X \mathrm{grad}_M f, Y\rangle + \langle X(f^{q-1})\mathrm{grad}_M f, Y\rangle] \\ &= q[f^{q-1}\mathrm{Hess}f(X,Y) + \langle X(f^{q-1})\mathrm{grad}_M f, Y\rangle].\end{aligned}$$

(e) Temos que

$$X\,\langle \mathrm{grad}_M f, Y\rangle = \langle \nabla_X(\mathrm{grad}_M f), Y\rangle + \langle \mathrm{grad}_M f, \nabla_X Y\rangle.$$

Usando as definições de gradiente e Hessiana, obtemos

$$XYf = \mathrm{Hess}f(X,Y) + (\nabla_X Y)f,$$

ou seja,

$$\mathrm{Hess}f(X,Y) = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

Logo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hess}f(X,Y)-\mathrm{Hess}f(Y,X) &= XYf-(\nabla_XY)f-(YXf-(\nabla_YX)f)\\
&= (XYf)-(YXf)-(\nabla_XY-\nabla_YX)f\\
&= [X,Y]f-[X,Y]f=0.
\end{aligned}
$$

□

Definição 1.3.5. Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. Definimos o *Laplaciano* de f em M por

$$\Delta f = \mathrm{div}_M(\mathrm{grad}_M f).$$

Observe que se $\{e_1,...,e_n\}$ é um referencial ortonormal, então

$$\Delta f = \mathrm{div}_M(\mathrm{grad}_M f) = \mathrm{tr}\ (X \mapsto \nabla_X(\mathrm{grad}_M f)) = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(\mathrm{grad}_M f), e_i\rangle = \mathrm{tr}(\mathrm{Hess}f).$$

O próximo resultado será útil para cálculos posteriores.

Teorema 1.3.1 (Teorema da Divergência)**.** *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta e X um campo de vetores definido em M. Então*

$$\int_M \mathrm{div}_M X dM = 0.$$

1.4 Curvaturas

Apresentaremos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemmaniana deixa de ser Euclidiana.

Definição 1.4.1. A *curvatura* R de uma variedade Riemmaniana M é uma correspondência que associa a cada par $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

O aparecimento do termo $\nabla_{[X,Y]}Z$ na definição de curvatura está ligado ao fato de desejarmos que a aplicação $R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ seja linear.

De agora em diante, usaremos a notação

$$\langle R(X,Y)Z,T\rangle = (X,Y,Z,T).$$

Relacionado com o operador curvatura está a curvatura seccional (ou Riemanniana).

Proposição 1.4.1. *Sejam $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM e $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(x,y) = \frac{(x,y,x,y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$. Aqui $|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$ representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$, onde V é um espaço vetorial.

O número real $K(x,y) = K(\sigma)$ é chamado *curvatura seccional* de σ em p.

Definição 1.4.2. As variedades completas com curvatura seccional constante são chamadas *formas espaciais.*

Entres as variedades Riemannianas, aquelas de curvatura seccional constante são as mais simples. Além disso, o teorema a seguir mostra que as variedades $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ são as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas com curvatura seccional constante.

Teorema 1.4.1. *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante K. Então, o recobrimento universal $\widetilde{M}$ de M, com a métrica do recobrimento, é isométrico a:*

(a) $\mathbb{H}^n$*, se* $K = -1$*;*

(b) $\mathbb{R}^n$*, se* $K = 0$*;*

(c) $\mathbb{S}^n$*, se* $K = 1$*.*

1.5 Imersões Isométricas

Nesta seção, consideraremos a seguinte situação. Seja $f : M \to \overline{M}$ uma imersão de uma variedade diferenciável M de dimensão n em uma variedade Riemanniana $\overline{M}$ de dimensão igual a $k = n + m$. Estudaremos as relações entre as geometrias de M e de $\overline{M}$.

Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+m=k}$ uma imersão. Pela forma local das imersões, para cada $p \in M$, existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f(U) \subset \overline{M}$ é uma subvariedade de $\overline{M}$. Em outras palavras, existem uma vizinhança $\overline{U} \subset \overline{M}$ de $f(p)$ e um difeomorfismo $\varphi : \overline{U} \to V \subset \mathbb{R}^k$.

Identificaremos U com $f(U)$ e cada vetor $v \in T_qM, q \in U$, com $df_q(v) \in T_{f(q)}\overline{M}$. Para cada $p \in M$, o produto interno em $T_p\overline{M}$ decompõe $T_p\overline{M}$ na soma direta

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus (T_pM)^\perp,$$

onde $T_pM = df_p(T_pM)$ e $(T_pM)^\perp = (df_p(T_pM))^\perp$ é o complemento ortogonal de T_pM em $T_p\overline{M}$. Portanto, cada vetor $v \in T_p\overline{M}$ pode ser decomposto de modo único como

$$v = v^T + v^N,$$

onde $v^T \in T_pM$ e $v^N \in (T_pM)^\perp$.

Denominamos v^T a *componente tangencial* de v e v^N a *componente normal* de v. Tal decomposição é diferenciável no sentido que as aplicações de $T\overline{M}$ em $T\overline{M}$ dadas por

$$(p,v) \to (p,v^T) \quad \text{e} \quad (p,v) \to (p,v^N)$$

são diferenciáveis.

Sejam $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\overline{M}$, X, Y campos locais de vetores em M e $\overline{X}, \overline{Y}$ extensões locais a $\overline{M}$. Definimos

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^T.$$

Seja $\mathfrak{X}(U)^\perp$ o conjunto dos campos de vetores em U normais a $f(U) \approx U$. A aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U)^\perp$ dada por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

é um campo local em $\overline{M}$ normal a M.

A aplicação B não depende das extensões $\overline{X}, \overline{Y}$.

Proposição 1.5.1. *A aplicação B é bilinear e simétrica.*

Demonstração. Dados $g \in \mathcal{D}(U)$ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, sejam $\overline{g}, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ suas respectivas extensões locais a $\overline{M}$. Temos que

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X} + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{X} - \nabla_Y X - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= [\overline{X}, \overline{Y}] + B(Y,X) - [X,Y]. \end{aligned}$$

Como $[\overline{X}, \overline{Y}] = [X,Y]$ em M,

$$B(X,Y) = B(Y,X),$$

ou seja, B é simétrica.
Além disso,

$$B(gX,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{gX}} \overline{Y} - \nabla_{gX} Y = \overline{g} \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - g \nabla_X Y = gB(X,Y).$$

Usando a simetria de B,

$$B(X,gY) = B(gY,X) = gB(Y,X) = gB(X,Y).$$

Temos também que

$$\begin{aligned} B(X+Y,Z) &= \overline{\nabla}_{\overline{X+Y}} \overline{Z} - \nabla_{X+Y} Z \\ &= \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Z} + \nabla_X Z + \overline{\nabla}_{\overline{Y}} \overline{Z} - \nabla_Y Z \\ &= B(X,Z) + B(Y,Z) \end{aligned}$$

e como B é simétrica, obtemos

$$B(X, Y+Z) = B(X,Y) + B(X,Z).$$

Portanto, B é bilinear.

$\square$

Agora, podemos definir a segunda forma fundamental. Sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Usando a Proposição 1.5.1, a aplicação $H_\eta : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle \,, \ x, y \in T_pM$$

é uma forma bilinear simétrica.

Definição 1.5.1. A forma quadrática II_η definida em T_pM por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x,x)$$

é denominada a *segunda forma fundamental* de f em p segundo o vetor normal η.

Como a aplicação H_η é bilinear simétrica, existe uma única aplicação auto-adjunta $S_\eta : T_pM \to T_pM$ associada a H_η tal que

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x,y) = \langle B(x,y), \eta \rangle \,.$$

A aplicação S_η é denominada *operador de Weingarten* de f.

Proposição 1.5.2. *Sejam $p \in M, x \in T_pM$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$. Seja N uma extensão local de η normal a M. Então*

$$S_\eta(x) = -(\overline{\nabla}_x N)^T.$$

Exemplo 1.5.1. No caso particular em que a codimensão da imersão é 1, ou seja, $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, $f(M) \subset \overline{M}$ é denominada uma *hipersuperfície.*

Neste caso, sejam $p \in M$ e $\eta \in (T_pM)^\perp$ com $|\eta| = 1$. Como $S_\eta : T_pM \to T_pM$ é simétrica, existe uma base ortonormal de autovetores $\{e_1, ..., e_n\}$ de T_pM associada a autovalores reais $\lambda_1, ..., \lambda_n$, isto é, $S_\eta(e_i) = \lambda_i e_i, 1 \le i \le n$. Se M e $\overline{M}$ estão previamente orientadas, então η está determinado de modo único se exigirmos que $\{e_1, ..., e_n\}$ esteja na orientação de M. Deste modo, denominamos os e_i *direções principais* e os $\lambda_i = k_i$ *curvaturas principais* de f. As funções simétricas de $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são invariantes da imersão. Por exemplo, $\det(S_\eta) = \lambda_1 ... \lambda_n$ é denominada a *curvatura de Gauss-Kronecker* de f e $\frac{1}{n}(\lambda_1 + ... + \lambda_n)$ é denominada *curvatura média* de f.

Definição 1.5.2. Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é *geodésica* em $p \in M$ se, para todo $\eta \in (T_pM)^\perp$, a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão f é *totalmente geodésica* se ela é geodésica para todo $p \in M$.

Proposição 1.5.3. *Uma imersão $f : M \to \overline{M}$ é geodésica em $p \in M$ se, e somente se, toda geodésica γ de M partindo de p é geodésica de $\overline{M}$ em p.*

Vimos que a componente tangente de $\overline{\nabla}_X \eta$ é dada por $(\overline{\nabla}_X \eta)^T = -S_\eta(X)$. Estudaremos agora a componente normal de $\overline{\nabla}_X \eta$, a qual denominamos a *conexão normal* $\nabla^\perp_X \eta$ da imersão, isto é,

$$\nabla^\perp_X \eta = (\overline{\nabla}_X \eta)^N = \overline{\nabla}_X \eta - (\overline{\nabla}_X \eta)^T = \overline{\nabla}_X \eta + S_\eta(X).$$

Denotando por $\mathfrak{X}(M)^{\perp}$ o espaço dos campos diferenciáveis de vetores normais a M, podemos considerar a segunda forma fundamental com um tensor $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{D}(M)$, definido por

$$B(X, Y, \eta) = \langle B(X, Y), \eta \rangle .$$

Podemos estender a definição de derivada covariante a este tipo de tensor de maneira natural

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = X(B(Y, Z, \eta)) - B(\nabla_X Y, Z, \eta) - B(Y, \nabla_X Z, \eta) - B(Y, Z, \nabla_X^{\perp} \eta).$$

Proposição 1.5.4 (Equação de Codazzi)**.** *Com a notação anterior, temos*

$$\left\langle \overline{R}(X, Y)Z, \eta \right\rangle = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta) - (\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta).$$

Corolário 1.5.1. *Se o espaço ambiente $\overline{M}$ tem curvatura seccional constante, a equação de Codazzi se reduz a*

$$(\overline{\nabla}_X B)(Y, Z, \eta) = (\overline{\nabla}_Y B)(X, Z, \eta).$$

Capítulo 2

Fórmulas Integrais para a Curvatura r-Média

Neste capítulo, definiremos a r-ésima transformação de Newton, o operador linearizado L_r e demonstraremos algumas propriedades desses operadores. Além disso, serão obtidas fórmulas integrais envolvendo a curvatura r-média.

2.1 A r-ésima Transformação de Newton P_r

Seja $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n na variedade Riemanniana N^{n+1} com segunda forma fundamental B. Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores de B associados aos vetores $e_1, ...e_n$. As funções simétricas elementares S_r associadas a B são definidas por

$$S_r = \sum_{i_1 < ... < i_r} \lambda_{i_1} ... \lambda_{i_r}$$

e a curvatura r-média é definida por

$$H_r = \frac{1}{n_r} S_r,$$

onde $n_r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$.

