Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger com Dados Não Nulos no Infinito

Everson Fernando Santos Feitosa

Maceió
Fevereiro de 2009

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

O Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger com Dados Não Nulos no Infinito

Everson Fernando Santos Feitosa

Maceió, Brasil
11 de fevereiro de 2009

Everson Fernando Santos Feitosa

O Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger com Dados Não Nulos no Infinito

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof Dr. Adán José Corcho Fernández

Maceió
2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

F311p Feitosa, Everson Fernando Santos.
O problema de Cauchy para a equação não linear de Schrödinger com dados não nulos no infinito / Everson Fernando Santos Feitosa. – Maceió, 2009.
54f.

Orientador: Adán José Corcho Fernández.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 53-54.

1. Cauchy, problemas de. 2. Zhidkov, Espaço de. 3. Schrödinger, Equação não linear de. 4. Formulação integral. 5. Boa colocação. I. Título.

CDU: 517.955

O Problema de Cauchy para a Equação Não Linear de Schrödinger com Dados Não Nulos no Infinito

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 11 de fevereiro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof Dr. Adán José Corcho Fernández (Orientador)

Amauri Barros
Prof. Dr. Amauri da Silva Barros

Lucas Catão
Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas Ferreira

Aos meus pais Raimundo Alves Feitosa
e Maria do Carmo Santos Feitosa.

Agradecimentos

- Agradeço em primeiro lugar a Deus, por ter me dado as oportunidades certas, e ter me dado condições de aproveitá-las.

- Agradeço também à minha família, que foi e ainda é a base de toda minha formação. Em especial, dedico essa realização a meus pais, que não mediram esforços, para me proporcionar esse momento.

- Quero agradecer também a todos que contribuíram para a minha educação, desde a infância no Colégio 29 de Julho, onde recordo com saudades as aulas da "tia Socorro", e as minhas primeiras aulas de Matemática com a professora Emir, e com os professores Flávio e Victor. Lembro também dos professores da antiga Etfal, em especial o Professor Fernando Medeiros. E dos professores da minha graduação na Ufal, em especial, Adroaldo de Vasconcelos Dorvilé, Francisco Vieira Barros e José Adonai Pereira Seixas.

- Ao professor Adán Corcho, meu orientador, pela paciência e dedicação com que me orientou nesse trabalho, e também pelo companheirismo e amizade nos últimos anos.

- Aos membros da banca examinadora, professores Amauri da Silva Barros e Lucas Catão de Freitas Ferreira pelas críticas e sugestões ao presente texto dissertativo, as quais foram fundamentais para melhorias e correções do mesmo.

- Quero registrar os meus agradecimentos aos professores do programa que contribuíram diretamente para minha formação matemática, em especial Ediel Azevedo, José Guadalupe e Krerley Oliveira. Agradeço a todos os funcionários do Instituto de Matemática da UFAL, em especial à Dona Maria, pela alegria, pela disponibilidade e pelos muitos cafezinhos.

- Agradeço a todos os companheiros de mestrado, Alex Santana, Arlyson Alves, André Pizzaia, Carlos Alberto, Darliton Romão, Daniel Brandão, Erikson Alexandre, Fabio Boia, Leandro Favacho, Leonardo Carvalho, Marcius Petrúcio e Priscila Ramos. Aqui, agradeço especialmente a José Eduardo Santana, que, com muita paciência me ajudou bastante durante o mestrado, inclusive na produção desse texto.

- Por fim, agradeço à Capes/Fapeal que foram responsáveis pelo financiamento dos meus estudos; com certeza, foram fundamentais para a conclusão desta dissertação.

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo do Problema de Cauchy associado à equação não linear de Schrödinger com dados iniciais não nulos no infinito.
No primeiro capítulo, apresentamos os espaços de Zhidkov em uma dimensão, e mostramos algumas de suas propriedades.
No segundo capítulo, provamos que o operador de Schrödinger é um grupo de operadores fortemente contínuos nos espaços de Zhidkov.
Finalmente, no capítulo 3 apresentamos uma família especial de soluções para a equação não linear de Schrödinger, provamos a Formulação Integral, e chegamos ao nosso objetivo principal que é provar que o problema de Cauchy para a equação não linear de Schrödinger é bem posto nos espaços de Zhidkov.

