



Universidade Federal de Alagoas  
Instituto de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Dissertação de Mestrado

# A Rigidez da Curvatura de Ricci do Hemisfério $S_+^n$

Ana Maria Menezes de Jesus

Maceió, Brasil  
04 de dezembro de 2009

ANA MARIA MENEZES DE JESUS

A Rigidez da Curvatura de Ricci do  
Hemisfério  $S_+^n$

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 04 de dezembro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof.Dr. Hilário Alencar da Silva

Maceió  
2009

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
**Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale**

J58r Jesus, Ana Maria Menezes de.

A rigidez da curvatura de Ricci do hemisfério  $S_+^n$  / Ana Maria Menezes de Jesus, 2009.  
vii, 72f. : il.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.  
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.  
Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 70.

Índices: f. 71-72.

1. Ricci, Curvatura de. 2. Variedades riemannianas. 3. Esfera (Matemática).  
I. Título.


CDU: 514.752.2

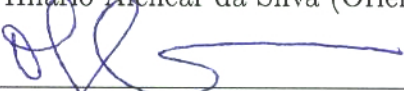
# A Rigidez da Curvatura de Ricci do Hemisfério $S_+^n$

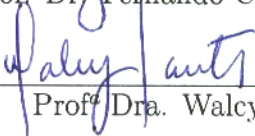
Ana Maria Menezes de Jesus

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 04 de dezembro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva (Orientador)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Fernando Codá Marques

  
\_\_\_\_\_  
Prof.ª Dra. Walcy Santos

Aos meus pais,  
Antônio e Vivalda.

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela graça de ter alcançado mais um objetivo em minha vida.

Ao professor Hilário Alencar, pelo incentivo e apoio acadêmico desde o início do mestrado. Obrigada pela amizade, pelas conversas animadoras, por acreditar que posso ir além, muito mais do que eu mesma acredito.

Ao professor Fernando Codá, por ter sugerido o tema desta dissertação e ter me ajudado em toda a fase de elaboração. Obrigada também pelo apoio que me deu durante todo este ano que passei no IMPA; pela paciência e disposição em esclarecer minhas dúvidas.

À professora Walcy Santos pelas sugestões dadas para tornar mais claras algumas afirmações feitas no texto.

Aos meus queridos pais, Antônio e Vivalda, e as minhas irmãs, Vilma, Aline e Beatriz. Obrigada pelo carinho e atenção.

Aos meus amigos Almir Santos e Ivaldo Nunes, sempre dispostos a me ajudar. Obrigada pelas vezes em que discutimos sobre pontos desta dissertação.

À Clarissa Codá, Renata Lins e Leonardo Carvalho, que me ajudaram nos momentos em que o Latex insistia em dar erros.

Ao Gregório Silva Neto, por ter lido minuciosamente esta dissertação e feito várias sugestões.

Ao Alexsandro Néo pelas diversas sugestões nas figuras presentes nesta dissertação.

Ao PROCAD/CAPES: Fortalecimento da Matemática no eixo Alagoas-Bahia, coordenado pelo professor Manfredo do Carmo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

# Resumo

Nesta dissertação apresentamos a demonstração de um teorema obtido por F. Hang e X. Wang, o qual estabelece que uma variedade  $(M^n, g)$  Riemanniana compacta com bordo não-vazio, curvatura de Ricci maior ou igual a  $(n - 1)g$ , e com bordo isométrico à esfera  $(n-1)$ -dimensional e segunda forma fundamental não-negativa, é isométrica ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$ . Este artigo foi publicado em 2009 no *Journal of Geometric Analysis*, com o título *Rigidity Theorems for Compact Manifolds with Boundary and Positive Ricci Curvature*.

**Palavras-chave:** Curvatura de Ricci, esfera, segunda forma fundamental, variedade compacta com bordo.

# Abstract

In this work we demonstrate a theorem obtained by F. Hang and X. Wang, which ensures that a compact Riemannian manifold  $(M^n, g)$  with nonempty boundary, Ricci curvature greater or equal to  $(n - 1)g$ , boundary isometric to the  $(n-1)$ -dimensional sphere and second fundamental form nonnegative, is isometric to the hemisphere  $\mathbb{S}_+^n$ . That result was published in this year in *Journal of Geometric Analysis* with the title *Rigidity Theorems for Compact Manifolds with Boundary and Positive Ricci Curvature*.

**Keywords:** Ricci curvature, sphere, second fundamental form, compact manifold with boundary.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Conexões; Curvaturas . . . . .	3
1.2 Geodésicas; Aplicação Exponencial . . . . .	8
1.3 Campos de Jacobi . . . . .	12
1.4 Variações do Comprimento de Arco . . . . .	13
1.5 Segunda Forma Fundamental . . . . .	15
1.6 Variedades com Bordo . . . . .	18
1.7 Alguns Resultados sobre Equações Diferenciais Parciais . . . . .	20
<b>2 Resultados Auxiliares</b>	<b>25</b>
2.1 A Fórmula de Bochner . . . . .	25
2.2 Algumas Propriedades do Disco Geodésico na Esfera . . . . .	32
2.3 Relações entre Métricas Conformes . . . . .	34
2.4 Fórmula de Reilly . . . . .	42
<b>3 Resultados Principais</b>	<b>47</b>
3.1 O Teorema de Reilly . . . . .	47
3.2 O Teorema de Hang-Wang; Caso Bidimensional . . . . .	56
3.3 O Teorema de Hang-Wang; Caso Geral . . . . .	60
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>70</b>

# Introdução

Esta dissertação está baseada no artigo *Rigidity Theorems for Compact Manifolds with Boundary and Positive Ricci Curvature* dos matemáticos Fengbo Hang e Xiaodong Wang sobre a conjectura de Min-Oo

**Conjectura** (Min-Oo, 1995). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo e curvatura escalar  $R \geq n(n-1)$ . Se o bordo é isométrico a  $\mathbb{S}^{n-1}$  e totalmente geodésico, então  $(M^n, g)$  é isométrico ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$ .*

Hang e Wang provaram que a conjectura é verdadeira com algumas alterações nas hipóteses, a saber: supondo que a segunda forma fundamental do bordo é não-negativa e a curvatura de Ricci é maior ou igual a  $(n-1)g$ . Mais precisamente, provaram o seguinte resultado.

**Teorema 0.0.1** (Hang-Wang, [3]). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos que*

- (i) *O tensor curvatura de Ricci satisfaz  $\text{Ric} \geq (n-1)g$ ;*
- (ii)  *$(\Sigma, g|_\Sigma)$  é isométrico a  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ;*
- (iii) *A segunda forma fundamental de  $\Sigma$  é não-negativa.*

*Então  $(M^n, g)$  é isométrico a  $\mathbb{S}_+^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .*

O objetivo deste trabalho é demonstrar o teorema acima obtido por Hang e Wang.

Esta dissertação está dividida em três capítulos. No primeiro capítulo abordamos os conceitos e resultados em Geometria Riemanniana e Equações Diferenciais Parciais os quais serão utilizados nos capítulos seguintes. No capítulo 2, provamos fatos fundamentais para a demonstração dos principais resultados, como por exemplo, provamos a fórmula de Bochner:

**Proposição 0.0.1** (Fórmula de Bochner). *Se  $M$  é uma variedade Riemanniana e  $f \in C^\infty(M)$ , então*

$$\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Além disso, ainda no capítulo 2, provamos a Fórmula de Reilly:

**Proposição 0.0.2** (Fórmula de Reilly). *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$  e seja  $f \in C^\infty(M)$ . Denotemos por  $\Omega$  e  $\Psi$  as formas de volume de  $M$  e  $\Sigma$ , respectivamente. Então*

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2) \Omega &= \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \Omega + \int_\Sigma (\Delta z + v\mathcal{H})v\Psi \\ &\quad - \int_\Sigma \langle \nabla v, \nabla z \rangle \Psi + \int_\Sigma II(\nabla z, \nabla z)\Psi, \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{H}$  é a curvatura média do bordo  $\Sigma$ ,  $z = f|_\Sigma$  e  $v = f_n$  é derivada de  $f$  na direção do vetor normal ao bordo.

O terceiro capítulo está dividido em três seções. Na primeira seção provamos o Teorema de Reilly, fato essencial para a demonstração do Teorema de Hang-Wang.

**Teorema 0.0.2** (Reilly, [5]). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos  $\text{Ric} \geq (n-1)g$  e que a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$  é não-negativa. Então o primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$ , relacionado ao problema de Dirichlet, satisfaz  $\lambda_1 \geq n$ . Além disso,  $\lambda_1 = n$  se, e somente se,  $M$  é isométrica ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .*

Na segunda seção provamos o Teorema de Hang-Wang no caso bidimensional usando técnicas geométricas e analíticas. E, finalmente, na terceira seção, apresentamos uma demonstração para o caso geral do Teorema de Hang-Wang de um modo puramente analítico utilizando o Teorema de Reilly.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo fixamos notações e apresentamos os requisitos necessários para a compreensão dos resultados principais desta dissertação, a saber, o Teorema de Hang-Wang e o Teorema de Reilly. Salvo menção contrária, os resultados aqui apresentados encontram-se demonstrados em [2].

### 1.1 Conexões; Curvaturas

Nesta seção introduzimos a noção de conexão sobre uma variedade Riemanniana e definimos a derivada covariante de um campo de vetores ao longo de uma curva. Logo após isto, apresentamos uma definição de curvatura que, intuitivamente, mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana. Definimos também curvatura seccional, curvatura de Ricci e curvatura escalar.

Em toda esta dissertação, as variedades diferenciáveis consideradas são supostas de Hausdorff e com base enumerável. Quando indicarmos uma variedade por  $M^n$ , o índice superior  $n$  indicará a dimensão de  $M$ . Denotaremos a esfera unitária contida em  $\mathbb{R}^{n+1}$  por  $\mathbb{S}^n$ .

Indicaremos por  $\mathcal{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$  e por  $C^\infty(M)$  o conjunto das funções diferenciáveis em  $M$ .

**Definição 1.1.1.** Uma conexão Riemanniana em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y\end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$ ,
- (ii)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$ ,
- (iii)  $\nabla_XfY = f\nabla_XY + X(f)Y$ ,
- (iv)  $Xg(Y, Z) = g(\nabla_XY, Z) + g(Y, \nabla_XZ)$ , (Compatibilidade com a métrica)
- (v)  $\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y]$ , (Simetria)

onde  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ .

O fato da conexão Riemanniana ser simétrica, propriedade (v), implica que em um sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$ ,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , onde  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  é o vetor tangente à curva coordenada:

$$x_i \rightarrow \mathbf{x}(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0).$$

**Teorema 1.1.1** (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão Riemanniana  $\nabla$  em  $M$ .*

Seja  $(U, \mathbf{x})$  uma parametrização de  $M^n$ . Para facilitar a notação, passamos a escrever  $X_i$  para denotar  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

As funções  $\Gamma_{ij}^k$  definidas em  $U$  por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k \tag{1.1}$$

são os coeficientes da conexão  $\nabla$  em  $U$  ou *os símbolos de Christoffel* da conexão. Usando a fórmula de Kozul, a qual nos diz que

$$g(Z, \nabla_Y X) = \frac{1}{2} \{ Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Y], Z) \},$$

obtemos

$$\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\},$$

onde  $g_{ij} = g(X_i, X_j)$ .

Denotando por  $(g^{km})$  a matriz inversa de  $(g_{km})$ , temos

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\} g^{km}. \quad (1.2)$$

A equação (1.2) é a expressão dos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana em termos dos  $g_{ij}$  dados pela métrica.

**Proposição 1.1.1.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com  $\nabla$ , sua conexão Riemanniana. Então existe uma única correspondência que associa a cada campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $\alpha : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $\alpha$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $\alpha$ , tal que*

$$(a) \quad \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

$$(b) \quad \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt},$$

$$(c) \quad \text{Se } V \text{ é induzido por um campo de vetores } Y \in \mathcal{X}(M), \text{ isto é, } V(t) = Y(\alpha(t)), \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} Y,$$

onde  $W \in \mathcal{X}(M)$  e  $f$  é uma função diferenciável em  $I$ .

*Demonstração.* Suponhamos, inicialmente, que existe uma aplicação  $\frac{D}{dt}$  satisfazendo as condições (a), (b) e (c). Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  um sistema de coordenadas com  $\alpha(I) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$  e seja  $\mathbf{x}^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  a expressão local de  $\alpha(t)$ ,  $t \in I$ . Podemos expressar o campo  $V$  localmente como

$$V(t) = \sum_{j=1}^n v_j(t) X_j(\alpha(t)).$$

Por (a) e (b), temos

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{dv_j}{dt} X_j + \sum_{j=1}^n v_j \frac{DX_j}{dt}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{DX_j}{dt} &= \nabla_{\frac{dc}{dt}} X_j \\
&= \nabla_{\left(\sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} X_i\right)} X_j \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{dx_i}{dt} \nabla_{X_i} X_j \\
&= \sum_{i,k=1}^n \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k X_k,
\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos a condição (c), na terceira usamos a condição (i) da Definição 1.1.1 e na última usamos a expressão (1.2).

Portanto,

$$\frac{DV}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{dv_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v_j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k. \quad (1.3)$$

A expressão (1.3) nos mostra que se existe uma aplicação  $\frac{D}{dt}$  satisfazendo as condições da Proposição 1.1.1, então ela é única.

Para mostrar a existência, definamos  $\frac{DV}{dt}$  em  $\mathbf{x}(U)$  por (1.3). Desse modo, a aplicação  $\frac{D}{dt}$  satisfaz as condições (a), (b) e (c). Se  $\mathbf{y} : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um outro sistema de coordenada tal que  $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U) \neq \emptyset$  e definimos  $\frac{DV}{dt}$  em  $\mathbf{y}(W)$  por (1.3), as definições coincidem em  $\mathbf{y}(W) \cap \mathbf{x}(U)$ , pela unicidade de  $\frac{DV}{dt}$  em  $\mathbf{x}(U)$ . Segue, então, que a definição pode ser estendida para todo  $M$  e isto conclui a demonstração.  $\square$

A proposição acima mostra que a noção de conexão fornece uma maneira de derivar campo de vetores ao longo de curvas, em particular, é possível falar em aceleração de uma curva em  $M$ .

**Definição 1.1.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com sua conexão Riemanniana  $\nabla$ . Um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva  $c : I \rightarrow M$  é chamado paralelo quando  $\frac{DV}{dt} \equiv 0$ .*

Um conjunto  $\{E_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{X}(M)$  é um *referencial* para  $M$ , se  $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$  é uma base de  $T_p M$  para cada  $p \in M$ . Isto nos diz que todo campo de vetores  $X \in \mathcal{X}(M)$  pode ser escrito da forma

$$X = \sum_{i=1}^n x_i E_i,$$

onde as funções  $x_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis. Um referencial é dito *ortonormal* se  $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal de  $T_pM$  para cada  $p \in M$ . Dizemos que um referencial  $\{E_i\}_{i=1}^n$  é *geodésico numa vizinhança*  $U \subset M$ , se em cada  $p \in U$ ,  $\{E_i(p)\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal de  $T_pM$  e  $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0$  para todo  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

**Definição 1.1.3.** A curvatura  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é uma correspondência que associa a cada par  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

**Observação 1.1.1.** Se  $M = \mathbb{R}^n$ , então  $R(X, Y)Z = 0$ , para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$ . De fato, consideremos os campos  $E_i(p) = e_i$  para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ , onde  $\{e_i\}_{i=1}^n$  é base canônica do  $\mathbb{R}^n$ .

Assim, dados  $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$ ,  $Y = \sum_{i=1}^n y_i E_i$  e  $Z = \sum_{i=1}^n z_i E_i$ , temos

$$\nabla_X Z = \nabla_X \left( \sum_{i=1}^n z_i E_i \right) = \sum_{i=1}^n (X(z_i) E_i + z_i \nabla_X E_i) = \sum_{i=1}^n X(z_i) E_i,$$

pois o campo  $E_i$  é um campo constante e, portanto, sua derivada covariante em relação a qualquer outro campo é nula.

Analogamente,

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_{i=1}^n Y(X(z_i)) E_i$$

e

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum_{i=1}^n X(Y(z_i)) E_i.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z &= \sum_{i=1}^n X(Y(z_i)) E_i - \sum_{i=1}^n Y(X(z_i)) E_i \\ &= \sum_{i=1}^n [X(Y(z_i)) - Y(X(z_i))] E_i \\ &= \sum_{i=1}^n (XY - YX)(z_i) E_i = \nabla_{[X, Y]} Z. \end{aligned}$$



Portanto,  $R(X, Y)Z = 0$ . Podemos então pensar em  $R$  como uma maneira de medir o quanto  $M$  deixa de ser euclidiano.

□

**Definição 1.1.4.** Dado um ponto  $p \in M$  e um subespaço bi-dimensional  $\sigma \subset T_pM$ , o número real

$$K(\sigma) = K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)y, x \rangle}{\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y \rangle^2}},$$

onde  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$ .

A proposição a seguir mostra que, numa variedade de curvatura seccional constante, o tensor curvatura pode ser escrito de uma forma mais simples.

**Proposição 1.1.2.** Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Definamos uma aplicação trilinear  $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$  por

$$\langle R'(X, Y, Z), W \rangle = \langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle Y, W \rangle \langle X, Z \rangle,$$

para todo  $X, Y, Z, W \in T_pM$ . Então  $M$  tem curvatura seccional constante e igual a  $K_0$  se, e somente se,  $R = K_0 R'$ , onde  $R$  é o tensor curvatura de  $M$ .

**Definição 1.1.5.** Dado um ponto  $p \in M$ , seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_pM$ . Dados  $x, y \in T_pM$ , definimos (tensor) curvatura de Ricci por

$$\text{Ric}(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle R(x, e_i)e_i, y \rangle,$$

e a curvatura escalar em  $p$  por

$$R(p) = \sum_{j=1}^n \text{Ric}(e_j, e_j) = \sum_{i,j} \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j \rangle.$$

Usaremos a notação  $R_{ij}$  para denotar  $\text{Ric}(e_i, e_j)$ .

## 1.2 Geodésicas; Aplicação Exponencial

No que se segue,  $M$  será uma variedade Riemanniana com sua conexão Riemanniana.

**Definição 1.2.1.** Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma geodésica se, para todo  $t \in I$ ,  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) (t) = 0$ .

Vamos determinar as equações locais satisfeitas por uma geodésica  $\gamma$  em um sistema de coordenadas  $(U, \mathbf{x})$ . Seja  $\mathbf{x}^{-1} \circ \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  a expressão local de  $\gamma$  na parametrização  $\mathbf{x}$ .

A curva  $\gamma$  será uma geodésica se, e somente se,

$$0 = \frac{D}{dt} \left( \frac{d\gamma}{dt} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k \right) X_k.$$

Ou seja, se, e somente se,

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} \Gamma_{ij}^k = 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

Como as geodésicas são soluções de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem não-linear, o seu domínio maximal de definição é um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  o qual nem sempre é todo o  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.2.2.** Dizemos que uma variedade Riemanniana  $M$  é completa quando, para todo  $p \in M$ , as geodésicas  $\gamma(t)$  que partem de  $p$  estão definidas para todos os valores do parâmetro  $t \in \mathbb{R}$ .

Como uma consequência do teorema de existência e unicidade das soluções de equações diferenciais ordinárias, segue o seguinte resultado.

