



Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Incompressibilidade de Toros Transversais a Fluxos Axioma A

Alexsandro da Silva Néo

Rio São Francisco



Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Incompressibilidade de Toros Transversais a Fluxos Axioma A

Alexsandro da Silva Néo

Maceió
Dezembro de 2009

ALEXSANDRO DA SILVA NÉO

Incompressibilidade de Toros Transversais a
Fluxos Axioma A

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 18 de dezembro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Enoch Humberto Apaza Calla

Maceió
2009

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

N438i Néo, Alessandro da Silva.
Incompressibilidade de toros transversais a fluxos axioma A / Alessandro da Silva Néo, 2009.
vii, 36 f.

Orientador: Enoch Humberto Apaza Calla.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 33-34.
Índices: f. 35-36.

1. Topologia. 2. Variedade irreduzível. 3. Campo de vetores axioma A.
4. Toro (Geometria). I. Título.

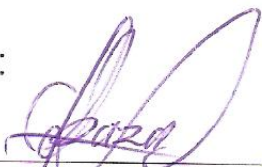
CDU: 515.1

ALEXSANDRO DA SILVA NÉO

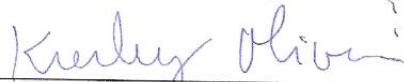
Incompressibilidade de Toros Transversais a
Fluxos Axioma A

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Sistemas Dinâmicos submetida em 18 de dezembro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Enoch Humberto Apaza Calla - UFAL



Prof. Dr. Krerley Irraciél Martins Oliveira - UFAL



Prof. Dr. Vilton Jeovan Viana Pinheiro - UFBA

Aos meus pais,
Gisélio e Maria Irene,
e aos meus irmãos,
Giseldo e Michelle.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Enoch Apaza por sua orientação, sua amizade e pela paciência durante todo esse tempo.

Agradeço ao professor Hilário Alencar pelas boas conversas, sua amizade, apoio acadêmico e motivação nos estudos.

Agradeço ao professor Valdenberg Araújo - UFS pela motivação para ser um pesquisador.

Agradeço aos professores Krerley Oliveira e a Vilton Pinheiro pelas sugestões dadas a esta dissertação.

Agradeço a Ana Maria Menezes de Jesus pelas várias sugestões dadas a este texto.

E finalmente agradeço a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL pelo suporte financeiro.

Resumo

Provaremos que um toro transversal a um campo de vetores Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto sobre uma variedade tridimensional, fechada, irredutível é incompressível.

Palavras-chave: Variedade irredutível, campo de vetores Axioma A, toro incompressível.

Abstract

We prove that a torus transverse to an Axiom A vector field that does not exhibit sinks, sources or null homotopic periodic orbits on a closed irreducible 3-manifold is incompressible.

Keywords: Irreducible Manifold, Axiom A vector field, incompressible tori.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	2
1.1 Conjuntos Hiperbólicos	2
1.2 Grupo de Homotopia	8
1.3 Aspectos Topológicos	13
1.4 Folheações	15
2 Resultado Principal	22
2.1 Lemas	22
2.2 Teorema Principal	30
3 Consequências e Comentários	31
Referências Bibliográficas	33

Introdução

Esta dissertação foi baseada no artigo *Incompressibility of Tori Transverse to Axiom A Flows* do prof. Carlos Morales, publicado no Proceedings of the American Mathematical Society, volume 136, no ano de 2008.

Neste artigo é demonstrado que todo toro transversal a um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte ou órbita periódica homotópica a um ponto sobre uma variedade tridimensional fechada e irredutível é incompressível. Esse é o teorema principal da dissertação.

Uma das consequências desse resultado é que todo fluxo Anosov sobre uma variedade tridimensional fechada e atoroidal é transitivo. Esse teorema fornece uma generalização dos trabalhos feitos por Mosher (1992) [15], Brunella (1993) [4] e Fenley (1995) [6].

No Capítulo 1 destinamos a estabelecer a linguagem e os fatos básicos necessários à compreensão do texto.

No Capítulo 2 demonstramos os lemas e o teorema principal.

Teorema Principal. Sejam M uma variedade tridimensional fechada, irredutível e X_t um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em M . Então todo toro contido em M transversal ao fluxo X_t é incompressível.

E o Capítulo 3, dedicamos às consequências e mostramos que as condições do teorema principal são necessárias.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos, dentre eles: estrutura hiperbólica, fluxo Axioma A e variedade incompressível. Além disso, são mencionados alguns teoremas clássicos como o Teorema da Decomposição Espectral e o Teorema de Novikov. Exibiremos também algumas demonstrações e alguns exemplos. O objetivo deste capítulo é fixarmos conceitos, notações e resultados básicos para uma compreensão melhor do texto.

1.1 Conjuntos Hiperbólicos

Vamos denotar por M uma variedade Riemanniana tridimensional de classe C^r , com $r \geq 1$, $X : M \rightarrow TM$ um campo de vetores sobre M de classe C^1 e $X_t : M \rightarrow M$ o fluxo gerado por X em M de classe C^1 .

Seja A um subconjunto de M . Denotaremos por $Int(A)$, \bar{A} e A^c , o interior, o fecho e o complementar de A em M , respectivamente.

Definição 1.1.1. A órbita de um ponto $p \in M$ para um fluxo X_t é o conjunto $O(p) = \{X_t(p); t \in \mathbb{R}\}$.

Definição 1.1.2. A órbita positiva de um ponto $p \in M$ para um fluxo X_t é o conjunto $O^+(p) = \{X_t(p); t \geq 0\}$ e a órbita negativa de um ponto $p \in M$ para um fluxo X_t é o conjunto $O^-(p) = \{X_t(p); t \leq 0\}$.

Definição 1.1.3. Um ponto $p \in M$ é chamado ponto fixo para um fluxo X_t se $X_t(p) = p$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Um ponto fixo também é chamado de ponto singular ou ponto de equilíbrio.

Definição 1.1.4. Um ponto $p \in M$ é chamado ponto periódico para um fluxo X_t se existe $T > 0$ tal que $X_T(p) = p$ e $X_t(p) \neq p$, para todo $0 < t < T$.

A órbita de um ponto periódico é chamada de *órbita periódica*. Uma *órbita fechada* é uma órbita que é um conjunto fechado. Assim as órbitas fechadas em conjuntos compactos são as singularidades e as órbitas periódicas.

Definição 1.1.5. O conjunto ω -limite de um ponto $p \in M$ é definido por

$$\omega(p) = \left\{ y \in M; \exists t_n \rightarrow +\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{t_n \rightarrow \infty} X_{t_n}(p) = y \right\},$$

ou seja, $\omega(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita positiva de p . Analogamente, o conjunto α -limite de um ponto $p \in M$ é definido por

$$\alpha(p) = \left\{ y \in M; \exists t_n \rightarrow -\infty \text{ quando } n \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{t_n \rightarrow -\infty} X_{t_n}(p) = y \right\},$$

ou seja, $\alpha(p)$ é o conjunto dos pontos de acumulação da órbita negativa de p .

O exemplo a seguir mostra um campo de vetores com singularidades e exhibe os conjuntos ω -limite e α -limite.

Exemplo 1.1.1. Consideremos $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ a esfera unitária com centro na origem. Sejam $p_N = (0, 0, 1)$ e $p_S = (0, 0, -1)$, o pólo norte e o pólo sul da esfera S^2 , respectivamente. Definimos o campo de vetores X de classe C^∞ em S^2 por

$$X(x, y, z) = (-xz, -yz, x^2 + y^2).$$

As singularidades de X são os pontos $(x, y, z) \in S^2$ tais que

$$(-xz, -yz, x^2 + y^2) = (0, 0, 0).$$

Daí,

$$x = y = 0.$$

Como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

temos que as singularidades são $p_N = (0, 0, 1)$ e $p_S = (0, 0, -1)$.

Uma parametrização da esfera S^2 é dada por

$$Y(\theta, \varphi) = (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, \sin \theta).$$

Para cada φ fixado temos uma parametrização de um meridiano. Notemos que o campo de vetores X é tangente aos meridianos de S^2 . De fato, seja

$$\alpha(\theta) = (\cos \theta \sin \varphi, \cos \theta \cos \varphi, \sin \theta)$$

a parametrização de um meridiano da esfera. Assim,

$$\alpha'(\theta) = (-\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta\cos\varphi, \cos\theta)$$

e

$$\begin{aligned} X(\alpha(\theta)) &= \cos\theta(-\text{sen}\theta\text{sen}\varphi, -\text{sen}\theta\cos\varphi, \cos\theta) \\ &= \cos\theta\alpha'(\theta). \end{aligned}$$

Mostramos assim que o campo de vetores X é tangente aos meridianos de S^2 . Como o campo de vetores X é tangente aos meridianos da esfera apontando para cima, $\omega(p) = p_N$ e $\alpha(p) = p_S$, se $p \in S^2 - \{p_N, p_S\}$.

Definição 1.1.6. Um subconjunto compacto $\Lambda \subset M$ é invariante para um fluxo X_t se $X_t(\Lambda) = \Lambda$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definição 1.1.7. Um ponto $p \in M$ é não-errante para um fluxo X_t se, para qualquer vizinhança V de p e qualquer número real $T > 0$, existe t tal que $|t| > T$ e $X_t(V) \cap V \neq \emptyset$. Se um ponto $p \in M$ não é não-errante, então ele é dito ser ponto errante.