Consideremos $S_0 = H_0 = 1$ e $S_r = H_r = 0$ se $r \notin \{0, 1, ..., n\}$. As funções S_1, S_2 e S_n são conhecidas como *curvatura média*, *escalar* e de *Gauss-Kronecker*, respectivamente.

Definição 2.1.1. A r-ésima *transformação de Newton* $P_r : T_pM \to T_pM$ é definida, indutivamente, por

$$P_0 = I \quad \text{e} \quad P_r = S_r I - B P_{r-1}, \ r \geq 1.$$

Se $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são autovalores de B, então denotamos

$$S_r(B_j) = S_r(\lambda_1, ..., \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, ..., \lambda_n)$$

a r-função elementar simétrica associada a restrição B_j de B ao subespaço ortogonal ao autovetor correspondente e_j.

Finalizaremos esta seção demonstrando algumas propriedades envolvendo o operador P_r.

Proposição 2.1.1. *A r-ésima transformação de Newton P_r e a segunda forma fundamental B comutam.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução. O resultado é válido para P_0. Suponhamos que $BP_{r-1} = P_{r-1}B$. Assim

$$\begin{aligned} BP_r &= B(S_rI - BP_{r-1}) = B(S_rI - P_{r-1}B) = S_rB - BP_{r-1}B \\ &= (S_rI - BP_{r-1})B = P_rB. \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.2. *A r-ésima transformação de Newton P_r é auto-adjunta.*

Demonstração. A demonstração será feita por indução. O resultado é válido para $P_0 = I$. Suponhamos que P_{r-1} é auto-adjunta e sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Então

$$\langle P_r(X), Y\rangle = \langle (S_rI - BP_{r-1})X, Y\rangle = \langle S_rX, Y\rangle - \langle BP_{r-1}(X), Y\rangle .$$

Como B é uma forma bilinear, temos

$$\begin{aligned} \langle P_r(X), Y\rangle &= \langle X, S_rY\rangle - \langle P_{r-1}(X), B(Y)\rangle = \langle X, S_rY\rangle - \langle X, P_{r-1}(B(Y))\rangle \\ &= \langle X, (S_rI - P_{r-1}B)Y\rangle = \langle X, P_r(Y)\rangle . \end{aligned}$$

□

Proposição 2.1.3. *Sejam $\lambda_i, i = 1, ..., n$, os autovalores da segunda forma fundamental B. Fixemos λ_i, logo*

$$S_r(B_i) = S_r - \lambda_i S_{r-1}(B_i).$$

Demonstração. Podemos dividir a soma S_r em duas parcelas, uma onde λ_i aparece e outra onde λ_i não aparece. Assim, $S_r = A + \lambda_i C$. A primeira parcela é exatamente $S_r(B_i)$ e C é a soma cujas parcelas são somas de todos produtos de $(r-1)$ curvaturas principais, exceto λ_i, ou seja, é $S_{r-1}(B_i)$. Logo

$$S_r = S_r(B_i) + \lambda_i S_{r-1}(B_i).$$

□

Nosso próximo resultado apresenta alguns resultados clássicos sobre os autovalores de P_r. A demonstração destes resultados podem ser encontrados, por exemplo, em [5], p. 279.

Proposição 2.1.4. *Para cada* $1 \leq r \leq n-1$, *temos*

(a) $P_r(e_i) = S_r(B_i)e_i$ *para cada* $1 \leq i \leq n$*;*

(b) $tr(P_r) = \sum_{i=1}^{n} S_r(B_i) = (n-r)S_r$*;*

(c) $tr(BP_r) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(B_i) = (r+1)S_{r+1}$*;*

(d) $tr(B^2P_r) = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 S_r(B_i) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$.

Demonstração.
(a) Demonstraremos por indução, usando a identidade $S_{r+1}(B_i) = S_{r+1} - \lambda_i S_r(B_i)$. Suponhamos que nossa igualdade vale para r, isto é, $P_r(e_i) = S_r(B_i)e_i$. Mostraremos que também vale para $r+1$. De fato,

$$\begin{aligned} P_{r+1}(e_i) &= S_{r+1}e_i - BP_r(e_i) = S_{r+1}e_i - B(S_r(B_i)e_i) = S_{r+1}e_i - S_r(B_i)B(e_i) \\ &= S_{r+1}e_i - S_r(B_i)\lambda_i e_i = (S_{r+1} - \lambda_i S_r(B_i))e_i = S_r(B_i)e_i. \end{aligned}$$

(b) Observemos que

$$\operatorname{tr}(P_r) = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(B_i)e_i, e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} S_r(B_i).$$

A fim de demonstrarmos a segunda igualdade, consideremos S_r e $S_r(B_i)$ polinômios homogêneos nas variáveis λ_i's. Cada monômio $\lambda_{j_1}\lambda_{j_2}...\lambda_{j_r}$ de S_r também é um monômio de $S_r(B_i)$ para $i \notin \{j_1, j_2, ..., j_r\}$. Como temos exatamente $(n-r)$ termos, concluímos este item.

(c) Temos que

$$\operatorname{tr}(BP_r) = \sum_{i=1}^{n} \langle BP_r(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle P_r(e_i), B(e_i) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle S_r(B_i)e_i, \lambda_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_r(B_i).$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tr}(P_{r+1}) = \operatorname{tr}(S_{r+1}I - BP_r) = \operatorname{tr}(S_{r+1}I) - \operatorname{tr}(BP_r),$$

isto é,

$$\operatorname{tr}(BP_r) = nS_{r+1} - \operatorname{tr}(P_{r+1}).$$

Logo, usando o item (b), obtemos

$$\operatorname{tr}(BP_r) = nS_{r+1} - (n-(r+1))S_{r+1} = (r+1)S_{r+1}.$$

(d) Temos que

$$\mathrm{tr}(B^2P_r) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle B^2P_r(e_i), e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle P_r(e_i), B^2(e_i) \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle S_r(B_i)e_i, \lambda_i^2 e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 S_r(B_i).$$

Além disso,

$$\mathrm{tr}(BP_{r+1}) = \mathrm{tr}(B(S_{r+1}I - B^2P_r)) = \mathrm{tr}(S_{r+1}BI) - \mathrm{tr}(B^2P_r),$$

ou seja,

$$\mathrm{tr}(B^2P_r) = S_1S_{r+1} - \mathrm{tr}(BP_{r+1}).$$

Portanto, usando o item (c), obtemos

$$\mathrm{tr}(B^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}.$$

□

2.2 Operador Linearizado L_r

Nesta seção, apresentaremos o operador L_r, essencial no nosso trabalho. Em seguida, veremos alguns resultados gerais sobre este operador.

Associado a cada transformação de Newton P_r, temos um operador diferencial de segunda ordem $L_r : C^\infty(M^n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definido por

$$L_rf = \mathrm{tr}(P_r(\mathrm{Hess}f)),$$

onde $\mathrm{Hess}f$ é a matriz Hessiana da função f.

Se $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de M^n, então L_r pode ser escrito como

$$L_rf = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}(\mathrm{grad}_M f), P_r(e_i) \right\rangle.$$

Denominamos este operador de *operador linearizado* L_r. Em particular, quando $r = 0$, $L_0f = \Delta f$. Por este motivo, dizemos que este operador generaliza, em certo sentido, o Laplaciano. Tal operador foi introduzido por Voss na conexão com argumentos variacionais, ver [19].

Proposição 2.2.1. *Sejam $f, g : M^n \to \mathbb{R}$ funções suaves. Então*

(a) $L_r(f^q) = q(f^{q-1}L_rf + \langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M f^{q-1}\rangle)$ *para algum inteiro positivo q;*

(b) $L_r(fg) = fL_rg + gL_rf + 2\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle$.

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base ortonormal de M^n.
(a) Usando a definição de L_r, temos que

$$\begin{aligned} L_r(f^q) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(\mathrm{grad}_M f^q), P_r(e_i)\rangle = q\sum_{i=1}^{n} \left\langle \nabla_{e_i}(f^{q-1}\mathrm{grad}_M f), P_r(e_i)\right\rangle \\ &= q\left[\sum_{i=1}^{n} \left\langle f^{q-1}\nabla_{e_i}\mathrm{grad}_M f, P_r(e_i)\right\rangle + \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i(f^{q-1})\mathrm{grad}_M f, P_r(e_i)\right\rangle\right] \\ &= q\left[f^{q-1}L_r f + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \sum_{i=1}^{n} e_i(f^{q-1})e_i\right\rangle\right] \\ &= q(f^{q-1}L_r f + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M f^{q-1}\right\rangle). \end{aligned}$$

(b) Usando a definição de L_r, obtemos que

$$\begin{aligned} L_r(fg) &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\mathrm{grad}_M(fg), P_r(e_i)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(f\mathrm{grad}_M g + g\mathrm{grad}_M f), P_r(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(f\mathrm{grad}_M g), P_r(e_i)\rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(g\mathrm{grad}_M f), P_r(e_i)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\langle f\nabla_{e_i}\mathrm{grad}_M g, P_r(e_i)\rangle + \langle e_i(f)\mathrm{grad}_M g, P_r(e_i)\rangle] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} [\langle g\nabla_{e_i}\mathrm{grad}_M f, P_r(e_i)\rangle + \langle e_i(g)\mathrm{grad}_M f, P_r(e_i)\rangle] \\ &= f\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\mathrm{grad}_M g, P_r(e_i)\rangle + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_M g), \sum_{i=1}^{n} e_i(f)e_i\right\rangle \\ &\quad + g\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\mathrm{grad}_M f, P_r(e_i)\rangle + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \sum_{i=1}^{n} e_i(g)e_i\right\rangle \\ &= fL_r f + \langle P_r(\mathrm{grad}_M g), \mathrm{grad}_M f\rangle + gL_r f + \langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle \\ &= fL_r f + gL_r f + 2\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle). \end{aligned}$$

$\square$

Sejam M^n e N^{n+1} variedades Riemannianas orientadas e $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica. Consideremos a identificação usual de $Y \in T_pM$ com $dx_p(Y)$ e seja $F : N \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se considerarmos a composição $f = F \circ x : M^n \to \mathbb{R}$, temos que em $p \in M$,

$$\langle \mathrm{grad}_M f, Y\rangle (p) = df_p(Y) = d(F \circ x)_p Y = dF_{x(p)}dx_p Y = \langle \mathrm{grad}_N F, Y\rangle (x(p)) \; \forall \; Y \in T_pM,$$

onde grad_M e grad_N denotam o gradiente em M e o gradiente em N, respectivamente.

Assim

$$\mathrm{grad}_N F = \mathrm{grad}_M f + (\mathrm{grad}_N F)^{\perp}, \tag{2.1}$$

onde $(\mathrm{grad}_N F)^{\perp}$ significa a parte normal do $\mathrm{grad}_N F$.

Sejam $\overline{\nabla}$ a derivada covariante em N e B a segunda forma fundamental de x. A matriz de B com respeito à base ortonormal $\{e_1, ..., e_n\}$ é dada por

$$h_{ij} = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, \eta \right\rangle, \quad i, j = 1, ..., n,$$

onde η é o campo vetorial normal unitário.

O próximo resultado pode ser encontrada em [3], Lema 2.1.

Proposição 2.2.2. *Seja $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica. Seja $F : N \to \mathbb{R}$ uma função suave e consideremos $f = F \circ x : M \to \mathbb{R}$. Para um referencial ortonormal $\{e_i, ..., e_n\}$ numa vizinhança $U \subset M$, temos*

$$L_r f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + (r+1) S_{r+1} \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle,$$

onde η denota o campo vetorial normal unitário da imersão e grad_N é o gradiente em N.

