Instituto de Matemática
Universidade Federal de Alagoas

Existência e Estabilidade de Soluções do Tipo Ondas Solitárias para a Equação Korteweg-de Vries (KdV)

autor: Isnaldo Isaac Barbosa

orientador: Amauri da Silva Barros

Outubro, 2009

Existência e Estabilidade de Soluções do Tipo Ondas Solitárias para a Equação Korteweg-de Vries (KdV)

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 06 de outubro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adán José Corcho Fenández-UFAL

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves-UFCG

Prof. Dr. Amauri da Silva Barros (Orientador)-UFAL

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

B238e Barbosa, Isnaldo Isaac.
Existência e estabilidade de soluções do tipo ondas solitárias para a equação Korteweg-DE Vries (KdV) / Isnaldo Isaac., 2009.
68 f.

Orientador: Amauri da Silva Barros.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 67-68.

1. Equações diferenciais. 2. Ondas (Matemática). I. Título.

CDU: 517.9

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me tirado do lamaçal do pecado e posto nos seus caminhos. Agradeço a minha amada, Sirlene Vieira de Souza, que esteve sempre ao meu lado nos momentos felizes e nos momentos tristes. Agradeço também aos Professor Doutores Amauri Barros, Adán Corcho, Krerley Oliveira, Marcos Petrúcio, Adelaílson Peixoto e Adriano Aguiar pela grande contribuição e incentivo que foi dada à minha formação acadêmica e profissional. Quero agradeçe ao Marcos Petrúcio, aos Professores Mestres Paulo Lemos, Francisco Barros e Adroaldo Dorvillé pelos excelentes cursos ministrados, em particular ao último, responsável por quatro disciplinas importantes na minha formação.

Agradeço aos amigos que ganhei durante o curso de Mestrado em Matemática pelas boas conversas, ambiente agradável e críticas construtivas.

Agradeço aos meus companheiro de todas as horas: Adriano Barbosa, Karla Katerine, Abrãao Rêgo, Joab Jucá e Gregório Manoel, pela amizade e apoio. Gostaria de citar todos que contribiram para esta conquista mas isto consumiria muitas páginas.

Resumo

Neste trabalho demonstraremos um teorema de Boa Colocação Local e em seguida de Boa Colocação Global para a Equação Korteweg-de Vries nos espaços de Sobolev fazendo uso das leis de conservação desta equação, das propriedades do grupo associada a mesma e de algumas estimativas obtidas por Kenig, Ponce e Vega em ([6]). Demonstraremos ainda a existência e estabilida de soluções tipo ondas solitárias para a Equação Korteweg-de Vries, para obter o resultado de estabilidade usamos o Lema de Compacidade Concentrada de P. Lions, nesta parte o resultado de boa colocação global é utilizado de forma essencial, assim como as leis de conservação para esta equação, pois para utilizar esta técnica resolvemos um problema variacional de minimização. A última parte desta dissertação esta baseada no trabalho de Jonh Albert ([20]).

Abstract

In this paper we demonstrate a theorem of Well-Posedness Local and followed by Well-Posedness Global Equation Korteweg-de Vries in Sobolev spaces by making use of conservation laws of this equation, the properties of the group associated with it, and some estimates obtained by Kenig , Ponce and Vega in ([6]). We also demonstrated the existence and stability of solitary wave type solutions for Equation Korteweg-de Vries, to obtain the result of stability we use the lemma Concentrated compactness of P. Lions, in part the result of good global placement is used in a critical, and the conservation laws for this equation, because using this technique to solve a variational minimization problem. Latter part of this thesis is based on the work of John Albert ([20]).

Sumário

Introdução

Nossa proposta neste trabalho é estudar um resultado de boa colocação global e as propriedades de existência e estabilidade de soluções tipo ondas solitárias para a Equação de Korteweg-de Vries (KdV)

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

para $x, t \in \mathbb{R}$ e $u(x,t) \in \mathbb{R}$, ou seja, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Associado a esta equação temos o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} & = & 0, \\ u(x,0) & = & u_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

A equação (1) possui infinitas leis de conservação, sendo duas delas muito úteis, a saber, o **momento**

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

e a **energia**

$$E(u) = \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} \left[(u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3\right] dx\right).$$

Estas duas quantidades são importantes tanto na demonstração da boa colocação global, como na investigação de estabilidade.

Destacamos que cronologicamente, o primeiro tratamento matemático do problema da estabilidade de ondas solitárias foi feito por Jeseph Valentin Boussinesq, em 1871, com relação às ondas solitárias associadas à equação

$$u_{tt} - ghu_{xx} - gh\left(\frac{3u^2}{2h} + h^2\frac{u_{xx}}{3}\right)_{xx} = 0. \tag{3}$$

Tal equação, que viria a ser conhecida como equação de Boussinesq clássica, modela a propagação unidimensional de ondas de água ao longo de um canal com fundo plano e profundidade constante h, as quais têm um largo comprimento de onda e uma pequena amplitude em comparação com h. Assim, a elevação u da superfície de água, considerada como função da coordenada x ao longo do canal e do tempo t, satisfaz aproximadamente à equação (3), onde g é a aceleração gravitacional. Usando esta equação, Boussinesq obteve uma representação explícita de ondas solitárias,

$$u(x,t) = \phi(x - ct),$$

em termos de funções elementares, a saber, $\phi(z) = k_1(c)\text{sech}^2(k_2(c)z)$, onde $k_1(c) = 3c/2$, $k_2(c) = c/2$. O tipo de estabilidade que Boussinesq estudou foi aquele chamado de **estabilidade orbital**, o qual consiste essencialmente em ver que uma pequena pertubação da onda solitária ϕ irá evoluir pelo fluxo gerado por (3) sem fortes mudanças de forma e perto da onda ϕ, para todo tempo t. Atualmente, sabe-se que seus resultados formais continham algumas lacunas.

A primeira prova rigorosa da estabilidade de ondas solitárias assoaciada à equação de evolução não-lineares apareceu um século mais tarde, em 1972, apresentada por T. B. Benjamim, sobre as ondas solitárias associadas à equação KdV (1). Tais ondas são dadas por

$$\phi(x - ct) = k_1(c)\text{sech}^2(k_2(c)(x - ct)). \tag{4}$$

Quanto a resultados de Boa Colocação Local e Global, Kenig, Ponce e Vega, fazendo uso do Lema de Compacidade Concentrada de Lions nos espaços de Bourgain tem obtidos bons resultados, apresentaremos alguns resultados neste dissertação.

No primeiro capítulo desta dissertação apresentamos os resultados que serão utilizados no decorrer deste trabalho. No capítulo seguinte apresentamos as ferramentas a serem usadas para se obter a boa colocação local e em seguida global para a equação KdV nos espaços de Sobolev. Iniciamos o último capítulo mostrando a existência de soluções tipo onda solitária para a equação KdV, em seguida apresentamos o Lema de Compacidade Concentrada de Lions o qual não demonstramos. Porém explicamos como usaremos o mesmo para obtermos o resultado de estabilidade. Por fim, encerramos este capítulo demonstrando que as soluções tipo onda solitária formam um conjunto orbitalmente estável em $\mathbf{H}^1(\mathbb{R})$, obeservando que

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}$$

com respeito ao fluxo gerado pela equação KdV (1).

Para o bom entendimento do que pretendemos fazer, segue abaixo a definição do que entendemos por Boa Colocação.

Definição 0.1 *(Boa Colocação) Dados X e Y dois espaços de Banach e $T_0 \in (0, +\infty)$, dizemos que o problema de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t u(t) & = & F(t, u(t)) \in X, \\ u(0) & = & \phi \in Y. \end{array}\right. \tag{5}$$

*onde $F : [0, T_0] \times Y \longrightarrow X$ é uma função contínua, é **localmente bem posto** se*

(a) existe $T \in (0, T_0]$ e uma função $u \in C([0, T]; Y)$ tal que $u(0) = \phi$ e a equação diferencial é satisfeita no sentido que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - F(t, u(t)) \right\|_X = 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

onde as derivadas em 0 e T são calculdas à direita e à esquerda;

(b) o problema (5) tem, no máximo, uma solução em $C([0, T]; Y)$;

(c) a aplicação $\phi \longmapsto u$ é contínua. Mais precisamente, sejam $\phi_n \in Y$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\phi_n \overrightarrow{Y} \phi_\infty$, e sejam $u_n \in C([0, T_n]; Y)$ as correspondentes soluções. Seja $T \in (0, T_\infty)$. Então as soluções u_n podemser estendidas ao intervalo $[0, T]$ para todo n suficientemente grande e

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{t \in [0, T]} \|u_n(t) - u(t)\|_Y = 0.$$

*Se qualquer uma dessas condições não for satisfeita, o problema é dito **mal-posto**.*

Os principais resultados deste trabalho são:

Teorema de Boa Colocação Local

Consideremos o PVI (2.16) *e seja $s > 3/4$. Então para cada $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ existe $T = T(||u_0||_{\mathbf{H}^s}) > 0$ (com $T(\rho) \to \infty$ para $\rho \to 0$) e uma única solução $u(t)$ de* (2.16) *satisfazendo*

$$u \in C([-T, T] : H^s(\mathbb{R})), \tag{6}$$

$$\partial_x u \in L^4([-T, T] : L^\infty(\mathbb{R})), \tag{7}$$

$$\left\| D_x^s \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{8}$$

$$\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty. \tag{9}$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0, T)$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^s(\mathbb{R})$ tal que a função $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}(t)$ de V sobre a classe definida por (2.17)-(2.20) *com T' no lugar de T é Lipschitz.*

Teorema de Boa Colocação Global

Se $s \in \mathbb{N}$*, então o PVI* (2) *é globalmente bem posto em* $\mathbf{H}^s(\mathbb{R})$.

Teorema de Estabilidade Orbital

Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ *tal que se*

$$\|u_0 - \phi_c\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} < \delta,$$

então a solução $u(x,t)$ *do PVI* (2) com $u(x,0) = u_0$ *satisfaz*

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} \|u(\cdot,t) - \phi_c(\cdot + y)\|_{\mathbf{H}^1(\mathbb{R})} < \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

1 Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo apresentar a teoria necessária para o desenvolvimento dos capítulos posteriores deste trabalho.

1.1 Resultados Básicos

Nesta seção escreveremos algumas desigualdades e teoremas que serão aplicados nos próximos capítulos.

Iniciamos fixando a notação de alguns espaços de funções.

O conjunto de todas as funções de $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis e sua k-ésima derivada é contínua será denotado por $C^k(U)$. O conjunto das funções de $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis será donotado por $C^\infty(U)$. Quando escrevermos $C_0^k(U)$ estaremos falando das funções que pertencem a $C^k(U)$ porém tendem a zero quando a variável independente se aproxima da fronteira do conjunto. Analogamente, definimos $C_0^\infty(U)$.

Agora definimos os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1 *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $U \subset \mathbb{R}^n$. Denotaremos por $L^p(U)$ o conjunto de todas as funções $f : U \to \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que*

$$\|f\|_{L^p(U)} = \begin{cases} \left(\int_U |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty, \ \textit{se } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in U} |f(x)| < \infty, \ \textit{se } p = \infty. \end{cases} \tag{1.1}$$

Nos espaços $L^p(U)$ temos as seguites desigualdades:

Lema 1.1 *Considere* $p, q \geq 1$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(i) **Desigualdade de Hölder:** *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R})$*. Então* $fg \in L^1(\mathbb{R})$ *e*

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})} . \tag{1.2}$$

(ii) **Desigualdade Integral de Minkowski:**

$$\left\{ \int_{\mathbb{X}} \left(\int_{\mathbb{Y}} |f(x,y)| \, dx \right)^p dy \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \int_{\mathbb{Y}} \left(\int_{\mathbb{X}} |f(x,y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

(iii) **Desigualdade de Young:** *Dados* $a, b > 0$ *tem-se que*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q. \tag{1.3}$$

Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ *tem-se que existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q. \tag{1.4}$$

Demonstração. Demonstraremos apenas as duas última desigualdade, a primeira pode ser encontradas em diversos textos de análise funcional, por exemplo, em [11].

Demonstração do item *(ii)*. A afirmação é clara se $p = \infty$. Se $p < \infty$ fazemos $F(x) = \int_Y |f(x,y)| \, dy$. Pelo teorema de dualidade e pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L_x^{p'}} &= \sup_{\|g\|_{L_x^{p'}}=1} \int_X g(x) \left(\int_Y |f(x,y)| \, dy \right) dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L_x^{p'}}=1} \int_Y \int_X |f(x,y)| \, g(x) dx dy \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L_x^{p'}}=1} \int_Y \|f\|_{L_x^p} \|g\|_{L_x^{p'}} \, dy \\
&= \int_Y \|f\|_{L_x^p} \, dy.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Demonstração do item *(i)*. Como $a, b > 0$, temos que

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= \exp(\log(a \cdot b)) \\
&= \exp(\log a \ + \ \log b) \\
&= \exp\left(\frac{1}{p}\log a^p \ + \ \frac{1}{q}\log b^q\right) && \textit{(pela convexidade de } \exp(x)) \\
&\leq \frac{1}{p}\exp\left(\log a^p\right) \ + \ \frac{1}{q}\exp\left(\log b^q\right) \\
&= \frac{1}{p}a^p \ + \ \frac{1}{q}b^q.
\end{aligned}$$

Isso demonstra a primeira afirmação. Para mostrar a segunda afirmação basta observar que para todo $\xi > 0$, usando a afirmação já provada, temos que

$$a \cdot b = \xi a \cdot \frac{b}{\xi} \leq \frac{\xi^p}{p}a^p \ + \ \frac{1}{q\xi^q}b^q.$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\xi > 0$ satisfazendo $\varepsilon = \xi^p/p$, ou seja, $\xi = (p\varepsilon)^{1/p}$, isso prova a segunda afirmação onde $C_\varepsilon = \dfrac{1}{q\xi^q} = \dfrac{\varepsilon^{1-q}}{qp^{q-1}}$.

□

Apresentaremos agora o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que será utilizado para provar a boa colocação local e global.

Teorema 1.1 (Teorema Ponto Fixo de Banach.) *Se M é um espaço métrico completo, toda contração $f : M \to M$ possui um único ponto fixo em M. Mais precisamente, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ a seqüência (x_n) converge em M e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de f.*

Demonstração. Por ser um resultado clássico não o demonstraresmo aqui, porém podemos citar ([7]) como uma boa referência para a demonstração deste resultado.

□

1.2 A Transformada de Fourier

Nesta seção estudaremos as principais propriedades da transformada de Fourier no espaço de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e em seguida apresentação de forma sucinta as Distribuições Temperadas (definimos os conjunto das Distribuições Temperadas como sendo o dual topológico do espaço de Schwarz). Para finalizar, definiremos a convolução para funções não-periódicas e apresentamos, através da Transforma de Fourier, o que entedemos por derivadas Fracionárias.

1.2.1 O Espaço de Schwartz

Definição 1.2 *O Espaço de Schwartz, que denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$ tais que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$, existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ com*

$$\left|x^\alpha f^{(\beta)}(x)\right| \leq C_{\alpha,\beta},\ \forall x \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

onde $f^{(\beta)}$ é a β-ésima derivada de f.

Note que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $|x^2 f^{(\beta)}(x)| \leq C_{2,\beta}$ e portanto $|f^{(\beta)}(x)| \leq C_{2,\beta}/x^2$. Com isso, podemos concluir que $f^{(\beta)} \in L^p(\mathbb{R})$ quaisquer que sejam $p \in [1, +\infty]$ e $\beta \in \mathbb{N}$. Esta observação prova que $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ com $p \in [1, +\infty]$, o teorema abaixo nos fornece uma propriedade do espaço de Schawartz bastante explorada neste trabalho, de forma implícita.