Denotaremos por $\Omega(X_t)$ o conjunto dos pontos não-errantes para um fluxo X_t . O conjunto $\Omega(X_t)$ é fechado, invariante e contém o conjunto dos pontos periódicos de X_t . A presença de um ponto não-errante de um fluxo implica a existência de uma certa complexidade nas trajetórias dos pontos vizinhos, pois algumas destas trajetórias, por mais que se afastem do ponto não-errante, depois de decorrido algum tempo devem retornar e voltar a ficar novamente próximas do ponto não-errante.

A próxima definição envolve a noção da decomposição $E_\Lambda^1 \oplus E_\Lambda^2 \oplus E_\Lambda^3$ do espaço fibrado tangente de uma variedade M restrito a um subconjunto $\Lambda \subset M$. Vamos entender tal *decomposição* como sendo uma aplicação $x \mapsto (E_x^1, E_x^2, E_x^3)$ que associa a cada ponto $x \in \Lambda$ três subespaços do espaço tangente $T_x M$. Dizemos que a *decomposição é contínua* se dado qualquer ponto $p \in \Lambda$ existe campos de vetores contínuos $X_1, \dots, X_u, Y_1, \dots, Y_s, Z_1, \dots, Z_l$ sobre uma vizinhança $U \subset \Lambda$ de p , linearmente independentes para todo ponto e tal que E_x^1 é o subespaço gerado por $X_1(x), \dots, X_u(x)$, E_x^2 é o subespaço gerado por $Y_1(x), \dots, Y_s(x)$ e E_x^3 é o subespaço gerado por $Z_1(x), \dots, Z_l(x)$, para todo $x \in U$.

Definição 1.1.8. Um subconjunto invariante $\Lambda \subset M$ para um fluxo X_t é dito ser hiperbólico ou possuir estrutura hiperbólica se existe uma decomposição contínua do espaço fibrado tangente de M restrito a Λ tal que

$$T_\Lambda M = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^s$$

com

$$\begin{aligned} D(X_t)_p E_p^u &= E_{X_t(p)}^u, \\ D(X_t)_p E_p^s &= E_{X_t(p)}^s, \\ D(X_t)_p X(p) &= X(X_t(p)), \end{aligned}$$

e existem constantes $\mu > 0$ e $c \geq 1$ tais que para todo $t \geq 0$

$$\|D(X_t)_p v\| \leq ce^{-\mu t} \|v\| \text{ para todo } v \in E_p^s \text{ e}$$

$$\|D(X_{-t})_p v\| \leq ce^{-\mu t} \|v\| \text{ para todo } v \in E_p^u.$$

Observação 1.1.1. Em conjuntos que não possuem singularidades temos que $\dim(E_x^X) = 1$, para todo $x \in \Lambda$.

Em outras palavras, um subconjunto invariante $\Lambda \subset M$ para um fluxo X_t é hiperbólico se existe uma decomposição contínua do espaço fibrado tangente $T_\Lambda M = E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^s$ sobre Λ consistindo de um subfibrado contrátil E_Λ^s , um subfibrado expensor E_Λ^u e um subfibrado E_Λ^X gerado por X .

Definição 1.1.9. Um subconjunto $\Lambda \subset M$ compacto, invariante é transitivo para um fluxo X_t se possui uma órbita que é densa em Λ .

Definição 1.1.10. Um fluxo $X_t : M \rightarrow M$ é transitivo, se existe um ponto $x \in M$ tal que sua órbita $O(x)$ é densa em M .

Definição 1.1.11. Uma superfície S é transversal ao campo de vetores X em M se $X(x) \notin T_x S$, para todo $x \in S$.

Definição 1.1.12. Um atrator $\Lambda \subset M$ de X_t é um conjunto transitivo tal que

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$$

para alguma vizinhança compacta U de Λ . Essa vizinhança é denominada bacia de atração quando for uma variedade tridimensional compacta com bordo ∂U não-vazio transverso a X_t . Um repulsor é um atrator para o fluxo $-X_t$.

Um atrator com estrutura hiperbólica é chamado de *atrator hiperbólico*.

Definição 1.1.13. Um poço é um ponto fixo atrator ou uma órbita periódica atratora. Uma fonte é um ponto fixo repulsor ou uma órbita periódica repulsora.

Exemplo 1.1.2. Considerando o Exemplo 1.1.1 temos que o ponto p_N é um poço e o ponto p_S é uma fonte.

Observação 1.1.2. Notemos que $\dim(E_\Lambda^u) = 0$ quando Λ é um poço.

Definição 1.1.14. Os conjuntos

$$W^{ss}(p) = \{q \in M; d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$$

e

$$W^{uu}(p) = \{q \in M; d(X_t(q), X_t(p)) \rightarrow 0, \text{ quando } t \rightarrow -\infty\}$$

são chamados respectivamente variedade estável e instável forte do ponto p para o campo de vetores X .

Dado $\epsilon > 0$, a variedade estável local de tamanho ϵ do ponto $p \in M$ é o conjunto $W_\epsilon^{ss}(p)$ dos pontos $y \in M$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} d(X_t(p), X_t(y)) = 0$$

e

$$d(X_t(p), X_t(y)) \leq \epsilon \text{ para todo } t \geq 0.$$

De forma análoga se definem a variedade instável forte $W^{uu}(p)$ e a variedade instável local $W_\epsilon^{uu}(p)$ de um ponto $p \in M$.

Teorema 1.1.1 (Teorema da Variedade Estável para Fluxos). *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto hiperbólico invariante para um fluxo X_t . Então existe um $\epsilon > 0$ tal que para cada ponto $p \in \Lambda$ existem dois discos mergulhados $W_\epsilon^{ss}(p)$ e $W_\epsilon^{uu}(p)$ os quais são tangentes a E_p^s e E_p^u , respectivamente.*

Demonstração. Ver [7], página 545 ou ver [10]. □

O Teorema da Variedade Estável para Fluxos assegura que se p pertence a um conjunto hiperbólico, então $W^{ss}(p)$ e $W^{uu}(p)$ são subvariedades imersas em M de classe C^1 e, conseqüentemente, a variedade estável e instável

$$W^s(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{ss}(X_t(p))$$

$$W^u(p) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} W^{uu}(X_t(p))$$

também são subvariedades imersas em M .

Se Λ é um conjunto hiperbólico para um fluxo X_t , então $W^s(p)$ e $W^u(p)$ são variedades tangentes a $E_p^s \oplus E_p^X$ e $E_p^u \oplus E_p^X$, respectivamente, e dependem continuamente de p . Para maiores detalhes ver [10].

Observação 1.1.3. Um fato importante sobre a variedade estável de cada ponto (respectivamente instável) é que são cópias imersas do espaço linear E_p^s (E_p^u). Por meio disto, a aplicação $\sigma^s : E_p^s \rightarrow M$ ($\sigma^u : E_p^u \rightarrow M$) cuja imagem é igual a $W^s(p)$ ($W^u(p)$) é injetiva e não precisa ter inversa contínua. Este fato diz que a variedade estável (instável) são cópias imersas dos espaços lineares o que implica que não são círculos ou cilindros. Para maiores detalhes ver [20], página 272. Em particular, $W^s(p)$ e $W^u(p)$ não podem ser compactos.

Definição 1.1.15. Um fluxo X_t é Anosov se M é um conjunto hiperbólico para X_t .

Um fluxo Anosov em uma variedade M é *codimensão um* se a dimensão do espaço E^s ou a dimensão do espaço E^u é igual a um, onde $TM = E^u \oplus E^s$.

Definição 1.1.16. Um fluxo X_t é Axioma A se:

1. $\Omega(X_t)$ é hiperbólico e
2. $\Omega(X_t)$ é o fecho das órbitas fechadas de X_t .

Exemplo 1.1.3. Um fluxo Anosov é Axioma A.

Exemplo 1.1.4. Todo fluxo $X_t : M \rightarrow M$ Axioma A transitivo é Anosov. De fato, como o fluxo X_t é transitivo, existe um ponto $x \in M$ tal que sua órbita $O(x)$ é densa em M . Então,

$$\overline{O(x)} = M \text{ e } O(x) \subset \Omega(X_t).$$

Assim,

$$M = \overline{O(x)} \subset \overline{\Omega(X_t)} = \Omega(X_t),$$

ou seja,

$$M \subset \Omega(X_t).$$

Como $\Omega(X_t) \subset M$ segue-se

$$\Omega(X_t) = M.$$

Como o fluxo é Axioma A temos que $\Omega(X_t) = M$ é hiperbólico. Logo, o fluxo X_t é Anosov.

Teorema 1.1.2 (Teorema da Decomposição Espectral para Fluxos). *Se o fluxo $X_t : M \rightarrow M$ é Axioma A, então o conjunto não-errante $\Omega(X_t)$ se decompõe de maneira única e finita*

$$\Omega(X_t) = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k,$$

como uma união disjunta de conjuntos fechados, invariantes e $X_t|_{\Omega_i}$ é transitivo. Estes Ω_i 's são chamados de conjuntos básicos de $\Omega(X_t)$.

Demonstração. Ver [20]. □

Definição 1.1.17. *Uma curva diferenciável $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ é chamada de ϵ -órbita para um fluxo $X_t : M \rightarrow M$ se $\| \dot{c}(t) - X(c(t)) \| < \epsilon$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se a curva c é periódica então é chamada de ϵ -órbita fechada. Uma curva diferenciável $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ é chamada de δ -sombreada por uma órbita de $x \in M$ se existe uma função $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $|\frac{d}{dt}s - 1| < \delta$ tal que $d(c(s(t)), X_t(x)) < \delta$, para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 1.1.3 (Teorema do Sombreamento para fluxos). *Sejam M uma variedade Riemanniana, $X_t : M \rightarrow M$ e Λ um conjunto hiperbólico para X_t . Então existe uma vizinhança $U(\Lambda) \supset \Lambda$ de Λ tal que para todo $\delta > 0$ existe um $\epsilon > 0$ tal que toda ϵ -órbita é δ -sombreado por uma órbita de X_t .*

1.2 Grupo de Homotopia

O objetivo desta seção é definir o primeiro grupo de homotopia, conhecido como grupo fundamental, e o segundo grupo de homotopia. Para maiores detalhes indicamos o livro [11].