Palavras-chave: Problema de Cauchy, Espaços de Zhidkov, Equação Não Linear de Schrödinger, Boa Colocação, Formulação Integral.

Abstract

In this work we study the Cauchy Problem associated to the nonlinear Schrödinger equation with data nonvanishing at infinity.
In the first chapter, we present the Zhidkov space in one dimension, and show some of its properties.
In the second chapter, we show that the operator of Schrödinger is a group of operators strongly continuous in Zhidkov spaces.
Finally, in Chapter 3 present a special family of solutions for the nonlinear Schrödinger equation, prove the Integral Formulation, and got to our main goal is to prove that the Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation is well-posedness in Zhidkov spaces.

Key words: Cauchy Problem, Zhidkov Spaces, Nonlinear Schrödinger Equation, Well-Posedness, Integral Formulation.

Sumário

Introdução

Para introduzir a noção de dispersão, consideraremos uma equação diferencial com coeficientes constantes na forma

$$F(\partial_t, \partial_x)u(x,t) = 0 \tag{1}$$

onde F é um polinômio nas derivadas parciais.

Buscamos soluções elementares do tipo onda plana para (1) que tenham a forma

$$u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}, \tag{2}$$

onde A, k e ω são constantes que representam a amplitude, o número de onda e a freqüência respectivamente.

Uma solução do tipo (2) existe se, e somente se ω e k estão relacionados pela equação

$$F(ik, -i\omega) = 0.$$

Esta equação é conhecida como *relação de dispersão.*

A relação de dispersão caracteriza a evolução da onda plana. Em alguns problemas podemos escrever ω como uma função real da variável k, isto é

$$\omega = \omega(k).$$

A fase e a velocidade do grupo são definidas respectivamente por

$$C_j(k) = \frac{\omega}{k}, \quad \text{e} \quad C_g(k) = \frac{d\omega}{dk}.$$

As soluções (2) são dispersivas se a velocidade do grupo $C_g = \omega^{'}(k)$ é não constante. Em outras palavras, se $\omega^{''}(k)$ é diferente de zero. Fisicamente, quando o tempo evolui, as ondas diferentes se dispersam no meio, tendo como resultado que um perfil se decompõe em um trem de ondas.

Em geral, a equação (1) é *dispersiva* se $\omega(k)$ é real e o determinate

$$det\left(\frac{\partial^2\omega(k)}{\partial_{k_i}\partial_{k_j}}\right)$$

é não-nulo.

Durante os últimos 35 anos, a teoria das Equações Diferenciais Parciais (EDPs) de tipo dispersivo tem crescido de tal modo que tem atraído a atenção tanto de físicos quanto de matemáticos devido a suas importantes aplicações e a constante inovação dos problemas. Uma das descobertas matemáticas relacionadas é a possibilidade de estudar certas equações não lineares desta área por métodos que foram desenvolvidos para analisar o problema de dispersão quântica inversa; as quais são chamadas solúveis pelo método do problema da dispersão inversa. Ao mesmo tempo, a classe de EDPs não lineares atualmente conhecidas que são solúveis por esse método não é muito abrangente. Por outro lado, existe outra abordagem, chamada teoria qualitativa das EDPs que inclui investigações sobre a boa colocação do Problema de Valor Inicial (PVI) associado a estas equações.

Definição 0.1. *Sejam X e Y espaços de Banach e $F : X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que o problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t u(t) = F(u(t)) \in X, \\ u(0) = \phi \in Y \end{cases}$$

é localmente bem posto se existe uma única $u \in C([0,T], Y)$ tal que

(a) $u(0) = \phi$ *e*

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h} - F(u(t))\right\|_X = 0 \quad \forall t \in [0,T],$$

com a devida derivada lateral em $t = 0$.

(b) *a aplicação* $\phi \longrightarrow u$ *é contínua no seguinte sentido: seja* $\phi_n \xrightarrow{Y} \phi_\infty$ *e sejam* u_n, $n = 1, 2, \cdots, \infty$ *as correspondentes soluções. Então para cada* $T > 0$ *fixado temos*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sup_{[0,T]} \|u_n(t) - u_\infty(t)\|_Y = 0.$$

Nesse trabalho, consideramos o problema de Cauchy associado à equação não linear de Schrödinger com dados não nulos no infinito, isto é:

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in I, \\ u(x,0) = \phi(x), \end{cases} \tag{3}$$

onde $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \phi(x) = \phi_\pm \neq 0$.