**Proposição 1.2.1.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Dados  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , existe uma única geodésica  $\gamma : I \rightarrow M$  tal que  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma'(0) = v$ .

Denotaremos por  $\gamma_v$  a única geodésica que no instante  $t = 0$  passa por  $p$  com velocidade  $v \in T_p M$ .

**Lema 1.2.1** (de Homogeniedade). Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica com  $\gamma'(0) = v$ . Então

$$\gamma_{av}(t) = \gamma_v(at), \quad a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

**Definição 1.2.3.** Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa. Definimos a aplicação exponencial em  $p \in M$  por

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p M &\rightarrow M \\ v &\mapsto \gamma_v(1). \end{aligned}$$

**Observação 1.2.1.** Da mesma maneira podemos definir a aplicação exponencial em variedades que não são completas. A única diferença é que o seu domínio de definição passa a ser um aberto do plano tangente em torno da origem. Para mais detalhes, ver [2], pág. 70-73, por exemplo.

Geometricamente,  $\exp_p v$  é o ponto de  $M$  obtido percorrendo uma distância igual a  $|v| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ , a partir de  $p$ , sobre a geodésica que passa por  $p$  com velocidade  $\frac{v}{|v|}$ .

Usaremos a notação  $B(0, \epsilon)$  para indicar uma bola aberta de centro na origem  $0$  de  $T_p M$  e raio  $\epsilon$  e a notação  $B[0, \epsilon]$  para indicar uma bola fechada de centro na origem  $0$  de  $T_p M$  e raio  $\epsilon$ .

**Proposição 1.2.2.** *Dado  $p \in M$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\exp_p : B(0, \epsilon) \subset T_p M \rightarrow M$  é um difeomorfismo de  $B(0, \epsilon)$  sobre um aberto de  $M$ .*

Uma geodésica  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *minimizante*, se  $l(\gamma) \leq l(c)$ , onde  $c$  é qualquer curva diferenciável por partes ligando os extremos de  $\gamma$ .

**Definição 1.2.4.** *Dados  $p, q \in M$ , a distância  $d$  de  $p$  a  $q$  é definida por*

$$d(p, q) = \inf \{ l(\alpha_{p,q}); \alpha_{p,q} \text{ é uma curva diferenciável por partes ligando } p \text{ a } q \},$$

onde  $l(\alpha)$  indica o comprimento da curva  $\alpha$ .

Com a distância  $d$ ,  $M$  é um espaço métrico. Para uma demonstração deste fato, ver [2], pág. 161, por exemplo.

Observe que se existe uma geodésica minimizante  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$ , o que nem sempre é verdade, então  $d(p, q) = l(\gamma)$ .

**Teorema 1.2.1** (Hopf e Rinow). *Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $p \in M$ . Se  $M$  é completa, então para todo  $q \in M$  existe uma geodésica  $\gamma$  ligando  $p$  a  $q$  com  $l(\gamma) = d(p, q)$ .*

**Corolário 1.2.1.** *Se  $M$  é compacta, então  $M$  é completa.*

Seja  $A$  um subconjunto conexo de  $\mathbb{R}^2$  tal que sua fronteira seja uma curva diferenciável por partes com ângulos dos vértices distintos de  $\pi$ . Uma *superfície parametrizada* em  $M$  é uma aplicação diferenciável  $b : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , isto é,  $b$  se estende a uma aplicação diferenciável  $b : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , onde  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^2$  que contém  $A$ .

Um *campo de vetores*  $V$  ao longo de  $b$  é uma aplicação que a cada ponto  $q \in A$  associa um vetor  $V(q) \in T_{b(q)} M$ . Dizemos que  $V$  é diferenciável se, para toda  $f \in C^\infty(M)$ , a aplicação  $q \mapsto V(q)f$  é diferenciável.

Sejam  $(s, t)$  coordenadas cartesianas em  $\mathbb{R}^2$ . Para  $t_0$  fixo, a aplicação  $s \mapsto b(s, t_0)$  é uma curva em  $M$ , denotaremos por  $\frac{\partial b}{\partial s}$  seu campo de vetores tangente,  $s \mapsto db_{(s, t_0)} \left( \frac{\partial}{\partial s}(s, t_0) \right)$ . Isto define  $\frac{\partial b}{\partial s}$  para todo  $(s, t) \in A$  e  $\frac{\partial b}{\partial s}$  é um campo de vetores ao longo de  $b$ . Analogamente podemos definir  $\frac{\partial b}{\partial t}$ .

Se  $V$  é um campo de vetores ao longo de  $b$ , então definimos as *derivadas covariantes*  $\frac{DV}{ds}, \frac{DV}{dt}$  no ponto  $(s, t)$  como sendo as derivadas covariantes ao longo das curvas  $s \mapsto b(s, t)$  e  $t \mapsto b(s, t)$ , respectivamente.

A demonstração dos próximos três lemas pode ser encontrada, por exemplo, em [2], pág. 76, 109 e 77, respectivamente.

**Lema 1.2.2** (de Simetria). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana com sua conexão  $\nabla$  e seja  $b : A \rightarrow M$  uma superfície parametrizada. Então*

$$\frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s} = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial t}.$$

**Lema 1.2.3.** *Seja  $b : A \rightarrow M$  uma superfície parametrizada e seja  $V(s, t)$  um campo de vetores ao longo de  $b$ . Então*

$$\frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} V - \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} V = R \left( \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial s} \right) V.$$

**Lema 1.2.4** (de Gauss). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana completa. Dado  $p \in M$ , sejam  $v \in T_p M$  e  $w \in T_v(T_p M) \approx T_p M$ . Então*

$$\langle (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

Se  $V$  é uma vizinhança da origem em  $T_p M$  na qual  $\exp_p$  é difeomorfismo, dizemos que o conjunto  $U = \exp_p V$  é uma *vizinhança normal* de  $p$ . Se  $B(0, \epsilon)$  é tal que  $B[0, \epsilon] \subset V$ , chamamos  $B(p, \epsilon) := \exp_p B(0, \epsilon)$  a *bola geodésica* (ou *normal*) de centro em  $p$  e raio  $\epsilon$ ,  $B[p, \epsilon] := \exp_p B[0, \epsilon]$  o *disco geodésico* de centro em  $p$  e raio  $\epsilon$  e  $S(p, \epsilon) = \exp_p(\partial B[0, \epsilon])$  a *esfera geodésica*. As geodésicas que partem de  $p$  são chamadas *geodésicas radiais*. Pelo Lema de Gauss,  $S(p, \epsilon)$  é uma hipersuperfície em  $M$  ortogonal às geodésicas radiais.

Uma vizinhança  $W$  de  $p$  é dita uma *vizinhança totalmente normal* se  $W$  é uma vizinhança normal para cada um de seus pontos. Um fato interessante é que essa vizinhança sempre existe, isto é, cada ponto possui uma vizinhança totalmente normal. Para uma demonstração deste fato, ver, por exemplo, [2], pág. 80.

### 1.3 Campos de Jacobi

Nesta seção introduzimos os chamados campos de Jacobi, que são campos de vetores ao longo de geodésicas, definidos por meio de uma equação diferencial que aparece naturalmente no estudo da aplicação exponencial.

**Definição 1.3.1.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . Um campo de vetores  $J$  ao longo de  $\gamma$  é dito um campo de Jacobi se satisfaz a equação*

$$J''(t) = R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t), \quad \text{para todo } t \in I,$$

onde  $J''(t) = \frac{D}{dt} \frac{DJ}{dt}(t)$ .

Daqui por diante faremos uso da notação  $J''(t) = \frac{D}{dt} \frac{DJ}{dt}(t)$ .

**Exemplo 1.3.1** (Campos de Jacobi na Esfera  $\mathbb{S}^n$ ). Sabemos que a esfera unitária  $\mathbb{S}^n$  tem curvatura seccional constante e igual a 1. Consideremos  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^n$  uma geodésica normalizada e  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  e normal a  $\gamma'$ .

Dado qualquer campo de vetores  $T$  ao longo de  $\gamma$ , a Proposição 1.1.2, pág. 8, nos diz que

$$\langle R(\gamma', J)\gamma', T \rangle = \langle \gamma', T \rangle \langle J, \gamma' \rangle - \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle J, T \rangle = -\langle J, T \rangle.$$

Daí, pela equação que define campo de Jacobi, temos que

$$J''(t) = R(\gamma', J)\gamma' = -J.$$

Se  $w(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$  e  $|w(t)| = 1$ , então

$$J(t) = \sin tw(t) \tag{1.4}$$

é um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  com condições iniciais  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) = w(0)$ .

A demonstração da próxima proposição pode ser encontrada, por exemplo, em [2], pág. 126.

**Proposição 1.3.1.** *Seja  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica de  $M$ . Então um campo de Jacobi  $J$  ao longo de  $\gamma$  com  $J(0) = 0$  é dado por*

$$J(t) = (d \exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), t \in I.$$

Usando o Exemplo 1.3.1 e a proposição anterior, temos que um campo de Jacobi  $J$  ao longo de uma geodésica  $\gamma$  na esfera  $\mathbb{S}^n$  satisfaz

$$J(t) = (d \exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)) = \sin tw(t),$$

onde  $w(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$ ,  $|w(t)| = 1$  e  $w(0) = J'(0)$ .

## 1.4 Variações do Comprimento de Arco

Sejam  $M$  uma variedade Riemanniana e  $\gamma : [0, t_0] \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$ . Uma *variação* de  $\gamma$  é uma superfície parametrizada

$$\begin{aligned} b : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, t_0] &\rightarrow M \\ (s, t) &\mapsto b(s, t) \end{aligned}$$

tal que  $b(0, t) = \gamma(t)$ .

Suponhamos que as curvas  $\alpha_1, \alpha_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  dadas por  $\alpha_1(s) = b(s, 0)$  e  $\alpha_2(s) = b(s, t_0)$  são geodésicas em  $M$ . Denotemos por  $\gamma_s$  a curva  $t \mapsto b(s, t)$ .

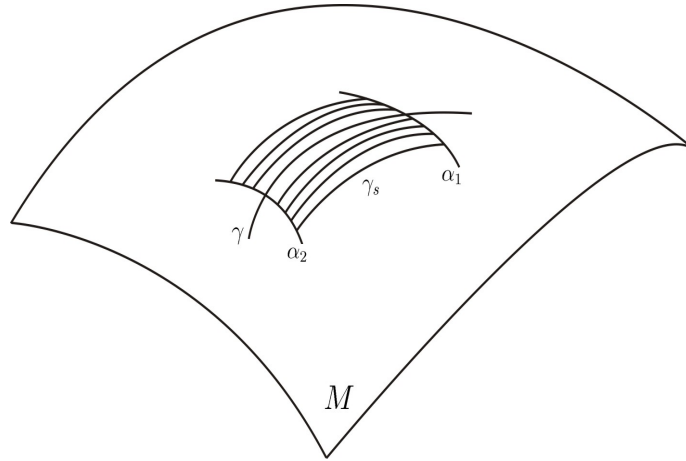


Figura 1.1: Variação da geodésica  $\gamma$ .

Consideremos a função

$$\begin{aligned} L : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\mapsto L(s), \end{aligned}$$

onde  $L(s)$  é o comprimento da curva  $\gamma_s$ .

**Proposição 1.4.1.** *Com a notação acima, temos*

$$L'(0) = \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle$$

e

$$L''(0) = \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s} \right|^2 - \left\langle R \left( \gamma', \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle - \left\langle \gamma', \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s} \right\rangle^2 \right) dt.$$

*Demonstração.* Como  $L(s) = \int_0^{t_0} \left| \frac{\partial b}{\partial t} \right| dt$ , temos

$$\begin{aligned} L'(s) &= \int_0^{t_0} \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|} dt \\ &= \int_0^{t_0} \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|} dt, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o Lema de Simetria.

Fazendo  $s = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_0^{t_0} \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle}{|\gamma'|} dt \\ &= \int_0^{t_0} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle dt \\ &= \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle - \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}, \nabla_{\gamma'} \gamma' \right\rangle dt \\ &= \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos o fato de  $\gamma$  estar normalizada e na última o fato de  $\gamma$  ser uma geodésica.

Vamos encontrar agora a expressão para  $L''(0)$ .

Como  $L'(s) = \int_0^{t_0} \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|} dt$ , então

$$L''(s) = \int_0^{t_0} \left( \frac{\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle}{\left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|^2} - \frac{\left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle^2}{\left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|^3} \right) dt.$$

Usando o Lema 1.2.3, pág. 11, temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s} + R \left( \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle R \left( \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle. \end{aligned}$$

Como  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial t}(0, t) = \nabla_{\gamma'} \gamma'(t) = 0$ , então em  $s = 0$  temos

$$\left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle - \left\langle R \left( \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle.$$

Além disso,  $|\frac{\partial b}{\partial t}(0, t)| = |\gamma'(t)| = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^{t_0} \left( \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle - \left\langle R \left( \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle \right) dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s} \right|^2 - \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle^2 \right) dt \\ &= \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s} \right|^2 - \left\langle R \left( \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle^2 \right) dt \\ &\quad + \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle \\ &= \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s} \right|^2 - \left\langle R \left( \frac{\partial b}{\partial t}, \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \frac{\partial b}{\partial t} \right\rangle - \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle^2 \right) dt, \end{aligned}$$

pois como as curvas  $\alpha_1(s) = b(s, 0), \alpha_2(s) = b(s, t_0)$  são geodésicas, temos  $\frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}(0, t_0) = \nabla_{\alpha_2'} \alpha_2'(0) = 0$  e  $\frac{D}{\partial s} \frac{\partial b}{\partial s}(0, 0) = \nabla_{\alpha_1'} \alpha_1'(0) = 0$ .  $\square$

## 1.5 Segunda Forma Fundamental

Sejam  $M^n, \bar{M}^{n+m=k}$  variedades Riemannianas com suas respectivas conexões Riemannianas  $\nabla, \bar{\nabla}$ ; e seja  $f : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão. Então, para cada  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f(U) \subset \bar{M}$  é uma subvariedade, pois toda imersão é localmente um mergulho. Para simplificar a notação, identificaremos  $U$  com  $f(U)$  e cada vetor  $v \in T_q M, q \in U$ , com  $df_q \cdot v \in T_{f(q)} \bar{M}$ .

Usando tais identificações, para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p M$  decompõe  $T_p \bar{M}$  na soma direta

$$T_p \bar{M} = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p \bar{M}$ . Assim, se  $v \in T_p \bar{M}$ , podemos escrever

$$v = v^T + v^N,$$



onde  $v^T \in T_p M$  é a *componente tangencial* de  $v$  e  $v^N \in (T_p M)^\perp$  é a *componente normal* de  $v$ .

Se  $X$  e  $Y$  são campos locais (isto é, definidos em  $U$ ) de vetores em  $M$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  suas extensões locais a  $\bar{M}$ , então

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T. \quad (1.5)$$

Denotaremos por  $\mathcal{X}(U)^\perp$  o conjunto dos campos diferenciáveis em  $U$  de vetores normais a  $U$ .

**Proposição 1.5.1.** *Se  $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ , a aplicação  $B : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \rightarrow \mathcal{X}(U)^\perp$  definida por*

$$B(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

Como  $B$  é bilinear, o valor de  $B(X, Y)(p)$  depende apenas dos valores  $X(p)$  e  $Y(p)$ . Assim, podemos considerar  $B(x, y) = B(X, Y)(p)$ , onde  $x = X(p) \in T_p M$  e  $y = Y(p) \in T_p M$ .

Sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Pela proposição anterior, a aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle, x, y \in T_p M,$$

é uma forma bilinear simétrica.

**Definição 1.5.1.** *A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $T_p M$  por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

*é chamada a segunda forma fundamental da imersão  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .*

Como  $H_\eta$  é uma forma bilinear simétrica definida em  $T_p M$ , a ela está associada uma única aplicação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle.$$

**Proposição 1.5.2.** *Sejam  $p \in M, x \in T_p M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ . Então,*

$$S_\eta = -(\bar{\nabla}_x N)^T.$$

**Definição 1.5.2.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \bar{M}$  é geodésica em  $p \in M$  se, para todo  $\eta \in (T_p M)^\perp$ , a segunda forma fundamental  $II_\eta$  é identicamente nula em  $p$ . A imersão  $f$  é dita totalmente geodésica se é geodésica em todo  $p \in M$ .*

**Proposição 1.5.3.** *Uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  é geodésica em  $p \in M$  se, e somente se, toda geodésica  $\gamma$  de  $M$  partindo de  $p$  é geodésica de  $\overline{M}$  em  $p$ .*

Seja  $f : M \rightarrow \overline{M}$  uma imersão. Relacionaremos agora a curvatura de  $M$  com a curvatura de  $\overline{M}$  e a segunda forma fundamental. Dados  $x, y \in T_p M \subset T_p \overline{M}$ , indicaremos por  $K(x, y)$ , e  $\overline{K}(x, y)$  as curvaturas seccionais de  $M$  e  $\overline{M}$ , respectivamente, no plano gerado por  $x$  e  $y$ .

**Teorema 1.5.1** (Gauss). *Sejam  $p \in M$  e  $x, y \in T_p M$  vetores ortonormais. Então*

$$K(x, y) - \overline{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2. \quad (1.6)$$

Quando consideramos o caso particular em que a codimensão da imersão é 1, isto é,  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ ,  $f(M) \subset \overline{M}$  é então denominada uma hipersuperfície e a dimensão de  $(T_p M)^\perp$  é igual a 1 para todo  $p \in M$ . Se  $M$  e  $\overline{M}$  são orientáveis e estão orientadas (isto é, escolhemos orientações para  $M$  e  $\overline{M}$ ), o vetor unitário  $\eta$  normal a  $M$  fica univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  seja uma base na orientação de  $\overline{M}$ . Assim, neste caso, escrevemos somente  $II, H, S$  para indicar  $II_\eta, H_\eta, S_\eta$  e definimos a *curvatura média* da imersão como sendo a aplicação

$$\begin{aligned} \mathcal{H} : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \text{traço } II. \end{aligned}$$

No caso de hipersuperfície  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , a fórmula de Gauss (1.6) admite uma expressão mais simples, que mostraremos abaixo.

Dado  $p \in M$ , seja  $\eta \in (T_p M)^\perp$  normal unitário. Seja  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_p M$  para a qual  $S = S_\eta$  é diagonal, ou seja,  $S(e_i) = \lambda_i e_i$ , onde  $\lambda_i$  é autovalor próprio de  $S$  para  $i = 1, \dots, n$ . Logo  $B(e_i, e_i) = \lambda_i \eta$  e  $B(e_i, e_j) = 0$ , se  $i \neq j$ . Podemos, então, escrever a equação (1.6) como

$$K(e_i, e_j) - \overline{K}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j. \quad (1.7)$$

**Observação 1.5.1.** No caso em que  $M = M^2$  é uma superfície e  $\overline{M} = \mathbb{R}^3$ , o produto  $\lambda_1 \lambda_2$  é conhecido como a *curvatura Gaussiana* da superfície. Neste caso, a equação (1.7) mostra que a curvatura Gaussiana coincide com a curvatura seccional em uma superfície, pois a curvatura de  $\mathbb{R}^3$  é identicamente nula, como vimos na Observação 1.1.1, pág. 7.