Sejam M, N variedades, $f, g : M \rightarrow N$ duas aplicações contínuas e $I = [0, 1]$.

Definição 1.2.1. *Dizemos que f e g são homotópicas se existe uma aplicação contínua*

$$F : M \times I \rightarrow N$$

tal que

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x),$$

para todo $x \in M$. A aplicação F é chamada de homotopia entre f e g . Escreve-se, neste caso, $F : f \simeq g$, ou simplesmente $f \simeq g$.

A homotopia é pensada como sendo um processo de deformação contínuo da aplicação f na aplicação g . O parâmetro t pode ser imaginado como sendo o tempo do processo de deformação.

Proposição 1.2.1. *A relação de homotopia, $f \simeq g$, é uma relação de equivalência no conjunto das aplicações contínuas de M em N .*

Demonstração. Para toda aplicação $f : M \rightarrow N$ contínua, a aplicação

$$F : M \times I \rightarrow N$$

dada por $F(x, t) = f(x)$, para todo $x \in M$, é uma homotopia entre f e f . Assim \simeq é uma relação reflexiva. Seja agora

$$F : M \times I \rightarrow N$$

uma homotopia entre f e g . Temos

$$F(x, 0) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = g(x).$$

Definindo

$$K : M \times I \rightarrow N$$

por $K(x, t) = F(x, 1 - t)$, para todo $x \in M$, obtemos uma homotopia entre g e f . Assim a relação de homotopia é simétrica. Sejam $F : f \simeq g$ e $K : g \simeq f$. Temos

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x),$$

$$K(x, 0) = g(x) \text{ e } K(x, 1) = f(x).$$

Definimos

$$L : M \times I \rightarrow N$$

por

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ K(x, 2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

A aplicação L é uma homotopia entre f e h . Logo a relação de homotopia é transitiva. \square

As classes de equivalência segundo a relação de homotopia são denominadas *classes de homotopia*. Uma aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ chama-se uma *equivalência homotópica* quando existe $g : N \rightarrow M$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_M$ e $f \circ g \simeq id_N$. Diz-se então que g é um *inverso homotópico* de f e que as variedades M e N têm o mesmo *tipo de homotopia*. Escreve-se, neste caso, $f : M \equiv N$ ou $M \equiv N$.

Definição 1.2.2. *Dizemos que $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ são homotópicas com extremos fixos se existe uma homotopia*

$$F : I \times I \rightarrow M$$

tal que dados $s, t \in I$ valem

$$F(s, 0) = \alpha(s), F(s, 1) = \beta(s),$$

$$F(0, t) = \alpha(0) = \beta(0) \text{ e } F(1, t) = \alpha(1) = \beta(1).$$

Usamos a notação $[\alpha]$ para designar a classe de homotopia da curva α .

Definição 1.2.3. O primeiro grupo de homotopia de uma variedade M , com ponto base x_0 , que se representa por $\pi_1(M, x_0)$, é o grupo constituído pelo conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas $\alpha : I \rightarrow M$ tais que $\alpha(\partial I) = \{x_0\}$, munido com a operação justaposição (descrita abaixo).

Sejam α e β caminhos em M tais que o fim de α coincide com o início de β , isto é, $\alpha(1) = \beta(0)$. Definimos a justaposição $\alpha * \beta : I \rightarrow M$ por

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t - 1), & \text{se } 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

O caminho inverso de α é, por definição, o caminho $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1 - t)$. Este produto induz naturalmente uma estrutura de grupo em $\pi_1(M, x_0)$ com a multiplicação $([\alpha], [\beta]) \mapsto [\alpha * \beta]$. Isto decorre da seguinte proposição.

Proposição 1.2.2. Sejam $[\alpha], [\beta]$ e $[\gamma] \in \pi_1(M, x_0)$. Valem as seguintes propriedades:

1. Se $\alpha' \simeq \alpha$ rel x_0 e $\beta' \simeq \beta$ rel x_0 então $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$ rel x_0 ;
2. Se $\alpha' \simeq \alpha$ então $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1}$;
3. $\alpha * \alpha^{-1} \simeq C_{x_0}$, onde C_{x_0} denota a curva constante $C_{x_0}(t) = x_0$;
4. $C_{x_0} * \alpha \simeq \alpha * C_{x_0} \simeq \alpha$;
5. $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$.

As propriedades 1) e 2) nos dizem que o produto e o inverso estão bem definidos em $\pi_1(M, x_0)$. As propriedades 3), 4) e 5) nos dizem que $\pi_1(M, x_0)$ possui estrutura de grupo com identidade $[C_{x_0}]$. A identidade será denotada por 1. Quando M é conexo por caminhos e $\pi_1(M, x_0) = 1$ dizemos que M é simplesmente conexo. A proposição abaixo mostra que o grupo fundamental independe do ponto base escolhido. Portanto, podemos representar o grupo fundamental por $\pi_1(M)$, sem nenhuma referência explícita ao ponto básico.

Observação 1.2.1. Recordemos o seguinte fato. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ satisfazem $g \circ f = id_X$ então f é injetiva e g é sobrejetiva. Se $f \circ g = id_Y$ então g é injetiva e f é sobrejetiva.

Proposição 1.2.3. *Seja M conexo por caminhos. Dados $x_0, x_1 \in M$ e $\eta : I \rightarrow M$ tal que $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = x_1$, então existe um isomorfismo entre $\pi_1(M, x_0)$ e $\pi_1(M, x_1)$.*

Demonstração. Seja $\eta : I \rightarrow M$ um caminho tal que $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = x_1$. Se α é uma curva fechada de x_0 então $\eta^{-1} * \alpha * \eta$ é uma curva fechada de x_1 . Dado um elemento $[\alpha] \in \pi_1(M, x_0)$, a aplicação acima induz um único elemento $[\alpha'] = [\eta^{-1} * \alpha * \eta] \in \pi_1(M, x_1)$. Denotaremos esta aplicação por

$$P_\eta : \pi_1(M, x_0) \rightarrow \pi_1(M, x_1)$$

tal que $[\alpha'] = P_\eta([\alpha])$.

P_η é um isomorfismo. Com efeito, dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(M, x_0)$ temos

$$\begin{aligned} P_\eta([\alpha] * [\beta]) &= [\eta^{-1} * [\alpha] * [\beta] * \eta] \\ &= [\eta^{-1} * [\alpha] * \eta] * [\eta^{-1} * [\beta] * \eta] \\ &= P_\eta([\alpha]) * P_\eta([\beta]). \end{aligned}$$

Assim, P_η é um homomorfismo. Para mostrar que P_η é bijetivo, vamos introduzir a inversa de P_η . Seja

$$P_\eta^{-1} : \pi_1(M, x_1) \rightarrow \pi_1(M, x_0)$$

tal que

$$P_\eta^{-1}([\alpha']) = [\eta * \alpha' * \eta^{-1}].$$

P_η^{-1} é a inversa de P_η . De fato,

$$\begin{aligned} P_\eta^{-1}P_\eta([\alpha]) &= P_\eta^{-1}([\eta^{-1} * \alpha * \eta]) \\ &= [\eta * \eta^{-1} * \alpha * \eta * \eta^{-1}] \\ &= [\alpha]. \end{aligned}$$

Assim

$$P_\eta^{-1}P_\eta = id_{\pi_1(M, x_0)}$$

e por simetria

$$P_\eta P_\eta^{-1} = id_{\pi_1(M, x_1)}.$$

Utilizando a Observação 1.2.1 obtemos que P_η é injetiva e sobrejetiva. Logo P_η é um isomorfismo. \square

Proposição 1.2.4. *Sejam M e N variedades conexas por caminhos. Então $\pi_1(M \times N) = \pi_1(M) \times \pi_1(N)$.*

Os resultados acima podem ser generalizados e suas demonstrações seguem a mesma linha de raciocínio. Para maiores detalhes ver [16], Capítulo 4.

Definição 1.2.4. O n -ésimo grupo de homotopia de uma variedade M , com ponto base x_0 , que se representa por $\pi_n(M, x_0)$, é o grupo constituído pelo conjunto das classes de homotopia das aplicações contínuas $\alpha : I^n \rightarrow M$ tais que $\alpha(\partial(I^n)) = \{x_0\}$, munido com a operação justaposição, onde $I^n = [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$.

Usaremos neste texto o primeiro e o segundo grupo de homotopia.