No primeiro capítulo, lembramos alguns conceitos e resultados fundamentais de Análise Funcional e da teoria das Equações Diferenciais Parciais, tais como a definição de Espaços L^p, Espaços de Schwartz, Funções de Classe C^k, Convolução de Funções, entre outros. Também apresentamos algumas desigualdades clássicas dentre as quais estão a Desigualdade de Hölder e a Desigualdade de Minkowski que serão muito úteis no decorrer do trabalho. Ainda nesse capítulo, definimos o nosso ambiente de trabalho, os espaços de Zhidkov, denotados por X^k, $k \in \mathbb{Z}^+$, e fazemos algumas observações sobre as propriedades mais importantes desses espaços.

No segundo capítulo, consideramos a Equação Linear de Schrödinger, e introduzimos o Grupo Livre de Schrödinger em Espaços de Zhidkov, definido por

$$S(t)\phi = \begin{cases} \phi, \quad t = 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t)\phi(y)dy, \quad t \neq 0, \end{cases} \tag{4}$$

onde $K(x,t) = (4\pi i t)^{-1/2} e^{\frac{ix^2}{4t}}$ é a solução fundamental do operador $\mathcal{L} = i\partial_t + \partial_x^2$.

Mostramos ainda que (4) é um grupo de operadores fortemente contínuos em X^k.

Por último, no terceiro capítulo, apresentamos uma família especial de soluções para a equação

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2 u, \tag{5}$$

solução esta que pertence ao espaço X^k, $k \in \mathbb{Z}^+$. Esta família é de grande interesse físico no estudo dos "dark solitons" da óptica não linear.

Em seguida enunciamos e provamos a Formulação Integral, que trata da equivalência entre o PVI (3) e a equação integral

$$u(x,t) = S(t)\phi + i\int_0^t S(t-s)|u|^2 u ds.$$

Finalmente, chegamos ao nosso principal objetivo, que é provar que o problema de Cauchy (3) é localmente bem posto nos espaços $X^k(\mathbb{R})$. Mais precisamente, provamos o seguinte resultado:

Teorema 0.1. *Sejam k um inteiro positivo e $\phi \in X^k(\mathbb{R})$. Então, existem um tempo positivo $T = T(\|\phi\|_{X^k})$ e uma única solução $u \in C([0,T_k], X^k)$ do problema de valor inicial* (3). *Além disso, a aplicação dado-solução $\phi \longrightarrow u$ é Lipschitz-contínua, ou seja, dada uma seqüência $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^k$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{X^k} = 0$, então as correspondentes soluções u_n associadas aos dados ϕ_n satisfazem $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[0,T]} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{X^k} = 0$. Ainda, u pode ser estendida a um intervalo maximal $[0, T_k^*]$ com as seguintes alternativas:*

- $T_k^* = +\infty$

ou, caso contrário,

- $\lim\limits_{t\to T_k^*} \|u(x,t)\|_{X^k} = +\infty.$

Capítulo 1

Os Espaços de Zhidkov em Uma Dimensão

1.1 Definições e Exemplos

Neste capítulo, apresentaremos a teoria básica dos espaços de Zhidkov, denotados por X^k, os quais serão nosso ambiente de trabalho.

Definição 1.1 (Funções de classe C^k). *Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto. Dizemos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k, e escrevemos $f \in C^k$, para significar que f é k vezes derivável em I. Em particular, $f \in C^0$ significa que f é contínua em I. Diremos que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ em I quando $f \in C^k$ para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$.*

Definição 1.2 (Espaços L^p). *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $A \subset \mathbb{R}$. Denotaremos por $L^p(A)$ o conjunto das funções $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis tais que*

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_A |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & se \quad 1 < p < \infty \\ inf\,\{\lambda > 0 \;;\; \mu(A_\lambda) = 0\} < \infty, & se \quad p = \infty \end{cases}$$

onde $A_\lambda = \{a \in A \;;\; |f(x)| > 0\}$.