Teorema 1.2 *O espaço de Schwartz, é denso em $L^p(\mathbb{R})$ com $p \in [1, +\infty]$.*

Demonstração. Sabemos que o conjunto $S = \left\{\sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}\right\}$ das combinações lineares de funções características χ_{A_j} de subconjuntos $A_j \subset \mathbb{R}$ mensuráveis e limitados é denso em $L^p(\mathbb{R})$. Então, só resta mostrar que se $A \subset \mathbb{R}$ for limitado e mensurável , para cada $\varepsilon > 0$, existe $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tal que $\|\phi - \chi_A\|_{L^p} < \varepsilon$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, sejam K um compacto e O um aberto tais que $K \subset A \subset O$ e $\int_{\mathbb{R}} \chi^p_{O-K}(x)dx < \varepsilon^p$. Escolhamos $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $0 \leq \phi \leq 1,$ supp $\phi \subset O$ e $\phi\big|_K = 1$. Então

$$\|\phi - \chi_A\|^p_{L^p(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |\phi - \chi_A|^p dx = \int_{\mathbb{R}} \chi^p_{O-K}(x)dx < \varepsilon^p.$$

□

Proposição 1.1 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então a função $g(x) = x^\alpha f^{(\beta)}(x)$ também está em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^+$.*

Demonstração. A função g é infinitamente diferenciável e $x^{\alpha'} g^{(\beta')}(x)$, quaisquer que sejam $\alpha', \beta' \in \mathbb{Z}^+$, é uma soma finita de termos da forma $x^n f^{(m)}(x)$, logo limitada.

□

Agora daremos a definição da Transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Definição 1.3 *A função $\widehat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por*

$$\widehat{f}\,(\xi)=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} f\,(x)\,e^{-i\xi x}dx,\ \textit{com}\ \ \xi\in\mathbb{R}, \tag{1.6}$$

é chamada transformada de Fourier da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.

Teorema 1.3 *Se $f\in\mathcal{S}\,(\mathbb{R})$, então $\widehat{f}\in\mathcal{S}\,(\mathbb{R})$.*

Demonstação. Se $\alpha\ ,\ \beta\in\mathbb{Z}^{+}$, obtemos

$$\begin{aligned}\xi^{\alpha}\hat{f}^{(\beta)}\,(\xi) &= (-i)^{\beta+\alpha}\,(i\xi)^{\alpha}\left(x^{\beta}f\right)\widehat{}\,(\xi)\\ &= (-i)^{\beta+\alpha}\left(\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left(x^{\beta}f\right)\widehat{}\,(\xi)\right)\\ &= \widehat{g}\,(\xi)\,,\end{aligned}$$

onde $g=(-i)^{\beta+\alpha}\dfrac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left(x^{\beta}f\right)$. Então, vemos que $g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\subseteq L^{1}(\mathbb{R})$, logo $\widehat{g}$ é limitada, isto é, $\xi^{\alpha}\hat{f}^{(\beta)}\,(\xi)$ é limitada, o que prova que $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

□

Assim, podemos saber quem é o espaço das transformadas de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

Teorema 1.4 *A transformada de Fourier define uma bijeção linear de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em si mesmo e sua inversa é dada por*

$$f^{\vee}\,(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f\,(\xi)\,e^{i\xi x}d\xi,\ x\in\mathbb{R},\ f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.7}$$

Agora podemos iniciar o estudo do tema central desta seção, a saber, o comportamento da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Teorema 1.5 *Seja $f\in\mathcal{S}\,(\mathbb{R})$. Então $f^{(\alpha)}\in\mathcal{S}\,(\mathbb{R})$ para todo $\alpha\in\mathbb{N}$ e*

$$\left(f^{(\alpha)}\right)\widehat{}\,(\xi)=(i\xi)^{\alpha}\widehat{f}(\xi),\ \ \xi\in\mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Demonstração. Já vimos que $f^{(\alpha)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Agora note que integrando por partes obtem-se,

$$\begin{aligned}
(f')\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\, e^{-i\xi x} dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left[f(x)\, e^{-i\xi x}|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\xi) f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right] \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left[f(x)\, e^{-i\xi x}|_{x=-\infty}^{x=\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \right] \\
&= i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

pois os termos de fronteira são nulos uma vez que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Agora, vamos utilizar indução simples e integração por partes, para concluir a demonstração. Suponha que a sentença é válida para todo $\beta \in \mathbb{N}$ tal que $\beta < \alpha$. Então

$$\begin{aligned}
\left(f^{(\alpha)}\right)\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \\
&= (2\pi)^{-1/2} \left(f^{(\alpha-1)} e^{-i\xi x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + i\xi \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(\alpha-1)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \right) \\
&= i\xi i^{\alpha-1} \xi^{\alpha-1} \widehat{f}(\xi) \\
&= i^{\alpha} \xi^{\alpha} \widehat{f}(\xi).
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

□

O teorema acima tem extrema relevância na teoria. O mesmo nos diz que o operador $\dfrac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ agindo em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ é transformado no operador de multiplicação por $(i\xi)^{\alpha}$. Por exemplo se $\alpha = 2$ temos,

$$\left(-\frac{d^2 f}{dx^2}\right)^{\wedge}(\xi) = \xi^2 \widehat{f}(\xi). \tag{1.9}$$

Isso nos permite transformar equações diferenciais ordinárias em equações algébricas e nos pemitirá, mais tarde, reduzir equações diferenciais parciais a equações diferenciais ordinárias. Tendo em vista as observações precedentes, é natural tentar identificar a imagem de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sob a transformada de Fourier e descobrir se podemos invertê-la.

Proposição 1.2 *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $\widehat{f}$ é infinitamente diferenciável e vale*

$$\hat{f}^{(\beta)}(\xi) = (-i)^{\beta} \left(x^{\beta} f\right)\widehat{\ }(\xi). \tag{1.10}$$

Demonstração. Derivando sob o sinal de integração, mostramos que $\widehat{f}$ é infinitamente diferenciável e

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(\beta)}(\xi) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} f^{(\beta)}(x)\, e^{-i\xi x} dx \\ &= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} (-ix)^{\beta} f(x)\, e^{-i\xi x} dx \\ &= (-i)^{\beta} \left(x^{\beta} f\right)\widehat{\ }(\xi). \end{aligned}$$

□

1.2.2 Distribuições Temperadas

Vamos agora introduzir um produto interno em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{1.11}$$

Podemos mostrar que $(\cdot|\cdot)$ definido em (1.11) é de fato um produto interno em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (veja a proposição 1.1 do capítulo 6 de [1]). Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, definiremos

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = (f|f)^{1/2} = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right]^{1/2}. \tag{1.12}$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, todo funcional linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é da forma $T(\phi) = (f|\phi)$, para algum $f \in \mathcal{S}$.

Definição 1.4 *O conjunto das distribuições temperadas, denotado por $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, é o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Em outras palavras, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se e só se $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um funcional linear contínuo. Notemos que para verificar que um funcional linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é contínuo, basta provar que $T\varphi_k \to 0$ para toda $\varphi_k \to 0$.*

Vamos considerar o seguinte exemplo: os elementos de $L^p(\mathbb{R})$ com $1 \leq p \leq \infty$ definem distribuições temperadas através da fórmula

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx, \ f \in L^p(\mathbb{R}), \ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{1.13}$$

De fato, pela desigualdade de Hölder, temos,

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}\,, \;\; p^{-1} + q^{-1} = 1 \tag{1.14}$$

e a afirmação acima segue de (1.14).

1.2.3 Operação de Convolução

Definição 1.5 *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é limitada e seccionalmente contínua em qualquer intervalo fechado, a convolução de f e g é a função $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy,\; x \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

Uma observação importante a fazer é que, a integral em (1.15) converge, pois como g é limitada, existe $M > 0$ tal que

$$|g(x)| \leq M,\; \forall x \in \mathbb{R},$$

e portanto

$$|f(y)\, g(x-y)| \leq M\, |f(y)| \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)\, g(x-y)|\, dy \leq M\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty.$$

O estudo da convolução para funções de $L^1(\mathbb{R})$ é bem delicado. Se f e g são funções de $L^1(\mathbb{R})$, não é verdade, em geral, que o produto fg pertença a $L^1(\mathbb{R})$; portanto, para tais funções a integral em (1.15) pode não estar definida para todo x. Por esse motivo, vamos estudar a convolução no espaço de Schwarz, que é um bom espaço para a convolução. Mostraremos mais adiante que a convolução de fato define uma operação em $\mathcal{S}$.

Proposição 1.3 *Sejam $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:*
$(a) f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
(b) $f * g = g * f$,
(c) $(f * g) * h = f * (g * h)$,
(d) $(f + g) * h = f * h + g * h$,
(e) $(\lambda f) * g = \lambda(f * g) = f * (\lambda g)$.

Demonstração. A demonstração dos itens acima segue usando alguns teoremas de análise.

□

Nota 1.1 *Salientamos que a expressão $(f * g) * h$ faz sentido uma vez que $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ pelo lema anterior e h é limitada.*

Teorema 1.6 *Se $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, então*

$$(f * g)\widehat{}(\xi) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi), \ \forall \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Além disso vale a identidade de Parseval

$$\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.17}$$

Demonstração. Ver ([18]).

1.2.4 Derivadas Fracionárias

A partir da Transformada de Fourier podemos generalizar a noção de derivadas.
Podemos ver a derivação como um operador de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\begin{array}{rccc} D: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & f'. \end{array}$$

Assim, fica bem definido o que viria a ser a k-ésima derivada de uma função; bastaria aplicar o operador D k-vezes à função em questão.
Tendo em vista o operador acima, fixando $s \in \mathbb{R}$, definimos o seguinte **Operador de Riesz**:

$$\begin{array}{rccl} D^s: & \mathcal{S}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ & f & \mapsto & D^s f := \left((i\xi)^s \widehat{f}\right)^{\vee}. \end{array}$$

Pelo que já vimos, se $s \in \mathbb{N}$ esta noção coincide com a derivada já conhecida.

1.3 Os Espaços de Sobolev

Seja $s \in \mathbb{R}$. Os espaços de Sobolev (do tipo L^2) em $\mathbb{R}$ são os seguintes subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

$$H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \,; \left(1 + \xi^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\}.$$

O espaço $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$, é de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle f, g\rangle_s := \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \hat{f}(\xi)\,\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi.$$

A norma proveniente deste produto interno é

$$\|f\|^2_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi. \tag{1.18}$$

Em particular, $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. No caso de $s \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|f\|^2_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R})} = \sum_{j=0}^{s} \left\|\partial_x^j f\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.19}$$

Também utilizaremos os espaços de Sobolev homogêneos, definidos para $s \in \mathbb{R}$ por

$$\dot{H}^s := \dot{H}^s(\mathbb{R}) = \left\{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\,; D^s f \in L^2(\mathbb{R})\right\},$$

com

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left\|\widehat{D^s f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{1.20}$$

Note que se $f \in H^s(\mathbb{R})$, então

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \left\|\widehat{D^s f}\right\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\frac{s}{2}} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Logo, concluímos que $H^s(\mathbb{R}) \subseteq \dot{H}^s(\mathbb{R})$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Exibiremos agora algumas propriedades dos espaços definidos anteriormente.

Proposição 1.4 *Propriedades dos espaços de Sobolev.*

(i) *Se* $s < s'$, *então* $\boldsymbol{H}^{s'}(\mathbb{R}^n) \subseteq \boldsymbol{H}^s(\mathbb{R}^n)$;

(ii) *Se* $s_1 \leq s \leq s_2$, *com* $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, *então*

$$\|f\|_{\boldsymbol{H}^s(\mathbb{R})} \leq \|f\|^{\theta}_{\boldsymbol{H}^{s_1}(\mathbb{R})} \|f\|^{1-\theta}_{\boldsymbol{H}^{s_2}(\mathbb{R})}.$$

$\square$

Definição 1.6 *Sejam X e Y espaços de Banach. Diremos que X está* ***imerso compactamente*** *em Y, e escreveremos*

$$X \hookrightarrow Y,$$

quando:

(i) $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall x \in X$ *e alguma contante C.*

(ii) Cada sequência limitada em X é pré-compacta em Y.

Teorema 1.7 (Rellich-Kondrachov) *Assuma que U contido em $\mathbb{R}^n$ é aberto e limitado com ∂U de classe C^1. Suponha $1 \leq p < n$. Então,*

$$\boldsymbol{H}^1(U) \hookrightarrow L^q(U), \tag{1.21}$$

para cada $1 \leq q < \dfrac{2n}{n-2}$.

$\square$

Teorema 1.8 (Desigualdade de Gagliardo-Niremberg) *Sejam $q, r \in [1, +\infty)$ e $j, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tal que $0 \leq j \leq m$. Então*

$$\|\partial_x^j u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(j,m,q,r,\theta)\|\partial_x^m u\|_{L^r(\mathbb{R})} \cdot \|u\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

para todo $\theta \in [\dfrac{j}{m}, 1]$ e p satisfazendo

$$\frac{1}{p} = j + \theta\left(\frac{1}{r} - m\right) + (1-\theta)\frac{1}{q}$$

A demonstração pode ser vista em ([17]).

$\square$

1.4 Espaços de Banach Mistos e suas Propriedades

Para $1 \leq p, q < \infty$. $L_x^p L_T^q$ é o espaço de Banach Misto definido por

$$L_x^p L_T^q := \left\{ f : \mathbb{R} \times [-T,T] :\longrightarrow \mathbb{R}; \|f\|_{L_x^p L_T^q} < +\infty \right\},$$

onde

$$\|f\|_{L^p_x L^q_T} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f\|^p_{L^q[-T,T]} \right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.22}$$

Quando $p = \infty$ ou $q = \infty$ usaremos uma definição similar, envolvendo a norma do supremo essencial. O espaço $L^p_T L^q_x$ é definido como acima, invertendo-se apenas a ordem de integração. Vale mencionar também que se escrevemos $T = \infty$ na norma acima significa

$$\|f\|_{L^p_x L^q_t} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f\|^p_{L^q(\mathbb{R})} \right)^{1/p} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,t)|^q dt \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.23}$$

Um resultado que será utilizado com muita frequência é a desigualdade:

Lema 1.2 *Sejam $f \in L^2_x L^\infty_T$ e $g \in L^\infty_x L^2_T$, então $fg \in L^2_x L^2_T$ e vale*

$$\|fg\|_{L^2_x L^2_T} \leq \|f\|_{L^2_x L^\infty_T} \|g\|_{L^\infty_x L^2_T}.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder, (1.2) temos

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^2_x L^2_T} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-T}^{T} |(fg)(x,t)|^2 dt dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-T}^{T} |f(x,t)|^2 |g(x,t)|^2 dt dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-T}^{T} \sup_{t\in[-T,T]} \left\{|f(x,t)|^2\right\} |g(x,t)|^2 dt dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in[-T,T]} \left\{|f(x,t)|^2\right\} \int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in[-T,T]} \left\{|f(x,t)|^2\right\} \sup_x \left\{\int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt\right\} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sup_{t\in[-T,T]} \left\{|f(x,t)|^2\right\} dx \ \sup_x \left\{\int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt\right\}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sup_{t\in[-T,T]} \left\{|f(x,t)|\right\}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_x \left\{\int_{-T}^{T} |g(x,t)|^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \|f\|_{L^2_x L^\infty_T} \|g\|_{L^\infty_x L^2_T},
\end{aligned}$$

o que prova o Lema.

□

Teorema 1.9 (Teorema das Três Linhas) *Seja F uma função contínua e limitada definida sobre*

$$S = \{z = x + iy;\ 0 \leq x \leq 1\}$$

com F analítica no interior de S. Se para cada $y \in \mathbb{R}$

$$|F(iy)| \leq M_0 \ \textit{e} \ |F(1 + iy)| \leq M_1,$$

então para todo $z = x + iy \in S$

$$|F(x + iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x.$$

Este teorema apesar de seu aspecto simples tem como consequência resultados fortes como por exemplo o teorema de Riesz-Thorin enuciado abaixo.

Teorema 1.10 (Riesz-Thorin) *Sejam $p_0 \neq p_1$ e $q_0 \neq q_1$. Seja T um operador linear limitado de $\boldsymbol{L}^{p_0}(X, \mathcal{A}, \mu)$ em $\boldsymbol{L}^{q_0}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ com norma M_0 e de $\boldsymbol{L}^{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ em $\boldsymbol{L}^{q_1}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ com norma M_1. Então T é limitado de $\boldsymbol{L}^{p_\theta}(X, \mathcal{A}, \mu)$ em $\boldsymbol{L}^{q_\theta}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ com norma M_θ tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Aqui, $M_\theta = \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|Tf\|_{q_\theta}}{\|f\|_{p_\theta}}$ com

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \ \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \ \ \forall \theta \in (0,1).$$

Demonstração: A demonstração do mesmo pode ser encontrada em [10].