Proposição 1.2.5. *Seja M conexo por caminhos. Dados $x_0, x_1 \in M$ e $\eta : I \rightarrow M$ tal que $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = x_1$, então existe um isomorfismo entre $\pi_n(M, x_0)$ e $\pi_n(M, x_1)$.*

Proposição 1.2.6. *Sejam M e N variedades conexas por caminhos. Então $\pi_n(M \times N) = \pi_n(M) \times \pi_n(N)$.*

Exemplo 1.2.1. Alguns exemplos do segundo grupo de homotopia. Ver [16], página 120.

$$\pi_2(S^1) = 1, \quad \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}, \quad \pi_2(S^2 \times S^1) = \pi_2(S^2) \times \pi_2(S^1) = \mathbb{Z}.$$

Definição 1.2.5. *Uma variedade M é contrátil quando ela tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto (uma aplicação constante).*

Proposição 1.2.7. *M é contrátil se, e somente se, a aplicação identidade $id : M \rightarrow M$ é homotópica a uma aplicação constante $p : M \rightarrow M$.*

Proposição 1.2.8. *Se M ou N é contrátil então toda aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é homotópica a uma constante.*

Demonstração. Seja M contrátil. Utilizando a Proposição 1.2.7 existe uma homotopia

$$H : M \times I \rightarrow M$$

entre id_M e uma aplicação constante g , digamos $g : M \rightarrow M$ com $g(x) = p$, para todo $x \in M$. Temos

$$H(x, 0) = id_M(x) = x \text{ e } H(x, 1) = g(x) = p,$$

para todo $x \in M$. Dada qualquer aplicação contínua $f : M \rightarrow N$, tomemos

$$F : M \times I \rightarrow N$$

definida por

$$F(x, t) = (f \circ H)(x, t) = f(H(x, t)).$$

Assim,

$$F(x, 0) = f(H(x, 0)) = f(x) \text{ e } F(x, 1) = f(H(x, 1)) = f(p).$$

Logo F é uma homotopia entre f e a constante $f(p)$.

Se N for contrátil, então existe a homotopia

$$K : N \times I \rightarrow N$$

entre id_N e uma constante. Definindo

$$L : M \times I \rightarrow N$$

por

$$L(x, t) = K(f(x), t),$$

teremos que L é uma homotopia entre $f : M \rightarrow N$ e uma aplicação constante. \square

Observação 1.2.2. Conseguimos com a proposição anterior que toda órbita periódica em uma bola é homotópica a uma constante, já que uma bola é contrátil.

1.3 Aspectos Topológicos

Em toda esta dissertação chamaremos de bola uma variedade homeomorfa à bola unitária de dimensão 3 do \mathbb{R}^3 , esfera uma variedade homeomorfa à esfera unitária do \mathbb{R}^3 e um toro sólido uma variedade tridimensional compacta homeomorfa à $D^2 \times S^1$.

Definição 1.3.1. *Uma variedade é fechada se for compacta, conexa e sem bordo.*

Exemplo 1.3.1. O toro é um exemplo de uma variedade fechada.

Definição 1.3.2. *Uma superfície S separa M se $M \setminus S$ é desconexa.*

Definição 1.3.3. *Uma variedade M é irreduzível se toda esfera $S^2 \subset M$ é bordo de uma bola $B^3 \subset M$. Se M não é irreduzível dizemos que M é redutível.*

Exemplo 1.3.2. O toro sólido $D^2 \times S^1$ e a variedade S^3 são irreduzíveis. Detalhes em [1], página 45.

Definição 1.3.4. *Uma variedade $F \subset M$ compacta é 2-sided se existe um mergulho $h : F \times [-1, 1] \rightarrow M$ com $h(x, 0) = x$, para todo $x \in F$ e $h(F \times [-1, 1]) \cap \partial M = h(\partial F \times [-1, 1])$.*

Uma superfície $S \subset M$ 2-sided separa a variedade M . Ver [9].

Definição 1.3.5. *Uma superfície $S \subset M$ 2-sided sem componentes S^2 ou D^2 é dita ser incompressível se para todo disco $D \subset M$ com $D \cap S = \partial D$ existe outro disco $D' \subset S$ com $\partial D' = \partial D$. O disco D com $D \cap S = \partial D$ é chamado disco de compressão para S . Se S não é incompressível dizemos que é compressível.*

Proposição 1.3.1. *Uma variedade 2-sided $S \subset M$ é incompressível se o homomorfismo $\pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ induzido pela inclusão for injetivo.*

Demonstração. Ver [8], página 10. □

Exemplo 1.3.3. Todo toro $T = S^1 \times S^1$ em S^3 é compressível. De fato, o homomorfismo $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(S^3)$ induzido pela inclusão não é injetivo, pois $\pi_1(T) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é infinito enquanto que $\pi_1(S^3) = 1$ é finito. Logo, usando a proposição anterior segue que T é compressível em S^3 .

Proposição 1.3.2. *Se um toro é compressível em uma variedade irredutível M então o toro é bordo de um toro sólido em M ou o toro está contido em uma bola contida em M .*

Demonstração. Ver [8], página 11. □

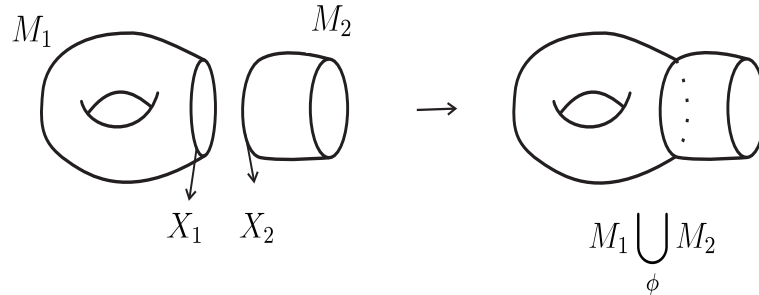
Definição 1.3.6. *Uma variedade tridimensional, fechada M é atoroidal se M não contém toro incompressível. Dizemos que M é toroidal quando M não é atoroidal.*

Exemplo 1.3.4. O toro sólido $D^2 \times S^1$ é uma variedade atoroidal.

Definição 1.3.7. *Sejam M_1, M_2 variedades com bordo, $X_1 \subset \partial M_1, X_2 \subset \partial M_2$ abertos e fechados e $\phi : X_1 \xrightarrow{\cong} X_2$ um difeomorfismo. Então escrevemos*

$$M_1 \bigcup_{\phi} M_2 = M/\tau,$$

onde $M = M_1 \cup M_2$ (união disjunta) e $\tau : X_1 \cup X_2 \rightarrow X_1 \cup X_2$ (união disjunta) é dado por $\tau|_{X_1} = \phi, \tau|_{X_2} = \phi^{-1}$.



Em particular, se M e N são variedades com bordos e $\partial M = \partial N$ então $M \bigcup_{id} N$, $id : \partial M \rightarrow \partial N$, é uma variedade sem bordo.

Exemplo 1.3.5. Podemos colar dois toros sólidos $D^2 \times S^1$ pelo bordo e obtermos uma variedade $D^2 \times S^1 \bigcup_{id} D^2 \times S^1$, $id : \partial(D^2 \times S^1) \rightarrow \partial(D^2 \times S^1)$, difeomorfo a $S^2 \times S^1$. Detalhes em [8], página 31.

1.4 Folheações

A ideia intuitiva de folheação corresponde a decomposição de uma variedade numa união de subvariedades conexas, disjuntas e de mesma dimensão, as quais se acumulam localmente como as folhas de um livro.

Definição 1.4.1. *Seja M uma variedade de dimensão m e classe C^∞ . Uma folheação de classe C^r de dimensão n de M é um atlas máximo \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguintes propriedades:*

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

onde U_1 e U_2 são discos abertos de \mathbb{R}^n e de \mathbb{R}^{m-n} , respectivamente.

2. Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que

$$U \cap V \neq \emptyset$$

então a mudança de coordenadas

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

é da forma

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Neste caso dizemos que M é folheada por \mathcal{F} ou ainda que \mathcal{F} é uma folheação de codimensão $q = m - n$ de M .

Definição 1.4.2. *Sejam \mathcal{F} uma folheação de classe C^r de dimensão n , $0 < n < m$, de M^m e (U, φ) uma carta local de \mathcal{F} tal que*

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}.$$

Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados placas de U , ou placas de \mathcal{F} .

Fixando $c \in U_2$, a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é uma subvariedade conexa de dimensão n e de classe C^r de M . Portanto, se α e β são placas de U então $\alpha \cap \beta = \emptyset$ ou $\alpha = \beta$.

Definição 1.4.3. *Um caminho de placas de \mathcal{F} é uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$, para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$.*

Dado que a variedade M é coberta por placas de \mathcal{F} , podemos definir em M uma relação de equivalência: " pRq se existe um caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$, $q \in \alpha_k$." A classe de equivalência da relação R são chamadas folhas de \mathcal{F} . Por definição segue-se que as folhas de \mathcal{F} são subconjuntos de M conexos por caminhos.

Definição 1.4.4. *Se \mathcal{F} é uma folheação de uma variedade M , então um subconjunto $S \subset M$ é dito ser \mathcal{F} -saturado ou simplesmente saturado se é uma união de folhas de \mathcal{F} .*

Observação 1.4.1. Seja $E^u \oplus E^X \oplus E^s$ a decomposição do fibrado tangente da Definição 1.1.8. Sabe-se que os subfibrados $E^u \oplus E^X$, $E^s \oplus E^X$, E^u , E^s são unicamente integráveis e que as variedades integráveis são de classe C^r . As variedades integráveis determinam folheações de M as quais são denotadas por \mathcal{F}^u , \mathcal{F}^s , \mathcal{F}^{uu} , \mathcal{F}^{ss} , respectivamente. Se $x \in M$ então as respectivas folhas dessas folheações contendo x são $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W^{uu}(x)$, $W^{ss}(x)$, respectivamente, ver [19].

Recordemos a definição de submersão e o Teorema da Forma Local das Submersões.