Demonstração. Usando a definição de L_r, temos que

$$\begin{aligned} L_r f &= \sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}(\mathrm{grad}_M f), P_r(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_M f) - [\overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_M f) - \nabla_{e_i}(\mathrm{grad}_M f)], P_r(e_i) \right\rangle. \end{aligned}$$

Como $B(e_i, \mathrm{grad}_M f) = \overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_M f) - \nabla_{e_i}(\mathrm{grad}_M f)$, onde B a segunda forma fundamental da imersão, obtemos que

$$\begin{aligned} L_r f &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_M f) - B(e_i, \mathrm{grad}_M f), P_r(e_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_M f), P_r(e_i) \right\rangle. \end{aligned}$$

Usando (2.1), obtemos

$$\begin{aligned} L_r f &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_N F - (\mathrm{grad}_N F)^{\perp}), P_r(e_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \mathrm{grad}_N F, P_r(e_i) \right\rangle - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}((\mathrm{grad}_N F)^{\perp}), P_r(e_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \eta), P_r(e_i) \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) - \sum_{i=1}^{n} \left\langle \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \overline{\nabla}_{e_i}(\eta), P_r(e_i) \right\rangle. \end{aligned}$$

Usando a Proposição 1.5.2,

$$L_r f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) - \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \sum_{i=1}^{n} \langle -B(e_i), P_r(e_i) \rangle .$$

Lembrando que B é uma forma bilinear, temos que

$$\begin{aligned} L_r f &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, BP_r(e_i) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \, \mathrm{tr}(BP_r). \end{aligned}$$

Como $\mathrm{tr}(BP_r) = (r+1)S_{r+1}$, ver item (c) da Proposição 2.1.4, concluímos que

$$L_r f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + (r+1)S_{r+1} \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle .$$

$\square$

Proposição 2.2.3. *Sejam $x : M^n \to N^{n+1}$ uma imersão isométrica e $F : N \to \mathbb{R}$ uma função suave. Se $f = F \circ x : M \to \mathbb{R}$, então*

$$L_r(f^q) = q(F^{q-1} L_r f + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_N f), \mathrm{grad}_N f^{q-1} \right\rangle),$$

onde grad_N *é o gradiente em N e q é inteiro positivo.*

Demonstração. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal em M. Como $f^q = (F \circ x)^q$, usando a Proposição 2.2.2, temos que

$$\begin{aligned} L_r(f^q) &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess}(F^q)(e_i, P_r(e_i)) + (r+1)S_{r+1} \langle \mathrm{grad}_N F^q, \eta \rangle \\ &= q \sum_{i=1}^{n} \left[F^{q-1} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + \left\langle e_i(F^{q-1}) \mathrm{grad}_N F, P_r(e_i) \right\rangle \right] \\ &\quad + (r+1)S_{r+1} \langle q F^{q-1} \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \\ &= q \sum_{i=1}^{n} F^{q-1} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + q \sum_{i=1}^{n} e_i(F^{q-1}) \langle \mathrm{grad}_N F, P_r(e_i) \rangle \\ &\quad + q F^{q-1} (r+1) S_{r+1} \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \\ &= q \sum_{i=1}^{n} F^{q-1} \mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + q \sum_{i=1}^{n} e_i(F^{q-1}) \langle \mathrm{grad}_M f, P_r(e_i) \rangle \\ &\quad + q F^{p-1} (r+1) S_{r+1} \langle \mathrm{grad}_N F, \eta \rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q\sum_{i=1}^{n} F^{q-1}\mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + q\left\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \sum_{i=1}^{n} e_i(F^{q-1})e_i \right\rangle \\
&\quad +qF^{p-1}(r+1)S_{r+1}\langle \mathrm{grad}_N F, \eta\rangle \\
&= q\sum_{i=1}^{n} F^{q-1}\mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + q\left\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_N F^{q-1} \right\rangle \\
&\quad +qF^{p-1}(r+1)S_{r+1}\langle \mathrm{grad}_N F, \eta\rangle \\
&= q\sum_{i=1}^{n} F^{q-1}\mathrm{Hess}(F)(e_i, P_r(e_i)) + q\left\langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M f^{q-1} \right\rangle \\
&\quad +qF^{p-1}(r+1)S_{r+1}\langle \mathrm{grad}_N F, \eta\rangle \\
&= q(F^{q-1}L_r f + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_N f), \mathrm{grad}_N f^{q-1} \right\rangle).
\end{aligned}
$$

□

2.3 Operador Linearizado L_r em Formas Espaciais

Nesta seção, vamos considerar N^{n+1} uma forma espacial Q_c^{n+1}. Fixado um ponto $p \in Q_c^{n+1}$, sejam $\rho : Q_c^{n+1} \to \mathbb{R}$ a *função distância geodésica* ao ponto p e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n. Definimos o vetor posição $X : M^n \to Q_c^{n+1}$ com respeito a p por

$$X(x(p)) = S_c(\rho(p))\mathrm{grad}_Q \rho(p),$$

onde S_c é a solução da equação $y'' + cy = 0$ com condições iniciais $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, isto é,

$$S_c(\rho(p)) = \begin{cases} \rho(p), \text{ se } c = 0; \\ \dfrac{\mathrm{sen}\,(\rho(p)\sqrt{c})}{\sqrt{c}}, \text{ se } c > 0; \\ \dfrac{\mathrm{senh}\,(\rho(p)\sqrt{-c})}{\sqrt{-c}}, \text{ se } c < 0. \end{cases}$$

Denotaremos $S_c'(\rho(p)) = \theta_c(\rho(p))$.

Os dois próximos resultados são consequências da Proposição 2.2.2 e da Proposição 2.2.3, com a condição de N^{n+1} ser uma forma espacial Q_c^{n+1}. A partir desta seção X sempre será o vetor posição $X(x(p)) = S_c(\rho(p))\mathrm{grad}_Q \rho(p)$.

Proposição 2.3.1. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então*

$$\frac{1}{c}L_r(\theta_c) = -[(n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle], \text{ se } c \neq 0.$$

Identificamos θ_c com $\theta_c \circ \rho \circ x$.

Demonstração. Considere $F = \theta_c \circ \rho$ na Proposição 2.2.2 e seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança $U \subset M$. Então

$$L_r(\theta_c) = \sum_{i=1}^{n} \text{Hess}(\theta_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) + (r+1)S_{r+1} \left\langle \text{grad}_Q \theta_c(\rho), \eta \right\rangle .$$

Inicialmente, observemos que

$$\begin{aligned}
\text{Hess}(\theta_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\text{grad}_Q(\theta_c(\rho))), P_r(e_i) \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\theta_c'(\rho)\text{grad}_Q \rho), P_r(e_i) \right\rangle \\
&= \theta_c'(\rho) \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle + \theta_c''(\rho) \left\langle \left\langle \text{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle \\
&= \theta_c'(\rho) \text{Hess}\rho(e_i, P_r(e_i)) + \theta_c''(\rho) \left\langle \text{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Como S_c é solução de $y'' + cy = 0$, temos que $S_c''(\rho) + cS_c(\rho) = 0$. Lembrando que $S_c' = \theta_c$, obtemos

$$\theta_c'(\rho) = -cS_c(\rho) \quad \text{e} \quad \theta_c''(\rho) = -c\theta_c(\rho).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\text{Hess}(\theta_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) = \; & -cS_c(\rho)\text{Hess}\rho(e_i, P_r(e_i)) \\
& -c\theta_c(\rho) \left\langle \text{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle .
\end{aligned}$$

Usando o resultado

$$\text{Hess}\rho(X, Y) = \left\langle \overline{\nabla}_X \text{grad}_Q \rho, Y \right\rangle = \frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)} [\langle X, Y \rangle - \left\langle \text{grad}_Q \rho, X \right\rangle \left\langle \text{grad}_Q \rho, Y \right\rangle], \tag{2.2}$$

o qual pode ser encontrado em [14], p. 36, Proposição 2.4.1, obtemos

$$\text{Hess}\rho(e_i, P_r(e_i)) = \frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)} [\langle e_i, P_r(e_i) \rangle - \left\langle \text{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle].$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\text{Hess}(\theta_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) &= -c\theta_c(\rho)[\langle e_i, P_r(e_i) \rangle - \left\langle \text{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle] \\
&\quad -c\theta_c(\rho) \left\langle \text{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \text{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle \\
&= -c\theta_c(\rho) \langle e_i, P_r(e_i) \rangle .
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
L_r(\theta_c) &= -c\theta_c(\rho) \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, P_r(e_i) \rangle + (r+1)S_{r+1} \left\langle \text{grad}_Q \theta_c(\rho), \eta \right\rangle \\
&= -c\theta_c(\rho)\text{tr}(P_r) + (r+1)S_{r+1} \left\langle \theta_c'(\rho)\text{grad}_Q \rho, \eta \right\rangle \\
&= -c\theta_c(\rho)\text{tr}(P_r) + (r+1)S_{r+1} \left\langle -cS_c(\rho)\text{grad}_Q \rho, \eta \right\rangle \\
&= -c\theta_c(\rho)\text{tr}(P_r) - c(r+1)S_{r+1} \langle X, \eta \rangle .
\end{aligned}$$

Como $\text{tr}(P_r) = (n-r)S_r$, ver item (b) da Proposição 2.1.4, concluímos a demonstração.

$\square$

Proposição 2.3.2. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então*

$$\frac{1}{2}L_r|X|^2 = \theta_c(\rho)[(n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle] - c\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle \text{ para qualquer } c.$$

Aqui, designamos X^T como a componente tangente de X e identificamos X com $X \circ x$.

Demonstração. Observemos que

$$|\mathrm{grad}_Q\rho| = 1,$$

e, portanto,

$$|X|^2 = \left\langle S_c(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho, S_c(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho\right\rangle = (S_c(\rho))^2.$$

Assim

$$\frac{1}{2}L_r|X|^2 = \frac{1}{2}L_r((S_c(\rho))^2).$$

Usando a Proposição 2.2.3, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}L_r((S_c(\rho))^2) &= S_c(\rho)L_r(S_c(\rho)) + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_Q S_c(\rho)), \mathrm{grad}_Q S_c(\rho)\right\rangle \\
&= S_c(\rho)L_r(S_c(\rho)) + \left\langle P_r(S_c'(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho), S_c'(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho\right\rangle \\
&= S_c(\rho)L_r(S_c(\rho)) + (S_c'(\rho))^2\left\langle P_r(\mathrm{grad}_Q\rho), \mathrm{grad}_Q\rho\right\rangle.
\end{aligned}$$

Como $S_c'(\rho) = \theta_c(\rho)$, obtemos

$$\frac{1}{2}L_r((S_c(\rho))^2) = S_c(\rho)L_r(S_c(\rho)) + (\theta_c(\rho))^2\left\langle P_r(\mathrm{grad}_Q\rho), \mathrm{grad}_Q\rho\right\rangle.$$

A Proposição 2.2.2 nos diz que

$$\begin{aligned}
L_r(S_c(\rho)) &= \sum_{i=1}^n \mathrm{Hess}(S_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) + (r+1)S_{r+1}\left\langle \mathrm{grad}_Q S_c(\rho), \eta\right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{Hess}(S_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) + (r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho)\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, \eta\right\rangle.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(S_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(\mathrm{grad}_Q S_c(\rho)), P_r(e_i)\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}(S_c'(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho), P_r(e_i)\right\rangle \\
&= S_c'(\rho)\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\mathrm{grad}_Q\rho, P_r(e_i)\right\rangle + S_c''(\rho)\left\langle\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, e_i\right\rangle \mathrm{grad}_Q\rho, P_r(e_i)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Lembrando que $S_c'(\rho) = \theta_c(\rho)$ e $S_c''(\rho) = -cS_c$, temos

$$\mathrm{Hess}(S_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) = \theta_c(\rho)\mathrm{Hess}\rho(e_i, P_r(e_i)) - cS_c(\rho)\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, e_i\right\rangle\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, P_r(e_i)\right\rangle.$$