Lema 1.3 *Sejam $\alpha \in (0,1)$ e $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \alpha]$ onde $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Sejam $p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 \in (1, \infty)$ tal que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ e $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2}$. Então*

$$\|D_x^\alpha(fg) - fD_x^\alpha g - gD_x^\alpha f\|_{L_x^p L_T^q} \leq c \, \|D_x^{\alpha_1} f\|_{L_x^{p_1} L_T^{q_1}} \|D_x^{\alpha_2} g\|_{L_x^{p_2} L_T^{q_2}} . \tag{1.24}$$

Além disso, para $\alpha_1 = 0$ o valor $q_1 = \infty$ é permitido.

Demonstração: A demonstração do mesmo é feita no apêndice de [6].

1.5 Variação de Gâteaux e derivada de Fréchet

Nesta seção vamos introduzir alguns conceitos básicos do cálculo variacional. Podemos olhar o cálculo variacional como o cálculo diferencial no espaço de funções onde tentamos, sobre espaços apropriados, encontrar curvas que minimizem certos funcionais.

Definição 1.7 *Sejam X um espaço de Banach e $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Se existe um funcional linear L em X tal que*

$$\lim_{s \longrightarrow \infty} \frac{1}{s} \Big(F(u + sh) - F(x) - L(sh) \Big) = 0, \tag{1.25}$$

para todo $h \in X$ tal que o limite existe, então $\delta_u F(h) := L(h)$ é chamada de ***Variação de Gâteaux de** F **em** u **na direção de** $h \in X$.*

Fixando $u \in X$, o subconjunto $\Lambda_u = \{h \in X; \exists\, \delta_u F(h)\}$ de direções cuja variação de Gâteux existe é chamado **espaço das variações admissíveis de** X**.** Note que Λ_u é um subespaço vetorial de X. Com efeito, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $h_1, h_2 \in \Lambda_u$ temos, pela linearidade de L, que:

$$\alpha L(h_1) + \beta L(h_2) = L(\alpha h_1 + \beta h_2), \tag{1.26}$$

ou seja, $\alpha h_1 + \beta h_2 \in \Lambda_u$.

A função $\delta_u F : \Lambda_u \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada h associe $\delta_u F(h)$ é chamada de Variação de Gâteaux de F e u no espaço de variações admissíveis de X.

Definição 1.8 *Se $\Lambda_u = X$, $\delta_u F$ é chamada de **derivada de Gâteaux** de F em u.*

Neste ponto, fazemos a observação se $s \in \mathbb{R}$ (suficientemente pequeno), podemos pensar numa função real

$$s \longmapsto F(u + sh)$$

e logo, se existe a variação de Gâteaux de F em u na direção h, devemos ter

$$\delta_u F(h) = \frac{d}{ds} F(u + sh)\bigg|_{s=0}.$$

Agora, afim de esclarecer a noção de derivada de Gâteaux e também para uso futuro calcularemos a derivada de Gâteaux de dois funcionais.

Exemplo 1.1 *Seja $M : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $M(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u^2 dx$. Pela observação feita acima, se a deriva de Gâteaux existe na direção u então*

$$\begin{aligned}
\delta_u M(h) &= \frac{d}{ds} M(u + sh)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (u + sh)^2\, dx\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2(x)dx + \int_{\mathbb{R}} 2su(x)h(x)dx + \int_{\mathbb{R}} s^2 h^2(x)dx\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(x)dx\right)\bigg|_{s=0} + \frac{d}{ds}\left(s\int_{\mathbb{R}} u(x)h(x)dx\right)\bigg|_{s=0} + \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(s^2\int_{\mathbb{R}} h(x)dx\right)\bigg|_{s=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}} uh dx.
\end{aligned}$$

Assim, vemos que a derivada de Gâteaux de M em u é o funcional linear $\delta_u M(h) = \langle u, h\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$, onde $u, h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, isso pelo Teorema de Representação de Riesz.

Vamos agora para o próximo exemplo.

Exemplo 1.2 *Defina* $E : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $E(u) = \dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx - \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} u^3 dx\right)$. *Vamos calcular a derivada de Gâteaux de* E.

$$
\begin{aligned}
\delta_u E(h) &= \frac{d}{ds} E(u+sh)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} [(u+sh)_x]^2\, dx - \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} (u+sh)^3 dx\right)\Big|_{s=0} \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u_x^2 dx\right)\Big|_{s=0} + \frac{d}{ds}\left(s\int_{\mathbb{R}} u_x h_x dx\right)\Big|_{s=0} + \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{2}\int_{\mathbb{R}} h_x^2 dx\right)\Big|_{s=0} \\
&- \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} u^3 dx\right)\Big|_{s=0} - \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 h dx\right)\Big|_{s=0} - \frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{2}\int_{\mathbb{R}} u h^2 dx\right)\Big|_{s=0} \\
&- \frac{d}{ds}\left(\frac{s^3}{6}\int_{\mathbb{R}} h^3 dx\right)\Big|_{s=0} \\
&= \int_{\mathbb{R}} u_x h_x dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 h dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} u_{xx} h dx - \int_{\mathbb{R}} u^2 h dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \left(u_{xx} + \frac{1}{2}u^2\right) h\, dx \\
&= \langle -u_{xx} - u^2, h\rangle_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\delta_u E(h) = \langle -u_{xx} - u^2, h\rangle_{L^2(\mathbb{R})}, \forall u, h \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Escolhemos estes dois funcionais pois os mesmos estm ligados diretamente com a equação KdV, como veremos no final do próximo capítulo.

Daremos agora a definição de derivada de Fréchet.

Definição 1.9 *Seja* X *um espaço de Banach e* $F : X \longrightarrow \mathbb{R}$. F *é dita* ***diferenciável no sentido de Fréchet*** *em* $u \in X$, *se existe um funcional linear limitado em* X, *denotado por* $DF(u)$, *tal que*

$$\lim_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{1}{\|h\|}\Big(F(u+h) - F(u) - DF(h)\Big) = 0. \tag{1.27}$$

Se $DF(u) = 0$, então u é chamado ponto crítico de F. Se $X_0 \subset X$ é um subespaço e $DF(u) = 0$ como funcional linear em X_0, então u é chamado ponto críitico de F em X_0.

Note que se F é diferenciável no sentido de Fréchet em $u \in X$, então existe a derivada de Gâteaux de F em u. De fato, sendo F diferenciável no sentido de Fréchet,

$$\lim_{\|h\| \longrightarrow 0} \frac{1}{\|h\|}\Big(F(u+h) - F(u) - DF(h)\Big) = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{\|sh\| \longrightarrow 0} \frac{1}{\|sh\|}\Big(F(u+sh) - F(u) - DF(sh)\Big) = \lim_{s \longrightarrow 0} \frac{1}{s}\Big(F(u+sh) - F(u) - DF(sh)\Big) = 0.$$

Assim $DF(u) = \delta_u F$.

Apresentaremos agora o Teorema de Multiplicador de Lagrange para espaços de dimenção infinita.

Teorema 1.11 (Multiplicador de Lagrange) *Sejam $f, h : X \longrightarrow Z$ dois funcionais continuamente diferenciáveis no sentido de Fréchet. Se o funcional f tem um extremo local restrito a $h(u) = c$ que é um valor relugar no ponto u_0, então existe um elemento $z_0^* \in Z^*$ tal que o funcional Lagrangiano*

$$L(u) = f(u) + z_0^* h(u)$$

é estacionário em x_0, ou seja,

$$\delta_{u_0} f + z_0^* \delta_{u_0} h = 0.$$

Este teorema será fundamental na caracterização da órbita da solução tipo onda solitária para a KdV. Usaremos o mesmo para os funcionais M e E, para obter o resultado de estabilidade das soluções tipo ondas solitárias.

2 Boa Colocação Local e Global para a Equação Korteweg-de Vries

Neste capítulo demonstraremos a **Boa Colocação Local e Global para a Equação Korteweg-de Vries**.

Estes resultados, principalmente o de boa colocação global, são essenciais para obtermos o resultado sobre estabilidade.

Inicialmente estabeleceremos algumas leis de conservação para a equação KdV e em seguida encontraremos uma solução formal para a KdV usando a Transformada de Fourier. Feito isto, demonstraremos algumas estimativas para a KdV e em seguida provaremos um teorema de boa colocação local. Encerramos este capítulo provando um teorema de boa colocação global.

2.1 Sistemas Integráveis e Leis de Conservação

Nesta seção veremos como muitas propriedades das soluções da KdV podem ser obtidas apenas a partir do estudo da expressão da equação, ou seja, de suas propriedades algébricas.

Lembremos da expressão da Equação KdV

$$u_t + uu_x + u_{xxx}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Estamos interessados nas soluções que tendem a zero quando a variável independente tende ao infinio juntamente com todas as suas derivadas.

Para começarmos a estudar tais propriedades, reescrevemos a equação (2.1) na seguinte forma:

$$u_t = \partial_x \left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2 \right). \tag{2.2}$$

Integrando sobre a reta e lembrando que $u \to 0$ (assim como todas as suas derivadas) quando $x \to \pm\infty$, podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u\, dx = \int_{\mathbb{R}} u_t\, dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x \left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right)\, dx = \left(-u_{xx} - \frac{1}{2}u^2\right)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} u\, dx = A_1,$$

onde A_1 é uma constante.

A expressão acima é uma grandeza conservada, ou seja, ao longo do fluxo pela KdV, $\int_{\mathbb{R}} T_1\, dx$, onde $T_1 = u$, não se altera. Fisicamente significa que a massa não se altera, portanto, temos uma expressão para a conservação da massa. Podemos começar a procurar por outras grandezas conservadas, em particular associadas a outras entidades físicas.

Multiplicando a equação (2.1) por u obtemos

$$uu_t + uu_{xxx} + u^2u_x = uu_t + \left[(u_xu_{xx} + uu_{xxx}) - u_xu_{xx} + u^2u_x\right] = 0, \tag{2.3}$$

que podemos reescrevê-la na forma

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) + \partial_x\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right) = 0,$$

ou ainda,

$$\partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) = -\partial_x\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right). \tag{2.4}$$

Integrando sobre a reta e lembrando que $u \to 0$ (assim como todas as suas derivadas) quando $x \to \pm\infty$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}u^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t\left(\frac{1}{2}u^2\right) dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \partial_x\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right) dx \\
&= -\left(uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3\right)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 dx = A_2,$$

onde A_2 é uma constante.

Portanto, escrevendo $T_2 = u^2$ temos que $\int_{\mathbb{R}} T_2 \, dx$ é constante, e temos uma segunda lei de conservação, esta associada a conservação do momento.

Com um pouco mais de trabalho podemos obter uma terceira lei de conservação, desta vez associada a energia.

Multiplicando a equação (2.1) por $3u^2$ obtemos

$$3u^2 u_t + 3u^2 u_{xxx} + 3u^3 u_x = 0. \tag{2.5}$$

Agora, derivando a equação (2.1) em relação a x e em seguida multiplicando por $6u_x$, temos

$$6u_x u_{tx} + 6u_x u_{xxxx} + 6u_x^3 + 6u_x u u_{xx} = 0. \tag{2.6}$$

Subtraindo (2.5) de (2.6) obtemos

$$\begin{aligned}
&6u_x u_{xt} + 6(u_x)^3 + 6uu_x u_{xx} + 6u_x u_{xxxx} - 3u^2 u_t - 3u^3 u_x - 3u^2 u_{xxx} \\
&= \left(6u_x u_{xt} - 3u^2 u_t\right) + \left(-3u^3 u_x\right) + \left(6u_x u_{xxxx} + 6u_{xx} u_{xxx}\right) + \left(6u_{xx} u_{xxx}\right) \\
&+ \left(6(u_x)^3 + 12uu_x u_{xx}\right) + \left(-3u^2 u_{xxx} - 6uu_x u_{xx}\right) = 0,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\partial_t \left(3(u_x)^2 - u^3\right) + \partial_x \left(-\frac{3}{4}u^4 + 6u_x u_{xxx} - 6u_{xx} + 6uu_x^2 - 3u^2 u_{xx}\right) = 0.$$

Esta última equação pode ser reescrita como

$$\partial_t \left((u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3\right) = -\partial_x \left(-\frac{1}{4}u^4 + 2u_x u_{xxx} - 2u_{xx} + 2uu_x^2 - u^2 u_{xx}\right). \tag{2.7}$$

Assim obtemos $T_3 = (u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3$ que é nova lei de conservação para a equação KdV.

É importante notar que sempre que tivermos uma expressão da forma

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

e condições de contorno apropriadas, no caso $X \to 0$ quando $x \to \pm\infty$, teremos uma lei de conservação, que pode ser escrita $\int_{\mathbb{R}} T \, dx = A$, onde A é uma constante.

Dado que em um problema físico típico as leis de conservação aplicadas são exatamente aquelas associadas a massa e energia, poder-se-ia pensar, a primeira vista, que as três leis enunciadas acima esgotam as leis de conservação da KdV. No entanto, com muito esforço, Miura, Gardner e Kruskal em 1968, ver [15], encontraram mais oito leis de conservação independentes, totalizando onze. Para surpresa de muitos, provou-se em seguida que a KdV possui um número infinito de leis de conservação, e que além disto, esta característica é compartilhada por um grande número de equações diferenciais (aquelas que recebem o nome de sistemas integráveis). Maiores detalhes ver [8].

Durante nosso trabalho faremos uso de duas lei de conservação especiais. Por isso, destacaremos as mesmas e passaremos a denotá-las como funcionais.

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx$$

e

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[(u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3 \right] dx.$$

2.2 KdV Linear

Consideremos o problema de Cauchy envolvendo a equação Korteweg-de Vries (KdV) linear, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{cases} \tag{2.8}$$

Aplicando formalmente a Transformada de Fourier em relação a x neste sistema obtemos as relações

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) &= 0, \\ \widehat{u}(\xi,0) &= \widehat{u}_0(\xi). \end{cases}$$

Multiplicando a equação $\partial_t \widehat{u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) = 0$ pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$, temos a equação

$$\partial_t \widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(\xi,t) = 0.$$

Observando que

$$\partial_t \left(\widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} \right) = \partial_t \widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 e^{(i\xi)^3 t} \widehat{u}(\xi,t),$$

obtemos a relação

$$\partial_t \left(\widehat{u}(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} \right) = 0.$$

Integrando em relação a variável t, temos a igualdade

$$\widehat{u}_t(\xi,t) e^{(i\xi)^3 t} = \widehat{u}_0(\xi),$$

ou seja,

$$\widehat{u}_t(\xi,t) = e^{-(i\xi)^3 t} \widehat{u}_0(\xi) = e^{i\xi^3 t} \widehat{u}_0(\xi).$$

Agora, aplicando a Transformada inversa de Fourier obtemos uma descrição para a solução do sistema (2.8) que é da forma

$$u(x,t) = (e^{i\xi^3 t} \widehat{u}_0(\xi))^{\vee}(x) = ((e^{i\xi^3 t})^{\vee} * u_0)(x). \tag{2.9}$$

Denotaremos por $W(t)$ o operador de $L^2(\mathbb{R})$ em $L^2(\mathbb{R})$ dado por

$$W(t) u_0(x) := (S_t * u_0)(x),$$

onde

$$S_t(x) = (e^{i\xi^3 t})^{\vee}(x).$$

Temos então

$$u(x,t) = W(t) u_0(x) = (S_t * u_0)(x).$$

Além disso, temos que $W(t)u_0$ é dado por

$$W(t) u_0(x) = c \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi) e^{i\xi^3 t} e^{i\xi x} d\xi,$$

onde c é uma constante real.

2.3 Estimativas Lineares

Nesta seção demonstraremos algumas desigualdades fundamentais para a prova do teorema de boa colocação local.

Teorema 2.1

(i) Se $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ então

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} W(t) u_0 \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \leq c||u_0||_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.10}$$

(ii) Se $g \in L_x^1 L_t^2$ então para qualquer $T > 0$

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t W(t-t') g(x,t') dt' \right\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq c||g||_{L_x^1 L_T^2}. \tag{2.11}$$

Demonstração. Consideremos $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e $W(t)u_0(x) = c \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi) e^{i\xi^3 t} e^{i\xi x} d\xi$.