Definição 1.4.5. *Uma aplicação $f : M^m \rightarrow N^n$ é uma submersão se $(df)_p$ é sobrejetiva para cada ponto $p \in M^m$, isto é, o posto da matriz jacobiana $(Jf)_p$ é igual a n para todo ponto $p \in M^m$.*

Teorema 1.4.1 (Forma Local das Submersões). *Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ de classe C^r , $r \leq 1$ e $(df)_p : T_pM \rightarrow T_qN$, $q = f(p)$, sobrejetiva. Então existem cartas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \in U$, $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, $q \in V$ e uma decomposição $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ tal que $f(U) \subset V$ e f é expressa em cartas $(U, \varphi), (V, \psi)$ com $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = x$. Em outras palavras, f é localmente equivalente a projeção $(x, y) \mapsto x$.*

Proposição 1.4.1. *Seja $f : M^m \rightarrow N^n$ uma submersão de classe C^r . Então as curvas de nível $f^{-1}(c)$, $c \in N$, são folhas de uma folheação \mathcal{F} de codimensão n e classe C^r de M .*

Demonstração. Utilizando o Teorema da Forma Local das Submersões temos que dados $x \in M$ e $q = f(x) \in N$, existem cartas locais (U, φ) em M , (V, ψ) em N tais que $x \in U$, $q \in V$,

1. $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-m}$
2. $\psi(V) = U_2 \subset \mathbb{R}^{n-m}$
3. $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) = \pi_2$

As cartas dadas pelo Teorema da Forma Local das Submersões de M definem uma folheação \mathcal{F} de M . Com efeito, o Item 1 da Definição 1.4.1, definição de folheação, é satisfeito como podemos ver acima. Para mostrarmos o Item 2 da Definição 1.4.1 basta mostrar que a composição do Item 2 independe de x . Sejam (U, φ) e $(\bar{U}, \bar{\varphi})$ cartas de M fornecidas pelo Teorema da Forma Local das Submersões. Mostraremos, agora, que $\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ independe de $x \in U_1$.

$$\begin{aligned} \pi_2 \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} &= \bar{\psi} \circ f \circ (\bar{\varphi})^{-1} \circ \bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ &= \bar{\psi} \circ \psi^{-1} \circ \pi_2. \end{aligned}$$

Então

$$\pi_2 \circ (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1}) = (\bar{\psi} \circ \psi^{-1}) \circ \pi_2$$

não depende de $x \in U_1$. Isto prova que \mathcal{F} é uma folheação de classe C^r e codimensão $m - n$ de M . Por definição as placas de \mathcal{F} estão contidas nas curvas de nível de f . Isto prova que as folhas de \mathcal{F} são precisamente os conjuntos de nível de f e segue o resultado. \square

Exemplo 1.4.1. Seja $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação definida por

$$f(x, y, z) = \alpha(r^2)e^z,$$

onde

$$r^2 = x^2 + y^2$$

e

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma aplicação C^∞ tal que

$$\alpha(0) = 1, \alpha(1) = 0 \text{ e } \alpha'(t) < 0,$$

para todo $t > 0$.

Afirmção: f é uma submersão.

Suponhamos, por absurdo, que f não seja uma submersão. Então existe um ponto (x, y, z) tal que

$$\nabla f(x, y, z) = 0,$$

ou seja,

$$(2\alpha'(r^2)xe^z, 2\alpha'(r^2)ye^z, \alpha(r^2)e^z) = (0, 0, 0).$$

Daí,

$$x = y = 0 \text{ e } \alpha(r^2) = 0$$

e, portanto,

$$x = y = 0 \text{ com } x^2 + y^2 = 1,$$

contradição. Logo f é uma submersão e como visto no Teorema 1.4.1 as curvas de nível são folhas de uma folheação \mathcal{F} de codimensão um e de classe C^∞ de M .

As folhas desta folheação são descritas por

$$f(x, y, z) = c,$$

ou seja,

$$\alpha(r^2)e^z = c.$$

Se $c = 0$ então $\alpha(r^2) = 0$ e, portanto, $x^2 + y^2 = 1$. Aqui as curvas de nível correspondem ao cilindro de raio 1.

Se $c > 0$ então $\alpha(r^2)e^z = c > 0$. Assim $\alpha(r^2) > 0$. Mais precisamente,

$$z = \ln(c) - \ln(\alpha(r^2)).$$

Quando $c = 1$ temos

$$z = -\ln(\alpha(r^2)).$$

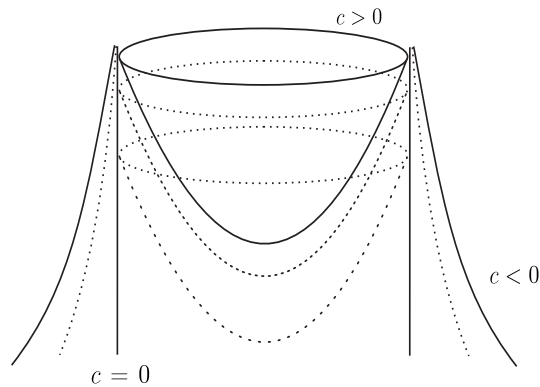
O gráfico da curva acima no plano $y = 0$ é dado por

$$z = -\ln(\alpha(x^2)).$$

Daí,

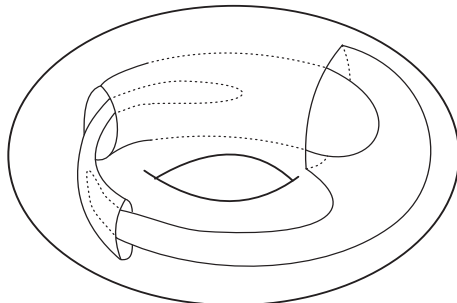
$$z' = -\frac{2\alpha(x^2)}{\alpha(x^2)} \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Então $x = 0$ é o único ponto crítico de z . Temos $z \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow 1^+$ ou 1^- . O gráfico de z é uma parábola. O gráfico das folhas de \mathcal{F} está representado logo abaixo.

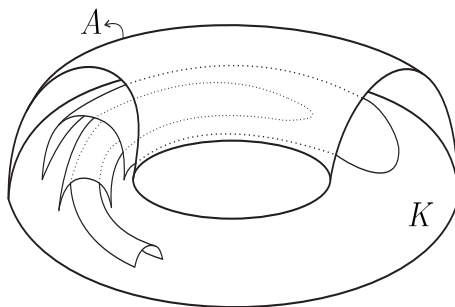


Consideremos a folheação \mathcal{F} construída no exemplo acima restrita ao cilindro sólido $\{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq 1\}$. As folhas desta folheação são invariantes pela translação $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 1)$. Notemos que a variedade quociente cilindro sólido/ $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + 1)$ é um toro sólido $D^2 \times S^1$. Assim a folheação \mathcal{F} induz uma folheação no toro sólido, como na figura abaixo. Esta folheação é chamada de *folheação de Reeb no toro sólido*. Notemos que $\partial(D^2 \times S^1) = S^1 \times S^1$ é uma folha compacta na folheação de Reeb.

Uma componente de Reeb de uma folheação \mathcal{F} é um toro sólido cujo interior é união de superfícies disjuntas que são planos topológicos espiralando assintoticamente ao bordo. Como descrito acima.



Definição 1.4.6. Uma semicomponente de Reeb de uma folheação \mathcal{F} sobre uma variedade tridimensional N com bordo é um subconjunto saturado $H \subset N$, cujo bordo é formado por uma folha $A \in \mathcal{F}$, $A \simeq S^1 \times [0, 1]$, e um anel $K \subset \partial N$ com $\partial K = \partial A$, tal que a variedade dupla $H \cup_{id_A} H \subset N \cup_{id_{\partial N}} N$ é uma componente de Reeb da folheação dupla $2\mathcal{F}$.



Proposição 1.4.2. Uma variedade M fechada possui uma folheação \mathcal{F} de codimensão um se, e somente se, $\chi(M) = 0$, ou seja, a característica de Euler de M é zero.

Demonstração. Ver [22], página 250. □

Proposição 1.4.3. Se F é uma folha não compacta de uma folheação de codimensão um de uma variedade compacta, então para todo $p \in F$ existe uma curva fechada transversal a F , passando por p .

Demonstração. Ver [17], página 271. □

Teorema 1.4.2 (Novikov). Se existe uma curva fechada homotópica a um ponto, transversal às folhas de uma folheação \mathcal{F} de uma variedade tridimensional, então \mathcal{F} tem uma folha compacta.

Demonstração. Ver [5], capítulo VII ou ver [17]. □

Teorema 1.4.3 (Novikov). Seja M uma variedade tridimensional, orientável, fechada com uma folheação \mathcal{F} sem componentes de Reeb, então ou \mathcal{F} é a folheação produto sobre $M = S^2 \times S^1$ ou $\pi_2(M) = 0$.

Demonstração. Ver [17]. □

Definição 1.4.7. Uma aplicação $p : M^* \rightarrow M$ chama-se uma aplicação de recobrimento (ou, simplesmente, um recobrimento) quando cada ponto $x \in M$ pertence a um aberto $V \subset M$ tal que $p^{-1}(V) = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ é uma união de abertos U_{α} de M^* , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por p homeomorficamente sobre V . O espaço M^* chama-se espaço de recobrimento de M .

Definição 1.4.8. *Um recobrimento $p : M^* \rightarrow M$ com M^* simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos chama-se um recobrimento universal.*

Proposição 1.4.4. *Seja M uma variedade e $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow M$ uma aplicação de recobrimento. Então M é irredutível.*

Demonstração. Ver [21], página 131. □

Observação 1.4.2. Seja $\pi : M^* \rightarrow M$ o espaço de recobrimento universal de M . As folheações estáveis \mathcal{F}^s e instáveis \mathcal{F}^u do fluxo Anosov induz folheações \mathcal{F}_*^s e \mathcal{F}_*^u em M^* . As folhas de \mathcal{F}_*^s e \mathcal{F}_*^u são topologicamente planas (ver [18]) e então M^* é homeomorfo a \mathbb{R}^3 (ver [17]). Como podemos ver a hipótese do teorema acima é satisfeita e, portanto, M é irredutível. Concluimos que toda variedade tridimensional que admite fluxo Anosov é irredutível.