Agora, usando (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}(S_c(\rho))(e_i, P_r(e_i)) &= \frac{(\theta_c(\rho))^2}{S_c(\rho)}[\langle e_i, P_r(e_i)\rangle - \left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, e_i\right\rangle\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, P_r(e_i)\right\rangle] \\
&\quad -cS_c(\rho)\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, e_i\right\rangle\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho, P_r(e_i)\right\rangle
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} L_r(S_c(\rho)) &= \frac{(\theta_c(\rho))^2}{S_c(\rho)} \sum_{i=1}^{n} [\langle e_i, P_r(e_i)\rangle - \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle] \\ &\quad - c S_c(\rho) \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad + (r+1) S_{r+1} \theta_c(\rho) \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, \eta \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_r |X|^2 &= (\theta_c(\rho))^2 \mathrm{tr}(P_r) - (\theta_c(\rho))^2 \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad - c (S_c(\rho))^2 \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle \\ &\quad + (r+1) S_c(\rho) S_{r+1} \theta_c(\rho) \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, \eta \right\rangle + (\theta_c(\rho))^2 \left\langle P_r(\mathrm{grad}_Q \rho), \mathrm{grad}_Q \rho \right\rangle. \end{aligned}$$

Mas

$$\left\langle P_r(\mathrm{grad}_Q \rho), \mathrm{grad}_Q \rho \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, e_i \right\rangle \left\langle \mathrm{grad}_Q \rho, P_r(e_i) \right\rangle.$$

Assim

$$\frac{1}{2} L_r |X|^2 = (\theta_c(\rho))^2 \mathrm{tr}(P_r) + (r+1) S_{r+1} \theta_c(\rho) \langle X, \eta \rangle - c \sum_{i=1}^{n} \langle X, e_i \rangle \langle X, P_r(e_i) \rangle.$$

Como

$$\begin{aligned} \sum_i \langle X, e_i \rangle \langle X, P_r(e_i) \rangle &= \sum_i \langle X, e_i \rangle \left\langle P_r(e_i), \sum_j \langle X, e_j \rangle e_j \right\rangle \\ &= \sum_i \langle X, e_i \rangle \left\langle P_r(e_i), X^T \right\rangle = \sum_i \langle X, e_i \rangle \left\langle P_r(X^T), e_i \right\rangle \\ &= \left\langle P_r(X^T), \sum_i \langle X, e_i \rangle e_i \right\rangle = \left\langle P_r(X^T), X^T \right\rangle \end{aligned}$$

e $\mathrm{tr}(P_r) = (n-r)S_r$, concluímos a demonstração.

□

Agora, usando as proposições anteriores, demonstraremos o próximo resultado que será essencial na Seção 2.4.

Proposição 2.3.3. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então, para todo inteiro positivo q,*

$$\begin{aligned}(a)\quad L_r\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^q &= q\Bigg[\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}\{\theta_c(\rho)[(n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle]\\ &\quad -c\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\}\\ &\quad +(q-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-2}(\theta_c(\rho))^2\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\Bigg];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(b)\quad L_r\theta_c^q &= q((\theta_c(\rho))^{q-1}[-c((n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)\langle X,\eta\rangle S_{r+1})]\\ &\quad +(q-1)(\theta_c(\rho))^{q-2}c^2\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle),\end{aligned}$$

onde identificamos X com $X\circ x$ e θ_c^q com $(\theta_c\circ\rho\circ x)^q$.

Demonstração. Sejam $X = X\circ x$ e $\theta_c^q = (\theta_c\circ\rho\circ x)^q$.
(a) Usando a Proposição 2.2.3, temos que

$$\begin{aligned}L_r\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^q &= q\Bigg[\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}L_r\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)\\ &\quad +\left\langle P_r\left(\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)\right),\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}\right\rangle\Bigg].\end{aligned}$$

Como

$$\frac{\langle X,X\rangle}{2}=\frac{1}{2}\left\langle S_c(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho, S_c(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho\right\rangle=\frac{(S_c(\rho))^2}{2},$$

temos que

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right) &= \mathrm{grad}_Q\left(\frac{(S_c(\rho))^2}{2}\right)=S_c(\rho)S_c'(\rho)\sum_{i=1}^n\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho,e_i\right\rangle e_i\\ &= \theta_c(\rho)\sum_{i=1}^n\langle X,e_i\rangle e_i=\theta_c(\rho)X^T.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}=(q-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-2}\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right).$$

Logo

$$\mathrm{grad}_Q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}=(q-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-2}\theta_cX^T. \tag{2.3}$$

Usando a Proposição 2.3.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
L_r\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^q &= q\left[\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}\{\theta_c(\rho)[(n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle]\right.\\
&\quad\left.-c\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\}+\left\langle P_r(\theta_c(\rho)X^T),(q-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-2}\theta_c(\rho)X^T\right\rangle\right]\\
&= q\left[\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}\{\theta_c(\rho)[(n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle]\right.\\
&\quad\left.-c\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\}+(q-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-2}(\theta_c(\rho))^2\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\right].
\end{aligned}
$$

(b) Temos que

$$
\mathrm{grad}_Q\theta_c(\rho)=\theta_c'(\rho)\sum_{i=1}^n\left\langle \mathrm{grad}_Q\rho,e_i\right\rangle e_i=-c\sum_{i=1}^n\left\langle S_c(\rho)\mathrm{grad}_Q\rho,e_i\right\rangle e_i=-c\sum_{i=1}^n\langle X,e_i\rangle e_i.
$$

Assim

$$
\mathrm{grad}_Q\theta_c=-cX^T. \tag{2.4}
$$

Logo, usando a Proposição 2.2.3 e a Proposição 2.3.1, concluímos que

$$
\begin{aligned}
L_r(\theta_c)^q &= q((\theta_c(\rho))^{q-1}L_r\theta_c+\left\langle P_r(\mathrm{grad}_Q\theta_c(\rho)),\mathrm{grad}_Q(\theta_c(\rho))^{q-1}\right\rangle)\\
&= q((\theta_c(\rho))^{q-1}[-c((n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)\langle X,\eta\rangle S_{r+1})]\\
&\quad+\left\langle P_r(-cX^T),(q-1)(\theta_c(\rho))^{q-2}(-cX^T)\right\rangle)\\
&= q((\theta_c(\rho))^{q-1}[-c((n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)\langle X,\eta\rangle S_{r+1})]\\
&\quad+(q-1)(\theta_c(\rho))^{q-2}c^2\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle).
\end{aligned}
$$

□

A fim de demonstrarmos as fórmulas integrais, vamos obter mais dois resultados antes de demonstrarmos a última proposição desta seção.

Lema 2.3.1. *Seja $x:M^n\to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então, temos as seguintes identidades:*

(a) $\overline{\nabla}_{e_j}X=\theta_c(\rho)e_j$;

(b) $\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}X=\theta_c(\rho)h_{ij}\eta-c\langle X,e_i\rangle e_j$;

(c) $\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\langle X,\eta\rangle=-\theta_c(\rho)h_{ij}-\sum_k\left(\overline{\nabla}_{e_k}h_{ij}\right)\langle X,e_k\rangle-h_{ij}^2\langle X,\eta\rangle$,

onde η é o campo vetorial normal unitário e $\{e_1,...,e_n\}$ é um referencial geodésico em M^n.

Demonstração. Inicialmente, observamos que

$$\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}_Q\rho = \frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)}(e_i - \langle \text{grad}_Q\rho, e_i\rangle \text{grad}_Q\rho). \tag{2.5}$$

De fato, temos que

$$\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}_Q\rho = \sum_{j=1}^{n} \langle \overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}_Q\rho, e_j\rangle e_j.$$

Usando (2.2) com $X = e_i$ e $Y = e_j$,

$$\langle \overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}_Q\rho, e_j\rangle = \frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)}(\langle e_i, e_j\rangle - \langle \text{grad}_Q\rho, e_i\rangle \langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\text{grad}_Q\rho &= \frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)}\left(\sum_j \langle e_i, e_j\rangle e_j - \langle \text{grad}_Q\rho, e_i\rangle \sum_j \langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle e_j\right) \\
&= \frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)}(e_i - \langle \text{grad}_Q\rho, e_i\rangle \text{grad}_Q\rho).
\end{aligned}$$

Agora, demonstraremos as identidades.

(a) Usando (2.5), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_j}X &= \overline{\nabla}_{e_j}(S_c(\rho)\text{grad}_Q\rho) = S_c(\rho)\overline{\nabla}_{e_j}\text{grad}_Q\rho + S_c'(\rho)\langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle \text{grad}_Q\rho \\
&= S_c(\rho)\frac{\theta_c(\rho)}{S_c(\rho)}(e_j - \langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle \text{grad}_Q\rho) + \theta_c(\rho)\langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle \text{grad}_Q\rho \\
&= \theta_c(\rho)[e_j - \langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle \text{grad}_Q\rho + \langle \text{grad}_Q\rho, e_j\rangle \text{grad}_Q\rho],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\overline{\nabla}_{e_j}X = \theta_c(\rho)e_j.$$

$$\begin{aligned}
(b)\quad \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}X &= \overline{\nabla}_{e_i}(\theta_c(\rho)e_j) = \theta_c(\rho)\overline{\nabla}_{e_i}e_j + \theta_c'(\rho)\langle \text{grad}_Q\rho, e_i\rangle e_j \\
&= \theta_c(\rho)\left(\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_j, \eta\rangle \eta + \nabla_{e_i}e_j\right) - cS_c(\rho)\langle \text{grad}_Q\rho, e_i\rangle e_j.
\end{aligned}$$

Como o referencial é geodésico, obtemos

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}X = \theta_c(\rho)h_{ij}\eta - c\langle X, e_i\rangle e_j,$$

onde (h_{ij}) é a matriz da segunda forma fundamental B com respeito a e_i.

(c) Consideremos o campo vetorial normal unitário η e o referencial geodésico $\{e_1, ..., e_n\}$ em M^n. Então

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\eta &= \overline{\nabla}_{e_i}\left(\sum_k \left\langle \overline{\nabla}_{e_j}\eta, e_k\right\rangle e_k\right) = \overline{\nabla}_{e_i}\left(-\sum_k \left\langle \overline{\nabla}_{e_j}e_k, \eta\right\rangle e_k\right) \\
&= \overline{\nabla}_{e_i}\left(-\sum_k h_{jk}e_k\right) \\
&= -\sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})e_k - \sum_k h_{jk}\overline{\nabla}_{e_i}e_k \\
&= -\sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})e_k - \sum_k h_{jk}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, \eta\right\rangle \eta \\
&= -\sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})e_k - \sum_k h_{jk}h_{ik}\eta \\
&= -\sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})e_k - h_{ij}^2\eta.
\end{aligned}$$

Portanto, usando os itens (a) e (b), obtemos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\langle X, \eta\rangle &= \overline{\nabla}_{e_i}(\left\langle \overline{\nabla}_{e_j}X, \eta\right\rangle + \left\langle X, \overline{\nabla}_{e_j}\eta\right\rangle) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}X, \eta\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_j}X, \overline{\nabla}_{e_i}\eta\right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}X, \overline{\nabla}_{e_j}\eta\right\rangle + \left\langle X, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\eta\right\rangle \\
&= \langle \theta_c(\rho)h_{ij}\eta - c\langle X, e_i\rangle e_j, \eta\rangle + \left\langle \theta_c(\rho)e_j, \overline{\nabla}_{e_i}\eta\right\rangle + \left\langle \theta_c(\rho)e_i, \overline{\nabla}_{e_j}\eta\right\rangle \\
&\quad + \left\langle X, -\sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})e_k - \sum_k h_{ij}^2\eta\right\rangle \\
&= \theta_c(\rho)h_{ij} - \theta_c(\rho)\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_j, \eta\right\rangle - \theta_c(\rho)\left\langle \overline{\nabla}_{e_j}e_i, \eta\right\rangle - \sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})\langle X, e_k\rangle \\
&\quad - \sum_k h_{ij}^2\langle X, \eta\rangle \\
&= \theta_c(\rho)h_{ij} - 2\theta_c(\rho)h_{ij} - \sum_k (\overline{\nabla}_{e_i}h_{jk})\langle X, e_k\rangle - \sum_k h_{ij}^2\langle X, \eta\rangle.
\end{aligned}$$

Logo, usando o Corolário 1.5.1,

$$\overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_j}\langle X, \eta\rangle = -\theta_c(\rho)h_{ij} - \sum_k \left(\overline{\nabla}_{e_k}h_{ij}\right)\langle X, e_k\rangle - h_{ij}^2\langle X, \eta\rangle.$$

□

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em [15], p. 489, Lema A.