## 1.6 Variedades com Bordo

Definiremos agora o objeto de estudo desta dissertação, a saber, as variedades com bordo.

Seja  $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 < 0\}$  e considere, com a topologia induzida de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{A} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$ . Identificaremos o hiperplano do  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_1 = 0$ , com  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Sejam  $U$  e  $V$  conjuntos abertos de  $\bar{A}$  e  $\varphi : U \rightarrow V$  um homeomorfismo, então a restrição de  $\varphi$  a  $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$  é um homeomorfismo de  $U \cap \mathbb{R}^{n-1}$  sobre  $V \cap \mathbb{R}^{n-1}$ .

Por definição, uma função sobre  $\bar{A}$  é diferenciável quando é a restrição a  $\bar{A}$  de uma função diferenciável sobre  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.6.1.** *Uma variedade diferenciável com bordo de dimensão  $n$  é um conjunto  $M$  e uma família de aplicações injetivas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \bar{A} \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\bar{A}$  em  $M$  tais que*

1.  $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
2. Para todo par  $\alpha, \beta$ , com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\bar{A}$  e a aplicação  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  é diferenciável;
3. A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é máxima relativamente às condições 1 e 2.

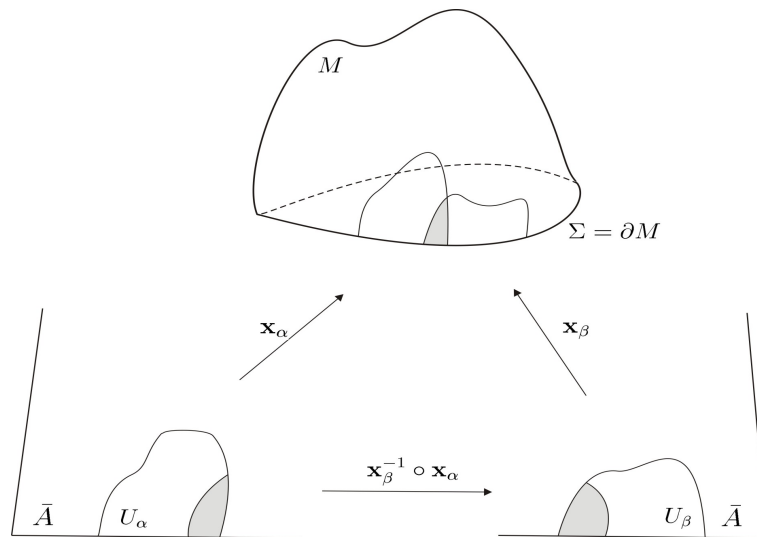


Figura 1.2: Representação geométrica da Definição 1.6.1.

Observemos que os abertos de  $\bar{A}$  que não contém pontos do hiperplano  $\mathbb{R}^{n-1}$  também são abertos em  $\mathbb{R}^n$ .

Os pontos de  $M^n$  que tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto de  $\mathbb{R}^n$  são chamados pontos interiores, os demais pontos, ou seja, aqueles em que toda vizinhança possui pontos do hiperplano  $\mathbb{R}^{n-1}$ , são chamados pontos do bordo. Denotaremos o conjunto dos pontos do bordo por  $\partial M$  e o conjunto dos pontos interiores por  $\text{int } M$ .

Quando não houver possibilidade de confusão, as variedades sem bordo serão chamadas simplesmente variedades. Vale ressaltar que os resultados expostos nas seções anteriores valem para variedades com bordo com as devidas adaptações.

**Teorema 1.6.1.** *Seja  $M^n$  uma variedade com bordo, então  $\partial M$  é uma variedade sem bordo de dimensão  $n - 1$ .*

*Demonstração.* Seja  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  uma estrutura diferenciável em  $M$ .

Para cada  $\alpha$ , consideremos a restrição  $\mathbf{y}_\alpha$  de  $\mathbf{x}_\alpha$  a  $V_\alpha = U_\alpha \cap \mathbf{x}_\alpha^{-1}(\partial M)$  e seja  $\Lambda = \{\alpha; V_\alpha \neq \emptyset\}$ . Afirmamos que

$$\mathcal{A} = \{(V_\alpha, \mathbf{y}_\alpha); \alpha \in \Lambda\}$$

é uma estrutura diferenciável em  $\partial M$ . Com efeito,

(1)  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathbf{y}_\alpha(U_\alpha) = \partial M$ ; pois, dado qualquer  $q \in \partial M$ , como  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é uma estrutura diferenciável em  $M$ , existe  $\alpha$  tal que  $q \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha)$ , logo  $q \in \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \partial M$  e, portanto,  $V_\alpha \neq \emptyset$  e  $q \in \mathbf{y}_\alpha(V_\alpha)$ .

(2) Se  $\alpha, \beta \in \Lambda$  são tais que

$$\mathbf{y}_\alpha(V_\alpha) \cap \mathbf{y}_\beta(V_\beta) = W_1 \neq \emptyset,$$

então  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W_2 \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W_2)$ ,  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W_2)$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$  e a aplicação  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  é diferenciável em  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W_2)$ . Logo os conjuntos  $\mathbf{y}_\alpha^{-1}(W_1) = \mathbf{x}_\alpha^{-1}(W_2 \cap \partial M)$ ,  $\mathbf{y}_\beta^{-1}(W_1) = \mathbf{x}_\beta^{-1}(W_2 \cap \partial M)$  são abertos de  $\mathbb{R}^{n-1}$  e a aplicação  $\mathbf{y}_\beta^{-1} \circ \mathbf{y}_\alpha$ , a qual é a restrição de  $\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha$  a  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W_2 \cap \partial M)$ , é diferenciável.

Portanto,  $\partial M$  é uma variedade diferenciável sem bordo de dimensão  $n - 1$ . □

Dizemos que  $M^n$  é uma *variedade Riemanniana compacta com bordo* se  $M^n$  é uma variedade com bordo e  $M^n$  é um subconjunto compacto de alguma variedade Riemanniana (sem bordo).

## 1.7 Alguns Resultados sobre Equações Diferenciais Parciais

Nesta seção definimos operador elíptico e apresentamos alguns resultados envolvendo este tipo de operador os quais são fundamentais para a compreensão e demonstração do Teorema de Hang-Wang.

Sempre que estivermos trabalhando com uma variedade com bordo  $M$ , escreveremos  $u \in C^\infty(M)$  para denotar  $u \in C^\infty(\text{int } M) \cap C^0(\partial M)$ .

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Um operador

$$L : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M) \\ u \mapsto Lu$$

é dito um *operador diferencial linear de segunda ordem* se, quando escrito em um sistema de coordenadas locais  $(U, \mathbf{x})$ , é expresso da forma

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu$$

onde  $a_{ij}, b_i, c : U \rightarrow \mathbb{R}$  são funções diferenciáveis.

O operador diferencial linear  $L$  é *elíptico em um ponto*  $x \in U$ , se a matriz coeficiente  $(a_{ij}(x))$  é positiva, isto é, se  $\lambda(x), \Lambda(x)$  denotam, respectivamente, o menor e o maior autovalor de  $(a_{ij}(x))$ , então

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

para todo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Se  $\lambda(x) > 0$  para qualquer  $x \in U$ , então  $L$  é dito *elíptico* em  $U$ , e *estritamente elíptico* se, para todo  $x \in U$ ,  $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 0$  para alguma constante  $\lambda_0$ . Se  $\frac{\Lambda}{\lambda}$  é limitado em  $U$ , dizemos que  $L$  é *uniformemente elíptico* em  $U$ .

**Exemplo 1.7.1.** O operador Laplaciano  $\Delta : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  é expresso em coordenadas locais  $(U, \mathbf{x})$  como

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \sqrt{G} g_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{G} g_{ij} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial x_i}, \end{aligned}$$

onde  $G = \det(g_{ij})$ .

Observemos que  $\Delta$  é um operador diferencial linear de segunda ordem. Neste caso, a matriz coeficiente é a matriz  $(g_{ij})$  da métrica,

$$b_i = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sqrt{G} g_{ij} \right)$$

e  $c \equiv 0$ . Portanto, o Laplaciano é um operador uniformemente elíptico.

**Definição 1.7.1.** Dizemos que uma função  $u \in C^\infty(M)$  é subharmônica, quando  $\Delta u \geq 0$ . Analogamente,  $u \in C^\infty(M)$  é dita superharmônica, se vale  $\Delta u \leq 0$ .

Como nesta dissertação o único operador elíptico que utilizaremos é o Laplaciano, então enunciaremos os três próximos resultados somente para este operador. As demonstrações podem ser encontradas, por exemplo, em [8], pág. 32 -35.

O seguinte teorema é conhecido como o Princípio do Máximo Fraco.

**Teorema 1.7.1.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Suponhamos que*

$$\Delta u \geq 0 \quad (\leq 0),$$

com  $u \in C^\infty(M)$ . Então o máximo (mínimo) de  $u$  em  $M$  é atingido sobre  $\partial M$ , isto é,

$$\max_M u = \max_{\partial M} u \quad (\min_M u = \min_{\partial M} u).$$

**Lema 1.7.1** (Lema de Hopf). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Suponhamos que*

$$\Delta u \geq 0,$$

com  $u \in C^\infty(M)$ . Se existe  $p_0 \in \partial M$  tal que  $u(p_0) > u(p)$  para todo  $p \in \text{int}M$ , então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(p_0) > 0,$$

onde  $\eta$  é o vetor unitário normal ao bordo apontando para fora.

**Teorema 1.7.2.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo e seja  $u \in C^\infty(M)$  tal que  $\Delta u \geq 0$  ( $\leq 0$ ). Se  $u$  atinge seu máximo (mínimo) no interior de  $M$ , então  $u$  é constante.*

O Teorema 1.7.2 é conhecido como o Princípio do Máximo Forte ou simplesmente o Princípio do Máximo.

**Observação 1.7.1.** Utilizando a contrapositiva do Lema de Hopf, se  $\Delta u \geq 0$  e existe  $p_0 \in \partial M$  ponto de máximo tal que  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(p_0) = 0$ , então o valor máximo é atingido no interior, ou seja, existe  $p_1 \in \text{int}M$  tal que  $u(p_0) = u(p_1)$ . Daí, usando o Princípio do Máximo Forte segue que  $u$  é constante.

**Definição 1.7.2.** Se  $M$  é uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$ , dizemos que um número real  $\lambda$  é um autovalor do Laplaciano  $-\Delta$ , quando o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{sobre } M - \Sigma \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma \end{cases}$$

tem uma solução não trivial em  $C^\infty(M)$ .

**Teorema 1.7.3** (Alternativa de Fredholm). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$ . Para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , exatamente uma das seguintes afirmações mantém-se:*

ou

(i) Para cada  $g \in C^\infty(M)$  existe uma única solução  $u \in C^\infty(M)$  tal que

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = g & \text{sobre } M - \Sigma \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \end{cases}$$

ou

(ii) Existe pelo menos uma solução  $u \neq 0$  do problema homogêneo

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{sobre } M - \Sigma \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Notemos que no caso em que a afirmação (ii) mantém-se,  $\lambda$  é dito autovalor do Laplaciano.

**Observação 1.7.2.** Dado  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , podemos encontrar  $\bar{f} \in C^\infty(M)$  tal que  $\bar{f}|_\Sigma = f$ . Se  $\lambda \in \mathbb{R}$  não é autovalor do Laplaciano  $\Delta$ , usando a Alternativa de Fredholm, existem únicas funções  $v_1, v_2 \in C^\infty(M)$  tais que

$$\begin{cases} \Delta v_1 + \lambda v_1 = \bar{f} \\ v_1 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \Delta v_2 + \lambda v_2 = -\Delta \bar{f} - (\lambda - 1)\bar{f} \\ v_2 = 0. \end{cases}$$

Assim, considerando  $u = \bar{f} - v_1 + v_2$ , temos que sobre  $M - \Sigma$

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \Delta \bar{f} - \Delta v_1 + \Delta v_2 \\
&= \Delta \bar{f} - (\bar{f} - \lambda v_1) - \Delta \bar{f} - (\lambda - 1)\bar{f} - \lambda v_2 \\
&= \lambda v_1 - \lambda v_2 - \lambda \bar{f} \\
&= -\lambda(\bar{f} - v_1 + v_2) \\
&= -\lambda u
\end{aligned}$$

e sobre  $\Sigma$ ,

$$u = \bar{f}|_{\Sigma} - v_1|_{\Sigma} + v_2|_{\Sigma} = f.$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{sobre } M - \Sigma \\ u = f & \text{sobre } \Sigma. \end{cases} \quad (1.8)$$

Notemos que  $u$  é única satisfazendo estas condições, pois se existisse uma outra  $\bar{u} \in C^\infty(M)$  satisfazendo (1.8), então  $v = u - \bar{u}$  satisfaria

$$\Delta v = \Delta u - \Delta \bar{u} = -\lambda(u - \bar{u}) = -\lambda v$$

e

$$v|_{\Sigma} = u|_{\Sigma} - \bar{u}|_{\Sigma} = f - f = 0,$$

o que implicaria que  $\lambda$  é autovalor de  $\Delta$ , contradizendo nossa hipótese de  $\lambda$  não ser autovalor.

Resumindo o que foi feito acima, usando a Alternativa de Fredholm, se  $\lambda$  não é autovalor de  $\Delta$ , então dado  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , existe uma única  $u \in C^\infty(M)$  tal que

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & \text{sobre } M - \Sigma \\ u = f & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

□

**Teorema 1.7.4.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Então o conjunto dos autovalores do operador Laplaciano  $-\Delta$  consiste de uma sequência infinita*

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty.$$



A demonstraçãõ do seguinte resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [7], pág. 103.

**Teorema 1.7.5.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$ . Os autovalores do Laplaciano  $-\Delta$  são estritamente positivos. As autofunções, correspondentes ao primeiro autovalor  $\lambda_1$ , são ou estritamente positivas ou estritamente negativas sobre  $M - \Sigma$ .*

A demonstraçãõ da proposiçãõ seguinte pode ser encontrada em [6], pág. 187.

**Proposiçãõ 1.7.1** (Método das Sub e Super Soluções). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo. Considere a equaçãõ elíptica*

$$\Delta v + f(x, v) = 0, \quad (1.9)$$

onde  $f \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ . *Suponhamos que existem  $\phi, \psi \in C^\infty(M)$  tais que  $\phi \leq \psi$  e*

$$\begin{cases} \Delta \phi + f(x, \phi) \geq 0, \\ \Delta \psi + f(x, \psi) \leq 0. \end{cases}$$

*Entãõ existe  $v \in C^\infty(M)$  satisfazendo (1.9) tal que  $\phi \leq v \leq \psi$ .*

As funções  $\phi$  e  $\psi$  são chamadas, respectivamente, uma sub-soluçãõ e uma sup-soluçãõ para (1.9).

A Proposiçãõ 1.7.1 será essencial para a demonstraçãõ do Teorema de Hang-Wang no caso bidimensional.

# Capítulo 2

## Resultados Auxiliares

### 2.1 A Fórmula de Bochner

Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana. Definimos a *divergência* de um campo de vetores  $X \in \mathcal{X}(M)$  por

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \operatorname{traço} (Y(p) \mapsto \nabla_{Y(p)} X) \end{aligned}$$

e o *gradiente* de uma função diferenciável  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , como o único campo de vetores  $\nabla f$  em  $M$  tal que

$$g(\nabla f(p), v) = df_p \cdot v, \quad p \in M, v \in T_p M.$$

Além dessas aplicações, definimos o *Hessiano* de  $f$  por

$$\begin{aligned} \operatorname{Hess} f : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ (X, Y) &\mapsto g(\nabla_X \nabla f, Y), \end{aligned}$$

e o *Laplaciano* de  $M$  como o operador

$$\begin{aligned} \Delta : C^\infty(M) &\rightarrow C^\infty(M) \\ f &\mapsto \operatorname{div} \nabla f. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f = \operatorname{traço} (Y \mapsto \nabla_Y \nabla f) = \operatorname{traço} \operatorname{Hess} f.$$

**Observação 2.1.1.** Como  $\Delta f = \operatorname{traço} \operatorname{Hess} f$ , a desigualdade de Cauchy-Schwarz implica

$$|\operatorname{Hess} f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{n}.$$

A igualdade vale se, e somente se, para alguma função  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se  $\text{Hess } f = \lambda g$ , onde  $g$  é a métrica Riemanniana de  $M$ . Considerando um referencial ortonormal  $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  de  $\mathcal{X}(M)$  tem-se

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \text{Hess } f(E_i, E_i) = n\lambda.$$

Portanto, se  $|\text{Hess } f|^2 = \frac{(\Delta f)^2}{n}$ , então  $\text{Hess } f = \frac{\Delta f}{n}g$ .

Uma fórmula que envolve estes conceitos e que será muito útil para a demonstração do Teorema de Hang-Wang é a *fórmula de Bochner*. Antes de enunciá-la, encontraremos a expressão das aplicações definidas acima em termos de um referencial geodésico ortonormal.

Seja, então,  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial geodésico ortonormal em uma vizinhança  $U \subset M$  e seja  $f \in C^\infty(M)$ . Passaremos a escrever  $f_i$  para denotar  $E_i(f)$ .

Como  $\langle \nabla f, E_i \rangle = df(E_i) = E_i(f) = f_i$ , então

$$\nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i. \quad (2.1)$$

Daí,

$$\begin{aligned} \text{div } \nabla f &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \nabla_{E_i} \left( \sum_{j=1}^n f_j E_j \right), E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \sum_{j=1}^n f_{ji} E_j + \sum_{j=1}^n f_j \nabla_{E_i} E_j, E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{ji} \langle E_j, E_i \rangle + \sum_{i,j=1}^n f_j \langle \nabla_{E_i} E_j, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n f_{ii}. \end{aligned}$$

Logo a expressão do Laplaciano de  $f$  em termos de um referencial geodésico ortonormal é dado por

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{ii}. \quad (2.2)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta f^2 &= \sum_{i=1}^n (f^2)_{ii} \\
&= \sum_i (2ff_i)_i \\
&= 2 \sum_i (f_i f_i + f f_{ii}) \\
&= 2 \sum_i f_i^2 + 2f \sum_i f_{ii} \\
&= 2|\nabla f|^2 + 2f\Delta f.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\text{Hess } f(E_j, E_i) &= \langle \nabla_{E_j} \nabla f, E_i \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{E_j} \left( \sum_{k=1}^n f_k E_k \right), E_i \right\rangle \\
&= \left\langle \sum_{k=1}^n f_{kj} E_k + \sum_{k=1}^n f_k \nabla_{E_j} E_k, E_i \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n f_{kj} \langle E_k, E_i \rangle + \sum_{k=1}^n f_k \langle \nabla_{E_j} E_k, E_i \rangle \\
&= f_{ij},
\end{aligned}$$

temos que

$$|\text{Hess } f|^2 = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2. \quad (2.3)$$

**Observação 2.1.2** (Simetria do Hessiano). *Dados  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ , temos*

$$\begin{aligned}
\text{Hess } f(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \\
&= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, \nabla_X Y \rangle \\
&= X(Y(f)) - \nabla_X Y(f) \\
&= X(Y(f)) - ([X, Y] + \nabla_Y X)(f) \\
&= X(Y(f)) - (XY - YX + \nabla_Y X)(f) \\
&= X(Y(f)) - X(Y(f)) + Y(X(f)) - \nabla_Y X(f) \\
&= Y \langle \nabla f, X \rangle - \langle \nabla f, \nabla_Y X \rangle \\
&= \langle \nabla_Y \nabla f, X \rangle \\
&= \text{Hess } f(Y, X),
\end{aligned}$$

onde na segunda e na oitava igualdade usamos a compatibilidade com a métrica e na quarta usamos a simetria da conexão.