Capítulo 2

Resultado Principal

2.1 Lemas

Lema 2.1.1. *Sejam $ST^1, ST^2 \subset ST$, onde ST^1, ST^2 e ST são toros sólidos. Se $\partial(ST^1) \subset \text{Int}(ST^2)$ então $ST^1 \subset \text{Int}(ST^2)$.*

Demonstração. Como

$$\partial(ST^1) \subset \text{Int}(ST^2)$$

e

$$\text{Int}(ST^2) \cap \partial(ST^2) = \emptyset$$

então,

$$\partial(ST^1) \cap \partial(ST^2) = \emptyset. \tag{2.1}$$

Suponhamos, por absurdo, que $ST^1 \not\subset \text{Int}(ST^2)$.

Afirmção 1. $ST^1 \cap \partial(ST^2) \neq \emptyset$.

Seja $x \in \partial(ST^1) \subset \text{Int}(ST^2)$. Tomemos $y \in ST^1$ tal que $y \notin \text{Int}(ST^2)$. A existência de y é garantida pois estamos supondo $ST^1 \not\subset \text{Int}(ST^2)$. Se o ponto y pertence ao bordo de ST^2 então $ST^1 \cap \partial(ST^2) \neq \emptyset$. Caso contrário, $y \in ST \setminus ST^2$. Como ST^1 é conexo por caminhos, existe um caminho em ST^1 que liga x a y , e este caminho passa por $\partial(ST^2)$ pois $x \in \text{Int}(ST^2)$ e $y \in ST \setminus ST^2$ ($\partial(ST^2)$ separa ST em duas componentes conexas). Logo existe um ponto z no caminho em ST^1 tal que $z \in \partial(ST^2)$ e, portanto, $ST^1 \cap \partial(ST^2) \neq \emptyset$.

Afirmção 2. $\partial(ST^2) \subset \text{Int}(ST^1)$.

Notemos que o conjunto $ST^1 \cap \partial(ST^2)$ é aberto e fechado em $\partial(ST^2)$. Com efeito, utilizando (2.1) obtemos

$$\begin{aligned} ST^1 \cap \partial(ST^2) &= (Int(ST^1) \cup \partial(ST^1)) \cap \partial(ST^2) \\ &= (Int(ST^1) \cap \partial(ST^2)) \cup (\partial(ST^1) \cap \partial(ST^2)) \\ &= Int(ST^1) \cap \partial(ST^2). \end{aligned}$$

Daí, $ST^1 \cap \partial(ST^2)$ é aberto em $\partial(ST^2)$. Sendo ST^1 e $\partial(ST^2)$ fechados em ST segue-se que o conjunto $ST^1 \cap \partial(ST^2)$ é fechado em ST e, portanto, $ST^1 \cap \partial(ST^2) \subset \partial(ST^2)$ é fechado em $\partial(ST^2)$.

Como $ST^1 \cap \partial(ST^2)$ é aberto e fechado no conjunto conexo $\partial(ST^2)$ temos

$$ST^1 \cap \partial(ST^2) = \partial(ST^2).$$

Assim,

$$\partial(ST^2) \subset ST^1 = Int(ST^1) \cup \partial(ST^1)$$

e utilizando novamente (2.1) vem

$$\partial(ST^2) \subset Int(ST^1).$$

Provamos assim a afirmação 2.

Como os bordos de ST^1 e ST^2 estão contidos um no interior do outro, $\partial(ST^2) \subset Int(ST^1)$ (afirmação 2) e $\partial(ST^1) \subset Int(ST^2)$ (hipótese), concluimos então que

$$\begin{aligned} ST^1 \cup ST^2 &= Int(ST^1) \cup \partial(ST^1) \cup Int(ST^2) \cup \partial(ST^2) \\ &= Int(ST^1) \cup Int(ST^2). \end{aligned}$$

Logo $ST^1 \cup ST^2$ é um conjunto fechado e ao mesmo tempo aberto e sem bordo em ST . Visto que ST é conexo, podemos concluir $ST^1 \cup ST^2 = ST$. Isto nos leva a uma contradição dado que ST tem bordo e $ST^1 \cup ST^2$ não. Provamos assim o lema. \square

Lema 2.1.2. *Sejam ST um toro sólido e $U \subset ST$ uma variedade tridimensional compacta, conexa e cujo bordo $\partial U = T_1 \cup \dots \cup T_n$ é a união disjunta de toros. Se cada toro T_i é bordo de um toro sólido ST_i em ST então existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $ST_i \cap U = T_i$, para todo $i \neq i_0$ em $\{1, 2, \dots, n\}$ e*

$$U \cup \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0} ST_i \right) \subset ST_{i_0}.$$

Em particular, se $n = 1$, então U é um toro sólido.

Demonstração. Notemos que por hipótese cada toro T_i separa o toro sólido ST em duas componentes, onde uma delas é o toro sólido ST_i .

Mostraremos que U está contido em ST_i , para algum i . Suponhamos, por absurdo, que $U \not\subset ST_i$, para todo i . Fazendo a união de U com todos os toros sólidos ST_i

$$\bigcup_i (U \cup_{id} ST_i)$$

obtemos um conjunto fechado, aberto e sem bordo em ST .

Dado que ST é conexo e o conjunto acima descrito é fechado e aberto em ST temos que o conjunto descrito é o toro sólido ST , o que é uma contradição, pois ST possui bordo. Portanto existe i_0 em $\{1, 2, \dots, n\}$ tal que

$$U \subset ST_{i_0}. \quad (2.2)$$

Daí,

$$T_i \subset \partial U \subset U \subset ST_{i_0},$$

ou seja,

$$T_i \subset ST_{i_0},$$

para todo $i \neq i_0$. Como $T_i \cap T_j = \emptyset$ para todo i, j temos

$$T_i \subset \text{Int}(ST_{i_0}),$$

para todo $i \neq i_0$ e aplicando o Lema 2.1.1 temos

$$ST_i \subset \text{Int}(ST_{i_0}),$$

para todo $i \neq i_0$. Daí,

$$\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0} ST_i \subset \text{Int}(ST_{i_0}) \subset ST_{i_0}. \quad (2.3)$$

Por (2.2) e (2.3) obtemos um dos resultados desejados,

$$U \cup \left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}, i \neq i_0} ST_i \right) \subset ST_{i_0}.$$

Mostraremos, agora, que $ST_i \cap U = T_i$, para todo $i \neq i_0$ em $\{1, \dots, n\}$. Fixamos $i \neq i_0$ em $\{1, \dots, n\}$ de modo arbitrário. O bordo de ST_i separa ST em duas componentes, ST_i e $ST \setminus ST_i$. Observemos que

$$\text{Int}(U) \subset ST_i$$

ou

$$\text{Int}(U) \subset ST \setminus ST_i,$$

pois caso contrário teríamos

$$\text{Int}(U) \cap T_i \neq \emptyset$$

o que é absurdo, pois

$$T_i \subset \partial U$$

e

$$\text{Int}(U) \cap \partial U = \emptyset.$$

Se $\text{Int}(U) \subset ST_i$ então $\partial U \subset ST_i$ e, portanto,

$$T_{i_0} \subset \partial U \subset ST_i \subset \text{Int}(ST_{i_0})$$

o que é uma contradição, pois $T_{i_0} \not\subset \text{Int}(ST_{i_0})$.

Logo $\text{Int}(U) \subset ST \setminus ST_i$, ou seja, $\text{Int}(U) \cap ST_i = \emptyset$. Assim

$$ST_i \cap U = T_i,$$

para todo $i \neq i_0$, dado que $T_i \subset ST_i$ e $T_i \subset \partial U$.

Para o caso particular $n = 1$, temos $\partial U = T_1$, onde T_1 é bordo de um toro sólido ST_1 em ST . Pela primeira parte da prova temos $U \subset ST_1$. O conjunto U é o toro sólido ST_1 . De fato, como $U \subset ST_1$ e $\partial U = \partial(ST_1)$ obtemos $\text{Int}(U) \subset \text{Int}(ST_1)$. Mostraremos, agora, que $\text{Int}(ST_1) \subset \text{Int}(U)$. Suponhamos, por absurdo, que $\text{Int}(ST_1) \not\subset \text{Int}(U)$. Então o conjunto $A = \text{Int}(ST_1) - \text{Int}(U)$ é não-vazio. Notemos que A é aberto em ST^1 pois A^c é fechado em ST^1 . De fato,

$$\begin{aligned} A &= \text{Int}(ST^1) - \text{Int}(U) \\ &= \text{Int}(ST^1) \cap [\text{Int}(U)]^c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A^c &= \text{Int}(ST^1)^c \cup [\text{Int}(U)]^{cc} \\ &= \partial(ST^1) \cup \text{Int}(U) \\ &= \partial U \cup \text{Int}(U) \\ &= U. \end{aligned}$$

Como U é fechado em ST^1 segue-se que A^c é fechado em ST^1 e, portanto, A é aberto em ST^1 . Dessa forma, A e $\text{Int}(U)$ são abertos em ST^1 tais que

$$\begin{aligned} A \cap \text{Int}(U) &= \text{Int}(ST^1) \cap [\text{Int}(U)]^c \cap \text{Int}(U) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A \cup \text{Int}(U) &= (\text{Int}(ST_1) - \text{Int}(U)) \cup \text{Int}(U) \\ &= \text{Int}(ST_1). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\text{Int}(ST_1)$ é desconexo, contradição, pois $\text{Int}(ST^1)$ é conexo. Visto que $\partial(ST^1) = \partial U$ e $\text{Int}(U) = \text{Int}(ST_1)$ temos que U é o toro sólido ST^1 . Finalizando assim a demonstração do lema. \square

O próximo lema garante que um atrator hiperbólico contendo um toro sólido como bacia de atração é um poço.