Lema 2.3.2. *Suponhamos que (h_{ij}) é uma matriz simétrica $n \times n$ de funções diferenciáveis reais em um conjunto aberto no $\mathbb{R}^m$. Seja S_j a j-ésima função elementar simétrica dos autovalores de (h_{ij}) e h_{kl}^r o (k, l)-elemento da r-ésima entrada da matriz (h_{ij}). Então, para algum vetor x no domínio de (h_{ij}),*

$$r\overline{\nabla}_x S_{r+1} = \sum_{ij} h_{ij}(\overline{\nabla}_x(P_r)_{ij}),$$

onde $(P_r)_{ij} = \langle P_r(e_i), e_j\rangle$.

Proposição 2.3.4. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então*

$$L_r \langle X, \eta \rangle = -(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle X, \eta \rangle - \langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X \rangle .$$

Demonstração. Consideremos $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial geodésico em M^n. Inicialmente, temos que

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_i} \mathrm{grad}_M \langle X, \eta \rangle &= \overline{\nabla}_{e_i} \left[\sum_k e_k(\langle X, \eta \rangle) e_k \right] \\ &= \sum_k \left[(\overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_k} \langle X, \eta \rangle) e_k + e_k \langle X, \eta \rangle) \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right]. \end{aligned}$$

Usando o item (c) do Lema 2.3.1, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{e_i} \mathrm{grad}_M \langle X, \eta \rangle = \sum_k \Big[& -\theta_c(\rho) h_{ik} e_k - \sum_l (\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik}) \langle X, e_l \rangle e_k - h_{ik}^2 \langle X, \eta \rangle e_k \\ & + (e_k \langle X, \eta \rangle) \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_k, \eta \right\rangle \eta \Big]. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \mathrm{grad}_M \langle X, \eta \rangle, P_r(e_j) \right\rangle &= -\theta_c(\rho) \sum_k h_{ik} \langle e_k, P_r(e_j) \rangle - \langle X, \eta \rangle \sum_k h_{ik}^2 \langle e_k, P_r(e_j) \rangle \\ & \sum_{kl} (\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik}) \langle X, e_l \rangle \langle e_k, P_r(e_j) \rangle . \end{aligned}$$

Portanto

$$L_r \langle X, \eta \rangle = -\theta_c(\rho) \mathrm{tr}(BP_r) - \langle X, \eta \rangle \mathrm{tr}(B^2 P_r) - \mathrm{tr} \left(\sum_l (\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik} P_r) \langle X, e_l \rangle \right).$$

Como $\mathrm{tr}(BP_r) = (r+1)S_{r+1}$ e $\mathrm{tr}(B^2 P_r) = S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}$, obtemos

$$L_r \langle X, \eta \rangle = -\theta_c(\rho)(r+1)S_{r+1} - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle X, \eta \rangle - \mathrm{tr} \left(\sum_l (\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik} P_r) \langle X, e_l \rangle \right).$$

Afirmamos que

$$\mathrm{tr} \left(\sum_l (\overline{\nabla}_{e_l} h_{ik} P_r) \langle X, e_l \rangle \right) = \langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X \rangle .$$

De fato, o Lema 2.3.2 implica

$$\begin{aligned} r \overline{\nabla}_{e_l} S_{r+1} &= \sum_{ik} h_{ik} (\overline{\nabla}_{e_l} (P_r)_{ik}) = \sum_k \lambda_k (\overline{\nabla}_{e_l} S_r(B_k)) \\ &= \sum_k \overline{\nabla}_{e_l} (\lambda_k S_r(B_k)) - \sum_k (\overline{\nabla}_{e_l} \lambda_k)(S_r(B_k)), \end{aligned}$$

onde λ_k e $S_r(B_k)$ são os autovalores de B e P_r, respectivamente.

Como $\operatorname{tr}(BP_r) = (r+1)S_{r+1}$, temos que

$$\overline{\nabla}_{e_l}\operatorname{tr}(BP_r) = (r+1)\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} r\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} &= \sum_k \overline{\nabla}_{e_l}(\lambda_k S_r(B_k)) - \sum_k \overline{\nabla}_{e_l}\lambda_k(S_r(B_k)) \\ &= \overline{\nabla}_{e_l}\operatorname{tr}(BP_r) - \sum_k \overline{\nabla}_{e_l}\lambda_k(S_r(B_k)) \\ &= (r+1)\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} - \operatorname{tr}(\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}((P_r)_{ik})). \end{aligned}$$

Logo

$$\overline{\nabla}_{e_l}S_{r+1} = \operatorname{tr}(\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}((P_r)_{ik})).$$

Assim

$$\operatorname{tr}\left(\sum_l (\overline{\nabla}_{e_l}h_{ik}P_r)\langle X, e_l\rangle\right) = \langle \operatorname{grad}_M S_{r+1}, X\rangle,$$

demonstrando a afirmação. Substituindo esta última igualdade na expressão de $L_r\langle X,\eta\rangle$, finalizamos o lema.

□

Proposição 2.3.5. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana orientada M^n em uma forma espacial Q_c^{n+1}. Então*

$$\begin{aligned} L_r\langle X,\eta\rangle^q &= q[\langle X,\eta\rangle^{q-1}(-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle \\ &\quad - \langle \operatorname{grad}_M S_{r+1}, X\rangle) + (q-1)\langle X,\eta\rangle^{q-2}\left\langle P_r(B^2(X^T)), X^T\right\rangle] \end{aligned}$$

para todo inteiro positivo q.

Demonstração. Usando o item (c) da Proposição 1.3.1, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q &= q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\operatorname{grad}_M\langle X,\eta\rangle = q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left[\sum_{j=1}^n e_j\langle X,\eta\rangle e_j\right] \\ &= q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left[\sum_{j=1}^n(\langle\overline{\nabla}_{e_j}X,\eta\rangle + \langle X,\overline{\nabla}_{e_j}\eta\rangle)e_j\right]. \end{aligned}$$

Como $\overline{\nabla}_{e_j}\eta = -\sum_k h_{jk}e_k$, obtemos

$$\operatorname{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q = -q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\sum_{jk}h_{jk}\langle X,e_k\rangle e_j.$$

Agora, observemos que

$$B(X^T) = \sum_k\langle X,e_k\rangle B(e_k) = \sum_k\langle X,e_k\rangle\sum_j h_{jk}e_j = \sum_{jk}h_{jk}\langle X,e_k\rangle e_j.$$

Logo

$$\mathrm{grad}_M \langle X,\eta\rangle^q = -q\langle X,\eta\rangle^{q-1} B(X^T). \tag{2.6}$$

Usando o item (a) da Proposição 2.2.1 e a Proposição 2.3.4, temos que

$$\begin{aligned} L_r\langle X,\eta\rangle^q &= q[\langle X,\eta\rangle^{q-1} L_r\langle X,\eta\rangle + \left\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle), \mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^{q-1}\right\rangle] \\ &= q[\langle X,\eta\rangle^{q-1}(-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle \\ &\quad - \langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X\rangle) + \left\langle -P_r(B(X^T)), -(q-1)\langle X,\eta\rangle^{q-2} B(X^T)\right\rangle]. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} L_r\langle X,\eta\rangle^q &= q[\langle X,\eta\rangle^{q-1}(-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle \\ &\quad - \langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X\rangle) + (q-1)\langle X,\eta\rangle^{q-2}\left\langle P_r(B^2(X^T)), X^T\right\rangle]. \end{aligned} \tag{2.7}$$

$\square$

2.4 Fórmulas Integrais para a Curvatura r-Média

Nesta seção, consideraremos uma imersão isométrica $x : M^n \to Q_c^{n+1}$, onde Q_c^{n+1} é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional constante c. Neste caso, como foi provado por Rosenberg em [17], p. 225, L_r é um operador linear dado pelo divergente de um determinado campo, isto é,

$$L_r(f) = \mathrm{div}_M(P_r(\mathrm{grad}_M f))$$

para toda função suave $f : M \to \mathbb{R}$.

Faremos uma demonstração deste resultado na próxima proposição.

Proposição 2.4.1. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica. O operador L_r é dado pelo divergente de um determinado campo, isto é,*

$$L_r(f) = \mathrm{tr}(P_r(\mathrm{Hess} f)) = \mathrm{div}_M(P_r(\mathrm{grad}_M f))$$

para toda função suave $f : M \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Consideremos um referencial geodésico $\{e_1, ..., e_n\}$ em M. Podemos escrever L_r como

$$L_r f = \sum_{ij} (P_r)_{ij} f_{ij},$$

onde $(P_r)_{ij} = \langle P_r(e_i), e_j\rangle$ e $f_{ij} = \mathrm{Hess} f(e_i, e_j)$. Aqui, usaremos a notação $f_i = e_i(f)$.

Como

$$(P_r)_{ij}f_{ij} = ((P_r)_{ij}f_i)_j - (P_r)_{ijj}f_i,$$

temos que

$$L_r f = \sum_{ij}((P_r)_{ij}f_i)_j - \sum_{ij}(P_r)_{ijj}f_i = \sum_j \left(\sum_i (P_r)_{ij}f_i\right)_j - \sum_i \left(\sum_j (P_r)_{ijj}\right) f_i.$$

Visto que

$$P_r(\text{grad}_M f) = \sum_j (P_r(\text{grad}_M f))_j e_j,$$

vemos que

$$\langle P_r(\text{grad}_M f), e_i\rangle = \sum_j (P_r(\text{grad}_M f))_j \delta_{ij} = (P_r(\text{grad}_M f))_i.$$

Por outro lado,

$$P_r(\text{grad}_M f) = \sum_k f_k P_r(e_k).$$

Logo

$$\sum_k f_k \langle P_r(e_k), e_i\rangle = (P_r(\text{grad}_M f))_i,$$

ou seja,

$$\sum_k f_k (P_r)_{ki} = (P_r(\text{grad}_M f))_i.$$

Além disso, usando a definição de divergente e lembrando que o referencial é geodésico, obtemos que

$$\text{div}_M(P_r(\text{grad}_M f)) = \sum_j ((P_r(\text{grad}_M f))_j)_j \quad \text{e} \quad (\text{div}_M P_r)_i = \sum_j (P_r)_{ijj}.$$

Portanto

$$L_r f = \sum_j ((P_r(\text{grad}_M f))_j)_j - \sum_i (\text{div}_M P_r)_i f_i = \text{div}_M(P_r(\text{grad}_M f)) - \langle \text{div}_M P_r, \text{grad}_M f\rangle.$$

Agora, basta mostrarmos que $\text{div}_M P_r = 0$. Vejamos:

$$\text{div}_M P_r = \sum_i (\nabla_{e_i} P_r)e_i = \sum_i (\nabla_{e_i}(S_r I - BP_{r-1}))e_i = \sum_i (\nabla_{e_i}(S_r I) - \nabla_{e_i}(BP_{r-1}))e_i.$$

Temos que

$$\nabla_{e_i}(S_r I)e_i = \nabla_{e_i}(S_r e_i) - S_r I(\nabla_{e_i} e_i).$$

Como o referencial é geodésico,

$$\nabla_{e_i}(S_r I)e_i = (S_r)_i e_i - S_r \nabla_{e_i} e_i = (S_r)_i e_i,$$

ou seja,

$$\sum_i \nabla_{e_i}(S_r I)e_i = \text{grad}_M S_r.$$

Por outro lado,

$$\nabla_{e_i}(BP_{r-1})e_i = \nabla_{e_i}(BP_{r-1}(e_i)) - BP_{r-1}\nabla_{e_i}e_i = (\nabla_{e_i}B)P_{r-1}(e_i) + B\nabla_{e_i}(P_{r-1}(e_i)).$$