Definição 1.3. *Sejam $p, q \in [1, \infty]$. Dizemos que p e q são conjugados quando*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Denotaremos por p' o conjugado de p. Além disso, diremos que 1 e $+\infty$ são conjugados.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $1 \leq p \leq \infty$, $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e $f \in L^p$ e $g \in L^{p'}$ funções mensuráveis. Então, $fg \in L^1$ e vale a desigualdade*

$$\int_X fg\, dx \leq \left(\int_X f^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X g^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ou, em notação de normas

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. (Consultar teoremas 3.5 e 3.8 de [10]) □

Teorema 1.2. *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $X \subset \mathbb{R}$. Se $f \in L^p(X)$, então*

$$\|f\|_{L^p} = sup \left\{ \int_X f(x)\overline{g(x)} dx;\ \|g(x)\|_{L^{p'}} = 1 \right\}.$$

Demonstração. Ver teorema 1.3 de [3]. □

Teorema 1.3 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam I e J intervalos da reta, e $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{C}$ mensurável. Então, para todo $1 \leq p \leq \infty$ vale a desigualdade*

$$\left(\int_I \left(\int_J |f(x,y)|\, dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_J \left(\int_I |f(x,y)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Demonstração. A afirmação é clara se $p = \infty$. Se $p < \infty$ fazemos $F(x) = \int_Y |f(x,y)|\, dy$. Pelo teorema de dualidade e pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L_x^{p'}} &= \sup_{\|g\|_{L_x^{p'}}=1} \int_I g(x) \left(\int_J |f(x,y)|\, dy \right) dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L_x^{p'}}=1} \int_J \int_I |f(x,y)|\, g(x) dx dy \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L_x^{p'}}=1} \int_J \|f\|_{L_x^p} \|g\|_{L_x^{p'}}\, dy \\
&= \int_J \|f\|_{L_x^p}\, dy.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left(\int_I\left(\int_J |f(x,y)|\,dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_J\left(\int_I |f(x,y)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

$\square$

Definição 1.4 (Espaços de Schwartz)**.** *O espaço de Schwartz, que denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das funções $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis em $\mathbb{R}$, tais que, quaisquer que sejam $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^+$ existe uma constante $C_{\alpha,\beta}$ com*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < C_{\alpha,\beta}.$$

Definição 1.5. *Dado um inteiro não negativo k. O espaço de Sobolev $H^k(\mathbb{R})$ é definido pelo completamento do espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ na norma*

$$\|f\|_{H^k} = \sum_{i=0}^{k} \left\|\frac{d^i f}{dx^i}\right\|_{L^2}.$$

Observação 1.1. *Notemos que quando $k=0$ então $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$. Além disso, é fácil comprovar a seguinte cadeia de inclusões:*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset H^\infty(\mathbb{R}) \subset H^{k+1}(\mathbb{R}) \subset H^k(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}),$$

para todo $k\in\mathbb{N}$.

Definição 1.6. *Uma função $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ é absolutmente contínua se para cada $\varepsilon>0$, existir algum $\delta>0$, tal que, se $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,2,\ldots,n}$ é uma família de intervalos disjuntos contidos em $[a,b]$ com $\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-x_i)<\delta$, então*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(y_i)-f(x_i)| < \varepsilon.$$

Exemplo 1.1. *Toda função $f:I\longrightarrow\mathbb{C}$ lipschitziana é absolutamente contínua. De fato, como f é lipschitziana vale*

$$|f(x)-f(y)| < c|x-y|, \qquad \forall x,y\in I.$$

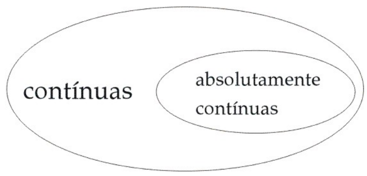
Dado $\varepsilon>0$, tome $\delta=\varepsilon/c$. Daí, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)| < c\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i) < c\cdot\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon,$$

quaisquer que sejam n e os escalares $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n$.