Em particular, temos  $f_{ij} = \text{Hess } f(E_i, E_j) = \text{Hess } f(E_j, E_i) = f_{ji}$ .

**Proposição 2.1.1** (Fórmula de Bochner). *Se  $M$  é uma variedade Riemanniana e  $f \in C^\infty(M)$ , então*

$$\frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f). \quad (2.4)$$

*Demonstração.* Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial geodésico ortonormal em uma vizinhança  $U \subset M$ .

$$\text{Como } \nabla f = \sum_{i=1}^n f_i E_i, \text{ então } |\nabla f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2.$$

Usando a equação (2.2), pág. 26, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (|\nabla f|^2)_{jj} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n f_i^2 \right)_{jj} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \left( 2\sum_{i=1}^n f_i f_{ij} \right)_j = \sum_{i,j=1}^n (f_{ij} f_{ij} + f_i f_{ijj}) \\
&= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{ijj} = \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{jji},
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos o fato que  $f_{ij} = f_{ji}$ . Usando a Fórmula de Ricci, ver por exemplo [4], pág. 15, a qual nos diz que

$$f_{jji} = f_{jji} + \sum_{l=1}^n f_l R_{ljj},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(|\nabla f|^2) &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i (f_{jji} + \sum_{l=1}^n f_l R_{ljj}) \\
&= \sum_{i,j} f_{ij}^2 + \sum_{i,j} f_i f_{jji} + \sum_{i,j,l} f_i f_l R_{ljj} \\
&= \sum_{i,j} f_{ij}^2 + \sum_{i,j} f_i f_{jji} + \sum_{i,l} f_i f_l R_{li} \\
&= \sum_{i,j} f_{ij}^2 + \left\langle \sum_i f_i E_i, \sum_j (f_{jj})_i E_i \right\rangle + \text{Ric} \left( \sum_i f_i E_i, \sum_l f_l E_l \right) \\
&= |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos as equações (2.1), (2.2) e (2.3).  $\square$

A fim de facilitar alguns cálculos na demonstração do caso geral do Teorema de Hang-Wang, encontraremos a expressão do gradiente e do laplaciano das funções coordenadas da esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Sejam  $x_1, \dots, x_n$  as funções coordenadas da esfera  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  e consideremos um ponto  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Denotemos por  $\nabla_{\mathbb{R}^n}$  e  $\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}}$  os gradientes de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{S}^{n-1}$ , respectivamente.

Sabemos que

$$\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i(p) = \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i(p) + \eta(x_i)(p)\eta(p),$$

onde  $\eta$  é o campo de vetores em  $\mathbb{R}^n$  normal a  $\mathbb{S}^{n-1}$ , ou seja,  $\eta(q) = q$ ,  $\forall q \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Além disso,

$$\nabla_{\mathbb{R}^n} x_i(p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial x_j} e_j = e_i,$$

onde  $e_i$  é o  $i$ -ésimo vetor da base canônica de  $\mathbb{R}^n$ .

Seja  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva satisfazendo  $\beta(0) = p = (p_1, \dots, p_n)$  e  $\beta'(0) = \eta(p) = p$ . Assim,

$$\eta(x_i)(p) = \left. \frac{d}{dt} (x_i \circ \beta(t)) \right|_{t=0} = p_i.$$

Logo

$$\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i(p) = e_i - p_i p,$$

isto é,

$$\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i = e_i - x_i \eta.$$

Daí,

$$|\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i(p)|^2 = \langle e_i - p_i p, e_i - p_i p \rangle = 1 - p_i^2 - p_i^2 + p_i^2 = 1 - p_i^2,$$

e, portanto,

$$|\nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i|^2 + x_i^2 = 1. \quad (2.5)$$

Para  $i \neq j$ , temos

$$\langle \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i(p), \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_j(p) \rangle = \langle e_i - p_i p, e_j - p_j p \rangle = 0 - p_i p_j - p_i p_j + p_i p_j = -p_i p_j.$$

Denotemos a conexão Riemanniana de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{S}^{n-1}$  por  $\nabla^{\mathbb{R}^n}$  e  $\nabla^{\mathbb{S}^{n-1}}$ , respectivamente. Escrevendo  $g_0$  para denotar a métrica canônica da esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , temos

$$\begin{aligned}
\text{Hess}_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i(e_k, e_j) &= g_0 \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{S}^{n-1}} \nabla_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i, e_j \right) \\
&= g_0 \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{S}^{n-1}} (e_i - x_i \eta), e_j \right) \\
&= g_0 \left( \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} (e_i - x_i \eta) \right)^T, e_j \right) \\
&= g_0 \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} (e_i - x_i \eta), e_j \right) \\
&= g_0 \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} e_i - \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} x_i \eta, e_j \right) \\
&= -g_0 \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} x_i \eta, e_j \right) \\
&= -g_0 \left( e_k(x_i) \eta + x_i \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} \eta, e_j \right) \\
&= -x_i g_0 \left( \nabla_{e_k}^{\mathbb{R}^n} \eta, e_j \right) \\
&= -x_i g_0(e_k, e_j),
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos (1.5), na sexta usamos o fato de  $e_i$  ser campo constante e na última o fato de  $\eta$  ser o vetor identidade. Logo,

$$\text{Hess}_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i = -x_i g_0. \quad (2.6)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta^{\mathbb{S}^{n-1}} x_i &= \sum_{j=1}^{n-1} \text{Hess}_{\mathbb{S}^{n-1}} x_i(e_j, e_j) \\
&= -x_i \sum_{j=1}^{n-1} g_0(e_j, e_j) \\
&= -(n-1)x_i.
\end{aligned}$$

Consideremos uma função  $f : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(p) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(p)$ , com  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Para simplificar a notação, omitiremos o índice  $\mathbb{S}^{n-1}$  na notação do gradiente e do Laplaciano da esfera.



Usando definição de  $f$ , temos  $\nabla f = \sum_i \alpha_i \nabla x_i$ . Assim,

$$\begin{aligned}
|\nabla f(p)|^2 &= \left\langle \sum_i \alpha_i \nabla x_i(p), \sum_j \alpha_j \nabla x_j(p) \right\rangle \\
&= \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j \langle \nabla x_i(p), \nabla x_j(p) \rangle \\
&= \sum_i \left( \alpha_i^2 |\nabla x_i(p)|^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j \langle \nabla x_i(p), \nabla x_j(p) \rangle \right) \\
&= \sum_i \left( \alpha_i^2 (1 - p_i^2) - \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j p_i p_j \right) \\
&= \sum_i \left( \alpha_i^2 - \alpha_i^2 p_i^2 - \sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j p_i p_j \right) \\
&= \sum_i \alpha_i^2 - \sum_i (\alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{i \neq j} \alpha_i p_i \alpha_j p_j) \\
&= 1 - f^2(p).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|\nabla f|^2 + f^2 = 1. \quad (2.7)$$

Além disso,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta x_i = -(n-1) \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = -(n-1)f. \quad (2.8)$$

## 2.2 Algumas Propriedades do Disco Geodésico na Esfera

Mostraremos aqui algumas propriedades de um disco geodésico de raio  $\cotg^{-1}(c)$  na esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , as quais serão utilizadas para demonstrar a versão bidimensional do Teorema de Hang-Wang.

Seja  $D$  um disco geodésico de raio  $\cotg^{-1}(c)$  na esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ .

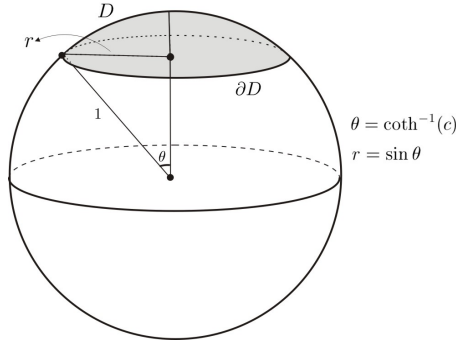


Figura 2.1: Disco geodésico de raio  $\text{cotg}^{-1}(c)$ .

Usando o fato de que  $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$ , obtemos  $r = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}}$ . Ou seja,

$$l(\partial D) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}. \quad (2.9)$$

Seja  $\alpha : I \rightarrow D$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja  $N$  a normal à superfície apontando para fora, que neste caso é o vetor posição. Então sabemos que a curvatura geodésica da curva  $\alpha$  é dada por

$$k = \langle \alpha'', N \wedge \alpha' \rangle.$$

No caso em que a curva  $\alpha$  tem como traço  $\partial D$  temos que

$$\alpha(t) = \left( \text{sen } \theta \cos \frac{t}{\text{sen } \theta}, \text{sen } \theta \text{sen} \frac{t}{\text{sen } \theta}, \cos \theta \right) = N(t)$$

onde  $\theta = \text{cotg}^{-1}(c)$ . Daí,

$$\alpha'(t) = \left( -\text{sen} \frac{t}{\text{sen } \theta}, \cos \frac{t}{\text{sen } \theta}, 0 \right),$$

$$\alpha''(t) = \left( -\frac{1}{\text{sen } \theta} \cos \frac{t}{\text{sen } \theta}, -\frac{1}{\text{sen } \theta} \text{sen} \frac{t}{\text{sen } \theta}, 0 \right)$$

e

$$\begin{aligned} N \wedge \alpha' &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \text{sen } \theta \cos \frac{t}{\text{sen } \theta} & \text{sen } \theta \text{sen} \frac{t}{\text{sen } \theta} & \cos \theta \\ -\text{sen} \frac{t}{\text{sen } \theta} & \cos \frac{t}{\text{sen } \theta} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( -\cos \theta \cos \frac{t}{\text{sen } \theta}, -\cos \theta \text{sen} \frac{t}{\text{sen } \theta}, \text{sen } \theta \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
k &= \langle \alpha'', N \wedge \alpha' \rangle \\
&= \cotg \theta \cos^2 \frac{t}{\text{sen } \theta} + \cotg \theta \text{sen}^2 \frac{t}{\text{sen } \theta} \\
&= \cotg \theta \\
&= c,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

isto é, o bordo de um disco geodésico de raio  $\cotg^{-1}(c)$  tem curvatura geodésica constante e igual a  $c$ .

## 2.3 Relações entre Métricas Conformes

Duas métricas  $g$  e  $\bar{g}$  definidas em uma superfície  $M$  são ditas *conformes*, se existe uma função  $u \in C^\infty(M)$  tal que  $g = e^{2u}\bar{g}$ .

O objetivo desta seção é mostrar a relação existente entre as curvaturas geodésicas de uma curva em  $M$ , e entre as curvaturas Gaussianas, com respeito a duas métricas conformes.

Sejam então  $g$  e  $\bar{g}$  duas métricas conformes em uma superfície  $M$ . Suponhamos que  $g_{11} = g_{22}$  e  $g_{12} = 0$ , conseqüentemente obtemos  $\bar{g}_{11} = \bar{g}_{22}$  e  $\bar{g}_{12} = 0$ .

Seja  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  uma parametrização de  $M$ . Dada uma curva  $C$  sobre  $M$ , parametrizemos essa curva por

$$\begin{aligned}
\alpha : I &\rightarrow M \\
t &\mapsto \alpha(t) = \mathbf{x}(a(t), b(t)),
\end{aligned}$$

com  $\alpha'(t) = a'(t)X_1 + b'(t)X_2$  tal que  $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = (a'(t)^2 + b'(t)^2)g_{11} = 1$ , ou seja, parametrizamos  $C$  por uma curva  $\alpha$  parametrizada pelo comprimento de arco com respeito à métrica  $g$ .

Sabemos que a curvatura geodésica de  $C$  com respeito à métrica  $g$  é dada por

$$k_g = g \left( \frac{D\alpha'}{dt}, \nu \right),$$

onde  $\nu$  é a normal à curva  $\alpha$  no plano tangente de  $M$  e  $g(\nu, \nu) = 1$ ; adotaremos  $\nu = -b'X_1 + a'X_2$ , a normal apontando para dentro.

Para calcular a curvatura geodésica de  $C$  com respeito à métrica  $\bar{g}$ , precisamos parametrizar a curva  $C$  por uma curva  $\bar{\alpha}$  tal que  $\bar{g}(\bar{\alpha}', \bar{\alpha}') = 1$ , ou seja,

precisamos reparametrizar a curva  $\alpha$  pelo comprimento de arco com relação à métrica  $\bar{g}$ . Assim, denotando

$$\varphi(t) = \int_0^s \sqrt{\bar{g}(\alpha', \alpha')} dt = \int_0^s e^{-u\alpha(t)} dt,$$

podemos escrever

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(\varphi^{-1}(s)) = \mathbf{x}(a(\varphi^{-1}(s)), b(\varphi^{-1}(s))).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}'(s) &= \alpha'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1}(s))' \\ &= \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(s))} \alpha'(\varphi^{-1}(s)) \\ &= e^{u\alpha(\varphi^{-1}(s))} \alpha'(\varphi^{-1}(s)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\alpha}', \bar{\alpha}') &= \bar{g}(e^{u\alpha(\varphi^{-1}(s))} \alpha'(\varphi^{-1}(s)), e^{u\alpha(\varphi^{-1}(s))} \alpha'(\varphi^{-1}(s))) \\ &= e^{2u\alpha(\varphi^{-1}(s))} \bar{g}(\alpha'(\varphi^{-1}(s)), \alpha'(\varphi^{-1}(s))) \\ &= e^{2u\alpha(\varphi^{-1}(s))} e^{-2u\alpha(\varphi^{-1}(s))} g(\alpha'(\varphi^{-1}(s)), \alpha'(\varphi^{-1}(s))) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Denotemos  $\bar{a}(s) = a(\varphi^{-1}(s))$ ,  $\bar{b}(s) = b(\varphi^{-1}(s))$ . Assim,

$$\begin{aligned} \bar{a}'(s) &= a'(\varphi^{-1}(s))(\varphi^{-1}(s))^{-1} \\ &= e^{u\alpha(\varphi^{-1}(s))} a'(\varphi^{-1}(s)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{a}''(s) &= a'' \cdot (\varphi^{-1}(s))' e^{u\alpha} + a' e^{u\alpha} ((\varphi^{-1}(s))' du \cdot \alpha') \\ &= a'' e^{2u\alpha} + a' e^{u\alpha} (e^{u\alpha} du \cdot \alpha') \\ &= a'' e^{2u\alpha} + a' e^{2u\alpha} (a' \frac{\partial u}{\partial x_1} + b' \frac{\partial u}{\partial x_2}) \\ &= a'' e^{2u\alpha} + (a')^2 e^{2u\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_1} + a' b' e^{2u\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

onde para facilitar a escrita omitimos em algumas partes o termo  $\varphi^{-1}(s)$  e escrevemos  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  para denotar  $X_i(u)$ ,  $i = 1, 2$ .

Analogamente, temos que

$$\bar{b}'(s) = e^{u\circ\alpha(\varphi^{-1}(s))}b'(\varphi^{-1}(s))$$

e

$$\bar{b}''(s) = b''e^{2u\circ\alpha} + a'b'e^{2u\circ\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_1} + (b')^2e^{2u\circ\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Usando a equação (1.2), pág. 5, temos

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{ij}^m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{g}_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial x_k} \right\} \bar{g}^{km} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial (e^{-2u}g_{jk})}{\partial x_i} + \frac{\partial (e^{-2u}g_{ki})}{\partial x_j} - \frac{\partial (e^{-2u}g_{ij})}{\partial x_k} \right\} e^{2u}g^{km} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right\} g^{km} \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j}g_{ik} - \frac{\partial u}{\partial x_k}g_{ij} \right\} g^{km} \\ &= \Gamma_{ij}^m - \sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i}g_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j}g_{ik} - \frac{\partial u}{\partial x_k}g_{ij} \right\} g^{km}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_{11}^1 &= \Gamma_{11}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} & \bar{\Gamma}_{12}^1 &= \Gamma_{12}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_2} & \bar{\Gamma}_{22}^1 &= \Gamma_{22}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \bar{\Gamma}_{11}^2 &= \Gamma_{11}^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} & \bar{\Gamma}_{12}^2 &= \Gamma_{12}^2 - \frac{\partial u}{\partial x_1} & \bar{\Gamma}_{22}^2 &= \Gamma_{22}^2 - \frac{\partial u}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

Sabemos que (ver [1], pág. 286, por exemplo)

$$\begin{aligned}\frac{D\bar{\alpha}'}{ds} &= [\bar{a}'' + (\bar{a}')^2\bar{\Gamma}_{11}^1 + 2\bar{a}'\bar{b}'\bar{\Gamma}_{12}^1 + (\bar{b}')^2\bar{\Gamma}_{22}^1] X_1 \\ &\quad + [\bar{b}'' + (\bar{a}')^2\bar{\Gamma}_{11}^2 + 2\bar{a}'\bar{b}'\bar{\Gamma}_{12}^2 + (\bar{b}')^2\bar{\Gamma}_{22}^2] X_2.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{D\bar{\alpha}'}{ds} &= e^{2u} \left[ a'' + (a')^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a'b' \frac{\partial u}{\partial x_2} + (a')^2 \bar{\Gamma}_{11}^1 + 2a'b' \bar{\Gamma}_{12}^1 + (b')^2 \bar{\Gamma}_{22}^1 \right] X_1 \\
&+ e^{2u} \left[ b'' + a'b' \frac{\partial u}{\partial x_1} + (b')^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + (a')^2 \bar{\Gamma}_{11}^2 + 2a'b' \bar{\Gamma}_{12}^2 + (b')^2 \bar{\Gamma}_{22}^2 \right] X_2 \\
&= e^{2u} \left[ a'' + (a')^2 \Gamma_{11}^1 + 2a'b' \Gamma_{12}^1 + (b')^2 \Gamma_{22}^1 - a'b' \frac{\partial u}{\partial x_2} + (b')^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] X_1 \\
&+ e^{2u} \left[ b'' + (a')^2 \Gamma_{11}^2 + 2a'b' \Gamma_{12}^2 + (b')^2 \Gamma_{22}^2 - a'b' \frac{\partial u}{\partial x_1} + (a')^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] X_2 \\
&= e^{2u} \frac{D\alpha'}{dt} + e^{2u} A,
\end{aligned}$$

onde

$$A = \left[ -a'b' \frac{\partial u}{\partial x_2} + (b')^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] X_1 + \left[ -a'b' \frac{\partial u}{\partial x_1} + (a')^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] X_2.$$

A curvatura geodésica de  $C$  com respeito à métrica  $\bar{g}$  é dada por

$$k_{\bar{g}} = \bar{g} \left( \frac{D\bar{\alpha}'}{ds}, \bar{\nu} \right),$$

onde  $\bar{\nu} = e^u \nu = -e^u b' X_1 + e^u a' X_2$  é a normal à curva  $\bar{\alpha}$  no plano tangente de  $M$  e  $\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned}
k_{\bar{g}} &= \bar{g} \left( e^{2u} \frac{D\alpha'}{dt} + e^{2u} A, \bar{\nu} \right) \\
&= e^{2u} \bar{g} \left( \frac{D\alpha'}{dt}, \bar{\nu} \right) + e^{2u} \bar{g}(A, \bar{\nu}) \\
&= e^{3u} \bar{g} \left( \frac{D\alpha'}{dt}, \nu \right) + e^{3u} \bar{g}(A, \nu) \\
&= e^u g \left( \frac{D\alpha'}{dt}, \nu \right) + e^u g(A, \nu) \\
&= e^u k_g + e^u g(A, \nu).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
g(A, \nu) &= g \left( \left[ -a'b' \frac{\partial u}{\partial x_2} + (b')^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] X_1 + \left[ -a'b' \frac{\partial u}{\partial x_1} + (a')^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] X_2, \nu \right) \\
&= g \left( \left[ -a'b' \frac{\partial u}{\partial x_2} + (b')^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right] X_1, -b'X_1 + a'X_2 \right) \\
&+ g \left( \left[ -a'b' \frac{\partial u}{\partial x_1} + (a')^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right] X_2, -b'X_1 + a'X_2 \right) \\
&= a'(b')^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} g_{11} - (b')^3 \frac{\partial u}{\partial x_1} g_{11} - (a')^2 b' \frac{\partial u}{\partial x_1} g_{22} + (a')^3 \frac{\partial u}{\partial x_2} g_{22} \\
&= a' [(b')^2 + (a')^2] g_{11} \frac{\partial u}{\partial x_2} - b' [(b')^2 + (a')^2] g_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\
&= a' \frac{\partial u}{\partial x_2} - b' \frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \text{pois } g(\alpha', \alpha') = 1.
\end{aligned}$$

Daí,

$$e^u g(A, \nu) = e^u a' \frac{\partial u}{\partial x_2} - e^u b' \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
k_{\bar{g}} &= e^u k_g + \frac{\partial u}{\partial \bar{\nu}} \\
\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial(-\bar{\nu})} + k_{\bar{g}} &= e^u k_g.
\end{aligned}$$

De agora em diante, passaremos a denotar a normal apontando para fora,  $-\bar{\nu}$ , por  $\eta$ . Obtendo assim,

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + k_{\bar{g}} = e^u k_g. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) nos dá a relação entre as curvaturas geodésicas de uma curva com respeito às métricas  $g$  e  $\bar{g}$ , onde  $g = e^{2u} \bar{g}$ ,  $g_{11} = g_{22}$  e  $g_{12} = 0$ .