Inicialmente, vamos calcular $\sum_i (\nabla_{e_i}B)P_{r-1}(e_i)$. Como B é auto-ajunta, $\nabla_{e_i}B$ também é auto-ajunta, logo

$$\left\langle \sum_i (\nabla_{e_i}B)P_{r-1}(e_i), e_j \right\rangle = \sum_i \langle P_{r-1}(e_i), (\nabla_{e_i}B)e_j \rangle .$$

Usando a Equação de Codazzi em formas espaciais, obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \sum_i (\nabla_{e_i}B)P_{r-1}(e_i), e_j \right\rangle &= \sum_i \left\langle P_{r-1}(e_i), (\nabla_{e_j}B)e_i \right\rangle = \sum_i \left\langle (\nabla_{e_j}B)(P_{r-1}(e_i)), e_i \right\rangle \\ &= \operatorname{tr}((\nabla_{e_j}B)(P_{r-1})).\end{aligned}$$

Como $\operatorname{tr}((\nabla_{e_j}B)(P_{r-1})) = \langle \operatorname{grad}_M S_r, e_j\rangle$, ver [17], p. 226, concluímos que

$$\sum_i (\nabla_{e_i}B)P_{r-1}(e_i) = \operatorname{grad}_M S_r.$$

Logo

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_M P_r &= \operatorname{grad}_M S_r - \operatorname{grad}_M S_r - \sum_i B\nabla_{e_i}(P_{r-1}(e_i)) = -\sum_i B\nabla_{e_i}(P_{r-1}(e_i)) \\ &= -\sum_i B((\nabla_{e_i}P_{r-1})e_i + P_{r-1}\nabla_{e_i}e_i) = -B\sum_i (\nabla_{e_i}P_{r-1})e_i = -B\operatorname{div}_M P_{r-1}.\end{aligned}$$

Afirmamos que $\operatorname{div}_M P_r = 0$. De fato, se $r = 0$, obtemos

$$\operatorname{div}_M P_0 = \operatorname{div}_M(I) = \sum_i (\nabla_{e_i}I)e_i = \sum_i \nabla_{e_i}(Ie_i) - I\nabla_{e_i}e_i.$$

Como o referencial é geodésico, temos que $\operatorname{div}_M P_0 = 0$.
Usando indução, vemos que $\operatorname{div}_M P_r = 0$.

□

Agora, obteremos duas fórmulas integrais que são cruciais para a demonstração do resultado principal desta seção.

Proposição 2.4.2. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica, onde M^n é compacta. Então, para quaisquer funções f e g em M^n, o operador L_r satisfaz*

(a) $\displaystyle\int_{M^n} (fL_r g)dM = \int_{M^n} (gL_r f)dM;$

(b) $\displaystyle\int_{M^n} (fL_r g + \langle P_r(\operatorname{grad}_M f), \operatorname{grad}_M g\rangle)dM = 0.$

Demonstração. Consideremos as funções $f, g \in M^n$.
(a) Usando o item (b) da Proposição 2.2.1 e o Teorema da Divergência, temos que

$$\int_{M^n} fL_r g dM = -\int_{M^n} gL_r f dM - 2\int_{M^n} \langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle\, dM.$$

Como M^n é compacta,

$$0 = \int_{M^n} \mathrm{div}_M(gP_r(\mathrm{grad}_M f))dM = \int_{M^n} [\langle \mathrm{grad}_M g, P_r(\mathrm{grad}_M f)\rangle + g\mathrm{div}_M(P_r(\mathrm{grad}_M f))]dM.$$

Logo

$$\int_{M^n} \langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle\, dM = -\int_{M^n} gL_r f dM.$$

Portanto

$$\int_{M^n} fL_r g dM = -\int_{M^n} gL_r f dM + 2\int_{M^n} gL_r f dM = \int_{M^n} gL_r f dM.$$

(b) A demonstração deste item segue diretamente do item (a). De fato,

$$\int_{M^n} fL_r g dM = -\int_{M^n} \langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle\, dM.$$

Assim

$$\int_{M^n} (fL_r g + \langle P_r(\mathrm{grad}_M f), \mathrm{grad}_M g\rangle)dM = 0.$$

□

Resulta do item (a) que L_r é um operador linear auto-adjunto. Basta definir um produto interno em $\mathcal{D}(M)$, da seguinte forma: Dados $f, g \in \mathcal{D}(M)$,

$$\langle f, g\rangle = \int_M fg dM.$$

A fórmula em (b) é conhecida como fórmula integral de Dirichlet para o operador L_r.

Teorema 2.4.1. *Sejam $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana compacta orientada M^n e $0 \le q \le n$, $1 \le s \le n$ inteiros. Então, para qualquer c,*

(a) $$\int_{M^n} \Bigg(\langle X, \eta\rangle^q \Bigg\{ \left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{s-1} [\theta_c(\rho)((n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle) \\ -c\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle] + (s-1)\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{s-2} (\theta_c(\rho))^2 \left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle \Bigg\} \\ -q\langle X, \eta\rangle^{q-1} \left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{s-1} \theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle \Bigg) dM = 0;$$

(b) $$\int_{M^n} \Big(\langle X,\eta\rangle^q \big\{(\theta_c(\rho))^{s-1}[(n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle]$$
$$-c(s-1)(\theta_c(\rho))^{s-2}\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle\big\}$$
$$-q(\theta_c(\rho))^{s-1}\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle\Big)\, dM = 0;$$

(c) $$\int_{M^n} \left(\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^q \big\{\langle X,\eta\rangle^{s-1}[-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle\right.$$
$$- \langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X\rangle] + (s-1)\langle X,\eta\rangle^{s-2}\left\langle P_r(B^2(X^T)), X^T\right\rangle\big\}$$
$$\left. -q\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{q-1}\langle X,\eta\rangle^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle\right) dM = 0.$$

Demonstração.
(a) Escolhendo $f = \langle X,\eta\rangle^q$ e $g = \left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^s$ no item (b) da Proposição 2.4.2, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{M^n} &\left(\langle X,\eta\rangle^q L_r\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^s \right.\\ &\left.+\left\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q), \mathrm{grad}_M\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^s\right\rangle\right) dM = 0.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Tomando $q-1 = s$ em (2.3) e usando (2.6), temos

$$\begin{aligned}&\left\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q), \mathrm{grad}_M\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^s\right\rangle\\ = &\left\langle P_r(-q\langle X,\eta\rangle^{q-1}B(X^T)), s\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-1}\theta_c(\rho)X^T\right\rangle.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}&\left\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q), \mathrm{grad}_M\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^s\right\rangle\\ &= -qs\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando o item (a) da Proposição 2.3.3 e (2.9) em (2.8), concluímos que

$$\int_{M^n} \left(s\langle X,\eta\rangle^q \left\{ \left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-1}[\theta_c(\rho)((n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle)\right.\right.$$
$$\left. -c\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle] + (s-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-2}(\theta_c(\rho))^2\left\langle P_r(X^T), X^T\right\rangle\right\}$$
$$\left. -qs\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle\right) dM = 0,$$

isto é,

$$\int_{M^n}\left(\langle X,\eta\rangle^q\left\{\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-1}[\theta_c(\rho)((n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle)\right.\right.$$

$$\left.-c\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle]+(s-1)\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-2}(\theta_c(\rho))^2\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\right\}$$

$$\left.-q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left(\frac{\langle X,X\rangle}{2}\right)^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)),X^T\right\rangle\right)dM=0.$$

(b) No caso em que $c\neq 0$, escolhemos $f=\langle X,\eta\rangle^q$ e $g=\theta_c^s$ em (b) da Proposição 2.4.2. Então

$$\int_{M^n}(\langle X,\eta\rangle^q L_r\theta_c^s+\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q),\mathrm{grad}_M(\theta_c(\rho))^s\rangle)\,dM=0. \tag{2.10}$$

Usando (2.4) e (2.6), temos que

$$\begin{aligned}\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q),\mathrm{grad}_M(\theta_c(\rho))^s\rangle &= \left\langle P_r(-q\langle X,\eta\rangle^{q-1}B(X^T)),s(\theta_c(\rho))^{s-1}\mathrm{grad}_Q\theta_c(\rho)\right\rangle\\ &= -q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)),s(\theta_c(\rho))^{s-1}(-cX^T)\right\rangle.\end{aligned}$$

Logo

$$\langle P_r(\mathrm{grad}_M\langle X,\eta\rangle^q),\mathrm{grad}_M(\theta_c(\rho))^s\rangle=cqs(\theta_c(\rho))^{s-1}\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)),X^T\right\rangle. \tag{2.11}$$

Substituindo (2.11) e usando o item (b) da Proposição 2.3.3 em (2.10), concluímos que

$$\int_{M^n}\left(s\langle X,\eta\rangle^q\left\{(\theta_c(\rho))^{s-1}[-c((n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle)]\right.\right.$$

$$\left.\left.+c^2(s-1)(\theta_c(\rho))^{s-2}\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\right\}+cqs(\theta_c(\rho))^{s-1}\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)),X^T\right\rangle\right)dM=0,$$

ou seja,

$$\int_{M^n}\left(\langle X,\eta\rangle^q\left\{(\theta_c(\rho))^{s-1}[(n-r)S_r\theta_c(\rho)+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle]\right.\right.$$

$$\left.\left.-c(s-1)(\theta_c(\rho))^{s-2}\left\langle P_r(X^T),X^T\right\rangle\right\}-q(\theta_c(\rho))^{s-1}\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)),X^T\right\rangle\right)dM=0.$$

No caso em que $c=0$, tomemos $s=1$ em (a). Portanto

$$\int_{M^n}(\langle X,\eta\rangle^q\{(n-r)S_r+(r+1)S_{r+1}\langle X,\eta\rangle\}$$

$$-q\langle X,\eta\rangle^{q-1}\left\langle P_r(B(X^T)),X^T\right\rangle)\,dM=0.$$

(c) Agora, escolhemos $f = \left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q$ e $g = \langle X, \eta\rangle^s$ no item (b) da Proposição 2.4.2. Assim

$$\begin{aligned}&\int_{M^n}\left[\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q L_r \langle X,\eta\rangle^s \right.\\ &\left.+\left\langle P_r\left(\mathrm{grad}_M\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q\right), \mathrm{grad}_M \langle X,\eta\rangle^s\right\rangle\right] dM = 0.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, temos que

$$\left\langle P_r\left(\mathrm{grad}_M\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q\right), \mathrm{grad}_M \langle X,\eta\rangle^s\right\rangle$$

$$= \left\langle P_r\left(q\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{q-1}\theta_c(\rho)X^T\right), -s\langle X,\eta\rangle^{s-1}B(X^T)\right\rangle.$$

Logo

$$\begin{aligned}&\left\langle P_r\left(\mathrm{grad}_M\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q\right), \mathrm{grad}_M \langle X,\eta\rangle^s\right\rangle\\ &= -qs\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{q-1}\langle X,\eta\rangle^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Substituindo (2.7) e (2.13) em (2.12), concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{M^n}\Bigg(\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q &\left\{s\langle X,\eta\rangle^{s-1}\left[-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle\right.\right.\\ &\left.\left.-\langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X\rangle\right] + s(s-1)\langle X,\eta\rangle^{s-2}\left\langle P_r(B^2(X^T)), X^T\right\rangle\right\}\\ &-qs\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{q-1}\langle X,\eta\rangle^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle\Bigg) dM = 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int_{M^n}\Bigg(\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^q &\left\{\langle X,\eta\rangle^{s-1}\left[-(r+1)S_{r+1}\theta_c(\rho) - (S_1S_{r+1}-(r+2)S_{r+2})\langle X,\eta\rangle\right.\right.\\ &\left.\left.-\langle \mathrm{grad}_M S_{r+1}, X\rangle\right] + (s-1)\langle X,\eta\rangle^{s-2}\left\langle P_r(B^2(X^T)), X^T\right\rangle\right\}\\ &-q\left(\frac{\langle X, X\rangle}{2}\right)^{q-1}\langle X,\eta\rangle^{s-1}\theta_c(\rho)\left\langle P_r(B(X^T)), X^T\right\rangle\Bigg) dM = 0.\end{aligned}$$

□

Como consequência as fórmulas em (a) e (b) do Teorema 2.4.1 generalizam as fórmulas de Minkowski.