Derivando $W(t)u_0(x)$ com relação a variável x e fazendo a mudança de variável $\xi^3 = \eta$, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_x W(t) u_0(x) &= \partial_x \left[c \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi) e^{i\xi^3 t} e^{i\xi x} d\xi \right] \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\xi) e^{i\xi^3 t} i\xi e^{i\xi x} d\xi \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}_0(\eta^{1/3}) e^{i\eta t} \eta^{1/3} e^{i\eta^{1/3} x} \eta^{-2/3} d\eta \\
&= c \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\eta + x\eta^{1/3})} \widehat{u}_0(\eta^{1/3}) \eta^{-1/3} d\eta.
\end{aligned}$$

Usando agora a Identidade de Parseval (na variável t), temos

$$
\begin{aligned}
\|\partial_x W(t)u_0\|_{L_t^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_x W(t)u_0(x)|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left| c\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t\eta + x\eta^{1/3})}\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\eta^{-1/3} d\eta \right|^2 dt \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left[\eta^{-1/3} e^{ix\eta^{1/3}} \widehat{u}_0(\eta^{1/3})\right] e^{it\eta} d\eta \right|^2 dt \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \eta^{-1/3} e^{ix\eta^{1/3}} \widehat{u}_0(\eta^{1/3}) \right|^2 d\eta \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\eta^{-1/3}\right|^2 \left| e^{ix\eta^{1/3}} \right|^2 \left| \widehat{u}_0(\eta^{1/3}) \right|^2 d\eta \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^{-2/3} \left|\widehat{u}_0(\eta^{1/3})\right|^2 d\eta \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left|\xi^3\right|^{-2/3} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 \xi^2 d\xi \\
&= c^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= c^2 \|\widehat{u_0}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= c^2 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial}{\partial x} W(t)u_0 \right\|_{L_x^\infty L_t^2} &= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \|\partial_x W(t)u_0\|_{L_t^2} \right\} \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{ c\,\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} \right\} \\
&= c\,\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} .
\end{aligned}
$$

O que demonstra (2.10).

Para a prova de (ii) inicialmente afirmamos que

$$
\left\| \frac{\partial}{\partial x} \int_0^t W(t-t')g(x,t')dt' \right\|_{L_x^2} \leq c||g||_{L_x^1 L_t^2}. \tag{2.12}
$$

De fato, a desigualdade (2.12) é consequência imediata de (2.10), das propriedades do grupo e da desigualdade que veremos a seguir.

Da isometria do grupo em $L^2(\mathbb{R})$, e da comutatividade do grupo com relação a derivada, temos as relações

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} W(t-t')g(x,t')dt'\right\|_{L^2_x} &= \left\|\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} W(t)W(-t')g(x,t')dt'\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|W(t)\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} W(-t')g(x,t')dt'\right\|_{L^2_x} \\
&= \left\|\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} W(-t')g(x,t')dt'\right\|_{L^2_x} \\
&\leq c||g||_{L^1_x L^2_t},
\end{aligned}$$

o que demonstra (2.12).

A desigualdade (2.12) implica na seguinte estimativa

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}\int_{0}^{t} W(t-t')g(x,t')dt'\right\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq c||g||_{L^1_x L^2_t}.$$

O que completa a demonstração de (2.11).

$\square$

Teorema 2.2 *Estimativas Lineares:*

(i) Se $u_0 \in \dot{H}^{1/4}(\mathbb{R})$ *então*

$$\|W(t)u_0\|_{L^4_x L^\infty_t} \leq c\left\|D^{1/4}u_0\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.13}$$

(ii) Se $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *então*

$$\left\|D^{1/4}_x W(t)u_0\right\|_{L^4_t L^\infty_x} \leq c\left\|u_0\right\|_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{2.14}$$

(iii) Seja $s > 3/4$*. Então para qualquer* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *e qualquer* $\rho > 3/4$

$$||W(t)u_0||_{L^2_x L^\infty_T} \leq c(1+T)^\rho ||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}. \tag{2.15}$$

Demonstração.

Este resultados são de extrema importância para nossos resultados de boa colocação local e global.

O primeiro resultado é demonstrado em [5]. A prova do segundo e do terceiro resultado está em [6], lema 2.4 e corolário 2.9, respectivamente.

$\square$

2.4 O problema de Cauchy para a equação KdV em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > 3/4$.

A seguir desenvolveremos uma das partes principais do nosso trabalho que é a boa colocação local no tempo para o PVI

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.16}$$

Mais precisamente, provaremos o seguinte teorema:

Teorema 2.3 *Consideremos o PVI* (2.16) *e seja* $s > 3/4$. *Então para cada* $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ *existe* $T = T(||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}) > 0$ (*com* $T(\rho) \to \infty$ *para* $\rho \to 0$) *e uma única solução* $u(t)$ *de* (2.16) *satisfazendo*

$$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R})), \tag{2.17}$$

$$u_x \in L^4([-T,T] : L^\infty(\mathbb{R})), \tag{2.18}$$

$$\left\| D_x^s \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} < \infty, \tag{2.19}$$

$$\|u\|_{L_x^2 L_T^\infty} < \infty. \tag{2.20}$$

Além disso, para qualquer $T' \in (0,T)$ *existe uma vizinhança* V *de* u_0 *em* $H^s(\mathbb{R})$ *tal que a função* $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}(t)$ *de* V *sobre a classe definida por (2.17)-(2.20) com* T' *no lugar de* T *é Lipschitz.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 2.3 faremos uma motivação para o funcional utilizado na prova deste teorema.

Aplicando a transformada de Fourier com respeito a variável x no sistema (2.16), obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{u}(\xi,t) + (i\xi)^3 \widehat{u}(\xi,t) + \widehat{u\partial_x u}(\xi,t) = 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u_0}(\xi). \end{cases} . \tag{2.21}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.21) pelo fator integrante $e^{(i\xi)^3 t}$, obtemos

$$\widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t} + e^{(i\xi)^3 t} \widehat{f}(t) = 0,$$

onde $f(x,t) = u(x,t)\partial_x u(x,t)$ é uma constante.

Observando que

$$\frac{d}{dt}(\widehat{u} e^{(i\xi)^3 t}) = \widehat{u}_t e^{(i\xi)^3 t} + (i\xi)^3 \widehat{u} e^{(i\xi)^3 t},$$

obtemos a relação

$$\frac{d}{dt}(\widehat{u}e^{(i\xi)^3 t}) = -\widehat{f}(t)e^{(i\xi)^3 t}.$$

Integrando em relação a variável t, temos a igualdade

$$e^{(i\xi)^3 t}\widehat{u}(t) = \widehat{u_0} - \int_0^t \widehat{f}(t')e^{(i\xi)^3 t'}dt',$$

ou ainda,

$$\widehat{u}(t) = \widehat{u_0}e^{-(i\xi)^3 t} - e^{-(i\xi)^3 t}\int_0^t \widehat{f}(t')e^{(i\xi)^3 t'}dt'.$$

Portanto, aplicando a transformação inversa obtemos a equação

$$\begin{aligned} u(t) &= (\widehat{u_0}e^{-(i\xi)^3 t})^{\vee} - \left(e^{-(i\xi)^3 t}\int_0^t \widehat{f}(t')e^{(i\xi)^3 t'}dt'\right)^{\vee} \\ &= (\widehat{u_0}e^{i\xi^3 t})^{\vee} - \int_0^t \left(e^{i\xi^3 (t-t')}\widehat{f}(t')\right)^{\vee} dt'. \end{aligned}$$

Sabemos que $W(t)u_0 = (e^{i\xi^3 t}\widehat{u_0})^{\vee}$ e $\left(e^{i\xi^3(t-t')}\widehat{f}(t')\right)^{\vee} = W(t-t')f(t') = W(uu_x)(t')$, então temos a identidade

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t')dt'. \tag{2.22}$$

Isto é, se u satisfaz o sistema (2.16) então u satisfaz a equação integral (2.22).

Demonstração do Teorema 2.3. Consideremos um intervalo $[-T, T]$ e uma função

$$w : \mathbb{R} \times [-T, T] \to \mathbb{R}, \quad \text{em} \quad H^s(\mathbb{R}).$$

Com o objetivo de simplificar as notações considere as normas

$$\lambda_1^T(w) := \max_{t\in[-T,T]} ||w(t)||_{H^s(\mathbb{R})}, \tag{2.23}$$

$$\lambda_2^T(w) := \left(\int_{-T}^T \left\|\frac{\partial w}{\partial x}(\cdot, t)\right\|_{\infty}^4 dt\right)^{1/4}, \tag{2.24}$$

$$\lambda_3^T(w) := \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} w \right\|_{L_x^\infty L_T^2} = \sup_x \left(\int_{-T}^{T} \left| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} w(x,t) \right|^2 dt \right)^{1/2}, \tag{2.25}$$

$$\lambda_4^T(w) := (1+T)^{-\rho} ||w||_{L_x^2 L_T^\infty}, \text{ para } \rho > 3/4, \tag{2.26}$$

$$\Lambda^T(w) := \max_{j=1,\ldots,4} \lambda_j^T(w). \tag{2.27}$$

Vamos considerar também o espaço métrico completo

$$X_T := \{w \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R})); \Lambda^T(w) < \infty\}, \tag{2.28}$$

com a métrica

$$d(w_1, w_2) := \Lambda^T(w_1 - w_2).$$

Vale destacar que a escolha do conjunto de normas acima e do espaço métrico X_T é a essência da demonstração do teorema. Tais escolhas decorrem de várias tentativas e observações na busca de estimativas da norma $H^s(\mathbb{R})$.

Vejamos inicialmente que $X_T \neq \emptyset$. Para tanto, obsevemos que se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ então usando as propriedades do grupo e as desigualdades (2.10), (2.14) e (2.15) temos que

$$\begin{aligned}
\lambda_1^T(W(t)u_0) &= \max_{t \in [-T,T]} ||W(t)u_0||_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \max_{t \in [-T,T]} ||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} = ||u_0||_{H^s(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2^T(W(t)u_0) &= \left(\int_{-T}^{T} \left\| \frac{\partial W(t)u_0}{\partial x}(\cdot,t) \right\|_\infty^4 dt \right)^{1/4} \\
&= \left\| W(t) \frac{\partial u_0}{\partial x}(\cdot,t) \right\|_{L_T^4 L_x^\infty} \\
&\leq \left\| W(t) \frac{\partial u_0}{\partial x}(\cdot,t) \right\|_{L_t^4 L_x^\infty} \\
&\leq c \left\| D_x^{1/4} \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq c||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} \leq c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_3^T(W(t)u_0) &= \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} W(t)u_0 \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} W(t)u_0 \right\|_{L_x^\infty L_t^2} \\
&\leq c||D_x^s u_0||_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq c||u_0||_{L^2(\mathbb{R})} \leq c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\lambda_4^T(W(t)u_0) &= (1+T)^{-\rho}||W(t)u_0||_{L_x^2 L_T^\infty} \\
&\leq (1+T)^{-\rho} c(1+T)^{\rho}||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

Assim, se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ então para qualquer $T > 0$, $W(t)u_0 \in X_T$ com $\Lambda^T(W(t)u_0) = \max\limits_{j=1,\ldots,4} \lambda_j^T(W(t)u_0)$ dependendo de $||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}$ mas não de T e portanto $X_T \neq \emptyset$.

Nosso principal objetivo agora será mostrar que existe $T = T(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) > 0$ (dependendo de $||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}$ de uma maneira apropriada) e $a = a(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}) > 0$ tal que se $v \in X_T^a$ então $u = \phi(v) \in X_T^a$ e $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração. Uma vez provado isto segue-se, do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que existe um único $u \in X_T^a$ tal que $\phi_{u_0}(u) = u$, isto é,

$$
u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t') \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right)(t')dt'.
$$

Para isto, denotemos por $u = \phi(v) = \phi_{u_0}(v)$ a solução do PVI linear não-homogêneo

$$
\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + v\partial_x v = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.29}
$$

onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e $X_T^a := \{w \in X_T; \Lambda^T(w) \leq a\}$.

Agora considermos a equação integral de PVI (2.29), ou seja,

$$
u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt'. \tag{2.30}
$$

A seguir, estabeleceremos uma sequência de Lemas, a qual fornece estimativas que serão utilizadas mais adiante.

Lema 2.1

$$\left\|D_x^s\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}+\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^2L_T^2}\le c(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2. \tag{2.31}$$

Demonstração.

Usando as definições das normas e propriedades do supremo obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^2L_T^2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_T^2}^2 dx\right)^{1/2}\\
&\le \left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\left(\sup_x\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right\}\right)^2 dxdt\right)^{1/2}\\
&\le \left(\int_{-T}^{T}\left(\sup_x\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right\}\right)^2\left(\sup_{[0,T]}\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\,dx\right)dt\right)^{1/2}\\
&= \left(\sup_{[0,T]}\int_{-\infty}^{\infty}|v|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\left(\sup_x\left\{\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right\}\right)^2 dt\right)^{1/2}\\
&\le \left(\sup_{[0,T]}||v||_{H^s(\mathbb{R})}^2\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 dt\right)^{1/2}\\
&= \sup_{[0,T]}||v||_{H^s(\mathbb{R})}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 dt\right)^{1/2}\\
&\le \sup_{[0,T]}||v||_{H^s(\mathbb{R})}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt\right)^{1/4}\left(\int_{-T}^{T}1dt\right)^{1/4}\\
&= cT^{1/4}\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)\le c(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2.
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema (1.3) com $f=v, g=\dfrac{\partial v}{\partial x}, \alpha, p, q, p_2$ e q_2 apresentado nos preliminares, deduzimos a seguinte desigualdade

$$\left\|D_x^s\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2}\le c\left(\int_{-T}^{T}\left\|v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2||D_x^sv||_{L^2(\mathbb{R})}^2dt\right)^{1/2}+c\left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2dxdt\right)^{1/2}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 ||D_x^s v||_{L^2(\mathbb{R})}^2 dt\right)^{1/2} &\leq \left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \left(\sup_{[-T,T]}\left\{||D_x^s v||_{L^2(\mathbb{R})}\right\}\right)^2 dt\right)^{1/2}\\
&= \sup_{[-T,T]}\left\{||D_x^s v||_{L^2(\mathbb{R})}\right\}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 dt\right)^{1/2}\\
&\leq \sup_{[-T,T]}\left\{||D_x^s v||_{L^2(\mathbb{R})}\right\}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt\right)^{1/4}\left(\int_{-T}^{T} 1dt\right)^{1/4}\\
&\leq cT^{1/4}\sup_{[-T,T]}\left\{||D_x^s v||_{L^2(\mathbb{R})}\right\}\left(\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt\right)^{1/4}\\
&= cT^{1/4}\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-T}^{T}\int_{-\infty}^{\infty}\left|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} &= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-T}^{T}\left|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right|^2 dtdx\right)^{1/2}\\
&= \left\|vD_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^2L_T^2}\\
&\leq \|v\|_{L_x^2L_T^\infty}\left\|D_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&\leq (1+T)^\rho(1+T)^{-\rho}\|v\|_{L_x^2L_T^\infty}\left\|D_x^s\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{L_x^\infty L_T^2}\\
&= (1+T)^\rho\lambda_4^T(v)\lambda_3^T(v)
\end{aligned}$$

obtemos as seguintes sequências de desigualdades

$$\begin{aligned}
\left\|D_x^s\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{L_x^2L_T^2} &\leq cT^{1/4}\lambda_2^T(v)\lambda_1^T(v)+c(1+T)^\rho\lambda_4^T(v)\lambda_3^T(v)\\
&\leq c(1+T)^\rho(\Lambda^T(v))^2,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração da desigualdade (2.31).