Mostraremos agora a relação entre as curvaturas Gaussianas da superfície  $M$  com respeito a essas duas métricas.

Denotemos por  $K, \bar{K}$  a curvatura Gaussiana de  $M$  com respeito à métrica  $g$  e  $\bar{g}$ , respectivamente. Seja  $\nabla$  a conexão Riemanniana de  $M$  com relação a  $g$ .

Como em superfícies a curvatura seccional coincide com a curvatura Gaussiana, temos

$$\begin{aligned}
K &= K(X_1, X_2) \\
&= \frac{1}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2} g \left( \nabla_{X_1} \nabla_{X_2} X_2 - \nabla_{X_2} \nabla_{X_1} X_2 - \nabla_{[X_1, X_2]} X_2, X_1 \right) \\
&= \frac{1}{g_{11}^2} g \left( \nabla_{X_1} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{22}^i X_i \right) - \nabla_{X_2} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{12}^i X_i \right), X_1 \right) \\
&= \frac{1}{g_{11}^2} g \left( \nabla_{X_1} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{22}^i X_i \right), X_1 \right) - \frac{1}{g_{11}^2} g \left( \nabla_{X_2} \left( \sum_{i=1}^2 \Gamma_{12}^i X_i \right), X_1 \right) \\
&= \frac{1}{g_{11}^2} g \left( \sum_i X_1 (\Gamma_{22}^i) X_i + \sum_i \Gamma_{22}^i \nabla_{X_1} X_i, X_1 \right) \\
&\quad - \frac{1}{g_{11}^2} g \left( \sum_i X_2 (\Gamma_{12}^i) X_i + \sum_i \Gamma_{12}^i \nabla_{X_2} X_i, X_1 \right) \\
&= \frac{1}{g_{11}^2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} g_{11} + \sum_i \Gamma_{22}^i g \left( \sum_j \Gamma_{1i}^j X_j, X_1 \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{g_{11}^2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} g_{11} + \sum_i \Gamma_{12}^i g \left( \sum_j \Gamma_{2i}^j X_j, X_1 \right) \right] \\
&= \frac{1}{g_{11}^2} \left[ \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} g_{11} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} g_{11} + \sum_i (\Gamma_{22}^i \Gamma_{1i}^1 - \Gamma_{12}^i \Gamma_{2i}^1) g_{11} \right] \\
&= \frac{1}{g_{11}} \left( \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^1}{\partial x_2} + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 \right),
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (1.1) na terceira e sexta igualdade, e usamos o fato de que  $g_{11} = g(X_1, X_1) = g(X_2, X_2) = g_{22}$ ,  $g_{12} = g(X_1, X_2) = 0$  na segunda e sexta igualdade.

Agora, utilizando a relação existente entre os símbolos de Christoffel, segue que



$$\begin{aligned}
K &= \frac{1}{g_{11}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \bar{\Gamma}_{22}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \bar{\Gamma}_{12}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right. \\
&+ \left( \bar{\Gamma}_{22}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \left( \bar{\Gamma}_{11}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) - \left( \bar{\Gamma}_{12}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \left( \bar{\Gamma}_{12}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \\
&+ \left. \left( \bar{\Gamma}_{22}^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \left( \bar{\Gamma}_{12}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) - \left( \bar{\Gamma}_{12}^2 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \left( \bar{\Gamma}_{22}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right\} \\
&= \frac{e^{-2u}}{\bar{g}_{11}} \left\{ \frac{\partial \bar{\Gamma}_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{12}^1}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \bar{\Gamma}_{22}^1 \bar{\Gamma}_{11}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{22}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{11}^1 \right. \\
&- \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 - \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{\Gamma}_{12}^1 - 2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{12}^1 - \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \bar{\Gamma}_{22}^2 \bar{\Gamma}_{12}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{22}^2 \\
&+ \left. \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{12}^1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 - \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{\Gamma}_{22}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{12}^2 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{22}^1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{e^{-2u}}{\bar{g}_{11}} \left( \frac{\partial \bar{\Gamma}_{22}^1}{\partial x_1} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{12}^1}{\partial x_2} + \bar{\Gamma}_{22}^1 \bar{\Gamma}_{11}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^1 \bar{\Gamma}_{12}^1 + \bar{\Gamma}_{22}^2 \bar{\Gamma}_{12}^1 - \bar{\Gamma}_{12}^2 \bar{\Gamma}_{22}^1 \right) \\
&+ \frac{e^{-2u}}{\bar{g}_{11}} \left( -\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{11}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{12}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{22}^2 + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{12}^2 \right) \\
&= \frac{\bar{K}}{e^{2u}} - \frac{e^{-2u}}{\bar{g}_{11}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{11}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{12}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{22}^2 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{12}^2 \right).
\end{aligned}$$

Escreveremos  $\bar{\Delta}$ ,  $\nabla_{\bar{g}}$  e  $\bar{\nabla}$  para denotar, respectivamente, o Laplaciano, o gradiente e a conexão Riemanniana de  $M$  com respeito à métrica  $\bar{g}$ . Como  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = X_i(u)$ , então

$$\nabla_{\bar{g}} u = \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} X_1 + \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2.$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\nabla}_{X_1} \nabla_{\bar{g}} u, X_1) &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{X_1} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} X_1, X_1\right) + \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{X_1} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} X_2, X_1\right) \\
&= \bar{g}\left(X_1 \left(\frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1}\right) X_1 + \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\nabla}_{X_1} X_1, X_1\right) \\
&+ \bar{g}\left(X_1 \left(\frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) X_2 + \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\nabla}_{X_1} X_2, X_1\right) \\
&= \frac{1}{\bar{g}_{11}} \left(\bar{g}_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x_1}\right) + \bar{g}\left(\frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \sum_j \bar{\Gamma}_{11}^j X_j, X_1\right) \\
&+ \bar{g}\left(\frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \sum_j \bar{\Gamma}_{12}^j X_j, X_1\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{11}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{12}^1.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{X_2} \nabla_{\bar{g}} u, X_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{12}^2 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{22}^2.$$

Usando a equação (1.2), encontramos

$$\bar{\Gamma}_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_1} = \bar{\Gamma}_{12}^2$$

$$\bar{\Gamma}_{12}^1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_2} = \bar{\Gamma}_{22}^2$$

Logo,

$$\begin{cases}
\bar{g}(\bar{\nabla}_{X_1} \nabla_{\bar{g}} u, X_1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_2} \\
\bar{g}(\bar{\nabla}_{X_2} \nabla_{\bar{g}} u, X_2) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{g}_{11}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{g}_{11}}{\partial x_2}
\end{cases}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}u &= \operatorname{div} \nabla_{\bar{g}}u \\
&= \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_{X_1} \nabla_{\bar{g}}u, X_1)}{\bar{g}(X_1, X_1)} + \frac{\bar{g}(\bar{\nabla}_{X_2} \nabla_{\bar{g}}u, X_2)}{\bar{g}(X_2, X_2)} \\
&= \frac{1}{\bar{g}_{11}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Usando o fato de que  $\bar{\Gamma}_{11}^1 = \bar{\Gamma}_{12}^2$ ,  $\bar{\Gamma}_{12}^1 = \bar{\Gamma}_{22}^2$ , segue que

$$\begin{aligned}
K &= e^{-2u} \bar{K} - \frac{e^{-2u}}{\bar{g}_{11}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{11}^1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{12}^1 - \frac{\partial u}{\partial x_2} \bar{\Gamma}_{22}^2 - \frac{\partial u}{\partial x_1} \bar{\Gamma}_{12}^2 \right) \\
&= e^{-2u} \bar{K} - e^{-2u} \bar{\Delta}u.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\bar{\Delta}u - \bar{K} + e^{2u} K = 0 \quad (2.12)$$

A equação (2.12) nos fornece a relação entre as curvaturas Gaussianas com respeito às métricas  $g$  e  $\bar{g}$ , onde  $g = e^{2u} \bar{g}$ ,  $g_{11} = g_{22}$  e  $g_{12} = 0$ .

## 2.4 Fórmula de Reilly

Seja  $M^n$  uma variedade compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$  e seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial geodésico ortonormal tal que  $E_n = \eta$  é o campo de vetores normal ao bordo apontando para fora. Consideremos  $f \in C^\infty(M)$  e denotemos  $z = f|_\Sigma$  e  $v = \frac{\partial f}{\partial \eta}$ .

Temos,

$$\begin{aligned}
(\Delta f)|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Hess} f(E_i, E_i) + \operatorname{Hess} f(\eta, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \operatorname{Hess} f(\eta, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} (\nabla z + v\eta), E_i \rangle + \operatorname{Hess} f(\eta, \eta) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \nabla z, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} v\eta, E_i \rangle + \operatorname{Hess} f(\eta, \eta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta^\Sigma z + \sum_{i=1}^{n-1} \langle E_i(v)\eta + v\nabla_{E_i}\eta, E_i \rangle + \text{Hess } f(\eta, \eta) \\
&= \Delta^\Sigma z + v \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i}\eta, E_i \rangle + \text{Hess } f(\eta, \eta) \\
&= \Delta^\Sigma z + v\mathcal{H} + \frac{\partial v}{\partial \eta},
\end{aligned}$$

onde  $\mathcal{H}$  é a curvatura média de  $\Sigma$  e  $\Delta^\Sigma$  denota o operador Laplaciano de  $\Sigma$ .

**Proposição 2.4.1** (Fórmula de Reilly). *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$  e seja  $f \in C^\infty(M)$ . Denotemos por  $\Omega$  e  $\Psi$  as formas de volume de  $M$  e  $\Sigma$ , respectivamente. Então*

$$\begin{aligned}
\int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2) \Omega &= \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \Omega + \int_\Sigma (\Delta z + v\mathcal{H})v\Psi \\
&\quad - \int_\Sigma \langle \nabla v, \nabla z \rangle \Psi + \int_\Sigma II(\nabla z, \nabla z)\Psi,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

onde  $\mathcal{H}$  é a curvatura média do bordo  $\Sigma$ ,  $z = f|_\Sigma$  e  $v = \frac{\partial f}{\partial \eta}$  é a derivada de  $f$  na direção do vetor normal ao bordo apontando para fora.

*Demonstração.* Seja  $\{E_i\}_{i=1}^n$  um referencial geodésico. Consideremos o campo de vetores  $X = \sum_{i=1}^n x_i E_i$  tal que

$$x_i = \sum_{j=1}^n (f_{jj}f_i - f_{ji}f_j).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\text{div } X &= \sum_{k=1}^n \left\langle \nabla_{E_k} \left( \sum_{i=1}^n x_i E_i \right), E_k \right\rangle \\
&= \sum_k \left\langle \sum_i E_k(x_i) E_i + \sum_i x_i \nabla_{E_k} E_i, E_k \right\rangle \\
&= \sum_k E_k(x_k)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,j} (f_{jjk}f_k + f_{jj}f_{kk} - f_{kjk}f_j - f_{jk}^2) \\
&= \sum_{j,k} f_{jjk}f_k - \sum_{j,k} f_{jkj}f_k + \sum_{j,k} f_{jj}f_{kk} - \sum_{j,k} f_{jk}^2 \\
&= \sum_k \left( \sum_j f_{jjk} - \sum_j f_{jkj} \right) f_k + \sum_{j,k} f_{jj}f_{kk} - \sum_{j,k} f_{jk}^2 \\
&= \sum_k \left( \sum_{l,j} f_l R_{ljkj} \right) f_k + \sum_{j,k} f_{jj}f_{kk} - \sum_{j,k} f_{jk}^2 \\
&= - \sum_{k,l} f_k f_l R_{lk} + \sum_{j,k} f_{jj}f_{kk} - \sum_{j,k} f_{jk}^2 \\
&= - \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + (\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2,
\end{aligned}$$

onde na sétima igualdade usamos a fórmula de Ricci.

Logo

$$(\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2 = \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) + \text{div } X.$$

Usando o Teorema de Stokes, temos

$$\int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2) \Omega = \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \Omega + \int_\Sigma \langle X, \eta \rangle \Psi,$$

onde  $\eta$  é a normal ao bordo apontando para fora.

Por outro lado,

$$\langle X, \eta \rangle = x_n = \sum_{j=1}^n (f_{jj}f_n - f_{jn}f_j). \quad (2.14)$$

Como estamos interessados em integrar  $\langle X, \eta \rangle$  sobre o bordo  $\Sigma$ , vamos analisar o lado direito de (2.14) nos pontos de  $\Sigma$ . Temos,

$$\sum_{j=1}^n f_{jj}f_n = (\Delta f)|_\Sigma v = (\Delta z + v\mathcal{H} + v_n)v = (\Delta z + v\mathcal{H})v + v_nv$$

e

$$\sum_{j=1}^n f_{jn}f_j = f_{nn}f_n + \sum_{j=1}^{n-1} f_{jn}f_j = v_nv + \sum_{j=1}^{n-1} f_{jn}f_j.$$

Logo,

$$\langle X, \eta \rangle = (\Delta z + v\mathcal{H})v - \sum_{j=1}^{n-1} f_{jn}f_j.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \eta \nabla z, \nabla z \rangle &= \left\langle \nabla \eta \left( \sum_{j=1}^{n-1} z_j E_j \right), \sum_{k=1}^{n-1} z_k E_k \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^{n-1} z_{jn} E_j + \sum_{j=1}^{n-1} z_j \nabla \eta E_j, \sum_{k=1}^{n-1} z_k E_k \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} z_{jn} z_j \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} f_{jn} f_j. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} f_{jn} f_j &= \langle \nabla \eta \nabla z, \nabla z \rangle \\ &= \langle -\nabla_{\nabla z} \eta + [\nabla z, \eta], \nabla z \rangle \\ &= \langle [\nabla z, \eta], \nabla z \rangle - \langle \nabla_{\nabla z} \eta, \nabla z \rangle \\ &= \langle \nabla v, \nabla z \rangle - II(\nabla z, \nabla z), \end{aligned}$$

pois, como  $\eta = 1 \cdot E_n$  e  $\nabla z = \sum_{i=1}^{n-1} z_i E_i$ , então

$$[\eta, \nabla z] = \sum_{j=1}^{n-1} z_{nj} E_j = \sum_{j=1}^{n-1} v_j E_j = \nabla v.$$

Logo,

$$\langle X, \eta \rangle = (\Delta z + v\mathcal{H})v - \langle \nabla v, \nabla z \rangle + II(\nabla z, \nabla z)$$

e, pertanto,

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2) \Omega &= \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \Omega + \int_\Sigma (\Delta z + v\mathcal{H})v\Psi \\ &\quad - \int_\Sigma \langle \nabla v, \nabla z \rangle \Psi + \int_\Sigma II(\nabla z, \nabla z)\Psi. \end{aligned}$$

□

# Capítulo 3

## Resultados Principais

Neste capítulo apresentamos os principais resultados desta dissertação. Na tentativa de deixar as coisas o mais claro possível, na seção 1 apresentamos a prova do Teorema de Reilly. Na seção 2 provamos a versão bidimensional do Teorema de Hang-Wang e, finalmente, na seção 3 apresentamos a demonstração do Teorema de Hang-Wang no caso geral.

### 3.1 O Teorema de Reilly

**Lema 3.1.1.** *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M$  totalmente geodésico. Suponhamos que existe uma função  $f$  sobre  $M$  tal que  $f = 0$  sobre  $\Sigma$ ,  $f \geq 0$  sobre  $M$  e  $\text{Hess } f = -fg$ . Então  $M$  é isométrica ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$ .*

*Demonstração.* Como  $M$  é compacta, então  $M$  é completa. Por ser o bordo totalmente geodésico, podemos concluir usando o Teorema de Hopf e Rinow que toda geodésica de  $M$  que não está contida no bordo, pode ser estendida ou indefinidamente ou até tocar o bordo. Além disso, todo par de pontos de  $M$  pode ser unido por uma geodésica minimizante de  $M$ .

Como  $M$  é compacta,  $f$  atinge seu valor máximo em algum ponto, digamos em  $p_0 \in M$ , e suponhamos, sem perda de generalidade, que  $f(p_0) = 1$ . Seja  $\gamma(s)$  qualquer geodésica normalizada em  $M$  partindo de  $p_0$  e considere-



mos a função  $\phi(s) = f(\gamma(s))$ . Temos

$$\begin{aligned}
\phi(0) &= f(\gamma(0)) = f(p_0) = 1; \\
\phi'(0) &= \langle \nabla f(p_0), \gamma'(0) \rangle = 0; \\
\phi''(s) &= \frac{d}{ds} \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \\
&= \langle \nabla_{\gamma'(s)} \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle + \langle \nabla f(\gamma(s)), \nabla_{\gamma'(s)} \gamma'(s) \rangle \\
&= \text{Hess } f \circ \gamma(\gamma'(s), \gamma'(s)) \\
&= -f \circ \gamma(s) \\
&= -\phi(s).
\end{aligned}$$

Logo,  $\phi(s) = \cos s$ . Em particular, concluímos que  $f = \cos r$ , onde  $r$  é a função distância ao ponto  $p_0$ .