Corolário 2.4.1. *Com as hipóteses do Teorema 2.4.1, obtemos as seguintes identidades:*

(a) $\displaystyle\int_{M^n} [H_r + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle]dM = 0;$

(b) $\displaystyle\int_{M^n} [H_r\theta_c(\rho) + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle]dM = 0.$

Demonstração.
(a) Tomando $c = 0, q = 0$ e $s = 1$ no item (a) do Teorema 2.4.1, temos

$$\int_{M^n} \theta_0(\rho)((n-r)S_r\theta_0(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle)dM = 0,$$

ou seja,

$$\int_{M^n} ((n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle)dM = 0, \text{ pois } \theta_0(\rho) = 1.$$

Logo

$$\int_{M^n} (n-r)n_r\left[H_r + \frac{(r+1)}{(n-r)}\frac{n_{r+1}}{n_r}H_{r+1}\langle X, \eta\rangle\right]dM = 0.$$

Como $\dfrac{n_{r+1}}{n_r} = \dfrac{(n-r)}{(r+1)}$, concluímos que

$$\int_{M^n} (n-r)n_r[H_r + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle]dM = 0.$$

Assim

$$\int_{M^n} [H_r + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle]dM = 0.$$

(b) Fazendo $q = 0$ e $s = 1$ no item (b) do Teorema 2.4.1, temos que

$$\int_{M^n} ((n-r)S_r\theta_c(\rho) + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle)dM = 0,$$

isto é,

$$\int_{M^n} (n-r)n_r[H_r\theta_c(\rho) + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle]dM = 0.$$

Portanto

$$\int_{M^n} [H_r\theta_c(\rho) + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle]dM = 0.$$

$\square$

As fórmulas em (a) e (b) foram provadas por Hsiung [12] e Bivens [8], respectivamente.

Capítulo 3

Aplicações

Neste capítulo, aplicaremos as fórmulas integrais obtidas na Seção 2.4 para obtermos resultados interessantes.

Teorema 3.1 (Alencar e Colares)**.** *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura H_{r+1} constante não-nula, onde $0 \leq r \leq n-1$. Se $c > 0$, assuma que $x(M^n)$ está contida em um hemisfério aberto de Q_c^{n+1}. Então, o conjunto de pontos*

$$W = Q_c^{n+1} - \bigcup_{p \in M} (Q_c^n)_p,$$

que são omitidos em Q_c^{n+1} pelas hipersuperfícies totalmente geodésicas $(Q_c^n)_p$ tangentes a $x(M^n)$ é não-vazio, se e somente se, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1}.

Demonstração. Inicialmente, observemos que se W é não-vazio, existe um ponto $p_0 \in W$ tal que nenhum plano tangente à hipersuperfície passa por este ponto p_0, ou seja, existe um ponto $p_0 \in W$ tal que $\langle X, \eta \rangle$ nunca se anula. Por hipótese, existe $p \in M^n$ tal que todas as curvaturas principais de x têm o mesmo sinal. Assim, para uma escolha apropriada do vetor normal η, podemos assumir que $H_{r+1} > 0$ em p. Como H_{r+1} é constante, $H_{r+1} > 0$ em M^n.
Usando que $S_r = n_r H_r$, onde $n_r = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$, a Proposição 2.3.4 nos diz que

$$\int_{M^n} \{-(r+2)n_{r+2}H_{r+2} + nn_{r+1}H_1H_{r+1}\} \langle X, \eta \rangle \, dM = -(r+1)n_{r+1}H_{r+1} \int_{M^n} \theta_c dM.$$

Como M^n é compacta e $H_{r+1} > 0$, temos

$$H_r \geq H_{r+1}^{r/r+1}, \quad 1 \leq r \leq n-1, \tag{3.1}$$

e a igualdade ocorre somente nos pontos umbílicos, ver [13], p. 282, Lema 1.
Assim, se $H_{r+1} > 0$ então $H_r > 0$.
Fazendo $q = 0, s = 1$ e $r = 0$ no Teorema 2.4.1 (b), obtemos

$$nS_0\theta_c + S_1 \langle X, \eta \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\theta_c + H_1 \langle X, \eta \rangle = 0.$$

Como $H_1 > 0$ e $\theta_c > 0$ para qualquer c, concluímos que

$$0 = \theta_c + H_1 \langle X, \eta \rangle > H_1 \langle X, \eta \rangle \, ,$$

isto é,

$$\langle X, \eta \rangle < 0.$$

Usando (3.1) e o item (b) do Corolário 2.4.1, obtemos

$$H_{r+1}^{r/r+1} \int_{M^n} \theta_c dM \leq \int_{M^n} H_r \theta_c dM = -H_{r+1} \int_{M^n} \langle X, \eta \rangle \, dM.$$

Logo

$$\begin{aligned} &\int_{M^n} \{-(r+2)n_{r+2}H_{r+2} + nn_{r+1}H_1H_{r+1}\} \langle X, \eta \rangle \, dM \\ &\geq (r+1)n_{r+1}H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \int_{M^n} \langle X, \eta \rangle \, dM. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, observamos que se denotarmos

$$c(r) = (n-r)n_r = (n-r)\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-(r+1))!},$$

obtemos

$$(r+2)n_{r+2} = (r+2)\frac{n!}{(r+2)!(n-(r+2))!} = \frac{n!}{(r+1)!(n-(r+2))!} = c(r+1),$$

$$nn_{r+1} = n\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!} = \frac{n}{r+1}\frac{n!}{r!(n-(r+1))!} = \frac{n}{r+1}c(r)$$

e

$$(r+1)n_{r+1} = (r+1)\frac{n!}{(r+1)!(n-(r+1))!} = \frac{n!}{r!(n-(r+1))!} = c(r).$$

Portanto, usando estas igualdades em (3.2), obtemos

$$\int_{M^n} \left\{-c(r+1)H_{r+2} + n\frac{n}{r+1}c(r)H_1H_{r+1}\right\} \langle X, \eta \rangle \, dM \geq c(r)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \int_{M^n} \langle X, \eta \rangle \, dM.$$

Multiplicando esta desigualdade por $(r+1)$, temos

$$\int_{M^n} \left\{-(r+1)c(r+1)H_{r+2} + nc(r)H_1H_{r+1} - (r+1)c(r)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)}\right\} \langle X, \eta \rangle \, dM \geq 0.$$

Por outro lado, Alencar, do Carmo e Rosenberg, ver [2], p. 392, mostraram que

$$-(r+1)c(r+1)H_{r+2} + nc(r)H_1H_{r+1} - (r+1)c(r)H_{r+1}^{(r+2)/(r+1)} \geq 0.$$

Como $\langle X, \eta \rangle < 0$, devemos ter a igualdade. Mas a igualdade ocorre nos pontos umbílicos, logo $x(M^n)$ é uma esfera geodésica.

$\square$

Observação 3.1. Se retirarmos a hipótese da variedade ser compacta, o teorema anterior não é válido. Por exemplo, o cilindro circular reto é uma superfície completa não-compacta em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média constante não-nula e W não-vazio.

Antes de passarmos à próxima aplicação, introduziremos a noção de estabilidade.

Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana compacta M^n em Q_c^{n+1}. Consideremos

$$A_r = \int_M F_r(S_1, S_2, ..., S_r)dM, \ 0 \leq r \leq n,$$

onde as funções F_r são definidas indutivamente por

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 \\ F_1 &= S_1 \\ F_r &= S_r + \frac{c(n-r+1)}{r-1}F_{r-2}, \ 2 \leq r \leq n-1. \end{aligned}$$

Uma *variação* de x é uma aplicação diferenciável $Y : I \times M^n \to Q_c^{n+1}$ tal que a aplicação $Y_t : M^n \to Q_c^{n+1}$ dada por $Y_t(p) = Y(t,p)$ é uma imersão para cada $t \in I$ e $Y_0 = x$.

A *função volume* $V : I \to \mathbb{R}$ é definida por

$$V(t) = \int_{[0,t]\times M} Y^* dQ,$$

onde dQ é o elemento de volume de Q_c^{n+1}.

Dizemos que uma variação *preserva volume* quando a função volume $V : I \to \mathbb{R}$ é constante.

Inicialmente, assumimos que um dos pontos críticos de A_r é uma dada imersão x. Portanto, com respeito a variações que preservam volume, deve ser um ponto crítico da função

$$A_r(t) = \int_M F_r(S_1, ..., S_r)dM_t,$$

onde dM_t é o elemento de volume da métrica induzida em M por Y_t.

Alguns resultados de estabilidade podem ser vistos em [6] no caso em que $r = 0$, em [2] quando $r = 1$ e em [5] para o caso $r \geq 2$.

Definição 3.1. Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana compacta com curvatura H_r constante. A imersão x é *r-estável* se $A''(0) \geq 0$ para todas variações que preservam volume.

O próximo resultado nos dá um critério para establilidade, ver [4].

Proposição 3.1. *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão de uma variedade Riemanniana compacta. Então x é r-estável se, e somente se,*

$$I_r(f) = -\int_M f\{L_r(f) + (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f + c(n-r)S_r f\}dM \geq 0$$

para toda função $f : M^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_M f dM = 0.$$

Proposição 3.2. *As esferas geodésicas de Q_c^{n+1} são r-estáveis.*

Demonstração. Seja $\sum$ uma esfera geodésica de Q_c^{n+1}. Como $\sum$ é umbílica, então suas curvaturas principais são todas iguais a uma certa constante k. Escolhendo um vetor normal, podemos assumir que $k > 0$. Isto significa que

$$S_j = \binom{n}{j} k^j.$$

Os autovalores das transformações de Newton P_r também são constantes e L_r é um múltiplo do Laplaciano, isto é,

$$L_r(f) = \binom{n-1}{r} k^r \Delta f.$$

Faremos uma demonstração dessa afirmação usando indução.
Para $r = 1$, temos que

$$\begin{aligned} L_1(f) &= \mathrm{div}_{\sum}(P_1(\mathrm{grad}_{\sum} f)) = \mathrm{div}_{\sum}((S_1 I - B)(\mathrm{grad}_{\sum} f)) \\ &= nk\Delta f - k\Delta f \\ &= (n-1)k\Delta f, \end{aligned}$$

ou seja, nossa afirmação é verdadeira para $r = 1$.
Suponhamos que nossa igualdade vale para $r - 1$, isto é,

$$L_{r-1}(f) = \binom{n-1}{r-1} k^{r-1} \Delta f.$$

Temos que

$$\begin{aligned} L_r(f) &= \mathrm{div}_{\sum}(P_r(\mathrm{grad}_{\sum} f)) = \mathrm{div}_{\sum}((S_r I - BP_{r-1})(\mathrm{grad}_{\sum} f)) \\ &= \binom{n}{r} k^r \Delta f - kL_{r-1}(f) \\ &= \binom{n}{r} k^r \Delta f - k \binom{n-1}{r-1} k^{r-1} \Delta f \\ &= \left[\binom{n}{r} - \binom{n-1}{r-1}\right] k^r \Delta f. \end{aligned}$$

Como $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} n-1 \\ r-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix}$, concluímos nossa afirmação.
Agora, consideremos $f : \sum \to \mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_{\sum} f dM = 0$.
Denotaremos por λ_1 o primeiro autovalor não-nulo do problema

$$\Delta g + \lambda g = 0.$$

É conhecido que

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \left(\int_{\sum} |\mathrm{grad}_{\sum} g|^2 dM \right) \left(\int_{\sum} g^2 dM \right)^{-1} \right\} \tag{3.3}$$

para toda função suave por partes $g : \sum \to \mathbb{R}$ que satisfaz $\displaystyle\int_{\sum} g dM = 0$, onde $\mathrm{grad}_{\sum} g$ denota o gradiente de g na métrica induzida pela inclusão $\sum \subset Q_c^{n+1}$.
Decorre da igualdade (3.3) que

$$\lambda_1 \leq \left(\int_{\sum} |\mathrm{grad}_{\sum} g|^2 dM \right) \left(\int_{\sum} g^2 dM \right)^{-1}. \tag{3.4}$$