Lema 2.1.3. *Seja X um campo de classe C^1 numa vizinhança de um toro sólido ST apontando para dentro e transversal ao bordo de ST . Se*

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(ST)$$

é atrator hiperbólico, então Λ é um poço.

Demonstração. Seja $E_\Lambda^u \oplus E_\Lambda^X \oplus E_\Lambda^s$ a decomposição do fibrado tangente de M restrito a Λ . Lembremos que, para que Λ seja um poço é suficiente provar que a dimensão do subfibrado expansor E_Λ^u é igual a zero.

Suponhamos, por absurdo, que $E_x^u \neq 0$, para algum $x \in \Lambda$. Dado que Λ é conexo então $E_x^u \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$. Com efeito, seja

$$A = \{x \in \Lambda; E_x^u \neq 0\}.$$

Temos que A é aberto em Λ . Mostraremos que A é fechado em Λ .

$$\begin{aligned} A^c &= \{x \in \Lambda; E_x^u = 0\} \\ &= \{x \in \Lambda; E_x^s \neq 0\}. \end{aligned}$$

Assim A^c é aberto em Λ e, portanto, A é fechado em Λ . Como A é aberto e fechado no conexo Λ , segue-se que $E_x^u \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$. E como Λ é atrator também temos que $E_x^s \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$.

Em particular, não existe uma singularidade no atrator Λ , pois se existisse uma singularidade p , teríamos $E_p^u = 0$, o que é uma contradição pois $E_x^u \neq 0$, para todo $x \in \Lambda$.

Como visto na Observação 1.1.1 temos que

$$\dim(E_\Lambda^X) = 1.$$

Como

$$1 \leq \dim(E_\Lambda^s) \leq 2,$$

$$1 \leq \dim(E_\Lambda^u) \leq 2$$

e

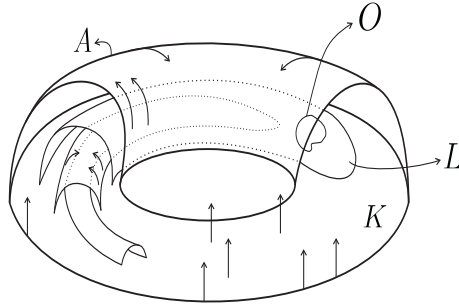
$$\dim(E_\Lambda^u) + \dim(E_\Lambda^s) + \dim(E_\Lambda^X) = \dim(T_\Lambda M) = 3$$

segue-se que $\dim(E_\Lambda^s) = \dim(E_\Lambda^u) = 1$.

Assim as variedades estáveis $\{W^s(x); x \in \Lambda\}$ induzem uma folheação \mathcal{F} de codimensão um em ST transversal a $\partial(ST)$. Ver Observação 1.4.1.

\mathcal{F} não contém componente de Reeb. De fato, uma vez que \mathcal{F} é induzido por variedades estáveis temos pela Observação 1.1.3 que \mathcal{F} não contém folhas compactas em $Int(ST)$ e como toda componente de Reeb exibe uma folha compacta temos consequentemente que \mathcal{F} não contém componente de Reeb.

\mathcal{F} não contém semicomponente de Reeb. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que existe uma semicomponente de Reeb H em \mathcal{F} . Então $H \subset ST$ é, por definição, um subconjunto saturado, cujo bordo é formado por uma folha em forma de anel A e existe outro anel $K \subset \partial(ST)$ com $\partial K = \partial A$. Tomemos $x \in Int(H)$. Por \mathcal{F} ser transversal a $\partial(ST)$ obtemos que a órbita positiva de x não intersecta A . Como X aponta para dentro de ST , veja a figura abaixo, temos que $\omega(x) \subset Int(H)$. Como Λ é um atrator hiperbólico com ST como bacia de atração de X e $x \in ST$ temos $\omega(x) \subset \Lambda$. Dado $\omega(x) \subset \Lambda$ podemos encontrar uma órbita periódica $O \subset Int(H)$ de X por $\omega(x)$ aplicando o Lema do Sombreamento.



Temos que O está contido numa folha L de \mathcal{F} e como $O \subset Int(H)$ e $A \subset \partial H$ segue $L \neq A$. A última propriedade implica que L é um semiplano, e então, L é simplesmente conexo. Consequentemente, a órbita periódica O é o bordo de um disco em L . Aplicando o Teorema de Poincaré-Bendixson podemos encontrar uma singularidade em H , o que é absurdo, pois Λ não possui singularidades.

Tomemos agora a folheação dupla $2\mathcal{F}$ definida sobre a variedade dupla $M = 2ST$. Como ST é um toro sólido $D^2 \times S^1$ então M é difeomorfo a

$S^2 \times S^1$, ver Exemplo 1.3.5, página 20. Consequentemente,

$$\pi_2(M) = \pi_2(S^2 \times S^1) = \pi_2(S^2) \times \pi_2(S^1) = \mathbb{Z} \neq 0.$$

Uma vez que \mathcal{F} não tem componente e nem semicomponente de Reeb temos que $2\mathcal{F}$ não tem componente de Reeb. Então, aplicando o Teorema 1.4.3 segue-se que $2\mathcal{F}$ é a folheação produto $S^2 \times *$ de $M = S^2 \times S^1$. Assim, \mathcal{F} é uma folheação produto $D \times *$ pelos discos meridianos sobre ST e então as folhas de \mathcal{F} são discos invariantes. Mas aplicando novamente o Teorema de Poincaré-Bendixson em um dos discos, podemos encontrar uma singularidade de X em $\text{Int}(ST)$, o que é absurdo, pois Λ não possui singularidades. Portanto, $E_x^u = 0$, para todo $x \in \Lambda$ o que nos diz que Λ é um poço. \square

Lema 2.1.4. *Seja M uma variedade tridimensional e orientável. Sejam X um campo de vetores em M , Λ um atrator hiperbólico e U bacia de atração de Λ com X transversal ao bordo de U apontando para dentro. Então o bordo de U é uma união de toros.*

Demonstração. Como Λ é hiperbólico, a sua estrutura hiperbólica pode ser estendida a U . Portanto, a variedade estável dos pontos de U determina uma folheação \mathcal{F} de dimensão dois em U transversal a ∂U . Assim, a folheação \mathcal{F} induz uma outra folheação \mathcal{F}^* de dimensão um no bordo de U . Aplicando a Proposição 1.4.2 em ∂U , temos que cada componente conexa de ∂U tem característica de Euler zero e, portanto, é um toro ou uma garrafa de Klein. Como M é orientável, as componentes conexas de ∂U são união de toros. \square

Lema 2.1.5. *Seja M uma variedade tridimensional fechada e seja X_t um fluxo Axioma A. Se existe um toro sólido em M tal que seu bordo é transversal ao fluxo X_t , então o fluxo X_t exibe poço, fonte ou órbita periódica homotópica a um ponto.*

Demonstração. Seja ST o toro sólido nas condições do lema. Podemos assumir que X aponta para dentro de ST , pois caso contrário podemos substituir X por $-X$ dentro do mesmo argumento. Uma consequência do Teorema da Decomposição Espectral é que existe um atrator hiperbólico Λ de X em ST . Suponhamos que Λ não é um poço, pois caso contrário não há nada a provar. Como o fluxo X_t não é transitivo (X aponta para dentro de ST transversal a $\partial(ST)$) segue-se que o atrator Λ é próprio. Seja $U \subset ST$ bacia de atração de Λ . O bordo de U é uma união disjunta de toros, ou seja, $\partial U = \cup_{i=1}^n T_i$.

Suponhamos, adicionalmente, que X_t não exibe órbita periódica homotópica a um ponto. Afirmamos que os toros do bordo de U são bordos de toros

sólidos em ST . Suponhamos, por absurdo, que existe um toro em ∂U o qual não é bordo de um toro sólido em ST . Como ST é irredutível e atoroidal podemos aplicar a Proposição 1.3.2 e, portanto, tal toro está contido em uma bola pertencente a ST . Então tal toro divide ST em duas componentes conexas, uma das quais está contida na bola. Portanto, podemos encontrar uma órbita periódica dentro da bola, ou seja, uma órbita periódica homotópica a um ponto, contradição, pois estamos supondo que X_t não exibe órbita periódica homotópica a um ponto. Assim provamos que os toros do bordo de U são bordos de toros sólidos em ST .

Aplicando o Lema 2.1.2 em U e observando que ST é o ST_{i_0} do lema, podemos assumir que $\partial(ST)$ é uma das componentes do bordo de U . Se $\partial(ST)$ for a única componente de ∂U então U será um toro sólido através do Lema 2.1.2 (caso particular, $n = 1$). Aplicando o Lema 2.1.3 teremos que Λ é um poço, contradição, já que estamos supondo que Λ não é poço. Portanto, existe uma outra componente no bordo de U , digamos T^1 . Seja $ST^0 = ST$ e ST^1 o toro sólido de bordo T^1 em ST^0 (ver Lema 2.1.2).

Notemos que X aponta para fora de ST^1 transversal a T^1 e como consequência do Teorema da Decomposição Espectral temos que ST^1 contém um repulsor R_1 em ST^1 . Podemos assumir que R_1 não é fonte, senão acabou a prova.