Cada tal geodésica  $\gamma$  pode ser estendida ou indefinidamente ou pelo menos até encontrar o bordo  $\Sigma$ . Como  $f$  é identicamente nula sobre o bordo  $\Sigma$  e  $f(\gamma(s)) = \phi(s) = \cos s$  não se anula para  $0 \leq s < \frac{\pi}{2}$ , então  $\gamma$  está certamente definida para  $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ .

Como, por hipótese,  $f \geq 0$ , então  $\gamma$  não pode estar definida para  $s > \frac{\pi}{2}$ , pois sobre estes pontos  $f(\gamma(s)) = \cos s < 0$ . Portanto, qualquer geodésica em  $M$  partindo de  $p_0$  tem como intervalo máximo de definição  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Além disso, concluímos também que  $\exp_{p_0}(\partial B[0, \frac{\pi}{2}]) = \Sigma$ .

Como qualquer ponto de  $M$  pode ser ligado a  $p_0$  por uma geodésica minimizante e esta por sua vez está definida em  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , então a aplicação  $\exp_{p_0} : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  é sobrejetiva.

**Afirmção:**  $\exp_{p_0} : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  é injetiva.

Com efeito, suponhamos que existam  $v_1, v_2 \in B[0, \frac{\pi}{2}] \subset T_{p_0}M$  tal que  $\exp_{p_0} v_1 = \exp_{p_0} v_2 = q$ . Então existem geodésicas normalizadas  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$ , tais que  $\gamma_1'(0) = \frac{v_1}{|v_1|}, \gamma_2'(0) = \frac{v_2}{|v_2|}$  e  $\gamma_1(t_1) = q = \gamma_2(t_2)$ , onde  $t_1 = |v_1|$  e  $t_2 = |v_2|$ .

Como  $f = \cos r$  e  $\nabla r$  é ortogonal às curvas de níveis que neste caso são as esferas geodésicas de centro em  $p_0$ , então

$$\nabla f(q) = -\text{sen } t_1 \nabla r(\gamma(t_1)) = -\text{sen } t_1 \gamma_1'(t_1)$$

e

$$\nabla f(q) = -\text{sen } t_2 \nabla r(\gamma(t_2)) = -\text{sen } t_2 \gamma_2'(t_2).$$

Daí,

$$-\operatorname{sen} t_1 \gamma'_1(t_1) = -\operatorname{sen} t_2 \gamma'_2(t_2).$$

Como  $|\gamma'_1(t_1)| = |\gamma'_2(t_2)|$ , então  $\operatorname{sen} t_1 = \operatorname{sen} t_2$ . Mais ainda, temos  $\gamma'_1(t_1) = \gamma'_2(t_2)$ . Logo  $v_1 = v_2$  e, portanto,  $\exp_{p_0} : B[0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow M$  é injetiva.

**Afirmção:** A aplicação  $\exp_{p_0} : B(0, \frac{\pi}{2}) \subset T_{p_0}M \rightarrow B(p, \frac{\pi}{2}) \subset M$  é um difeomorfismo.

Seja  $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow M$  uma geodésica normalizada em  $M$  com  $\gamma(0) = p_0$  e seja  $J$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$  tal que  $J(0) = 0$  e  $\gamma'(t) \perp J(t)$ . Fixemos  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$  e suponhamos, inicialmente, que  $|J(t_0)| = 1$ . Consideremos  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  a geodésica normalizada tal que  $\alpha(0) = \gamma(t_0)$  e  $\alpha'(0) = J(t_0)$ . Esta geodésica  $\alpha$  determina, por sua vez, uma família  $\gamma_s$  de geodésicas partindo de  $p_0$  tal que o campo de Jacobi  $J$  é realizado por esta família, ou seja,  $J$  é o campo variacional. Isto implica que  $\gamma_s$  não está parametrizada pelo comprimento de arco, mas somente proporcionalmente ao comprimento de arco, exceto  $\gamma(0) = \gamma$ .

Temos então uma superfície parametrizada  $b(s, t) = \gamma_s(t)$  tal que as curvas  $\alpha_1(s) = b(s, 0) = p_0$  e  $\alpha(s) = b(s, t_0)$  são geodésicas. Além disso,  $\frac{\partial b}{\partial s}(0, t) = J(t)$  e  $\frac{\partial b}{\partial t}(0, t) = \gamma'(t)$ .

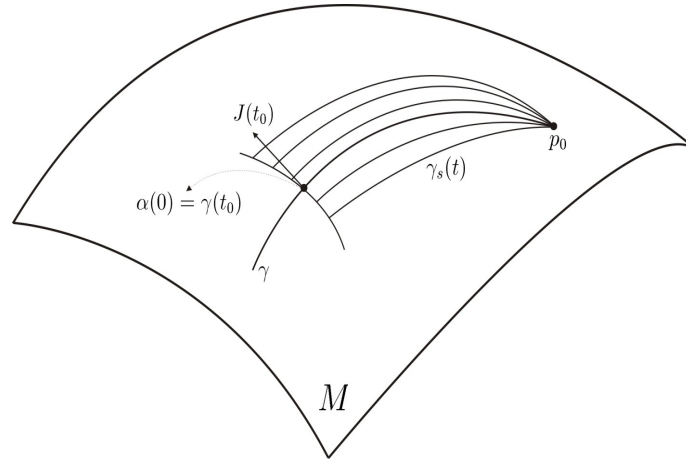


Figura 3.1:

Pela Proposição 1.4.1, pág. 13, temos

$$\begin{aligned} L'(0) &= \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}(0, t_0), \gamma'(t_0) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial b}{\partial s}(0, 0), \gamma'(0) \right\rangle \\ &= \langle J(t_0), \gamma'(t_0) \rangle - \langle J(0), \gamma'(0) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L''(0) &= \int_0^{t_0} \left( \left| \frac{D}{dt} \frac{\partial b}{\partial s} \right|^2 - \left\langle R \left( \gamma', \frac{\partial b}{\partial s} \right) \frac{\partial b}{\partial s}, \gamma' \right\rangle - \left\langle \gamma', \frac{D}{dt} \frac{\partial b}{\partial s} \right\rangle^2 \right) dt \\
&= \int_0^{t_0} \left( |J'(t)|^2 - \langle R(\gamma', J)J, \gamma' \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2 \right) \\
&= \int_0^{t_0} \left( |J'(t)|^2 + \langle R(\gamma', J)\gamma', J \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2 \right) \\
&= \int_0^{t_0} \left( |J'(t)|^2 - \langle J'', J \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2 \right) \\
&= \int_0^{t_0} \left( \frac{d}{dt} \langle J', J \rangle - \langle \gamma', J' \rangle^2 \right) \\
&= \langle J'(t_0), J(t_0) \rangle - \langle J'(0), J(0) \rangle - \int_0^{t_0} \langle \gamma', J' \rangle^2 dt \\
&= \langle J'(t_0), J(t_0) \rangle,
\end{aligned}$$

pois  $J(0) = 0$  e  $0 = \frac{d}{dt} \langle J, \gamma' \rangle = \langle J', \gamma' \rangle + \langle J, \nabla_{\gamma'} \gamma' \rangle = \langle J', \gamma' \rangle$ , uma vez que  $\nabla_{\gamma'} \gamma' = 0$ . Logo,

$$L''(0) = \langle J'(t_0), J(t_0) \rangle.$$

Por outro lado, como  $\alpha(s) = \gamma_s(t_0)$  e  $\gamma_s$  é uma geodésica partindo de  $p_0$ , então

$$f(\alpha(s)) = \cos L(s), \quad (3.1)$$

onde  $L(s)$  é o comprimento de  $\gamma_s$ .

Como  $\text{Hess } f = -fg$ , segue que

$$\begin{aligned}
(f \circ \alpha)''(s) &= \frac{d}{ds} \langle \nabla f(\alpha(s)), \alpha'(s) \rangle \\
&= \langle \nabla_{\alpha'} f(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \nabla f(\alpha(s)), \nabla_{\alpha'(s)} \alpha'(s) \rangle \\
&= \text{Hess } f(\alpha'(s), \alpha'(s)) \\
&= -f(\alpha(s)).
\end{aligned}$$

Daí,  $f \circ \alpha(s) = A \cos s + B \sin s$ , onde

$$A = (f \circ \alpha)(0) = f(\gamma(t_0)) = \cos t_0;$$

e

$$\begin{aligned} B &= \left. \frac{d}{ds}(f \circ \alpha(s)) \right|_{s=0} \\ &= \langle \nabla f(\alpha(0)), \alpha'(0) \rangle \\ &= \langle \nabla f(\gamma(t_0)), J(t_0) \rangle \\ &= -\sin t_0 \langle \gamma'(t_0), J(t_0) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$f(\alpha(s)) = \cos t_0 \cos s \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), temos

$$\cos t_0 \cos s = \cos L(s).$$

Derivando com respeito a  $s$ , obtemos

$$-\cos t_0 \sin s = -L'(s) \sin L(s).$$

Derivando novamente, segue que

$$\cos t_0 \cos s = (L'(s))^2 \cos L(s) + L''(s) \sin L(s).$$

Em  $s = 0$ , temos

$$\cos t_0 = L''(0) \sin t_0,$$

pois,  $L(0) = \text{comprimento de } \gamma|_{[0,t_0]} = t_0$  e, como vimos acima  $L'(0) = 0$ . Logo,

$$L''(0) = \frac{\cos t_0}{\sin t_0}.$$

Por outro lado, sabemos que  $L''(0) = \langle J(t_0), J'(t_0) \rangle$ . Então

$$\langle J(t_0), J'(t_0) \rangle = \frac{\cos t_0}{\sin t_0}.$$

Como  $J(t_0)$  é unitário, podemos escrever

$$\frac{\langle J(t_0), J'(t_0) \rangle}{|J(t_0)|^2} = \frac{\cos t_0}{\sin t_0}. \tag{3.3}$$

Para o caso geral em que  $J(t_0)$  não é unitário, consideramos o campo de Jabobi  $W(t) = \frac{J(t)}{|J(t_0)|}$  e repetimos o processo acima, obtendo também

$$\langle W(t_0), W'(t_0) \rangle = \frac{\cos t_0}{\text{sen } t_0}.$$

Daí,

$$\left\langle \frac{J(t_0)}{|J(t_0)|}, \frac{J'(t_0)}{|J(t_0)|} \right\rangle = \frac{\cos t_0}{\text{sen } t_0},$$

ou seja,

$$\frac{\langle J(t_0), J'(t_0) \rangle}{|J(t_0)|^2} = \frac{\cos t_0}{\text{sen } t_0}.$$

Observemos que a equação (3.3) é equivalente a

$$\frac{d}{dt} (\log |J(t)|) |_{t=t_0} = \frac{d}{dt} (\log \text{sen } t) |_{t=t_0}.$$

Integrando a expressão acima de  $\delta > 0$  a  $t_0$ , obtemos

$$\log \left( \frac{|J(t_0)|}{|J(\delta)|} \right) = \log \left( \frac{\text{sen } t_0}{\text{sen } \delta} \right) \Rightarrow \frac{|J(t_0)|}{|J(\delta)|} = \frac{\text{sen } t_0}{\text{sen } \delta}.$$

Sabemos que  $|J(\delta)| = \delta |J'(0)| + R(\delta)$ , com  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{R(\delta)}{\delta} = 0$ . Daí,

$$\frac{|J(\delta)|}{\text{sen } \delta} = \frac{\delta}{\text{sen } \delta} |J'(0)| + \frac{R(\delta)}{\delta} \frac{\delta}{\text{sen } \delta}.$$

O que implica

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|J(\delta)|}{\text{sen } \delta} = |J'(0)|.$$

Assim,

$$|J(t_0)| = |J'(0)| \text{sen } t_0.$$

Como  $t_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$  é arbitrário, segue que

$$|J(t)| = |J'(0)| \text{sen } t. \tag{3.4}$$

Portanto,

$$\left| (d \exp_{p_0})_{tJ'(0)} tJ'(0) \right| = |J(t)| = |J'(0)| \text{sen } t. \tag{3.5}$$

Isto mostra que  $\exp_{p_0} : B(0, \frac{\pi}{2}) \subset T_{p_0}M \rightarrow B(p_0, \frac{\pi}{2}) \subset M$  é, além de bijeção, um difeomorfismo. O que prova a afirmação feita.

Fixemos um ponto  $q_0 \in \mathbb{S}^n$  e consideremos  $h : T_{p_0}M \rightarrow T_{q_0}\mathbb{S}^n$  uma isometria qualquer. Seja  $\psi : B(p_0, \frac{\pi}{2}) \subset M \rightarrow B(q_0, \frac{\pi}{2}) \subset \mathbb{S}^n$  definida por  $\psi(\exp_{p_0} sv) = \exp_{q_0} sh(v)$ , ou seja,  $\psi = \exp_{q_0} \circ h \circ (\exp_{p_0})^{-1}$ .

**Afirmação:**  $\psi$  é uma isometria.

Com efeito, sabemos que os campos de Jacobi na esfera  $\mathbb{S}^n$  são da forma

$$(d \exp_{q_0})_{t\beta'(0)} tJ'(0) = J(t) = \text{sen } tw(t),$$

onde  $w(t)$  é um campo paralelo ao longo de  $\gamma$  com  $\langle \gamma'(t), w(t) \rangle = 0$  e  $w(0) = J'(0)$ . Ou seja,

$$(d \exp_{q_0})_{t\beta'(0)} J'(0) = \frac{\text{sen } t}{t} w(t) \quad (3.6)$$

para qualquer geodésica normalizada  $\beta$  em  $\mathbb{S}^n$  partindo de  $q_0$ . Por outro lado, se  $q = \exp_{p_0} u \in B(p_0, \frac{\pi}{2})$ , então

$$d\psi_q = (d \exp_{q_0})_{h \circ (\exp_{p_0})^{-1}(q)} \circ dh_{(\exp_{p_0})^{-1}(q)} \circ d \left[ (\exp_{p_0})^{-1} \right]_q.$$

Por (3.5), dado  $v \in T_q M$ , temos

$$\left| d \left[ (\exp_{p_0})^{-1} \right]_q v \right| = \frac{|u|}{\text{sen } |u|} |v|$$

e por (3.6), dados  $x, y \in T_{q_0}\mathbb{S}^n$ ,

$$|d(\exp_{q_0})_x y| = \frac{\text{sen } |x|}{|x|} |y|.$$

Portanto,

$$|d\psi_q v| = |v|,$$

ou seja,  $d\psi_q$  é uma isometria linear. Assim,  $\psi$  é uma isometria local. Como  $\psi$  é um difeomorfismo, então  $\psi$  é uma isometria.

Como  $\Sigma = \exp_{p_0}(\partial B[0, \frac{\pi}{2}])$  e  $\partial \mathbb{S}_+^n = \exp_{q_0}(\partial B[0, \frac{\pi}{2}])$ , então definindo

$$\begin{aligned} \bar{\psi} : M &\rightarrow \mathbb{S}_+^n \\ \exp_{p_0} sv &\mapsto \exp_{q_0} sh(v) \end{aligned}$$

temos que  $\bar{\psi}$  é uma isometria.

Portanto  $M$  é isométrica ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$ . □

Agora estamos em condições de provar o Teorema de Reilly.

**Teorema 3.1.1** (Reilly, [5]). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos  $\text{Ric} \geq (n-1)g$  e que a curvatura média de  $\Sigma$  em  $M$  é não-negativa. Então o primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$ , relacionado ao problema de Dirichlet, satisfaz  $\lambda_1 \geq n$ . Além disso,  $\lambda_1 = n$  se, e somente se,  $M$  é isométrica ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Seja  $f$  uma autofunção para  $\lambda_1$ . Usando o Teorema 1.7.5, pág. 23, podemos assumir que  $f > 0$  sobre  $M - \Sigma$ . Como  $z = f|_\Sigma$  é identicamente nulo, por  $f$  ser autofunção do primeiro autovalor, então a Fórmula de Reilly, pág. 43, assume a seguinte forma:

$$\int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2) \Omega = \int_\Sigma v^2 \mathcal{H} \Psi + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \Omega.$$

Pela Observação 2.1.1, pág. 25, sabemos que

$$\begin{aligned} |\text{Hess } f|^2 &\geq \frac{(\Delta f)^2}{n} \\ \Rightarrow -\frac{(\Delta f)^2}{n} &\geq -|\text{Hess } f|^2 \\ \Rightarrow -\frac{(\Delta f)^2}{n} + (\Delta f)^2 &\geq (\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2 \\ \Rightarrow (\Delta f)^2 &\geq \frac{n}{n-1} ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 \int_M f^2 \Omega &= \int_M (\Delta f)^2 \Omega \\ &\geq \frac{n}{n-1} \int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2) \Omega \\ &= \frac{n}{n-1} \int_\Sigma v^2 \mathcal{H} \Psi + \int_M \text{Ric}(\nabla f, \nabla f) \Omega \quad (3.7) \\ &\geq \frac{n}{n-1} \int_M (n-1)g(\nabla f, \nabla f) \Omega \\ &= n\lambda_1 \int_M f^2 \Omega, \end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos o fato de  $f$  ser uma autofunção do autovalor  $\lambda_1$ , na segunda desigualdade usamos a hipótese da curvatura média

$\mathcal{H}$  ser não-negativa e  $\text{Ric} \geq (n-1)g$  e a última igualdade segue do fato de termos

$$0 = \int_M (\Delta f) \Omega = \int_M f \Delta f \Omega + \int_M g(\nabla f, \nabla f) \Omega = -\lambda_1 \int_M f^2 \Omega + \int_M g(\nabla f, \nabla f) \Omega.$$

Como  $f$  não é identicamente nulo, então segue que  $\lambda_1 \geq n$ , o que prova a primeira parte do teorema.

Suponhamos agora que  $\lambda_1 = n$ . Então as desigualdades em (3.7) devem ser igualdades, em particular, segue que  $|\text{Hess } f|^2 = \frac{(\Delta f)^2}{n}$  e então, pela Observação 2.1.1,  $\text{Hess } f = \frac{\Delta f}{n} g = -\frac{\lambda_1 f}{n} g = -fg$ .

Vamos mostrar que sob estas condições o bordo é totalmente geodésico.

Para isso, consideremos uma geodésica normalizada  $\gamma(t)$  em  $M$  tal que  $\gamma$  encontra  $\Sigma$  sob um ângulo reto quando  $t = 0$ .

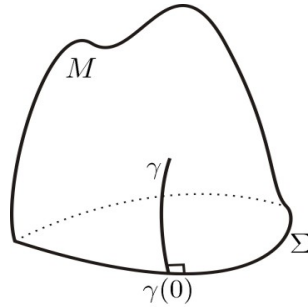


Figura 3.2: Geodésica normal ao bordo.