□

Lema 2.2

$$\lambda_1^T(u) \leq ||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}(t')dt'. \tag{2.32}$$

Demonstração. Usando as propriedades do grupo e a equação (2.30) segue que

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^T(u) &= \max_{t\in[-T,T]} ||u||_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| W(t)u_0 - W(t)\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| W(t)\left[u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right] \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= \max_{t\in[-T,T]} \left\| u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq \max_{t\in[-T,T]} \left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \left\| - \int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \right] \\
&\leq \max_{t\in[-T,T]} \left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^T \left\| \left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} (t')dt' \right] \\
&= ||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^T \left\| \left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} (t')dt',
\end{aligned}
$$

o que completa a demonstração de (2.32)

$\square$

Lema 2.3

$$
\lambda_2^T(u) \leq c\left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^T \left\| \left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} (t')dt' \right]. \tag{2.33}
$$

Demonstração. Usando as propriedades do grupo, a equação (2.30) e a inequação (2.14) obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\lambda_2^T(u) &= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt'\right)^{1/4}\\
&= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left[W(t)u_0-\int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt'\right)^{1/4}\\
&= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}\left[W(t)u_0-W(t)\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt'\right)^{1/4}\\
&= \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt'\right)^{1/4}\\
&\leq \left(\int_{-T}^{T}\left\|\frac{\partial}{\partial x}W(t)\left[u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right](\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^4 dt'\right)^{1/4}\\
&\leq c\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L^2(\mathbb{R})}\\
&\leq c\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})}\\
&= c\left\|u_0-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})}\\
&\leq c\left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}+\left\|-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})}\right]\\
&\leq c\left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}(t')dt'\right].
\end{aligned}$$

□

Lema 2.4

$$\lambda_3^T(u) \leq c\left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}+\int_{-T}^{T}\left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}(t')dt'\right]. \tag{2.34}$$

Demonstração. Usando as propriedades do grupo e a desigualdade (2.10) temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda_3^T(u) &= \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} u \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} \left[W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right] \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} \left[W(t)u_0 - W(t) \int_0^t W(-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right] \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&= \left\| D_x^s \frac{\partial}{\partial x} \left\{ W(t) \left[u_0 - \int_0^t W(-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right] \right\} \right\|_{L_x^\infty L_T^2} \\
&\leq \left\| D_x^s \left[u_0 - \int_0^t W(-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right] \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq c \left\| u_0 - \int_0^t W(-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= c \left\| u_0 - \int_0^t W(-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq c \left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \left\| - \int_0^t W(-t') \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right)(t')dt' \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \right] \\
&\leq c \left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^T \left\| \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} (t')dt' \right].
\end{aligned}
$$

□

Lema 2.5

$$
\lambda_4^T(u) \leq c \left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^T \left\| \left(v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\|_{H^s(\mathbb{R})} (t')dt' \right]. \tag{2.35}
$$

Demonstração. Usando as propriedades do grupo e a desigualdade (2.15) temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda_4^T(u) &= (1+T)^{-\rho}||u||_{L_x^2L_T^\infty} \\
&= (1+T)^{-\rho}\left\|W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^2L_T^\infty} \\
&= (1+T)^{-\rho}\left\|W(t)u_0 - W(t)\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^2L_T^\infty} \\
&= (1+T)^{-\rho}\left\|W(t)\left[u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right]\right\|_{L_x^2L_T^\infty} \\
&\leq (1+T)^{-\rho}c(1+T)^{\rho}\left\|u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&= c\left\|u_0 - \int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\
&\leq c\left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \left\|-\int_0^t W(-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})}\right] \\
&\leq c\left[||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^T \left\|\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\|_{H^s(\mathbb{R})}(t')dt'\right]. \\
&\leq (1+T)^{-\rho}\left[\|W(t)u_0\|_{L_x^2L_T^\infty} + \left\|\int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^2L_T^\infty}\right] \\
&= (1+T)^{-\rho}\|W(t)u_0\|_{L_x^2L_T^\infty} + (1+T)^{-\rho}\left\|\int_0^t W(t-t')\left(v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')dt'\right\|_{L_x^2L_T^\infty}
\end{aligned}
$$

□

Agora, tomando o máximo dos $\lambda_i^T(u)$, usando as desigualdades $(2.32)-(2.35)$ e a desigualdade de Minkowski segue-se que

$$
\begin{aligned}
\Lambda^T(u) &= \max_{j=1,\ldots,4} \lambda_j^T(u) \\
&\leq c\left[\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \int_{-T}^{T} \left\| v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_{H^s(\mathbb{R})}(t)dt\right] \\
&\leq c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + c\left(\int_{-T}^{T} \left\| v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{H^s(\mathbb{R})}(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_{-T}^{T} 1^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + cT^{1/2}\left(\int_{-T}^{T} \left\| v\frac{\partial v}{\partial x}\right\|^2_{H^s(\mathbb{R})}(t)dt\right)^{1/2} \\
&\leq c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + cT^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2.
\end{aligned} \tag{2.36}
$$

Escolhemos a e $T > 0$ tal que

$$a = 2c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})}, \tag{2.37}$$

com T satisfazendo

$$4cT^{1/2}(1+T)^{\rho}a < 1. \tag{2.38}$$

De nossas escolhas em (2.37) e (2.38) resulta que

$$
\begin{aligned}
\Lambda^T(\phi(v)) &= \Lambda^T(u) \\
&\leq c||u_0||_{H^s(\mathbb{R})} + cT^{1/2}(1+T)^{\rho}(\Lambda^T(v))^2 \\
&\leq \frac{a}{2} + \frac{1}{4a}\cdot a^2 = \frac{3a}{4} \leq a.
\end{aligned}
$$

Assim, $\phi(v) = \phi_{u_0}(v) \in X_a^T$ desde que $v \in X_a^T$ e portanto $\phi : X_T^a \to X_T^a$.

Para continuar nossa demonstração, consideremos o seguinte lema:

Lema 2.6

$$\Lambda^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) \leq \int_{-T}^{T} \left\|\left(\widetilde{v}\frac{\partial \widetilde{v}}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial x}\right)(t')\right\|_{H^s(\mathbb{R})} dt'.$$

Demonstração. Usando a linearidade do grupo $W(t)$ e as idéias utilizadas nas estimativas de λ_i^T, $i = 1, 2, 3$ e 4 segue a demonstração do lema.

□

Mostraremos agora que $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração. Para isto tomemos $v, \widetilde{v} \in X_T^a$ com a e T satisfazendo (2.37) e (2.38). Note que

$$\begin{aligned}
\Lambda^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) &= \max_{j=1,\dots,4} \lambda_j^T(\phi_{u_0}(v) - \phi_{u_0}(\widetilde{v})) \\
&\leq cT^{1/2}(1+T)^\rho \Lambda^T(v-\widetilde{v})\{\Lambda^T(v) + \Lambda^T(\widetilde{v})\} \\
&\leq 2cT^{1/2}(1+T)^\rho a \Lambda^T(v-\widetilde{v}) \\
&\leq \frac{1}{2}\Lambda^T(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}$$

Portanto, para valores de T satisfazendo (2.37) e (2.38), $\phi : X_T^a \to X_T^a$ é uma contração e com isso existe um único $u \in X_T^a$ tal que $\phi_{u_0}(u) = u$, isto é,

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)(t')dt'.$$

De modo análogo, para $T_1 \in (0, T)$ obtemos

$$\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) \leq c||u_0 - \widetilde{u}_0||_{H^s(\mathbb{R})} + cT_1^{1/2}(1+T_1)^\rho \Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v})\{\Lambda^{T_1}(v) + \Lambda^{T_1}(\widetilde{v})\}.$$

Para ver que a aplicação dado inicial-fluxo é Lipschitz, considere $T_1 \in (0, T)$ e $v, \widetilde{v} \in X_T^a$ com a e T satisfazendo (2.37) e (2.38) . Assim,

$$\begin{aligned}
\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) &= \Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v}) \\
&\leq c||u_0 - \widetilde{u}_0||_{H^s(\mathbb{R})} + cT_1^{1/2}(1+T_1)^\rho \Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v})\{\Lambda^{T_1}(v) + \Lambda^{T_1}(\widetilde{v})\} \\
&\leq c||u_0 - \widetilde{u}_0||_{H^s(\mathbb{R})} + 2acT_1^{1/2}(1+T_1)^\rho \Lambda^{T_1}(v-\widetilde{v}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Lambda^{T_1}(\phi_{u_0}(v) - \phi_{\widetilde{u}_0}(\widetilde{v})) \leq K||u_0 - \widetilde{u}_0||_{H^s(\mathbb{R})}$$

onde $K > 0$. Assim, para um $T_1 \in (0, T)$ a aplicação $\widetilde{u}_0 \to \widetilde{u}$ de V (vizinhança de u_0 dependendo de T_1) em $X_{T_1}^a$ é Lipschitz.

Para estendermos a unicidade de nossa solução ao intervalo $(0, T)$, consideremos $w \in X_{T_1}$ para $T_1 \in (0, T)$ uma solução do (2.16). O argumento usado em (2.36) mostra que para $T_2 \in (0, T_1)$, $w \in X_{T_2}^a$. Portanto mostra que $w = u$ em $\mathbb{R} \times [-T_2, T_2]$.

Utilizando este mesmo processo um número finito de vezes, estendemos a unicidade de nossa solução ao intervalo $(0, T)$.

Portanto, está completa a demonstração do Teorema 2.3.

$\square$

2.5 Boa Colocação Global para a equação KdV em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 1$, $s \in \mathbb{N}$

Utilizaremos fortemente o resultado obtido na seção anterior juntamente com os funcionais para os quais a equação KdV preserva.

Teorema 2.4 *Se $s \in \mathbb{N}$, então o* ***PVI*** *(2) é globalmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, ou seja,*

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R})). \tag{2.39}$$

Demonstração. Para isso é suficiente mostrar que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(\cdot,t)\|_{H^s(\mathbb{R})} < +\infty \tag{2.40}$$

Por simplicidade, demonstraremos apenas o caso $s = 1$, uma vez que este nos será útil para concluir o resultado de estabilidade. De fato, sabemos que

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R})} = \|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Usando a quantidade conservada $M(u(\cdot,t)) = Q(u_0),\ \forall t \in \mathbb{R}$ concluimos que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Daí, se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, então $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty,\ \forall t \in \mathbb{R}$. Assim, resta mostrar que $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ é limitado. Para verificar isto, vamos usar outra quantidade conservada, a saber $E(u(\cdot,t)) = E(u_0)$. Usando esse fato temos que

$$\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} u_x^2(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x u_0^2 dx - \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} u_0^3 dx + \frac{1}{3}\int_{\mathbb{R}} u^3(x,t)dx. \tag{2.41}$$

Da desigualdade de Gagliardo-Niremberg segue que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^3(\mathbb{R})} \leq c\,\|u_x(\cdot,t)\|^{1/6}_{L^2(\mathbb{R})}\,\|u(\cdot,t)\|^{5/6}_{L^2(\mathbb{R})},$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}} u^3(x,t)dx \leq c\,\|u_x(\cdot,t)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}\,\|u_0\|^{5/2}_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Usando a desigualdade obtida em (2.41) ficamos com a seguinte desigualdade

$$\|u_x(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq A + B\,\|u_x(\cdot,t)\|^{1/2}_{L^2(\mathbb{R})}$$

e daí,

$$\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{1/2}\left(\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^{3/2} - B\right) \leq A, \tag{2.42}$$

onde A e B são constantes que independem de t. Com isso, podemos concluir que $\|u_x(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ é limitado para todo $t \in \mathbb{R}$.

Isso encerra nossa demonstração.

$\square$

3 Existência e Estabilidade de soluções tipo Ondas solitárias para a Equação KdV

3.1 Existência de soluções tipo Ondas solitárias para a Equação KdV

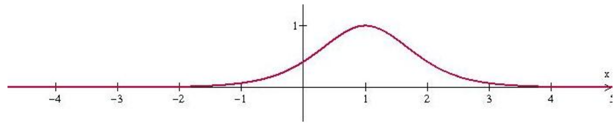
Em 1895, *Diederik Korteweg* e *Gustav de Vries* encontraram uma equação diferencial parcial que modela a altura da superfície da água que se move em forma de onda ao longo de um canal estreito de águas rasas, sobre a ação da gravidade.

O comprimento dessas ondas é muito grande quando comparado com a profundidade do meio em que ela se encontra.

Trabalharemos com a Equação de Korteweg-de Vries

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.1}$$

Dediquemo-nos agora a encontrar uma solução tipo onda solitária para a equação KdV (3.1). Inicialmente introduzimos a forma de onda solitária $u(x,t) = f(x - ct)$, que deve ter a forma de pulso (como mostra a figura abaixo) e $c > 0$ (que representa a velocidade da onda). Daí, $\phi(z)$, $\phi'(z)$ e $\phi''(z)$ tendem a zero quando $|z|$ tende ao infinito.



Observamos que:

(i) $u_t = \dfrac{d}{dt}\phi(x-ct) = -c\phi'(x-ct);$

(ii) $u_x = \dfrac{d}{dx}\phi(x-ct) = \phi'(x-ct);$

(iii) $u_{xxx} = \dfrac{d^3}{dx^3}f(x-ct) = \phi'''(x-ct).$

Agora, fazendo a mudança de variável $z = x - ct$ e introduzindo esta forma de onda solitária na equação KdV, ficamos com uma equação diferencial ordinária para $\phi(z)$ da seguinte forma:

$$-c\phi' + \phi\phi' + \phi''' = 0. \tag{3.2}$$

Aplicando a integral em relação a z em ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int (-c\phi' + \phi\phi' + \phi''')\, dz = \int 0\, dz. \quad \text{Portanto,}\\
&\int (-c\phi')\, dz + \int (\phi\phi')\, dz + \int (\phi''')\, dz = a, \quad \text{ou ainda,}\\
&-c\phi + \int \left(\frac{\phi^2}{2}\right)' dz + \phi'' = a. \quad \text{Logo}\\
&-c\phi + \frac{1}{2}\phi^2 + \phi'' = a,
\end{aligned}$$

onde a é a constante de integração.

Usando a hipótese que $\phi(z), \phi''(z) \longrightarrow 0$ quando $z \longrightarrow \infty$, concluímos que o valor de a é exatamente zero. Logo,

$$-c\phi + \frac{1}{2}\phi^2 + \phi'' = 0. \tag{3.3}$$

Agora, multiplicando ambos os membros da equação acima por ϕ', ficamos com:

$$-c\phi\phi' + \frac{1}{2}\phi^2\phi' + \phi'\phi'' = 0.$$

Integrando a equação precedente em relação a z, obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int(-c\phi\phi' + \frac{1}{2}\phi^2\phi' + \phi'\phi'')\,dz = \int 0\,dz\\
\Longleftrightarrow\quad & -c\int \phi\phi'\,dz + \frac{1}{2}\int\phi^2\phi'\,dz + \int\phi'\phi''\,dz = b\\
\Longleftrightarrow\quad & -c\int\left(\frac{\phi^2}{2}\right)'dz + \frac{1}{2}\int\left(\frac{\phi^3}{3}\right)'dz + \int\left(\frac{(\phi')^2}{2}\right)'dz = b\\
\Longleftrightarrow\quad & -c\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{6}\phi^3 + \frac{1}{2}(\phi')^2 = b\\
\Longleftrightarrow\quad & -3c\phi^2 + \phi^3 + 3(\phi')^2 = 6b,\ \text{onde } b \text{ é uma constante.}
\end{aligned}$$

Sabemos que $\phi(z), \phi'(z) \longrightarrow 0$ quando $z \longrightarrow \infty$, pois estamos supondo que ϕ é uma onda tipo pulso. Assim, a constante de integração b é igual a zero.

Colocando o termo $(\phi)^2$ em evidência, obtemos a seguinte equação:

$$3(\phi')^2 = (3c - \phi)\phi^2. \tag{3.4}$$

Observamos agora que é necessário $\phi(z) < 3c, \forall\ z\ \in \mathbb{R}$. Além disso, pela física do problema, podemos supor que $\phi(z) > 0, \forall\ z\ \in \mathbb{R}$.

Daí, $0 < \phi(z) < 3c, , \forall\ z\ \in \mathbb{R}$. Segue-se portanto de (3.4) que

$$\frac{\sqrt{3}}{\phi\sqrt{3c-\phi}}|\phi'| = 1. \tag{3.5}$$

Para simplificar os cálculos, façamos a substituição $\psi^2 = 3c - \phi$. Assim, $\phi = 3c - \psi^2$ e $\phi' = -2\psi\psi'$. Portanto a equação (3.5) assume a forma:

$$\frac{\sqrt{3}}{(3c-\psi^2)\sqrt{3c-(3c-\psi^2)}}(-2\psi\psi') = 1 \ \Rightarrow\ \frac{2\sqrt{3}}{3c-\psi^2}\psi' = -1.$$

Queremos integrar mais uma vez com relação a z, mas antes disso vamos escrever a equação acima na forma de frações parciais:

$$\frac{2\sqrt{3}}{3c-\psi^2}\psi' = -1 \ \Rightarrow\ \frac{\psi'}{\sqrt{3c}-\psi} + \frac{\psi'}{\sqrt{3c}+\psi} = -\sqrt{c}.$$

Integrando a equação precedente em relação a z, temos que

$$\int \frac{\psi'}{\sqrt{3c}-\psi}dz + \int \frac{\psi'}{\sqrt{3c}+\psi}dz = \int -\sqrt{c}dz \quad \text{e portanto}$$

$$\ln(\sqrt{3c}+\psi) - \ln(\sqrt{3c}-\psi) = -\sqrt{c}z + d.$$

Aplicando a função exponencial em ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$\psi(z) = \sqrt{3c}\left(\frac{e^{-z\sqrt{c}+d}-1}{e^{-z\sqrt{c}+d}+1}\right) = -\sqrt{3c}\tanh\left[\frac{z}{2}\sqrt{c}-d\right]. \tag{3.6}$$

Portanto, como $\phi = 3c - \psi^2$, temos que:

$$\phi(z) = 3c\,\text{sech}^2\left[\frac{z}{2}\sqrt{c}-d\right]. \tag{3.7}$$

Visto que d é a constante de integração, para simplificar nossa solução, admitiremos $d = 0$, e ficamos com a equação:

$$\phi(z) = 3c\,\text{sech}^2\left[\frac{z}{2}\sqrt{c}\right]. \tag{3.8}$$

Assim, a solução da equação KdV, tipo onda solitária, é

$$u(x,t) = \phi(x-ct) = 3c\,\text{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct)\right]. \tag{3.9}$$

Russell observou que no experimento das ondas de translação, a velocidade com a qual a onda se desloca horizontalmente é constante e igual a c, e pela observação feita no texto, a amplitude da onda é $3c$.