Integrando a igualdade

$$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\mathrm{grad}_{\sum} f|^2,$$

obtemos

$$\frac{1}{2}\int_{\sum} \Delta f^2 dM = \int_{\sum} f\Delta f dM + \int_{\sum} |\mathrm{grad}_{\sum} f|^2 dM.$$

Aplicando o Teorema de Stokes, encontramos

$$-\int_{\sum} f\Delta f dM = \int_{\sum} |\mathrm{grad}_{\sum} f|^2 dM.$$

Portanto

$$\begin{aligned} I_r(f) &= -\int_{\sum} \left\{ \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} k^r f \Delta f + n \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} k^{r+2} f^2 \right. \\ &\quad \left. + c(n-r) \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} k^r f^2 \right\} dM \\ &= -\begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} k^r \int_{\sum} \{ f\Delta f + n(k^2+c) f^2 \} dM \\ &= \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} k^r \int_{\sum} \{ |\mathrm{grad}_{\sum} f|^2 - n(k^2+c) f^2 \} dM. \end{aligned}$$

Usando (3.4), obtemos

$$I_r(f) \geq \begin{pmatrix} n-1 \\ r \end{pmatrix} k^r \int_{\sum} \{ \lambda_1 - n(k^2+c) \} f^2 dM.$$

Além disso, como $\sum$ é isométrica a uma esfera Euclidiana de dimensão n com curvatura seccional constante igual a $k^2 + c$, temos que $\lambda_1 = n(k^2 + c)$, ver [7].
Logo

$$I_r(f) = 0.$$

Portanto, usando a Proposição 3.1, $\sum$ é r-estável.

$\square$

Usando este resultado, obtemos uma consequência do Teorema 3.1.

Corolário 3.1. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta orientada e $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica com curvatura H_{r+1} constante. Se $c > 0$, suponha também que $x(M^n)$ está contida em um hemisfério aberto. Então W é não-vazio, se e somente se, x é r-estável.*

Demonstração. Como W é não-vazio, usando o Teorema 3.1, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica. Logo, segue da Proposição 3.2, que x é r-estável.

$\square$

Exemplo 3.1. Uma esfera geodésica de centro p_0 em Q_c^{n+1} satisfaz

$$H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle \equiv 0, \quad 0 \leq r \leq n-1,$$

onde X é o vetor posição relativo a p_0. De fato, como a esfera geodésica possui todas as curvaturas pricipais iguais a uma certa constante k, temos que $H_r = k^r$.
A fim de calcular as curvaturas principais, consideremos $\{e_1, ..., e_n\}$ uma base de autovalores de T_pM. Então

$$k = \langle ke_i, e_i\rangle = \langle B(e_i, e_i), \eta\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_i - \nabla_{e_i}e_i, \eta\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_i, \eta\right\rangle = e_i\langle e_i, \eta\rangle - \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i}\eta\right\rangle.$$

Escolhendo $\eta = -\dfrac{X}{S_c} = -\mathrm{grad}_Q\rho$ e usando que $\mathrm{grad}_Q\rho$ é normal à esfera geodésica, obtemos

$$k = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\mathrm{grad}_Q\rho, e_i\right\rangle.$$

Usando (2.2), concluímos que

$$k = \frac{\theta_c}{S_c}.$$

Logo

$$H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle = \left(\frac{\theta_c}{S_c}\right)^r\theta_c + \left(\frac{\theta_c}{S_c}\right)^{r+1}(-S_c) = 0.$$

O próximo resultado estabelece a recíproca. A prova da versão Euclidiana, ou seja, $c = 0$, foi dada em [10], p. 2, Teorema 1.

Teorema 3.2 (Alencar e Colares). *Seja $x : M^n \to Q_c^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade Riemanniana M^n conexa, compacta e orientada. Seja $p_0 \in Q_c^{n+1}$ relativo ao qual*

$$H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle$$

não muda de sinal para algum $0 \leq r \leq n-1$. Se $c > 0$, assuma que $x(M^n)$ está contida em um hemisfério aberto de Q_c^{n+1} centrado em p_0. Então, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica.

Demonstração. Como $H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle$ não muda de sinal para algum $0 \leq r \leq n-1$, usando o item (b) do Corolário 2.4.1, obtemos

$$H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle \equiv 0 \tag{3.5}$$

para qualquer c.
Inicialmente, provaremos que $H_{r+1} > 0$.
Temos que, para qualquer $c \leq 0$,

$$\theta_c > 0. \tag{3.6}$$

Usando a convexidade do espaço ambiente e a compacidade de M^n, podemos escolher η tal que exista um conjunto aberto U onde todas as curvaturas principais de x são positivas. Portanto, $H_{r+1} > 0$ em U.
Além disso, assumimos que U é o maior subconjunto de M^n com tal propriedade. Mostraremos que $U = M^n$.
Como $H_r > 0$ em U, usando (3.5) e (3.6), temos que

$$H_{r+1}\langle X, \eta\rangle = -H_r\theta_c < 0 \quad \text{em} \quad U.$$

Logo

$$\langle X, \eta\rangle < 0 \quad \text{em} \quad U.$$

Assim, aplicando (3.1) em (3.5), obtemos em U,

$$0 = H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle \geq H_{r+1}^{r/r+1}\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle = H_{r+1}^{r/r+1}(\theta_c + H_{r+1}^{1/r+1}\langle X, \eta\rangle).$$

Portanto

$$\theta_c + H_{r+1}^{1/r+1}\langle X, \eta\rangle \leq 0 \quad \text{em} \quad U.$$

Por continuidade, $\theta_c + H_{r+1}^{1/r+1}\langle X, \eta\rangle \leq 0$ no fecho $\overline{U}$ de U em M^n. Por (3.6), temos que $\theta_c > 0$ em M^n, logo em $\overline{U}$. Assim, se $H_{r+1}(p) = 0$ para algum $p \in \overline{U}$, teríamos $\theta_c(p) \leq 0$, o que é um absurdo. Portanto, H_{r+1} também é positivo em $\overline{U}$. Isto prova que $U = \overline{U}$.
Como M^n é conexo, temos que $U = M^n$. Logo, $H_{r+1} > 0$ em M^n.
Agora, lembrando que $S_r = n_r H_r$ e usando (3.5) na Proposição 2.3.1, obtemos

(i) Se $c \neq 0$,

$$\begin{aligned} L_r\theta_c &= -c[(n-r)S_r\theta_c + (r+1)\langle X, \eta\rangle S_{r+1}] \\ &= -c[(n-r)n_r H_r\theta_c + (r+1)\langle X, \eta\rangle n_{r+1}H_{r+1}]. \end{aligned}$$

Como $n_{r+1}(r+1) = n_r(n-r)$, temos

$$L_r\theta_c = -cn_r(n-r)[H_r\theta_c + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle] = 0,$$

isto é,

$$L_r\theta_c = 0 \quad \text{em} \quad M^n, \quad \text{se} \quad c \neq 0.$$

(ii) Se $c = 0$,

$$\begin{aligned} L_r|X|^2 &= [(n-r)S_r + (r+1)S_{r+1}\langle X, \eta\rangle] \\ &= [(n-r)n_r H_r + (r+1)n_{r+1}H_{r+1}\langle X, \eta\rangle] \\ &= (n-r)n_r[H_r + H_{r+1}\langle X, \eta\rangle], \end{aligned}$$

ou seja,

$$L_r|X|^2 = 0 \quad \text{em} \quad M^n, \quad \text{se} \quad c = 0.$$

Usando o item (a) da Proposição 2.2.1, temos que

$$\frac{1}{2}\int_M L_r(\theta_c^2) = \int_M \theta_c L_r \theta_c + \int_M \langle P_r(\mathrm{grad}_M \theta_c), \mathrm{grad}_M \theta_c\rangle .$$

Logo, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M \langle P_r(\mathrm{grad}_M \theta_c), \mathrm{grad}_M \theta_c\rangle = 0.$$

Visto que $H_{r+1} > 0$ em M^n, L_r é elíptico, ver [5], p. 280, Proposição 3.2. Logo P_r é positivo definido e, portanto,

$$\mathrm{grad}_M \theta_c = 0,$$

isto é,

$$\theta_c = cte. \quad \text{em} \quad M^n, \quad \text{se} \quad c \neq 0.$$

Analogamente, concluímos que

$$|X|^2 = cte. \quad \text{em} \quad M^n, \quad \text{se} \quad c = 0.$$

Assim, em qualquer caso, $x(M^n)$ é uma esfera geodésica em Q_c^{n+1}.

□

Referências Bibliográficas

[1] Alencar, H. e Colares, A.G. *Integral formulas for the r-mean curvature linearized operator of a hypersurface*, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 16, 1998, p. 203-220.

[2] Alencar, H., do Carmo, M. e Rosenberg, H. *On the first eigenvalue of the linearized operator of the r-th mean curvature of a hypersurface*, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 11, 1993, p. 387-391.

[3] Alencar, H., Santos, W. e Zhou, D. *Curvature integral estimate for complete hypersurfaces*, Preprint, 2009.

[4] Alencar, H. e Frensel, K. *Hypersurfaces whose tangente geodesic omit a nonempty set*, in Lawson, B. e Tenenblat, K. (eds), Differential Geometry, Pitman Monographs, Vol. 52, Longman, Essex, 1991, p. 1-13.

[5] Barbosa, L. e Colares, A. G. *Stability of hypersurfaces with constant r-mean curvature*, Ann. Global Anal. Geom., Vol. 15, 1997, p. 277-297.

[6] Barbosa, J. L. M., do Carmo, M. P. e Eschenburg, J. *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*, Math. Z., Vol. 197(1), 1988, p. 123-138.

[7] Barros, A. *Laplaciano de polinômios em $\mathbb{R}^{n+1}$ restritos a esfera euclidiana*, Notas de Aula, 2009.

[8] Bivens, I. *Some integral formulas for hypersurfaces in a simply connected space form*, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 88(2), 1983, p. 113-118.

[9] Do Carmo, M.P. *Geometria Riemanniana*, 4ªed., Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[10] Fontenele, F. *On the Minkowski integrands*, Preprint.

[11] Gardner, R. *The Dirichlet integral in differential geometry*, in Chern, S. S. e Smale, S. (eds), Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., Vol. 15, AMS, Providence, RI, 1970, p. 237-245.

[12] Hsiung, C.-C. *Some integral formulas for closed hypersurfaces*, Math. Scand., Vol. 2, 1954, p. 286-294.

[13] Montiel, S. e Ros, A. *Compact hypersurfaces: The Alexandrov theorem for higher order mean curvatures*, in Lawson, B. e Tenenblat, K. (eds), Differential Geometry, Pitman Monographs, Vol. 52, Longman, Essex, 1991, p. 279-296.

[14] Pinheiro, N. R. *Hipersuperfícies com curvatura média constante e hiperplanos*, Dissertação de Mestrado (UFAL), 2010.

[15] Reilly, R. *Extrinsic rigidity theorems for compact submanifolds of the sphere*, J. Differential Geom., Vol. 4, 1970, p. 487-497.

[16] Reilly, R. *Variational properties of functions of the mean curvature for hypersurfaces in space forms*, J. Differential Geom., Vol. 4, 1973, p. 465-477.

[17] Rosenberg, H. *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull. Sc. Math. 2e série, Vol. 117, 1993, p. 211-239.

[18] Shahin J. K. *Some integral formulas in Euclidean space*, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 19, 1968, p. 609-613.

[19] Voss, K. *Einige differentialgeometrische Kongruenzstze für geschlossene Flächen und Hyperflächen*, Math. Ann., Vol. 131, 1956, p. 120-218.

Índice Remissivo