Igualmente ao que fizemos na prova do Lema 3.1.1, como

$$\text{Hess } f = -fg,$$

então a função  $\phi(t) = f(\gamma(t))$  é da forma

$$\phi(t) = A \cos t + B \sin t, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Como  $f$  é identicamente nula sobre o bordo, então  $A = \phi(0) = f(\gamma(0)) = 0$ , daí  $\phi(t) = B \sin t$ . Por construção,  $\nabla f(\gamma(0))$  é múltiplo de  $\gamma'(0)$ , digamos  $\gamma'(0) = a \nabla f(\gamma(0))$  para alguma constante  $a \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$B = \phi'(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)), \gamma'(0) \rangle = a |\nabla f(\gamma(0))|.$$

Por termos  $f \equiv 0$  sobre  $\Sigma$ , segue que  $\text{Hess } f = -fg \equiv 0$  sobre  $\Sigma$ . Daí, dado qualquer campo de vetores  $X$  ao longo de  $\Sigma$ , temos

$$X(|\nabla f|^2) = X \langle \nabla f, \nabla f \rangle = 2 \langle \nabla_X \nabla f, \nabla f \rangle = 2 \text{Hess } f(X, \nabla f) = 0.$$



Logo,  $|\nabla f|$  e, portanto também  $B = a|\nabla f(\gamma(0))|$ , é independente da posição  $\gamma(0)$  que tomamos sobre  $\Sigma$ .

Se  $B = 0$ , então cada função  $\phi$  seria nula e então  $f$  se anularia também fora de  $\Sigma$ , mas sabemos que para uma autofunção de  $\lambda_1$  isto não pode acontecer. Então  $B \neq 0$ . Logo  $\nabla f$  é um múltiplo constante do vetor  $\eta$  normal unitário ao bordo, a saber  $\eta = a\nabla f$ . Assim, dados  $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\begin{aligned} II(X, Y) &= \langle \nabla_X \eta, Y \rangle &= \langle \nabla_X (a\nabla f), Y \rangle \\ &= a \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle &= a \text{Hess } f(X, Y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $\Sigma$  é totalmente geodésico. Visto que  $\text{Hess } f = -fg$ ,  $f \geq 0$  sobre  $M$  e  $f = 0$  sobre  $\Sigma$ , então, usando o Lema 3.1.1, segue que  $M$  é isométrica ao hemisfério  $\mathbb{S}_+^n$ .  $\square$

## 3.2 O Teorema de Hang-Wang; Caso Bidimensional

O Teorema de Hang-Wang na caso em que  $n = 2$  segue diretamente do seguinte resultado mais geral.

**Teorema 3.2.1** (Hang-Wang, [3]). *Seja  $(M^2, g)$  uma superfície compacta com bordo e curvatura Gaussiana  $K \geq 1$ . Se a curvatura geodésica do bordo  $\gamma$  satisfaz  $k_g \geq c \geq 0$ , então  $l(\gamma) \leq \frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}$ . Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se,  $(M^2, g)$  é isométrico a um disco geodésico de raio  $\cot g^{-1}(c)$  em  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demonstração.* Usando a fórmula de Gauss-Bonnet, temos

$$2\pi\chi(M) = \int_M K d\sigma + \int_\gamma k ds > 0.$$

Como  $\chi(M) > 0$ , então  $M$  é simplesmente conexa. Em particular,  $\gamma$  tem apenas uma componente. Assim, usando o Teorema da Aplicação de Riemann, o qual afirma que todo aberto não trivial do plano complexo é conformemente equivalente ao disco unitário, segue que  $(M, g)$  é conformemente equivalente a  $\bar{B} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leq 1\}$  com a métrica canônica  $|dz|^2$ . Assim, sem perda de generalidade, podemos considerar  $(M, g)$  como  $(\bar{B}, g = e^{2u}|dz|^2)$  com  $u \in C^\infty(\bar{B}, \mathbb{R})$ .

O disco unitário  $\bar{B}$  com a métrica canônica  $|dz|^2$  tem curvatura Gaussiana  $\bar{K} \equiv 0$  e seu bordo, o círculo unitário, tem curvatura geodésica  $k_{\bar{g}} = 1$ . Por outro lado,  $\bar{B}$  com a métrica  $g$  tem, por hipótese, curvatura Gaussiana  $K \geq 1$  e seu bordo curvatura geodésica  $k_g \geq c$ . Usando as relações entre curvaturas Gaussianas e curvaturas geodésicas de métricas conformes, ver equações (2.11) e (2.12), pág. 38 e 42, segue que

$$\Delta u - \bar{K} + e^{2u}K = 0 \Rightarrow \Delta u + e^{2u}K = 0 \Rightarrow \Delta u + e^{2u} \leq 0$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + k_{\bar{g}} = e^u k_g \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} + 1 = e^u k_g \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \eta} + 1 \geq ce^u,$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + e^{2u} \leq 0 \quad \text{sobre } \bar{B} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} + 1 \geq ce^u \quad \text{sobre } \mathbb{S}^1, \end{array} \right.$$

onde  $\eta$  é a normal unitária ao bordo, com relação à métrica  $|dz|^2$ , apontando para fora e  $\Delta$  é o operador Laplaciano de  $\bar{B}$  com a métrica  $|dz|^2$ .

Agora consideremos  $\bar{u} \in C^\infty(\bar{B})$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{u} = 0 \quad \text{sobre } \bar{B} \\ \bar{u} = u \quad \text{sobre } \mathbb{S}^1. \end{array} \right.$$

Observemos que a função  $\bar{u}$  sempre existe, pois é solução de um problema de Dirichlet no bordo com condições suaves.

Como  $\Delta(u - \bar{u}) \leq -e^{2u} \leq 0$ , então  $u - \bar{u}$  é superharmônica. Usando o Princípio do Máximo Fraco,  $u - \bar{u}$  atinge um mínimo em  $\mathbb{S}^1$ . Logo  $u - \bar{u} \geq 0$ , pois  $u$  e  $\bar{u}$  coincidem em  $\mathbb{S}^1$ .

Notemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + e^{2u} \leq 0 \\ \Delta \bar{u} + e^{2u} \geq 0 \end{array} \right.$$

e  $\bar{u} \leq u$ . Daí, pelo Método das sub e super soluções, Proposição 1.7.1, existe  $v \in C^\infty(\bar{B})$  tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta v + e^{2v} = 0 \quad \text{sobre } \bar{B} \\ \bar{u} \leq v \leq u. \end{array} \right.$$

Como  $v \leq u$  e  $v|_{\mathbb{S}^1} = u|_{\mathbb{S}^1}$ , todos os pontos em  $\mathbb{S}^1$  são pontos de máximo para a função  $v - u$ . Logo, para todo  $p \in \mathbb{S}^1$ ,  $\frac{\partial(v - u)}{\partial \eta}(p) \geq 0$ , ou seja,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta}(p) \geq \frac{\partial u}{\partial \eta}(p).$$

Daí,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + 1 \geq \frac{\partial u}{\partial \eta} + 1 \geq ce^u = ce^v. \quad (3.8)$$

Analisando a equação (2.11), que nos dá a relação entre curvaturas geodésicas de métricas conformes, a desigualdade (3.8) nos diz que o bordo de  $(\bar{B}, e^{2v}|dz|^2)$  tem curvatura geodésica maior ou igual a  $c$ .

Por outro lado, pela equação (2.12), que mostra a relação entre curvaturas Gaussianas de métricas conformes, o fato de termos  $\Delta v + e^{2v} = 0$ , implica que  $(\bar{B}, e^{2v}|dz|^2)$  tem curvatura Gaussiana constante e igual a 1. Como o bordo é convexo, então  $(\bar{B}, e^{2v}|dz|^2)$  pode ser isometricamente mergulhado como um domínio em  $\mathbb{S}^2$ , digamos  $\Omega$ . Denotemos  $\sigma = \partial\Omega$  parametrizado pelo comprimento de arco.

Observemos que  $l(\sigma) = l(\gamma)$  pois  $v$  e  $u$  coincidem sobre todos os pontos do bordo.

Como o bordo é convexo e tem curvatura geodésica  $\geq c \geq 0$ , então o menor disco geodésico  $D$  contendo  $\Omega$  tem raio  $\cotg^{-1}(c)$  e vale a igualdade  $D = \Omega$  se, e somente se,  $l(\partial D) = l(\sigma)$ . Assim, como vimos na equação (2.9), pág. 33

$$l(\gamma) = l(\sigma) \leq l(\partial D) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}.$$

O que prova a primeira parte do teorema. Analisemos agora o caso da igualdade.

Se  $(M^2, g)$  é isométrico a um disco geodésico de raio  $\cotg^{-1}(c)$  em  $\mathbb{S}^2$ , então o seu bordo tem comprimento  $l(\gamma) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}$ . Reciprocamente, se

$$l(\gamma) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}}, \text{ então}$$

$$l(\sigma) = l(\gamma) = \frac{2\pi}{\sqrt{1+c^2}},$$

o que implica  $l(\sigma) = l(\partial D)$ . Logo, vale a igualdade  $\Omega = D$ , ou seja,  $(\bar{B}, e^{2v}|dz|^2)$  é isométrico a  $(D, |dz|^2)$ . Em particular, a curvatura geodésica de seus bordos coincidem, ou seja, a curvatura do bordo de  $(\bar{B}, |dz|^2)$  é igual a curvatura geodésica de um círculo de raio  $\cotg^{-1}(c)$  na esfera unitária. Assim, pela equação (2.10), pág. 34, a curvatura geodésica do bordo de  $(\bar{B}, |dz|^2)$  é constante e igual a  $c$ . Portanto, a equação (2.11), para o caso das métricas conformes  $e^{2v}|dz|^2$  e  $|dz|^2$ , nos diz que

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + 1 = ce^v.$$

Como

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + 1 \geq \frac{\partial u}{\partial \eta} + 1 \geq ce^u = ce^v,$$

todas as desigualdades acima são na verdade igualdades. Em particular,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Usando Lema de Hopf e o Princípio do Máximo, segue que  $u = v$  em  $\bar{B}$ . Logo,  $(\bar{B}, e^{2u}|dz|^2)$  é isométrico a  $(D, |dz|^2)$ . Portanto,  $(M, g)$  é isométrico a um disco geodésico de raio  $\cot g^{-1}(c)$  em  $\mathbb{S}^2$ .  $\square$

**Corolário 3.2.1** (Hang-Wang, Caso Bidimensional). *Seja  $(M^2, g)$  uma superfície compacta com bordo  $\gamma = \partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos que*

- (i) *A curvatura Gaussiana satisfaz  $K \geq 1$ ;*
- (ii)  *$\gamma$  é isométrico a  $\mathbb{S}^1$ ;*
- (iii) *A segunda forma fundamental do bordo é não-negativa.*

*Então  $(M, g)$  é isométrico a  $\mathbb{S}_+^2 \subset \mathbb{R}^3$ .*

*Demonstração.* Observemos que a condição (ii) nos diz que  $l(\gamma) = 2\pi$  e (iii) implica que a curvatura geodésica de  $\gamma$  satisfaz  $k_g \geq 0$ . O resultado segue direto do caso da igualdade no teorema acima.  $\square$

Também como corolário temos o seguinte resultado.

**Corolário 3.2.2** (Topogonov). *Seja  $M^2$  uma superfície fechada com curvatura Gaussiana  $K \geq 1$ . Então qualquer geodésica fechada simples em  $M$  tem comprimento no máximo  $2\pi$ . Além disso, se existe uma geodésica fechada simples com comprimento  $2\pi$ , então  $M$  é isométrico a  $\mathbb{S}^2$ .*

*Demonstração.* Seja  $\gamma$  uma geodésica fechada simples em  $M$ . Cortando  $M$  ao longo de  $\gamma$  obtemos duas superfícies compactas com a geodésica  $\gamma$  como bordo comum. O resultado segue aplicando o Teorema 3.2.1 a cada uma das duas superfícies com bordo.  $\square$

### 3.3 O Teorema de Hang-Wang; Caso Geral

Agora apresentaremos uma prova do Teorema de Hang-Wang para  $n > 2$ . Recordemos seu enunciado.

**Teorema 3.3.1** (Hang-Wang, [3]). *Seja  $(M^n, g)$  uma variedade Riemanniana compacta com bordo  $\Sigma = \partial M \neq \emptyset$ . Suponhamos que*

- (i) *O tensor curvatura de Ricci satisfaz  $\text{Ric} \geq (n - 1)g$ ;*
- (ii)  *$(\Sigma, g|_\Sigma)$  é isométrico a  $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ ;*
- (iii) *A segunda forma fundamental de  $\Sigma$  é não-negativa.*

*Então,  $(M^n, g)$  é isométrico a  $\mathbb{S}_+^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ .*

Antes de iniciarmos a demonstração do Teorema 3.3.1, observemos que as funções coordenadas na esfera  $\mathbb{S}^n$  satisfazem

$$\begin{cases} |\nabla x_i|^2 + x_i = 1 \\ \text{Hess } x_i = -x_i g_0, \end{cases}$$

como vimos nas equações (2.5) e (2.6), pág. 30 e 31.

Considerando o hemisfério  $x_{n+1} \geq 0$ , temos

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{n+1}} = 0 \quad \text{para } i \neq n + 1.$$

Além disso, independentemente da direção da geodésica  $\gamma_v$  que passa pelo ponto  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ , que é o ponto de máximo para função  $x_i$ ,  $x_i(\gamma_v(t))$  não depende de  $v$ , depende somente de  $t$ . Para sermos mais precisos,  $x_i(\gamma_v(t)) = \cos t$ .

Veremos que o fato de possuir alguma função com estas propriedades caracteriza o hemisfério.

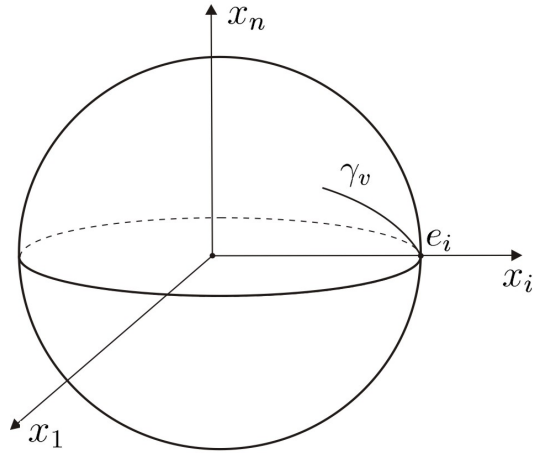


Figura 3.3:

A prova apresentada será por contradição. Vamos admitir as hipóteses do Teorema 3.3.1 e supor, por absurdo, que o primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$  satisfaz  $\lambda_1 > n$ . A partir disso, provaremos uma série de lemas que nos levarão a um absurdo. Daí saberemos que nossa hipótese  $\lambda_1 > n$  será falsa e então utilizaremos o Teorema de Reilly para concluir. Iniciemos formalmente a demonstração.

Admitamos as hipóteses do Teorema 3.3.1 e suponhamos que o primeiro autovalor  $\lambda_1$  de  $-\Delta$ , relacionado ao problema de Dirichlet, satisfaz  $\lambda_1 > n$ . Logo, para qualquer  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , existe uma única  $u \in C^\infty(M)$  satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta u = nu & \text{sobre } M, \\ u = f & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Isto segue da Alternativa de Fredholm, como vimos na Observação 1.7.2, pág. 22.

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto |\nabla u|^2(p) + u^2(p). \end{aligned}$$

Vamos agora obter algumas propriedades da função  $\phi$ .

**Lema 3.3.1.** *A aplicação  $\phi = |\nabla u|^2 + u^2$  é subharmônica, isto é,  $\Delta\phi \geq 0$ .*

*Demonstração.* Lembrando que  $\Delta u^2 = 2u\Delta u + 2|\nabla u|^2$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\phi &= \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}\Delta u^2 \\
&= |\text{Hess } u|^2 + \langle \nabla u, \nabla \Delta u \rangle + \text{Ric}(\nabla u, \nabla u) + u\Delta u + |\nabla u|^2 \\
&\geq |\text{Hess } u|^2 - n|\nabla u|^2 + (n-1)|\nabla u|^2 - nu^2 + |\nabla u|^2 \\
&= |\text{Hess } u|^2 - nu^2 \\
&\geq \frac{(\Delta u)^2}{n} - nu^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a fórmula de Bochner e na segunda desigualdade usamos a Observação 2.1.1.  $\square$

Denotemos por  $\chi = \frac{\partial u}{\partial \eta}$ , a derivada sobre o bordo na direção do campo normal unitário  $\eta$  apontando para fora.

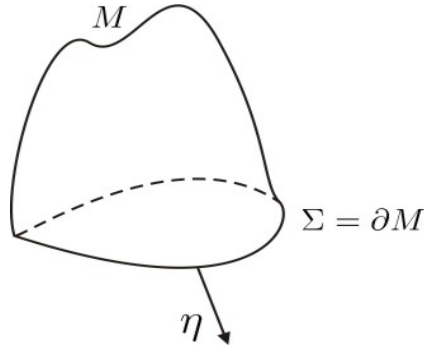


Figura 3.4: Vetor normal unitário apontando para fora.

Observemos que  $\eta$  é único, pois  $\dim \Sigma = \dim M - 1$ .

Pela hipótese (ii) do Teorema 3.3.1, existe uma isometria

$$F : (\Sigma, g|_{\Sigma}) \rightarrow (\mathbb{S}^{n-1}, g_0). \quad (3.9)$$

Consideremos  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \circ F$ , onde  $x_1, \dots, x_n$  são as funções coordenadas sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

Usando o fato de que o Laplaciano e o gradiente são invariantes por isometrias, as equações (2.7) e (2.8), pág. 32, nos dizem que

$$-\Delta^\Sigma f = (n-1)f \quad \text{e} \quad |\nabla^\Sigma f|^2 + f^2 = 1,$$

onde  $\Delta^\Sigma$  e  $\nabla^\Sigma$  denotam o Laplaciano e o gradiente de  $\Sigma$ , respectivamente. Agora como  $u = f$  sobre  $\Sigma$ ,  $(\nabla u)|_\Sigma = \nabla^\Sigma f + \chi\eta$ . Daí,

$$\phi|_\Sigma = |(\nabla u)|_\Sigma|^2 + u^2|_\Sigma = |\nabla^\Sigma f|^2 + \chi^2 + f^2 = 1 + \chi^2. \quad (3.10)$$

Tomando um referencial ortonormal  $\{E_i\}_{i=1}^n$ , com  $E_n = \eta$ , observamos que

$$\begin{aligned} (\Delta u)|_\Sigma &= \sum_{i=1}^{n-1} \text{Hess } u(E_i, E_i) + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \nabla u, E_i \rangle + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} (\nabla f + \chi\eta), E_i \rangle + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \nabla f, E_i \rangle + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \chi\eta, E_i \rangle + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= \Delta^\Sigma f + \sum_{i=1}^{n-1} \langle E_i(\chi)\eta + \chi \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= \Delta^\Sigma f + \chi \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} \eta, E_i \rangle + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= \Delta^\Sigma f + \chi \mathcal{H} + \text{Hess } u(\eta, \eta), \end{aligned}$$

onde  $\mathcal{H}$  é a curvatura média de  $\Sigma = \partial M$ .