3.2 Lema de Compacidade Concentrada

Nesta seção apresentaremos o Lema de Compacidade Concentrada e explicaremos como iremos utilizá-lo.

A prova deste resultado pode ser encontrada nos trabalhos de Lions ([21]) e ([22]) ou na dissertação de mestrado ([23]).

Lema 3.1 (Compacidade Concentrada) *Seja (ρ_n) uma sequência de funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo:*

$$\rho_n \geq 0 \text{ em } \mathbb{R}^n, \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n dx = \lambda \tag{3.10}$$

com $\lambda > 0$ fixado. Então existe uma subsequência (ρ_{n_k}) satisfazendo uma das três propriedades abaixo:

(i) ***(Compacidade)*** *existe $y_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $\rho_{n_k}(\cdot + y_k)$ acumula-se, ou seja,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists R < \infty, \int_{y_k + B_R} \rho_{n_k} dx \geq \lambda - \varepsilon; \tag{3.11}$$

(ii) ***(Nulidade)***

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \left\{ \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{y+B_R} \rho_{n_k} dx \right\} = 0, \ \forall 0 < R < \infty; \tag{3.12}$$

(iii) ***(Dicotomia)*** *Existe $\alpha \in (0, \lambda)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \geq 1$ e $\rho_k^1, \rho_k^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $\rho_k^1, \rho_k^2 > 0$ satisfazendo para $k \geq k_0$*

$$\begin{cases} \left\| \rho_{n_k} - (\rho_k^1 + \rho_k^2) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k^1 dx - \alpha \right| < \varepsilon, \ \left| \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k^2 dx - (\lambda - \alpha) \right| < \varepsilon \\ \textit{dist} \left(\textit{Supp } \rho_k^1, \textit{Supp } \rho_k^2 \right) \xrightarrow{k} \infty. \end{cases}$$

Para utilizar este lema trataremos nosso problema de estabilidade como um problema de minimização. Na seção que segue, fixaremos um funcional. A saber,

$$M(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u^2 dx,$$

e procuramos no conjunto das funções que pertencem a pré-imagem de um valor regular deste funcional descrever o comportamente das sequências minimizantes de outro funcional,

$$E(u) = \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left[(u_x)^2 - \frac{1}{3} u^3 \right] dx \right).$$

Fixaremos agora a notação para relacionar o lema apresentado acima com o prova da Estabilidade de soluções tipo Ondas solitárias para a Equação KdV que daremos na próxima seção.

No que segue a sequência (f_n) cumprirá o papel desempenhado pela sequência (ρ_n), ou seja,

$$f_n^2 \in \ L^1(\mathbb{R})$$

que é o mesmo que

$$f_n \in \ L_2(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} f_n^2 dx = q,$$

onde q é uma constante. Feito isso, o Lema de Compacidade Concentrada é válido e temos que existe uma subsequência

$$(f_{n_k})$$

satisfazendo uma das três propriedades abaixo:

(i) **(Compacidade)** existe $y_k \in \mathbb{R}$ tal que $f_{n_k}(\cdot + y_k)$ acumula-se, ou seja,

$$\forall z < q, \exists r < \infty, \ \int_{y_k - r}^{y_k + r} f_{n_k}^2(x) dx \geq z; \tag{3.13}$$

(ii) **(Nulidade)**

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \left\{ \sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{y-r}^{y+r} f_{n_k}^2(x) dx \right\} = 0, \ \forall 0 < r < \infty; \tag{3.14}$$

(iii) **(Dicotomia)** Existe $\alpha \in (0, q)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \geq 1$ e $g_k, h_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com $g_k, h_k > 0$ satisfazendo para $k \geq k_0$

$$\begin{cases} \|f_{n_k} - (g_k + h_k)\|_{L^2(\mathbb{R})} < \varepsilon, \ \left| \int_{\mathbb{R}} g_k^2 dx - \alpha \right| < \varepsilon, \ \left| \int_{\mathbb{R}} h_k^2 dx - (q - \alpha) \right| < \varepsilon \\ \text{dist}\,(\text{Supp } g_k, \text{Supp } h_k) \xrightarrow{k} \infty. \end{cases}$$

Para prosseguir na demonstração do resultado trabalharemos para eliminar os casos de **Nulidade** e **Dicotomia** restando apenas a **Compacidade**.

3.3 Estabilidade de soluções tipo Ondas Solitárias para a Equação KdV

Nesta seção vamos mostrar nosso resultado principal, ilustrando assim o Método de Compacidade Concentrada. O teorema que demonstraremos é um resultado de Benjamin e Bona que trata da Estabilidade das Soluções do Tipo Ondas Solitárias para a equação KdV (2).

Teorema 3.1 *Para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se*

$$\|u_0 - \phi_c\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta, \tag{3.15}$$

então a solução $u(x,t)$ do problema (2) com $u(x,0) = u_0$ satisfaz

$$\inf_{y\in\mathbb{R}} \|u(\cdot,t) - \phi_c(\cdot + y)\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.16}$$

Iniciamos definindo dois funcionais $E, M : H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ que são conservados pelo fluxo da equação KdV (2), dados por

$$M(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx \tag{3.17}$$

e

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[(u_x)^2 - \frac{1}{3}u^3\right] dx. \tag{3.18}$$

Uma observação rápida nos mostra que M e E são funcionais contínuos. De fato, seja $K \subset H^1(\mathbb{R})$ um conjunto compacto arbitrário. Tomando $u, v \in K$ vamos mostrar que M e E são uniformemente contínuos em K e assim contínuos em $H^1(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|M(u) - M(v)| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} u^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} v^2 dx\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\right| \left|\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} - \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\right| \\
&\leq C\left|\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} - \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}\right| \\
&\leq C\|u - v\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq C\|u - v\|_{H^1(\mathbb{R})} \text{ onde } C \text{ depende apenas de } K,
\end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
|E(u)-E(v)| &= \left|\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left[(u_x)^2-\frac{1}{3}u^3\right]dx\right)-\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left[(v_x)^2-\frac{1}{3}v^3\right]dx\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}}(u_x)^2dx-\int_{\mathbb{R}}(v_x)^2dx\right|+\frac{1}{6}\left|\int_{\mathbb{R}}u^3dx-\int_{\mathbb{R}}v^3dx\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R})}-\|v_x\|^2_{L^2(\mathbb{R})}\right|+\frac{1}{6}\left|\|u\|^3_{L^3(\mathbb{R})}-\|v\|^3_{L^3(\mathbb{R})}\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|\|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}+\|v_x\|_{L^2(\mathbb{R})}\right|\left|\|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}-\|v_x\|_{L^2(\mathbb{R})}\right| \\
&+ \frac{1}{6}\left|\|u\|^2_{L^3(\mathbb{R})}+\|u\|_{L^3(\mathbb{R})}\|v\|_{L^3(\mathbb{R})}+\|v\|^2_{L^3(\mathbb{R})}\right|\left|\|u\|_{L^3(\mathbb{R})}-\|v\|_{L^3(\mathbb{R})}\right| \\
&\leq C_1\left|\|u_x\|_{L^2(\mathbb{R})}-\|v_x\|_{L^2(\mathbb{R})}\right|+C_2\left|\|u\|_{L^3(\mathbb{R})}-\|v\|_{L^3(\mathbb{R})}\right| \\
&\leq C_1\|u_x-v_x\|_{L^2(\mathbb{R})}+C_2\|u-v\|_{L^3(\mathbb{R})} \\
&\leq C\|u-v\|_{H^1(\mathbb{R})}, \text{ onde } C \text{ depende apenas de } K,
\end{aligned}
$$

onde usamos a deigualdade triangular, o fato que $u, v \in K$ e o Teorema de Imersão de Sobolev para concluir as desigualdades acima.

Fixemos agora um número positivo c e seja $\phi_c(x) = 3c\,\text{sech}^2\left[\frac{x}{2}\sqrt{c}\right]$.

Com o objetivo de usar o **Lema de Compacidade Concentrada** precisamos estabelecer alguns resultados. Para isso, considere os números reais $q = M(\phi_c) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\phi_c^2dx$ e

$$I_q = \inf\left\{E(\psi);\ \psi \in H^1(\mathbb{R}) \text{ e } M(\psi) = q\right\}. \tag{3.19}$$

Definimos agora o *conjunto minimizante* para I_q como sendo

$$G_q = \left\{\psi \in H^1(\mathbb{R});\ E(\psi) = I_q \text{ e } M(\psi) = q\right\}. \tag{3.20}$$

Além disso, definimos uma *sequência minimizante* para I_q como sendo uma sequência de funções (f_n) em $H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$M(f_n) = q,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n\longrightarrow\infty} E(f_n) = I_q.$$

A função $g = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n$, quando este limite existir, é chamada de *minimizador* de I_q.

Agora, pondo $\rho_n = |f_n|^2$, vemos que a sequência $(\rho_n) \subset H^1(\mathbb{R})$, pois $f_n \in L^2(\mathbb{R})$ e $\rho_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Isso nos coloca nas hipóteses do **Lema de Compacidade Concentrada** (3.1).

O Lema de Compacidade Concentrada quando aplicado a esta situação, consiste em duas observações: a primeira é que se $\alpha = q$, então a sequência minimizante (f_n) possui uma subsequência que, quando seus termos são transladados adequadamente, converge fortemente em $H^1(\mathbb{R})$ para um elemento de G_q; a segunda é que algumas propriedades simples do problema variacional implicam que $\alpha = q$ para cada sequência minimizante (f_n).

Segue-se então que não apenas existe um minimizador em $H^1(\mathbb{R})$, mas cada sequência minimizante converge em $H^1(\mathbb{R})$, na norma $H^1(\mathbb{R})$, para um elemento do conjunto G_q.

Precisamos agora dar alguns detalhes do método.

Lema 3.2 *Suponha que são dados $B > 0$ e $\delta > 0$. Então existe $\eta = \eta(B, \delta) > 0$ tal que se $f \in H^1(\mathbb{R})$ com $\|f\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq B$ e $\|f\|_{L^3(\mathbb{R})} \geq \delta$, então*

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \int_{y-1/2}^{y+1/2} |f(x)|^3 dx \geq \eta.$$

Demonstração. Temos que:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{j-1/2}^{j+1/2} \left(f^2 + (f')^2\right) dx = \|f\|^2_{H^s(\mathbb{R})} \leq B^2 = \frac{B^2}{\|f\|^3_{L^3(\mathbb{R})}} \|f\|^3_{L^3(\mathbb{R})} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{B^2}{\|f\|^3_{L^3(\mathbb{R})}} \int_{j-1/2}^{j+1/2} |f|^3 dx.$$

Daí, existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} \left(f^2 + (f')^2\right) dx \leq \frac{B^2}{\|f\|^3_{L^3(\mathbb{R})}} \int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} |f|^3 dx.$$

Agora, usando o teorema de Rellich-Kondrachov (1.7), temos que existe uma constante A (que independe de f) tal que

$$\left(\int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} |f|^3 dx\right)^{1/3} = \|F\|_{L^3(U)} \leq A \|F\|_{H^1(U)} = A \left(\int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} f^2 + (f')^2 dx\right)^{1/2}.$$

onde $U = B\left((j_0, 0, 0, 0, 0, 0); 1/2\right) \in \mathbb{R}^6$ e $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = f(x_1)$.

Daí,

$$\left(\int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} |f|^3 dx\right)^{1/3} \leq \left(\frac{AB}{\|f\|^{3/2}_{L^3(\mathbb{R})}}\right) \left(\int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} |f|^3 dx\right)^{1/2}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da desigualdade acima e usando a hipótese que $|f|_3 \geq \delta$ obtemos

$$\int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} |f|^3 dx \geq \frac{\delta^9}{A^6 B^6}.$$

Agora, basta tomar $\eta = \dfrac{\delta^9}{A^6 B^6}$ e observar que

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-1/2}^{y+1/2} |f(x)|^3 dx \geq \int_{j_0-1/2}^{j_0+1/2} |f|^3 dx$$

para concluir a demonstração.

$\square$

No que segue-se, vamos estabelecer algumas propriedades do problema variacional e de suas sequências minimizantes que não dependem do valor de α.

Lema 3.3 *Para todo $q_1 > 0$, tem-se que*

$$-\infty < I_{q_1} < 0.$$

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que $I_{q_1} < 0$. Escolha $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $M(\psi) = q_1$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi^3 dx \neq 0$. Para cada $\theta > 0$, defina ψ_θ por $\psi_\theta(x) = \sqrt{\theta}\psi(\theta x)$. Então, para todo $\theta > 0$ tem-se que

$$M(\psi_\theta) = \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\theta}\psi(\theta x)\right)^2 dx = \theta \int_{\mathbb{R}} (\psi(\theta x))^2 \, dx = \theta \int_{\mathbb{R}} \psi^2(y) \frac{dy}{\theta} = M(\psi),$$

onde usamos, e usaremos abaixo, a mudança de variável $y = \theta x$. Agora, definimos
$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} g(\theta) &= E(\psi_\theta) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\theta^{3/2}\psi_x(\theta x)\right)^2 - \frac{1}{3}(\sqrt{\theta}\psi(\theta x))^3 dx \\ &= \frac{\theta^2}{2} \int_{\mathbb{R}} (\psi_y)^2 dy - \frac{\theta^{1/2}}{6} \int_{\mathbb{R}} \psi^3 dy. \end{aligned}$$

Sendo $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \psi^3 \neq 0$, temos que para θ suficientemente pequeno $g(\theta) < 0$. Logo,
$I_{q_1} \leq E(\psi_\theta) = g(\theta) < 0$.

Vamos mostrar que $I_{q_1} > -\infty$.

De fato, denotando por ψ uma função arbitrária em $H^1(\mathbb{R})$ tal que $M(\psi) = q_1$. Para mostrar que $I_{q_1} > -\infty$, é suficiente mostrar que $E(\psi)$ é limitado inferiormente por um número que independe de ψ. Note que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \psi^3 dx \right| \leq \|\psi\|_{L^3(\mathbb{R})}^3 \leq A \|\psi\|_{H^{1/6}(\mathbb{R})}^3 \leq A \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{5/2} \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^{1/2},$$

onde usamos o teorema de Rellich-Kondrachov (1.7) na segunda desigualdade e o item (iv) da proposição (1.4). Observamos que A denota várias constantes que independem de ψ. Daí, usando a desigualdade de Young (1.4) obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \psi^3 dx \right| \leq \varepsilon \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + A_\varepsilon \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^{10/3},$$

onde ε é arbitrário e A_ε depende de ε mas não de ψ. Sabendo que $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = (2M(\psi))^{1/2}$, temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \psi^3 dx \right| \leq \varepsilon \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 + A_{\varepsilon,q_1} \text{ e}$$

novamente A_{ε,q_1} independe de ψ. Agora,

$$\begin{aligned} E(\psi) &= E(\psi) + M(\psi) - M(\psi) \\ &= \frac{1}{2} \int \left((\psi')^2 + \psi^2 \right) dx - \frac{1}{6} \int \psi^3 dx - M(\psi) \\ &\geq \frac{1}{2} \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{\varepsilon}{6} \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{1}{6} A_{\varepsilon,q_1} - q_1. \end{aligned}$$

Escolhendo $\varepsilon \leq 3$, temos que $\frac{1}{2} \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 - \frac{\varepsilon}{6} \|\psi\|_{H^1(\mathbb{R})}^2 \geq 0$ e com isso

$$E(\psi) \geq -\frac{1}{6} A_{\varepsilon,q_1} - q_1,$$

que completa a demonstração.