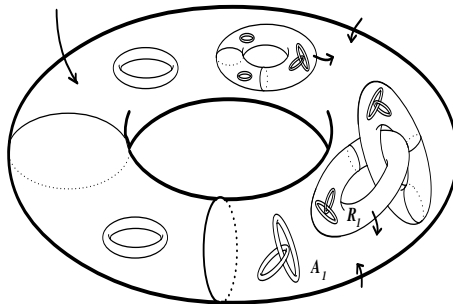
Repetindo o argumento acima temos uma sequência encaixante de toros sólidos

$$ST^0 \supset ST^1 \supset ST^2 \supset \dots \supset ST^k \supset \dots$$

podemos reescrever a sequência

$$ST^{A_0} \supset ST^{R_0} \supset ST^{A_1} \supset \dots \supset ST^{R_i} \supset \dots$$

com $ST^{A_i} \supset A_i$ e $ST^{R_i} \supset R_i$, onde A_i são atratores e R_i são repulsores.



Como o número de conjuntos básicos de Λ é finito a sequência acima é finita. Logo existe um toro sólido ST^k que é bacia de atração (ou repulsão) de um atrator (ou repulsor) hiperbólico de X . Por conseguinte, X_t exibe um poço ou uma fonte pelo Lema 2.1.3. Isto conclui a prova. \square

2.2 Teorema Principal

Agora podemos provar o Teorema Principal.

Teorema 2.2.1 (Teorema Principal). *Sejam M uma variedade tridimensional fechada, irredutível e X_t um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em M . Então todo toro contido em M transversal ao fluxo X_t é incompressível.*

Demonstração. Seja $T \subset M$ um toro transversal ao fluxo X_t Axioma A, onde M é uma variedade tridimensional fechada, irredutível e X_t não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em M .

Suponhamos, por absurdo, que o toro T seja compressível. Como M é irredutível e T compressível segue-se pela Proposição 1.3.2 que T é bordo de um toro sólido em M ou T está contido numa bola em M .

Se T é bordo de um toro sólido em M , aplicando o Lema 2.1.5, o fluxo X_t exibirá um poço, uma fonte ou uma órbita periódica homotópica a um ponto, o que contradiz a hipótese.

Se T está contido em uma bola, então existe uma órbita periódica na bola e, portanto, essa órbita é homotópica a um ponto. Assim, X_t exibirá uma órbita periódica homotópica a um ponto, ver Observação 1.2.2, o que contradiz a hipótese.

Em ambos os casos, chegamos a uma contradição e, portanto, T é incompressível, como queríamos. \square

Capítulo 3

Consequências e Comentários

Corolário 3.0.1. *Seja X_t um fluxo Axioma A que não exibe poço, fonte e órbita periódica homotópica a um ponto em M , onde M é tridimensional, fechada, orientável e irredutível. Se M é atoroidal então X_t é um fluxo Anosov transitivo.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que o fluxo X_t não seja transitivo. Utilizando o Teorema da Decomposição Espectral obtemos que um dos conjuntos básicos de $\Omega(X_t)$ é atrator. Como o fluxo é não transitivo o atrator é próprio. Para esse atrator existe uma bacia de atração U tal que ∂U é transversal ao fluxo X_t . Logo usando o Lema 2.1.4 temos que ∂U é formado por uma união de toros transversais a X_t , os quais são incompressíveis por conta do Teorema Principal, Teorema 2.2.1, o que é um absurdo, dado que a variedade M é atoroidal. Portanto o fluxo X_t é transitivo.

Como todo campo de vetores Axioma A transitivo é Anosov (ver Exemplo 1.1.4) temos que X_t é um fluxo Anosov transitivo. \square

Corolário 3.0.2. *Seja M uma variedade tridimensional, fechada, orientável e atoroidal. Se o fluxo X_t é Anosov então o fluxo X_t é transitivo.*

Demonstração. Se mostrarmos que todo fluxo Anosov sobre uma variedade tridimensional, fechada e atoroidal satisfaz as hipóteses do Corolário 3.0.1 então obteremos o resultado desejado. Vejamos que o fluxo X_t realmente satisfaz as hipóteses:

É de conhecimento geral que todo fluxo Anosov é Axioma A, que fluxo Anosov não tem poço e nem fonte. E como visto na Observação 1.4.2, M é irredutível. Nós resta, demonstrarmos que o fluxo X_t não exibe órbita periódica homotópica a um ponto. De fato, pois para uma órbita periódica hiperbólica α as folhas estáveis são acumuladas à folha correspondente a α . Usando a Proposição 1.4.3, podemos encontrar uma curva β homotópica a α ,

transversal as folhas da folheação estável. Se α for homotópica a um ponto, β também será. Logo, pela Proposição 1.4.2 existe uma folha compacta, o que é uma contradição, já que as folhas da folheação são geradas pelas variedades estáveis e elas não podem ser compactas, ver Observação 1.1.3. Portanto, o fluxo X_t não exibe órbita periódica homotópica a um ponto.

Logo as hipóteses são satisfeitas e o resultado desejado segue do corolário anterior. \square

Podemos retirar a hipótese “ X_t não exibe órbita periódica homotópica a um ponto” do teorema principal, Teorema 2.2.1, e mostrar que a conclusão é falsa. Em [2], página 3, podemos encontrar um toro em S^3 transversal a um fluxo Axioma A sem poço nem fonte.

Logo, S^3 é uma variedade tridimensional, fechada, irredutível e existe um fluxo Axioma A sem poço nem fonte, contendo um toro transversal ao fluxo (todo toro em S^3 é compressível).

Referências Bibliográficas

- [1] Apaza, E., *Sobre Atratores e Consequências Topológicas*. Tese de Doutorado (2006), UFRJ.
- [2] Apaza, E., Soares, R., *Axiom A Flows Without Sinks nor Sources on n -Manifolds*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 21 (2008), no. 2, 393-401.
- [3] Bowen, R., *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*. Second edition. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.
- [4] Brunella, M., *Separating the basic sets of a nontransitive Anosov flow*, Bull. London Math. Soc. 25 (1993), no. 5, 487-490.
- [5] Camacho, C., Neto, A., *Teoria Geométrica das Folheações*. Primeira Edição. Publicação IMPA, 1979.
- [6] Fenley, S. R., *Quasigeodesic Anosov flows and homotopic properties of flows lines*, J. Differential Geom. 41 (1995), no. 2, 479-514.
- [7] Katok, A., Hasselblat, B., *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [8] Hatcher, A., *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Disponível na homepage Hatcher: www.math.cornell.edu.
- [9] Hempel, J., *3-manifolds*, Annals of Math. Studies No. 86, Princeton University Press, Princeton, 1976.
- [10] Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M., *Invariant Manifolds*. Lec. Not. in Math. 583, Spring-Verlag, 1977.
- [11] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Segunda Edição. Publicação IMPA, 1999.

- [12] Morales, C., *Incompressibility of Tori Transverse to Axiom A Flows*, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 4349-4354.
- [13] Morales, C., *Poincaré-Hopf Index and Partial Hyperbolicity*, Ann. Fac. Sic. Toulouse Math. XVII (2008), no. 1, 193-206.
- [14] Morales, C., Scárdua, B., *Geometry, Dynamics and Topology of Foliated Manifolds*. Publicação IMPA. Colóquio Brasileiro de Matemática 24, 2003.
- [15] Mosher, L., *Dynamical systems and the homology norm of a 3-manifolds. I. Efficient intersection of surfaces and flows*, Duke Math. J. 65 (1992), no. 3, 449-500.
- [16] Nakahara, M., *Geometry, Topology and Physics*. First edition. Graduate Student Series in Physics. 1990.
- [17] Novikov, S. P., *Topology of Foliations*. Trans. Moscow Math. Soc 14 (1963) 268-305.
- [18] Palmeira, C., *Open Manifolds Foliated by Planes*. Annals of Math., 107 (1970), 109-131.
- [19] Plante, J., *Anosov Flows*. Am. Journal of Mathematics, 94 (1972), 327-361.
- [20] Robinson, C., *Dynamical System. Stability, Symbolic Dynamics, and chaos*. Second edition. Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.
- [21] Rosenberg, H., *Foliations by Planes*. Topology, vol 7 (1968), 131-138.
- [22] Thurston, W., *Existence of Codimension One Foliations*, The Annals of Math., 104 (1976), no. 2, 249-268.

Índice Remissivo

- δ -sombreada, 8
- ϵ -órbita, 8
- Aplicação
 - submersão, 16
- Atrator, 5
 - hiperbólico, 5
- Caminho de placas, 16
- Conjunto
 - α -limite, 3
 - ω -limite, 3
 - hiperbólico, 4
 - invariante, 4
 - saturado, 16
 - transitivo, 5
- Fluxo
 - Anosov, 7
 - Axioma A, 7
 - transitivo, 5
- Folheação, 15
 - codimensão, 16
 - de Reeb, 19
- Fonte, 5
- Grupo de Homotopia
 - primeiro, 10
 - segundo, 12
- Homotópia, 8
- Órbita, 2
 - fechada, 3
 - negativa, 2
 - periódica, 3
 - positiva, 2
- Operação justaposição, 10
- Placas, 16
- Poço, 5
- Ponto
 - errante, 4
 - fixo, 2
 - não-errante, 4
 - periódico, 2
- Recobrimento, 20
 - universal, 21
- Repulsor, 5
- Semicomponente de Reeb, 20
- Separa, 13
- Superfície
 - incompressível, 14
 - transversal, 5
- Teorema
 - da Decomposição Espectral, 8
 - da Variedade Estável, 6
 - de Novikov, 20
 - do Sombreamento, 8
 - Local das Submersões, 17
 - Principal, 30
- Variedade
 - 2-sided, 14
 - atoroidal, 14
 - contrátil, 12
 - estável forte, 6

estável local, 6
fechada, 13
instável forte, 6
instável local, 6
irredutível, 13