Dentre as propriedades mais importantes das funções absolutamente contínuas temos as seguintes:

1. Toda função absolutamente contínua é contínua. No entanto, há funções contínuas que não são absolutamente contínuas.



Exemplo 1.2. *Seja f a função definida em $\mathbb{R}$ por: $f(x) = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 1/2$, $f(x) = -\sqrt{2}(x-1)$ para $1/2 \le x \le 1$ e $f(x+k) = f(x)$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ e para todo x. Pela maneira como está definida, f é contínua em $[0,1]$, e logo contínua em toda reta, mas não é absolutamente contínua. De fato, dado δ, $0 \le \delta \le 1/2$, sejam $x_i = i$, e $y_i = i + \delta/i^2$. Então $\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i) < 2\delta$, mas $\sum_{i=1}^{n}|f(y_i)-f(x_i)| = \sum_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{\delta}}{i}$ tende para infinito, se $n \longrightarrow \infty$. Portanto f não é absolutamente contínua.*

2. Toda função absolutamente contínua é derivável em quase todo ponto. Ver [2] página 161.

Definição 1.7 (Espaços de Zhidkov)**.** *Dado $k \in \mathbb{Z}^+$, o espaço $\mathcal{X}^k(\mathbb{R})$ é o completamento do espaço*

$$\left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C^k(\mathbb{R});\quad f \text{ é absolutamente contínua e } \quad f' \in H^{k-1}(\mathbb{R}) \right\}$$

com a norma

$$\|f\|_{\mathcal{X}^k} = \|f\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k}\left\|\frac{d^i f}{dx^i}\right\|_{L^2}.$$

Como exemplos de funções em $\mathcal{X}^k$ citamos $tgh(x)$ e $arctg(x)$.

Definição 1.8. *Denotaremos por* $C([0,T],\mathcal{X}^k)$ *o espaço das aplicações contínuas* $f:[0,T]\longrightarrow \mathcal{X}^k$ *com a norma*

$$\|f\|_{L^\infty_T\mathcal{X}^k}=\sup_{[0,T]}\|f\|_{\mathcal{X}^k}.$$

1.2 Aproximação por Convolução

Nesta seção, vamos definir a convolução de funções, e mostrar algumas de suas propriedades mais importantes.

A convolução de duas funções $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ é definida pela fórmula

$$(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-y)g(y)dy$$

sempre que o lado direito fizer sentido.

A convolução tem as seguintes propriedades algébricas:

1. $(\lambda f)*g=\lambda(g*f)=g*\lambda(f)$;
2. $f*g=g*f$;
3. $(f*g)*h=f*(g*h)$;
4. $(f+g)*h=f*h+g*h$;
5. sejam $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e g contínua e limitada, então $f*g\in C^\infty(\mathbb{R})$ e vale

$$(f*g)^{(n)}=(f^{(n)})*g.$$

Para verificar as quatro primeiras propriedades usamos diretamente a definição, já a prova de (5) é um exercício simples de derivação sob o sinal de integral.

Teorema 1.4 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $f\in L^1(\mathbb{R})$ *e* $g\in L^p(\mathbb{R})$*, então* $f*g\in L^p(\mathbb{R})$ *e vale a desigualdade*

$$\|f*g\|_{L^p}\le\|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Seja $p \in [1, \infty)$, então

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} \, |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \, |g(y)| \tag{1.1}$$

Agora, segue que

$$\begin{aligned}
|f * g| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right| \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} \, |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \, |g(y)| \, dy \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \, |g(y)|^{p'} \, dy \right)^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder para obter a última desigualdade.

Integrando agora em relação a variável x e elevando à potência p', obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f * g|^{p'} \, dx &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \, dy \right)^{\frac{p'}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \, |g(y)|^{p'} \, dy \right) dx \\
&\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p'}{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)| \, dx \int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|^{p'} \, dy \\
&= \|f\|_{L^1}^{\frac{p'}{p}} \, \|f\|_{L^1} \, \|g\|_{L^{p'}}^{p'} \\
&= \|f\|_{L^1}^{p'} \, \|g\|_{L^{p'}}^{p'}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f * g\|_{L^{p'}} \leq \|f\|_{L^1} \, \|g\|_{L^{p'}} \, .$$

□

Agora, vamos enunciar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, que será utilizado na prova do resultado seguinte.