$\square$

Lema 3.4 *Se $\{f_n\}$ é uma sequência minimizante para I_q, então existe constantes $B > 0$ e $\delta > 0$ tais que*

(i) $\|f_n\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq B$ *para todo n, e*

(ii) $\|f_n\|_{L^3(\mathbb{R})} \geq \delta$ *para todo* n *suficientemente grande.*

Demonstração. Para provar o primeiro item é suficiente observar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|f_n\|^2_{H^1(\mathbb{R})} &= \frac{1}{2}\int \left(f_n^2 + (f_n')^2\right) dx \\
&= E(f_n) + M(f_n) + \frac{1}{6}\int f_n^3 dx \\
&\leq \sup_n E(f_n) + q + \frac{A}{6}\|f_n\|^3_{H^{1/6}(\mathbb{R})} \\
&\leq A\left(1 + \|f_n\|^{5/2}_{L^2(\mathbb{R})}\|f_n\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R})}\right) \\
&\leq A\left(1 + q^{5/2}\|f_n\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R})}\right),
\end{aligned}$$

onde usamos o teorema de Rellich-Kondrachov (1.7) da segunda para a terceira linha e o item (iv) da proposição (1.4) da terceira à quarta linha. Lembramos que A denota várias constantes que independem de n. Ficamos agora com a seguinte desigualdade

$$\frac{1}{2}\|f_n\|^2_{H^1(\mathbb{R})} - Aq^{5/2}\|f_n\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R})} \leq A \Longrightarrow \|f_n\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R})}\left(\|f_n\|^{3/2}_{H^1(\mathbb{R})} - Aq^{5/2}\right) \leq A.$$

Daí, existe $B > 0$ tal que $\|f_n\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq B$.

Demonstraremos o item 2 argumentando por contradição.

Se não existe uma tal constante δ então

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\int (f_n)^3\, dx \leq 0,$$

logo

$$I_q = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{2}\int (f_n')^2 - \frac{1}{6}\int f_n^3 dx\right) \geq \liminf_{n\longrightarrow\infty}\left(-\frac{1}{6}\int (f_n)^3\, dx\right) \geq 0,$$

o que contradiz o lema anterior.

□

Lema 3.5 *Para todo* $q_1, q_2 > 0$*, tem-se que*

$$I_{(q_1+q_2)} < I_{q_1} + I_{q_2}.$$

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que para todo $\theta > 0$ e $q > 0$,

$$I_{\theta q} = \theta^{5/3} I_q.$$

De fato, para cada $\psi \in H^1(\mathbb{R})$ defina ψ_θ por

$$\psi_\theta(x) = \theta^{2/3}\psi(\theta^{1/3}x).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
M(\psi_\theta) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\theta^{2/3}\psi(\theta^{1/3}x)\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\theta^{4/3}\int_{\mathbb{R}} \psi^2(\theta^{1/3}x)dx \\
&= \frac{1}{2}\theta^{4/3}\frac{1}{\theta^{1/3}}\int_{\mathbb{R}} \psi^2(y)dy = \theta M(\psi)
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
E(\psi_\theta) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\psi_\theta')^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \psi_\theta^3 dx \\
&= \frac{1}{2}\theta^2\int_{\mathbb{R}} \left(\psi'(\theta^{1/3}x)\right)^2 dx - \frac{1}{6}\theta^2\int_{\mathbb{R}} \psi^3(\theta^{1/3}x)dx \\
&= \frac{1}{2}\theta^2\frac{1}{\theta^{1/3}}\int (\psi'(y))^2 dy - \frac{1}{6}\theta^2\frac{1}{\theta^{1/3}}\int_{\mathbb{R}} \psi^3(y)dy \\
&= \theta^{5/3}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\psi'(y))^2 dy - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \psi^3(y)dy\right) \\
&= \theta^{5/3}E(\psi).
\end{aligned}$$

Com isso, segue que

$$\begin{aligned}
I_{\theta q} &= \inf\{E(\psi_\theta);\ M(\psi_\theta) = \theta q\} \\
&= \inf\left\{\theta^{5/3}E(\psi);\ M(\psi) = q\right\} \\
&= \theta^{5/3} I_q.
\end{aligned}$$

Agora, usando o fato que $(a+b)^{5/3} > a^{5/3} + b^{5/3}$ quando $a, b > 0$ (isso por um exercício simples de cálculo) e as desigualdades acima, temos que para todo $q_1, q_2 > 0$

$$I_{q_1+q_2} = (q_1+q_2)^{5/3} I_1 < \left(q_1^{5/3} + q_2^{5/3}\right) I_1 = I_{q_1} + I_{q_2}.$$

□

Para o que segue vamos considerar (f_n) uma sequência minimizante para I_q e α como no **Lema de Compacidade Concentrada** (3.1), vamos explorar agora as implicações para (f_n) de cada uma das três possilidades: $\alpha = q,\ 0 < \alpha < q$ e $\alpha = 0$.

O primeiro destes casos é chamado de **Compacidade**.

Lema 3.6 *Suponha $\alpha = q$. Então existe uma sequência de números reais $\{y_n\}$ tal que*

(i) Para todo $z < q$ existe $r = r(z)$ tal que

$$\int_{y_n - r}^{y_n + r} |f_n|^2 dx > z$$

para todo n suficientemente grande

(ii) A sequência $\{\widetilde{f_n}\}$ definida por

$$\widetilde{f_n}(x) = f(x + y_n),\ \textit{para todo } x \in \mathbb{R},$$

tem uma subsequência que converge na norma $H^1(\mathbb{R})$ para uma função $g \in G_q$. Em particular, G_q é não vazio.

Demonstração. Como $\alpha = q$, existe r_0 tal que para todo n suficientemente grande tem-se

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \int_{y - r_0}^{y + r_0} |f_n|^2 dx > \frac{q}{2}.$$

Portanto, dado $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $y_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{2} \int_{y_n - r_0}^{y_n + r_0} |f_n|^2 dx > \frac{q}{2}.$$

Agora, dado $z < q$ podemos assumir que $z > q/2$. Novamente, como $\alpha = q$ podemos encontrar $r_0(z)$ e $n_0(z)$ tal que para todo $n > n_0(z)$ tem-se

$$\frac{1}{2} \int_{y_n(z) - r_0(z)}^{y_n(z) + r_0(z)} |f_n|^2 dx > z,\ \text{para algum } y_n(z) \in \mathbb{R}.$$

Note que para concluir o item (i) resta mostrar que $y_n(z)$ pode ser substituido pelo y_n encontrado anteriormente. Assim, visto que $\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |f_n|^2 dx = q$, segue que para n suficientemente grande

$$[y_n - r_0, y_n + r_0] \subset [y_n(z) - r_0(z), y_n(z) + r_0(z)]\,.$$

Tomando agora $r = r(z) = 2r_0(z) - r_0$ segue facilmente que

$$[y_n(z) - r_0(z), y_n(z) + r_0(z)] \subset [y_n - r, y_n + r] .$$

Isso encerra a demonstração do item (i).

Provaremos agora o item (ii).

A primeira afirmativa já provada nos diz que para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $r_k \in \mathbb{R}$ tal que $\forall n$ suficientemente grande

$$\frac{1}{2}\int_{-r_k}^{r_k} |\widetilde{f}_n|^2 dx > q - \frac{1}{k}.$$

Pelo lema (3.4) acima, a sequência $\left(\widetilde{f}_n\right)$ é unifomemente limitada em $H^1(\mathbb{R})$. Tomando $U = B(0; r_k) \subset \mathbb{R}^6$ podemos aplicar o Teorema de Rellich-Kondrachov (1.7) para concluir que

$$H^1(U) \hookrightarrow L^2(U).$$

Isso significa que conjuntos limitados de $H^1(U)$ são conjuntos pré-compactos de $L^2(U)$.

Segue-se portanto que alguma subsequência de $\left(\widetilde{f}_n\right)$ converge em $L^2\left([-r_k, r_k]\right)$ para uma função limite $g \in L^2\left([-r_k, r_k]\right)$ satisfazendo

$$\frac{1}{2}\int_{-r_k}^{r_k} |g|^2 dx > q - \frac{1}{k}.$$

Um argumento de **Diagonalização de Cantor**, juntamente com o fato que

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |g|^2 dx = q,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

mostra-nos que alguma subsequência de $\left(\widetilde{f}_n\right)$ converge em $L^2(\mathbb{R})$, em norma, para uma função $g \in L^2(\mathbb{R})$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}} |g|^2 dx = q.$$

Usando novamente o lema 3.4 temos que:

$$\left\|\widetilde{f}_n - g\right\|_{L^3(\mathbb{R})} \leq A\left\|\widetilde{f}_n - g\right\|_{H^{1/6}(\mathbb{R})} \leq A\left\|\widetilde{f}_n - g\right\|_{H^1(\mathbb{R})}^{1/6} \cdot \left\|\widetilde{f}_n - g\right\|_{L^2(\mathbb{R})}^{5/6} \leq C\left\|\widetilde{f}_n - g\right\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

onde A e C são constantes que independem de n.

Assim, $\widetilde{f_n} \longrightarrow g$ em $L^3(\mathbb{R})$. Além disso, pela **compacidade fraca da esfera unitária e a semi-continuidade inferior fraca da norma no espaço de Hilbert** (Teorema de Banach-Alaoglu), sabemos que $\widetilde{f_n} \rightharpoonup g$ em $H^1(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\|g\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \left\|\widetilde{f_n}\right\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} E(g) &= \frac{1}{2}\|g\|^2_{H^1(\mathbb{R})} - \frac{1}{2}\|g\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{6}\|g\|^3_{L^3(\mathbb{R})} \\ &\leq \lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{2}\left\|\widetilde{f_n}\right\|^2_{H^1(\mathbb{R})} - \frac{1}{2}\left\|\widetilde{f_n}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R})} - \frac{1}{6}\left\|\widetilde{f_n}\right\|^3_{L^3(\mathbb{R})}\right) \\ &= \lim_{n\longrightarrow\infty} E(\widetilde{f_n}) = I_q. \end{aligned}$$

Como $M(g) = q$ e $I_q = \inf\left\{E(\psi);\ \psi \in H^1(\mathbb{R}) \text{ e } M(\psi) = q\right\}$. temos que $E(g) = I_q$ e daí $g \in G_q$. Finalmente, juntando os fatos que

$$E(g) = \lim_{n\longrightarrow\infty} E(\widetilde{f_n}),\ \|g\|_{L^3(\mathbb{R})} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|\widetilde{f_n}\right\|_{L^3(\mathbb{R})} \text{ e } \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|\widetilde{f_n}\right\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

temos que

$$\|g\|_{H^1(\mathbb{R})} = \lim_{n\longrightarrow\infty}\left\|\widetilde{f_n}\right\|_{H^1(\mathbb{R})},$$

e daí concluímos que $\widetilde{f_n} \longrightarrow g$ em $H^1(\mathbb{R})$.

□

O lema que segue é usado para descrever o que acontece com a sequência minimizante quando $0 < \alpha < q$.

Lema 3.7 *Para todo ε, existe um $N \in \mathbb{N}$ e sequências de funções $\{g_N, g_{N+1}, g_{N+2}, \cdots\}$ e $\{h_N, n_{N+1}, h_{N+2}, \cdots\}$ em $H^1(\mathbb{R})$ tais que para todo $n > N$,*

(i) $|M(g_n) - \alpha| < \varepsilon$;

(ii) $|M(h_n) - (q-\alpha)| < \varepsilon$;

(iii) $E(f_n) \geq E(g_n) + E(h_n) - \varepsilon$.

Demonstração.

Escolha $\phi \in C_0^\infty([-2,2])$ tal que $\phi \equiv 1$ em $[-1,1]$ e seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\phi^2 + \psi^2 \equiv 1$ sobre $\mathbb{R}$.

Para cada $r \in \mathbb{R}$, defina $\phi_r(x) = \phi(x/r)$ e $\psi_r(x) = \psi(x/r)$. Para todos os valores de r suficientemente grande temos que

$$\alpha - \varepsilon < \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{y_n - r}^{y_n + r} |f_n|^2 dx \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{y_n - 2r}^{y_n + 2r} |f_n|^2 dx \leq \alpha.$$

Assumindo por um momento que o valor de r é escolhido e fixado, então podemos escolher n_0 suficientemente grande tal que

$$\alpha - \varepsilon < \frac{1}{2} \int_{y_n - r}^{y_n + r} |f_n|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{y_n - 2r}^{y_n + 2r} |f_n|^2 dx < \alpha + \varepsilon, \ \forall n \geq n_0.$$

Portanto, para cada $n \geq n_0$ podemos encontrar y_n tal que

$$\frac{1}{2} \int_{y_n - r}^{y_n + r} |f_n|^2 dx > \alpha - \varepsilon \tag{3.21}$$

e

$$\frac{1}{2} \int_{y_n - 2r}^{y_n + 2r} |f_n|^2 dx < \alpha + \varepsilon. \tag{3.22}$$

Agora, defina $g_n(x) = \phi_r(x - y_n) f_n(x)$ e $h_n(x) = \psi_r(x - y_n) f_n(x)$. Então, claramente as afirmações (i) e (ii) são satisfeitas para g_n e h_n.

Com efeito, como para $\left| \dfrac{x - y_n}{r} \right| > 2$ tem-se que $g_n(x) = 0$, basta estudar $g_n(x)$ para

$$\left| \frac{x - y_n}{r} \right| < 2 \Longleftrightarrow -2r < x - y_n < 2r \Longleftrightarrow y_n - 2r < x < y_n + 2r.$$

Daí,

$$M(g_n) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} g_n^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_{y_n - 2r}^{y_n + 2r} \phi^2 \left(\frac{x - y_n}{r} \right) f_n^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_{y_n - 2r}^{y_n + 2r} |f_n|^2(x) dx < \alpha + \varepsilon.$$

Logo, $|M(g_n) - \alpha| < \varepsilon$.

Note que

$$h_n(x) \neq 0 \Longleftrightarrow \left| \frac{x - y_n}{r} \right| > 1 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x - y_n > r & \longleftrightarrow x > y_n + r \\ x - y_n < -r & \longleftrightarrow x < y_n - r \end{array} \right. .$$

Agora,

$$\begin{aligned}
M(h_n) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} h_n^2(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{y_n-r} \psi^2\left(\frac{x-y_n}{r}\right) f_n^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_{y_n+r}^{\infty} \psi^2\left(\frac{x-y_n}{r}\right) f_n^2(x)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{y_n-r} f_n^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_{y_n+r}^{\infty} f_n^2(x)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f_n^2(x)dx - \frac{1}{2}\int_{y_n-r}^{y_n+r} f_n^2(x)dx \\
&< q-(\alpha-\varepsilon).
\end{aligned}$$

Resta portanto, provar a afirmação (iii). Para tanto, note que

$$\begin{aligned}
E(g_n)+E(h_n) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} \left[(\phi_r f_n)'\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\phi_r f_n\right]^3 dx\right) + \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} \left[(\psi_r f_n)'\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\psi_r f_n\right]^3 dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} \phi_r^2 \left(f_n'\right)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} \phi_r \phi_r' f_n f_n' dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\phi_r'\right)^2 f_n^2 dx\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} \psi_r^2 \left(f_n'\right)^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}} \psi_r \psi_r' f_n f_n' dx + \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_r'\right)^2 f_n^2 dx\right] \\
&- \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \phi_r^2 f_n^3 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \psi_r^2 f_n^3 dx \\
&+ \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \left(\phi_r^2-\phi_r^3\right) f_n^3 dx + \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \left(\psi_r^2-\psi_r^3\right) f_n^3 dx.
\end{aligned}$$

Observe que simplificamos a escrita acima, onde ϕ_r denota $\phi_r(x-y_n)$ e ψ_r denota $\psi_r(x-y_n)$.

Agora usando os fatos:

$$\phi^2+\psi^2 \equiv 1,$$

$$\left\|(\phi_r)'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{\|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{r}$$

e

$$\left\|(\psi_r)'\right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = \frac{\|\psi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{r},$$

juntamente com a Desilgualdade de Holder e o lema (3.4), podemos reescrever a equação acima na forma

$$E(g_n)+E(h_n) = E(f_n) + O\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \left[\left(\phi_r^2-\phi_r^3\right)+\left(\psi_r^2-\psi_r^3\right)\right] f_n^3 dx,$$

onde $O\left(\frac{1}{r}\right)$ significa que o termo omitido, em valor absoluto, é menor do que $\frac{A_1}{r}$ com A_1 independente de r e n.