Assim, sobre  $\Sigma$  temos

$$\begin{aligned} -nf = (\Delta u)|_\Sigma &= \Delta^\Sigma f + \chi \mathcal{H} + \text{Hess } u(\eta, \eta) \\ &= -(n-1)f + \mathcal{H}\chi + \text{Hess } u(\eta, \eta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Hess } u(\eta, \eta) + f = -\mathcal{H}\chi. \quad (3.11)$$



**Lema 3.3.2.** *Sobre  $\Sigma$  vale*

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \langle \nabla^\Sigma f, \nabla^\Sigma \chi \rangle - \mathcal{H}\chi^2 - II(\nabla^\Sigma f, \nabla^\Sigma f).$$

*Demonstração.* Como  $\phi = |\nabla u|^2 + u^2 = \langle \nabla u, \nabla u \rangle + u^2$ , então

$$\begin{aligned} \left. \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_\Sigma &= \langle \nabla_\eta \nabla u, \nabla u \rangle|_\Sigma + f\chi \\ &= \langle \nabla_\eta \nabla u, \nabla f + \chi\eta \rangle + f\chi \\ &= \langle \nabla_\eta \nabla u, \nabla f \rangle + \chi \langle \nabla_\eta \nabla u, \eta \rangle + \chi f \\ &= \langle \nabla_\eta \nabla u, \nabla f \rangle + \chi \text{Hess } u(\eta, \eta) + \chi f \\ &= \langle \nabla_{\nabla f} \nabla u, \eta \rangle + \chi(-\mathcal{H}\chi) \\ &= \langle \nabla_{\nabla f} \nabla u, \eta \rangle - \mathcal{H}\chi^2, \end{aligned}$$

onde na quinta igualdade usamos a equação (3.11) e fato do Hessiano ser simétrico. Agora observemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla u, \eta \rangle &= \nabla f \langle \nabla u, \eta \rangle - \langle \nabla u, \nabla_{\nabla f} \eta \rangle \\ &= \nabla f \langle \nabla f + \chi\eta, \eta \rangle - \langle \nabla f + \chi\eta, \nabla_{\nabla f} \eta \rangle \\ &= \nabla f \langle \nabla f, \eta \rangle + \nabla f(\chi) - \langle \nabla f, \nabla_{\nabla f} \eta \rangle - \chi \langle \eta, \nabla_{\nabla f} \eta \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\nabla f \langle \nabla f, \eta \rangle \equiv 0 \quad \text{e} \quad \langle \eta, \nabla_{\nabla f} \eta \rangle = \frac{1}{2} \nabla f \langle \eta, \eta \rangle \equiv 0$$

por serem

$$\langle \nabla f, \eta \rangle \quad \text{e} \quad \langle \eta, \eta \rangle \quad \text{constantes.}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\nabla f} \nabla u, \eta \rangle &= \nabla f(\chi) - \langle \nabla f, \nabla_{\nabla f} \eta \rangle \\ &= \langle \nabla f, \nabla \chi \rangle - II(\nabla f, \nabla f). \end{aligned}$$

Portanto, sobre  $\Sigma$ ,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \langle \nabla f, \nabla \chi \rangle - \mathcal{H}\chi^2 - II(\nabla f, \nabla f).$$

□

**Lema 3.3.3.** *A função  $\phi = |\nabla u|^2 + u^2$  é constante e  $\text{Hess } u = -ug$ . Além disso,  $\chi = \frac{\partial u}{\partial \eta}$  é constante e  $II(\nabla f, \nabla f) \equiv 0$ .*

*Demonstração.* Como vimos no Lema 3.3.1,  $\Delta \phi \geq 0$ . Portanto, usando o Princípio do Máximo Fraco,  $\phi$  atinge um máximo em algum ponto sobre  $\Sigma$ , digamos em  $p \in \Sigma$ . Logo, temos

$$\nabla^\Sigma \phi(p) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) \geq 0.$$

Se  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) = 0$ , então o Lema de Hopf e o Princípio do Máximo implicam  $\phi$  é constante. Em particular  $\Delta \phi = 0$ . Daí, pela demonstração do Lema 3.3.1 ocorre a igualdade  $|\text{Hess } u|^2 = \frac{(\Delta u)^2}{n}$  e pela Observação 2.1.1 segue que

$$\text{Hess } u = \frac{\Delta u}{n} g = -\frac{nu}{n} g = -ug.$$

Como  $\phi|_\Sigma = 1 + \chi^2$ ,  $\chi$  também é constante. Pelo Lema 3.3.2, temos

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) = -\mathcal{H}\chi^2 - II(\nabla f, \nabla f) \leq 0,$$

pois, por hipótese, a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  é não-negativa, donde concluímos que  $II(\nabla f, \nabla f) \equiv 0$ .

Agora vamos mostrar que não é possível  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) > 0$ . Com efeito, temos três possibilidades para o valor de  $\chi$  em  $p$ :  $\chi(p) = 0$ ,  $\chi(p) > 0$  ou  $\chi(p) < 0$ .

Se  $\chi(p) = 0$ , como  $\phi|_\Sigma = 1 + \chi^2$  e  $p$  é ponto de máximo para  $\phi$ , então  $\chi \equiv 0$ . Pelo Lema 3.3.2, segue que

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) = -II(\nabla f, \nabla f) \leq 0.$$

Se  $\chi(p) > 0$  ( $< 0$ ), então, por termos  $\phi|_\Sigma = 1 + \chi^2$  e  $p$  ser ponto de máximo para  $\phi$ ,  $\chi$  atinge máximo (mínimo) em  $p$ . Daí,  $\nabla \chi(p) = 0$  e pelo Lema 3.3.2,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) = -\mathcal{H}\chi^2 - II(\nabla f, \nabla f) \leq 0.$$

Logo, em qualquer situação, temos  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) \leq 0$ . Como já sabemos que  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) \geq 0$ , então  $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}(p) = 0$  e, portanto, o lema está provado.  $\square$

Recordemos que  $f$  depende do vetor unitário  $\alpha \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Para indicar essa dependência adicionaremos  $\alpha$  à notação.

No lema anterior, mostramos que  $II(\nabla f_\alpha, \nabla f_\alpha) \equiv 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Afirmção.**  $II \equiv 0$ , ou seja, o bordo  $\Sigma$  é totalmente geodésico.

De fato, como  $\{\nabla x_1(q), \dots, \nabla x_n(q)\}$  gera  $T_q \mathbb{S}^{n-1}$  para todo  $q \in \mathbb{S}^{n-1}$ , então  $\{\nabla(x_1 \circ F)(p), \dots, \nabla(x_n \circ F)(p)\}$  gera  $T_p \Sigma$  para todo  $p \in \Sigma$ , onde  $F$  é a isometria existente entre  $\Sigma$  e  $\mathbb{S}^{n-1}$ .

Assim, dado  $0 \neq X \in \mathcal{X}(\Sigma)$ , podemos escrever

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \nabla(x_i \circ F),$$

com  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Denotando  $\alpha = \frac{a}{|a|}$ , temos  $\alpha \in \mathbb{S}^{n-1}$  e assim

$$X = \sum_{i=1}^n a_i \nabla(x_i \circ F) = |a| \nabla f_\alpha.$$

Como  $II(\nabla f_\alpha, \nabla f_\alpha) \equiv 0$  para todo  $\alpha \in \mathbb{S}^{n-1}$ , então  $II(X, X) \equiv 0$  para todo campo de vetores  $X$  em  $\Sigma$ . Portanto  $II \equiv 0$ , ou seja,  $\Sigma$  é totalmente geodésico.

**Afirmção.** Podemos escolher  $\beta \in \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $\chi_\beta \equiv 0$ .

Com efeito, como vimos no lema anterior, para qualquer  $\alpha \in \mathbb{S}^{n-1}$ , a função  $\chi_\alpha$  é constante. Assim, podemos ver  $\alpha \mapsto \chi_\alpha$  como uma função contínua definida sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$  tomando valores reais. Claramente  $u_{-\alpha} = -u_\alpha$ , pois dada  $f_{-\alpha}$ , existe uma única função  $u_{-\alpha}$  que satisfaz  $-\Delta u_{-\alpha} = n u_{-\alpha}$  sobre  $M$  e  $u_{-\alpha} = f_{-\alpha}$  sobre  $\Sigma$ , como  $f_{-\alpha} = -f_\alpha$ , então  $-u_\alpha$  satisfaz essas condições. Assim,  $\chi_{-\alpha} = -\chi_\alpha$ . Portanto, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $\beta \in \mathbb{S}^{n-1}$  tal que  $\chi_\beta \equiv 0$ .

Com esta escolha em particular de  $f = f_\beta$  e  $u = u_\beta$ , temos

$$\begin{cases} \text{Hess } u &= -ug \\ \chi &\equiv 0. \end{cases}$$

Como  $f$  é contínua definida sobre  $\Sigma$ , existe  $q \in \Sigma$  tal que  $f(q) = \max_{\Sigma} f$ . Logo,  $\nabla f(q) = 0$ .

Como  $|\nabla f(q)|^2 + f(q)^2 = 1$ , então  $f(q) = 1$  ou  $f(q) = -1$ . Afirmamos que  $f(q) = 1$ , pois caso contrário, considerando  $r \in \Sigma$  tal que  $F(r) = -F(q)$ , ou seja, tomando o ponto de  $\Sigma$  que é levado no ponto antípoda de  $F(q)$ , teríamos

$$f(r) = \sum_i \alpha_i x_i \circ F(r) = - \sum_i \alpha_i x_i \circ F(q) = -f(q) = -(-1) = 1$$

e  $q$  não seria ponto de máximo. Portanto,  $f(q) = \max f = 1$ .

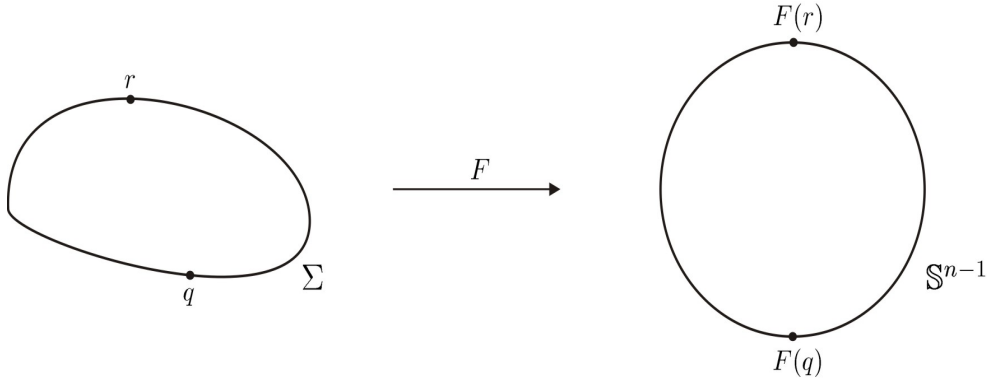


Figura 3.5:

Como  $\nabla f(q) = 0$ , então  $\nabla u(q) = 0$ , pois  $\chi \equiv 0$ .

Para cada  $v \in T_q M$  tal que  $|v| = 1$  e  $\langle v, \eta(q) \rangle \leq 0$ , seja  $\gamma_v$  a geodésica normalizada com  $\gamma_v(0) = q$ ,  $\gamma_v'(0) = v$  e definamos a função  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $U(t) = u \circ \gamma_v(t)$ . A função  $U$  satisfaz

$$\begin{cases} U(0) = 1, \\ U'(0) = 0, \\ U''(t) = -U(t). \end{cases}$$

Com efeito

$$\begin{aligned}
U(0) &= u \circ \gamma_v(0) = u(q) = f(q) = 1; \\
U'(t) &= \langle \nabla u \circ \gamma_v(t), \gamma_v'(t) \rangle \Rightarrow U'(0) = \langle \nabla u(q), v \rangle = 0; \\
U''(t) &= \frac{d}{dt} \langle \nabla u \circ \gamma_v(t), \gamma_v'(t) \rangle \\
&= \langle \nabla_{\gamma_v'} \nabla u \circ \gamma_v, \gamma_v' \rangle + \langle \nabla u \circ \gamma_v(t), \nabla_{\gamma_v'} \gamma_v' \rangle \\
&= \text{Hess } u \circ \gamma_v(\gamma_v', \gamma_v') \\
&= -(u \circ \gamma_v)g(\gamma_v', \gamma_v') \\
&= -u \circ \gamma_v(t) \\
&= -U(t).
\end{aligned}$$

Portanto,  $U(t) = \cos t$ , o que implica que  $u = \cos r$ , onde  $r$  é função distância a  $q$ .

Como o bordo é totalmente geodésico e a variedade é completa, por ser compacta, segue do Teorema de Hopf e Rinow que qualquer ponto em  $M$  pode ser unido a  $q$  por uma geodésica minimizante.

Usando coordenadas geodésicas polares  $(r, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}_+^{n-1}$  em  $q$ , podemos escrever

$$g = dr^2 + g_r,$$

onde  $g_r$  é uma  $r$ -família de métricas sobre  $\mathbb{S}_+^{n-1}$  com

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{-2} g_r = g_0,$$

aqui  $g_0$  é a métrica canônica sobre  $\mathbb{S}_+^{n-1}$ .

Como  $\nabla r$  é normal às curvas de nível,  $\nabla r(p)$  é normal à esfera geodésica de centro em  $q$  e raio  $r(p)$ .

Como  $u = \cos r$ , segue que  $\nabla u = -\sin r \nabla r$ .

Derivando covariantemente com respeito a  $X \in \mathcal{X}(M)$ , temos

$$\begin{aligned}
\nabla_X \nabla u &= \nabla_X (-\sin r \nabla r) \\
&= X(-\sin r) \nabla r - \sin r \nabla_X \nabla r \\
&= -\cos r \langle X, \nabla r \rangle \nabla r - \sin r \nabla_X \nabla r.
\end{aligned}$$

Daí, para  $Y \in \mathcal{X}(M)$ ,

$$\langle \nabla_X \nabla u, Y \rangle = -\cos r \langle X, \nabla r \rangle \langle Y, \nabla r \rangle - \sin r \langle \nabla_X \nabla r, Y \rangle.$$

Denotemos por  $II_r$  a segunda forma fundamental da esfera geodésica de centro em  $q$  e raio  $r$ . Tomando  $X, Y$  campos tangentes às esferas geodésicas, temos  $\langle X, \nabla r \rangle = \langle Y, \nabla r \rangle = 0$ . Assim

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X \nabla u, Y \rangle &= -\operatorname{sen} r \langle \nabla_X \nabla r, Y \rangle \\ \Rightarrow \operatorname{Hess} u(X, Y) &= -\operatorname{sen} r II_r(X, Y) \\ \Rightarrow -\operatorname{sen} r II_r(X, Y) &= -u g_r(X, Y) = -\operatorname{cos} r g_r(X, Y). \end{aligned}$$

Logo,

$$II_r = \operatorname{cotgr} g_r. \quad (3.12)$$

Estamos interessados em saber como a métrica  $g_r$  varia ao longo das esferas geodésicas, ou seja, dada uma geodésica radial  $\gamma$  e um campo de vetores  $Y$  tangente às esferas geodésicas, queremos conhecer

$$\nabla r g_r(Y, Y) = 2 \langle \nabla_{\nabla r} Y, Y \rangle.$$

Para isso gostaríamos de poder trocar  $\nabla_{\nabla r} Y$  por  $\nabla_Y \nabla r$ , para obtermos a segunda forma fundamental das esferas geodésicas que já conhecemos. Mas sempre podemos fazer essa troca, pois tomando a superfície parametrizada

$$f(t, s) = \exp_{\gamma(t)} sY(t),$$

temos

$$\frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = Y(t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, 0) = \gamma'(t) = \nabla r(\gamma(t))$$

como campos coordenados. Assim,

$$\begin{aligned} \nabla r g_r(Y, Y) &= 2II_r(Y, Y) \\ &= 2\operatorname{cotgr} g_r(Y, Y). \end{aligned}$$

Logo,  $g_r = \operatorname{sen}^2 r g_0$  e, portanto,

$$g = dr^2 + \operatorname{sen}^2 r g_0.$$

Donde segue que  $(M^n, g)$  é isométrica a  $\mathbb{S}_+^n$ , o que implica  $\lambda_1 = n$  e isto contradiz a hipótese  $\lambda_1 > n$ .

**Demonstração do Teorema 3.3.1.** O fato da segunda forma fundamental  $II$  ser não-negativa, implica, em particular, que a curvatura média  $\mathcal{H}$  é não-negativa.

Como  $\mathcal{H} \geq 0$  e  $\operatorname{Ric} \geq (n-1)g$ , então pelo Teorema de Reilly, o primeiro autovalor do Laplaciano  $-\Delta$  satisfaz  $\lambda_1 \geq n$ . Mas pelo que vimos acima, não podemos ter  $\lambda_1 > n$ . Logo,  $\lambda_1 = n$  e, portanto,  $(M^n, g)$  é isométrico a  $\mathbb{S}_+^n$ .

□

# Referências Bibliográficas

- [1] do Carmo, M., *Geometria Diferencial das Curvas e Superfícies*. 2<sup>a</sup>ed. Rio de Janeiro: Textos Universitários, SBM, 2005.
- [2] do Carmo, M., *Geometria Riemanniana*. 4<sup>a</sup>ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, IMPA, 2008.
- [3] Hang, F & Wang, X., *Rigidity Theorems for Compact Manifolds with Boundary and Positive Ricci Curvature*. Journal of Geometric Analysis, Volume 19, Number 3 / July (2009), 628-642.
- [4] Li, P., *Lectures Notes on Geometric Analysis*. 2009.
- [5] Reilly, R., *Applications of the Hessian Operator in a Riemannian Manifold*. Indiana University Mathematical Journal 23 (1977), 459-472.
- [6] Schoen, R. & Yau, S.T., *Lectures on Differential Geometry*. International Press, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, volume I, USA, 1994.
- [7] Aubin, T., *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*. 1<sup>a</sup>ed. Springer Monographs Mathematics, 1998.
- [8] Gilbarg, D. & Trudinger, N., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 3<sup>a</sup>ed. Classics in Mathematics, Springer, 2001.

# Índice Remissivo

- Alternativa
  - de Fredholm, 22
- Aplicação
  - exponencial, 9
- Autovalor
  - do Laplaciano, 21
- Bola
  - normal, 11
- Campo
  - de Jacobi, 12
  - paralelo, 6
- Conexão
  - Riemanniana, 3
- Curvatura, 7
  - de Ricci, 8
  - escalar, 8
  - média, 17
  - seccional, 8
- Derivada
  - covariante, 5
- Disco
  - geodésico, 11
- Esfera
  - geodésica, 11
- Fórmula
  - de Bochner, 28
  - de Reilly, 43
- Função
  - subharmônica, 20
  - superharmônica, 20
- Geodésica, 9
  - minimizante, 10
  - radial, 11
- Hessiano, 25
- Imersão
  - geodésica, 16
  - totalmente geodésica, 16
- Laplaciano, 25
- Lema
  - de Hopf, 21
- Método
  - da Solução Sub-Sup, 24
- Métricas
  - conformes, 34
- Operador
  - elíptico, 20
  - estritamente elíptico, 20
  - uniformemente elíptico, 20
- Princípio
  - do Máximo, 21
  - do Máximo Fraco, 21
- Referencial, 6
  - geodésico, 7
  - ortonormal, 7
- Símbolos
  - de Christoffel, 4
- Segunda
  - forma fundamental, 16



Superfície  
  parametrizada, 10

Teorema  
  de Hang-Wang; Caso bidimensional, 59  
  de Hang-Wang; Caso geral, 60  
  de Hopf e Rinow, 10  
  de Reilly, 54

Variedade  
  Completa, 9  
  diferenciável com bordo, 18  
  Riemanniana  
    compacta com bordo, 19

Vizinhança  
  normal, 11  
  totalmente normal, 11