Teorema 1.5 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *uma seqüência de funções integráveis que converge em quase toda parte para uma função real mensurável* f. *Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leq g$, *para todo* n, *então* f *é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Demonstração. (Consultar teorema 5.6 de [1]) □

Teorema 1.6 (Aproximação por Convolução)**.** *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R})$, *com* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $\varphi_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$. *Então*

$$\lim_{t\to 0} \|f * \varphi_t - f\|_{L^p} = 0.$$

Demonstração. Seja primeiro $1 \leq p < +\infty$. Como $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_t(y)dy = 1$, para todo $t > 0$, temos que

$$\|f * \varphi_t - f\|_{L^p} = \left\| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} [f(x-y) - f(x)]\varphi_t(y)dy \right\|_{L^p}. \tag{1.2}$$

Por outro lado, o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue garante que

$$\lim_{y\to 0} \|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} = 0,$$

pois $f(x-y) \to f(x)$ pontualmente quando $y \to 0$ e $\|f(x-y)\|_{L^p} = \|f(x)\|_{L^p}$, para todo y. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x-y) - f(x)\|_{L^p} < \varepsilon/2$ se $|y| < \delta$. Então, de (1.2) temos que

$$\|f * \varphi_t - f\|_{L^p} \leq \left\| \int_{|y|\leq\delta} [f(x-y) - f(x)]\varphi_t(y)dy \right\|_{L^p} + \left\| \int_{|y|>\delta} [f(x-y) - f(x)]\varphi_t(y)dy \right\|_{L^p}.$$

Usando a desigualdade de Minkowski, temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{|y|\le\delta} [f(x-y)-f(x)]\varphi_t(y)dy \right\|_{L^p} &\le \int_{|y|\le\delta} \|f(x-y)-f(x)\|_{L^p}\varphi_t(y)dy \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_{|y|\le\delta} \varphi_t(y)dy\right) \\
&\le \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{|y|>\delta} [f(x-y)-f(x)]\varphi_t(y)dy \right\|_{L^p} &\le \int_{|y|>\delta} \|f(x-y)-f(x)\|_{L^p}\varphi_t(y)dy \\
&\le 2\|f\|_{L^p}\left(\int_{|y|>\delta} \varphi_t(y)dy\right) \\
&\le 2\|f\|_{L^p}\frac{\varepsilon}{4\|f\|_{L^p}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|f*\varphi_t - f\|_{L^p} \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

O que conclui a demonstração. □

1.3 Propriedades Básicas

Nesta seção faremos algumas observações sobre as propriedades mais importantes dos espaços $\mathcal{X}^k(\mathbb{R})$.

Proposição 1.1. *$\mathcal{X}^{k+1}(\mathbb{R})$ é denso em $\mathcal{X}^k(\mathbb{R})$.*

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{X}^k$ e $\varphi_t(x) = (4\pi t)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-x^2}{4t}}$, com $t > 0$. Definamos $f_t(x) = f * \varphi_t(x)$.

Primeiramente, provaremos que $f_t(x) \in X^{k+1}$, para todo $t > 0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|f_t(x)\|_{L^\infty} &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_t(x-y)dy \right\|_{L^\infty} \\
&\leq \|f\|_{L^\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-x^2}{4t}}}{\sqrt{(4\pi t)}} dx \\
&\leq \|f\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, as propriedades regularizantes de convolução garantem que $f_t \in C^\infty(\mathbb{R})$. Além disso, se $1 \leq i \leq k$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d^i}{dx^i}(f * \varphi_t) \right\|_{L^2} &= \left\| \frac{d^i}{dx^i}(f) * \varphi_t \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \frac{d^i}{dx^i} f \right\|_{L^2} \|\varphi_t\|_{L^1} \\
&\leq \left\| \frac{d^i}{dx^i} f \right\|_{L^2},
\end{aligned}$$

e se $i = k+1$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(f * \varphi_t) \right\|_{L^2} &= \left\| \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k} f * \varphi_t \right) \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \left(\frac{d^k}{dx^k} f \right) * \frac{d}{dx}\varphi_t \right\|_{L^2} \\
&\leq \left\| \frac{d^i}{dx^i} f \right\|_{L^2} \left\| \frac{d}{dx}\varphi_t \right\|_{L^1} \\
&\leq \left\| \frac{d^i}{dx^i} f \right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $f_t(x) \in X^{k+1}$ para todo $t > 0$.