Note que,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}}\left[\left(\phi_r^2-\phi_r^3\right)+\left(\psi_r^2-\psi_r^3\right)\right]f_n^3dx\right| &\leq \left(\int_{r\leq|x-y_n|\leq 2r}2|f_n|^3dx\right)\\ &\leq 2\left(\int_{r\leq|x-y_n|\leq 2r}|f_n|^2dx\right)\cdot\|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\leq A_2\varepsilon.\end{aligned}$$

Usando as desigualdades (3.21) e (3.22) e a última desigualdade acima observamos que

$$\int_{r\leq|x-y_n|\leq 2r}|f_n|^2dx=\left(\int_{y_n-2r}^{y_n+2r}|f_n|^2dx\right)-\left(\int_{y_n-r}^{y_n+r}|f_n|^2dx\right)\leq(\alpha+\varepsilon)-(\alpha-\varepsilon)=2\varepsilon.$$

Agora, escolhemos r de modo que $\left|O\left(\frac{1}{r}\right)\right|<\varepsilon$. Pela escolha das sequências (g_n) e (h_n), juntamente com as afirmações (i) e (ii) asseguramos que

$$E(f_n)\geq E(g_n)+E(h_n)-(A_2+1)\varepsilon,\ \forall n\geq n_0(r). \tag{3.23}$$

Finalmente, podemos retornar ao início da demonstração e substituir ε' por $\min\left\{\varepsilon,\frac{\varepsilon}{A_2+1}\right\}$, transformando assim (3.23) na afirmação (iii).

□

Corolário 3.1 *Se* $0<\alpha<q$ *então*

$$I_q\geq I_\alpha+I_{q-\alpha}.$$

Demonstração.

Primeiro observe que se g é uma função tal que $|M(g)-\alpha|<\varepsilon$, então $M(\beta g)=\alpha$, onde $\beta=\left(\frac{\alpha}{M(g)}\right)^{1/2}$ satisfaz $|\beta-1|<C\varepsilon$ com C independente de g e de ε.

De fato,

$$M(\beta g)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\beta^2g^2dx=\beta^2\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}g^2dx\right)=\frac{\alpha}{M(g)}M(g)=\alpha,$$

e

$$
\begin{aligned}
|\beta - 1| &= \left| \left(\frac{\alpha}{M(g)} \right)^{1/2} - 1 \right| = \left| \frac{\alpha^{1/2} - M(g)^{1/2}}{M(g)^{1/2}} \right| \\
&= \left| \frac{\left(\alpha^{1/2} - M(g)^{1/2}\right)\left(\alpha^{1/2} + M(g)^{1/2}\right)}{M(g)^{1/2}\left(\alpha^{1/2} + M(g)^{1/2}\right)} \right| \\
&= \frac{|\alpha - M(g)|}{M(g)^{1/2}\left(\alpha^{1/2} + M(g)^{1/2}\right)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{(\alpha/2)^{1/2}\left((\alpha/2)^{1/2} + \alpha\right)} \leq C\varepsilon,
\end{aligned}
$$

onde na penúltima desigualdade acima usamos o fato que tomando $\varepsilon < \alpha/2$, de

$$
|M(g) - \alpha| < \varepsilon
$$

obtemos que $M(g)^{1/2} > (\alpha/2)^{1/2}$. Com isso,

$$
\frac{1}{M(g)^{1/2}\left(\alpha^{1/2} + M(g)^{1/2}\right)} \leq \frac{1}{(\alpha/2)^{1/2}\left((\alpha/2)^{1/2} + \alpha\right)}.
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
I_\alpha &\leq E(\beta g) = \frac{1}{2}\beta^2 \int_{\mathbb{R}} g_x^2 dx - \frac{1}{6}\beta^3 \int_{\mathbb{R}} g^3 dx \\
&\leq \frac{1}{2}(1 + C\varepsilon)^2 \int_{\mathbb{R}} g_x^2 dx - \frac{1}{6}(1 + C\varepsilon)^3 \int_{\mathbb{R}} g^3 dx \\
&\leq E(g) + A\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Um resultado análogo vale para funções h tal que $|M(h) - (q - \alpha)| < \varepsilon$.

Destas observações e do lema (3.7) segue-se que existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ e correspondentes funções g_{n_k} e h_{n_k}, tal que

$$
E(g_{n_k}) \geq I_\alpha - \frac{1}{k},
$$

$$
E(h_{n_k}) \geq I_{q-\alpha} - \frac{1}{k} \text{ e}
$$

$$
E(f_{n_k}) \geq E(q_{n_k}) + E(h_{n_k}) - \frac{1}{k}.
$$

Daí, $E(f_{n_k}) \geq I_\alpha + I_{q-\alpha} - \dfrac{3}{k}$ e tomando o limite, quando $k \longrightarrow \infty$, em ambos os membros obtemos

$$I_q \geq I_\alpha + I_{q-\alpha}.$$

$\square$

O lema (3.7) e seu corolário abordam o caso $0 < \alpha < q$ chamado de **Dicotomia**.

Finalmente vamos tratar do caso $\alpha = 0$, chamado de **Nulidade.**

Lema 3.8 *Para toda sequência minimizante,* $\alpha > 0$.

Demonstração.

Pelos lemas (3.2) e (3.4) concluimos que existem $\eta > 0$ e $(y_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{1}{2}\int_{y_n-1/2}^{y_n+1/2} |f_n|^3 dx \geq \eta, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$2\eta \leq \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\left(\int_{y_n-1/2}^{y_n+1/2} |f_n|^2 dx\right) \leq A\left(\int_{y_n-1/2}^{y_n+1/2} |f_n|^2 dx\right).$$

Daí,

$$\alpha = \lim_{n\longrightarrow\infty}\lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}\int_{y_n-r}^{y_n+r} |f_n|^2 dx \geq \lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{2}\int_{y_n-1/2}^{y_n+1/2} |f_n|^2 dx \geq \frac{\eta}{A} > 0.$$

$\square$

Teorema 3.2 *O conjunto G_q é não vazio. Além disso, se $\{f_n\}$ é uma sequência minimizante para I_q, então:*

(i) Existe uma sequência $\{y_n\}$ e uma função $g \in G_q$ tal que $\{f_n(\cdot + y_n)\}$ tem uma subsequência que converge fortemente em $H^1(\mathbb{R})$ para g.

(ii)

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{\substack{g\in G_q\\ y\in\mathbb{R}}} \|f_n(\cdot + y) - g\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0.$$

(iii)

$$\lim_{n\to+\infty}\inf_{g\in G_q} \|f_n - g\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0.$$

Demonstração.

Pelos lemas (3.5), (3.8) e o corolário (3.1) temos que $\alpha = q$. Portanto pelo lema (3.6) concluimos que $G_q \neq \emptyset$. Isso é suficiente para demonstrar (i).

Para mostrar (ii), suponha que existem uma subsequência $(f_{n_k}) \subset (f_n)$ e um número $\varepsilon > 0$ tal que

$$\inf_{\substack{g\in G_q \\ y\in\mathbb{R}}} \|f_{n_k}(\cdot + y) - g\|_{H^1(\mathbb{R})} \geq \varepsilon,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Mas como (f_{n_k}) é ela própria uma sequência minimizante para I_q, da afirmativa (i) tem-se que existe uma sequência $(y_n) \subset \mathbb{R}$ e $g_0 \in G_q$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_{n_k}(\cdot + y_k) - g_0\|_{H^1(\mathbb{R})} = 0.$$

O que é uma contradição, portanto, (ii) é válida.

Resta demonstrar (iii), para tanto iniciamos obeservando que os funcionais E e M são invariantes por translação.

De fato, para cada $z \in \mathbb{R}$ defina $\psi_z(x) := \psi(x+z)$ e vamos mostrar que $M(\psi_z) = M(\psi)$ e que $E(\psi_z) = E(\psi)$.

$$M(\psi_z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi_z^2(x)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi^2(x+z)dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \psi^2(y)dy = M(\psi),$$

usamos acima a mudança de variável $y = x + z$. Usando a mesma mudança de variável temos que

$$\begin{aligned} E(\psi_z) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\psi_z'(x)\right)^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \psi_z^3(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\psi'(x+z)\right)^2 dx - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \psi^3(x+z)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\psi'(y)\right)^2 dy - \frac{1}{6}\int_{\mathbb{R}} \psi^3(y)dy = E(\psi), \text{ e portanto} \end{aligned}$$

G_q tem como elemento qualquer translação de g, se g é um elemento de G_q. Com isso, a afirmativa (ii) implica afirmativa (iii).

$\square$

Uma consequência imediata do Teorema (3.2) acima é que G_q forma um conjunto estável para o problema de valor inicial (2).

Corolário 3.2 *Para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se*

$$\inf_{g \in G_q} \|u_0 - g\|_{H^1(\mathbb{R})} < \delta,$$

então a solução do problema de Cauchy $u(x,t)$ com $u(x,0) = u_0$ satisfaz

$$\inf_{g \in G_q} \|u(\cdot,t) - g\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon,$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha que o resultado é falso. Como consequência, existem um número $\varepsilon > 0$, uma sequência $(\psi_n) \subset H^1(\mathbb{R})$ e uma sequência de tempos $(t_n) \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\inf_{g \in G_q} \|\psi_n - g\|_{H^1(\mathbb{R})} < \frac{1}{n} \text{ e } \inf_{g \in G_q} \|u_n(\cdot,t_n) - g\|_{H^1(\mathbb{R})} \geq \varepsilon, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

onde $u_n(x,t)$ resolve o problema de Cauchy com $u_n(x,0) = \psi_n$. Então, como $E(g) = I_q$ e $M(g) = q$, pois $g \in G_q$, temos que

$$E(u_n(\cdot,t_n)) = E(\psi_n) \longrightarrow I_q \text{ e } M(\psi_n) \longrightarrow q.$$

Considere $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$, onde $\alpha_n = \dfrac{q}{M(\psi_n)}$. Daí $M(\alpha_n \psi_n) = q$ e $\alpha_n \longrightarrow 1$.

Portanto a sequência $f_n = \alpha_n u_n(\cdot,t_n)$ satisfaz $M(f_n) = q$ e com isso

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} E(f_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E(\alpha_n u_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} E(\alpha_n \psi_n) = I_q.$$

Portanto, (f_n) é uma sequência minimizante para I_q. Pelo teorema que garante boa colocação global para a Equação KdV com $s = 1$, segue que se ψ_n pertence a $H^1(\mathbb{R})$ então $f_n \in H^1(\mathbb{R})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo teorema (3.2) temos que para todo n suficientemente grande, existe $g_n \in G_q$ tal que

$$\|f_n - g_n\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon/2.$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \leq \|u_n(\cdot,t_n) - g_n\|_{H^1(\mathbb{R})} &= \|u_n(\cdot,t_n) - f_n + f_n - g_n\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq \|u_n(\cdot,t_n) - f_n\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|f_n - g_n\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&= \|u_n(\cdot,t_n) - \alpha_n u_n(\cdot,t_n)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \|f_n - g_n\|_{H^1(\mathbb{R})} \\
&\leq |1 - \alpha_n| \, \|u_n(\cdot,t_n)\|_{H^1(\mathbb{R})} + \varepsilon/2.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \longrightarrow \infty$ e usando o fato que $\|u_n(\cdot, t_n)\|_1$ é limitado temos que

$$0 < \varepsilon \leq \varepsilon/2,$$

que é um absurdo.

Portanto o resultado é verdadeiro.

$\square$

Na proposição que segue descreveremos o conjunto G_q.

Proposição 3.1 *Se G_q é não vazio então $G_q = \{\phi(\cdot + x_0);\ x_0 \in \mathbb{R}\}$.*

Demonstração.

Se $g \in G_q$, então pelo Método Multiplicador de Lagrange, existe λ real tal que

$$E(g) + \lambda M(g) = cte,$$

ou seja,

$$\delta E(g) + \lambda \delta M(g) = 0, \tag{3.24}$$

onde $\delta E(g)$ e $\delta M(g)$ são as derivadas de Fréchet de E e M em g calculadas nos preliminares.

Agora, $\delta E(g)$ e $\delta M(g)$ são dadas (como distribuições em $H^{-1}(\mathbb{R})$) por

$$\delta E(g) = -g'' - \frac{1}{2}g^2 \text{ e } \delta M(g) = g.$$

Portanto (3.24) é equivalente a seguinte EDO em g

$$g'' + \frac{1}{2}g^2 - \lambda g = 0. \tag{3.25}$$

Observando que esta equação diferencial ordinária tem única solução tanto em $L^2(\mathbb{R})$ como em $C^\infty(\mathbb{R})$, segue que a solução para (3.25), tipo distribuição em $L^2(\mathbb{R})$, é suave (esse tipo de argumento é conhecido como **bootstrap**). Como já resolvemos esta equação que aparece em (3.3) e vimos que as únicas soluções de (3.25) são $\phi_\lambda(x + x_0)$, onde x_0 é arbitrário e ϕ_λ é definido por (3.8).

Além disso, é fácil ver que $M(\phi_\lambda) = q = M(\phi_C) \Longleftrightarrow \lambda = C$.

$\square$

A prova do teorema (3.1) segue portanto combinando o teorema (3.2), seu corolário e a proposição acima.

Referências Bibliográficas

[1] ADAMS, R. A. *Sobolev Spaces*. New York - San Francisco - London. AP, (1975).

[2] PAVA, J. A. *Esistence and Stability of Solitary Wave Solutons to Nonlinear Dispesive Evolution Equations* Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[3] BARROS, A. S. *O problema de Cauchy para a equação super Korteweg-de-Vries.* Tese (doutorado) - IMECC-UNICAMP, 2004.

[4] KENIG, C.; PONCE, G. AND VEGA, L. *A bilinear estmative with applications to the KdV equation.* J. Amer. Math. Soc., 9: 573-603, 1996.

[5] KENIG, C.; PONCE, G. AND VEGA, L. *Oscillatory integrals and regularity of dispersive equations.* Indiana U. Math., $40 : 33 - 69$, 1991.

[6] KENIG, C.; PONCE, G. AND VEGA, L. *Well-posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle.* Comm. Pure Appl. Math., $46 : 527 - 620$, 1993.

[7] LIMA, ELON LAGES. *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, Impa-CNPq, 1977.

[8] STEIN, E. M. *Interpolation of linear operators.* Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), 482-492.

[9] FÁBIO CHALUD E JORGE ZUBELLI. *Sólitons: Na Crista da Onda por Mais de 100 anos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2000.

[10] LINARES, F. & PONCE, G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations.* Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2004.

[11] BRESIS, H.*Analísis funcional - Teoría e aplicaciones* Madrid, Aliança, 1984.

[12] BOURGAIN, J. *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equation.* Geometric and Functional Anal.,3:107-156, 209-262, 1993.

[13] EVANS, LAWRENCE C. *Partial Differential Equations*. IAMS Bookstore, 1998. v.19.

[14] DRAZIN, P. G. & JOHNSON, R. S. *Solitons: an Introduction.* Cambrigde University Press, Cambrigde, 1989.

[15] MIURA, R. M. *The Korteweg-de Vries equation and generalizations-I. A remarkable explicit nonlinear transformation.* J. Mathematical Phys., 9: 1202-1204, 1968.

[16] MIURA, R. M.; GARDNER, C. S. & KRUSKAL, M. D. *Korteweg-de Vries equation and generalizations - 2 - existence of conservation laws and constants of motion.* J. Math. Phys., 9:1204 - 1968.

[17] FRIEDMAN, A. *Partial Differential Equations* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976 .

[18] KNOBEL, ROGER, *An introduction to the mathematical theory of waves, American Mathematical Society, New Yorque, 1999.*

[19] ISNALDO ISAAC B.*Equações Dispersivas: Dois Métodos de Resolução, Monografia, UFAL, 2008*

[20] ALBERT, JONH P.*Concentration Compactness and the Stability of Solitary-Wave Solutions to Nonlocal Equations.*, Comtemporary Mathematics, Vol. 221, 1999.

[21] LIONS, P.*The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1*, Ann. Inst. H. Poincaré 1 (1984).

[22] LIONS, P.*The concentration compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 2*, Ann. Inst. H. Poincaré 1 (1984).

[23] DINIZ, HUGO A. C.*Sobre o Lema de Concentração de Compacidade de P. L. Lions e Aplicações, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2002*