Finalmente, provaremos que $f * \varphi_t \xrightarrow{\mathcal{X}^k} f$ quando $t \to 0$. De fato, temos que

- $f * \varphi_t \longrightarrow f$ na reta, e
- $\left\| \frac{d^i}{dx^i}(f * \varphi_t) - \frac{d^i}{dx^i}(f) \right\|_{L^2} \xrightarrow{t \to 0} 0$, se $1 \leq i \leq k$.

O que demonstra o resultado.

$\square$

Vamos agora enunciar e provar dois resultados que serão usados na prova da próxima proposição:

Lema 1.1. *Sejam $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$. Então,*

$$\|fg\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^p}.$$

Demonstração. Sejam $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $g \in L^p(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^p} &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^p|g|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\sup|f|)^p|g|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \left((\sup|f|)^p\int_{-\infty}^{+\infty} |g|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \sup|f|\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 1.2 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ absolutamente contínua tal que $f' \in L^2(\mathbb{R})$, então*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}.$$

Demonstração. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= \int_0^x 2f(t)f^{'}(t)dt \\
&\leq \int_0^x [f^2(t) + (f^{'})^2(t)]dt \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (f^{'})^2(t)dt.
\end{aligned}
$$

Daí, concluímos que

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt + \int_{-\infty}^{+\infty} (f^{'})^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f^{'})^2(t)dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|f\|_{L^2} + \|f^{'}\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty} &\leq \|f\|_{L^2} + \|f^{'}\|_{L^2} \\
&= \|f\|_{H^1(\mathbb{R})}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Proposição 1.2. *Sejam $f, g \in \mathcal{X}^k$. Então existe uma constante positica c tal que*

$$\|fg\|_{\mathcal{X}^k} \leq c\, \|f\|_{\mathcal{X}^k}\, \|g\|_{\mathcal{X}^k}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^+$.

Demonstração. Temos que

$$\|fg\|_{\mathcal{X}^k} = \|fg\|_{L^\infty} + \sum_{i=1}^{k} \left\| \frac{d^i(fg)}{dx^i} \right\|_{L^2}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|fg\|_{L^\infty} &\leq \|f\|_{L^\infty} \|g\|_{L^\infty} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{X}^k} \|g\|_{\mathcal{X}^k}. \end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d^i(fg)}{dx^i} \right\|_{L^2} &\leq \sum_{j=0}^{i} c_j \left\| \frac{d^{i-j}(f)}{dx^{i-j}} \cdot \frac{d^j(g)}{dx^j} \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \frac{d^i(f)}{dx^i} \cdot g \right\|_{L^2} + \sum_{j=1}^{i-1} c_j \left\| \frac{d^{i-j}(f)}{dx^{i-j}} \cdot \frac{d^j(g)}{dx^j} \right\|_{L^2} + \left\| f \cdot \frac{d^i(g)}{dx^i} \right\|_{L^2} \\ &\leq \left\| \frac{d^i(f)}{dx^i} \right\|_{L^2} \|g\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^{i-1} c_j \left\| \frac{d^{i-j}(f)}{dx^{i-j}} \right\|_{L^\infty} \left\| \frac{d^j(g)}{dx^j} \right\|_{L^2} + \|f\|_{L^\infty} \left\| \frac{d^i(g)}{dx^i} \right\|_{L^2} \\ &\leq 2 \|f\|_{\mathcal{X}^k} \|g\|_{\mathcal{X}^k} + \sum_{j=1}^{i-1} c_j \left\{ \left\| \frac{d^{i-j}(f)}{dx^{i-j}} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{d^{i-j+1}(f)}{dx^{i-j+1}} \right\|_{L^2} \right\} \left\| \frac{d^j(g)}{dx^j} \right\|_{L^2} \\ &\leq 2 \|f\|_{\mathcal{X}^k} \|g\|_{\mathcal{X}^k} + \sum_{j=1}^{i-1} c_j \left\{ \left\| \frac{d^{i-j}(f)}{dx^{i-j}} \right\|_{L^2} \left\| \frac{d^j(g)}{dx^j} \right\|_{L^2} + \left\| \frac{d^{i-j+1}(f)}{dx^{i-j+1}} \right\|_{L^2} \left\| \frac{d^j(g)}{dx^j} \right\|_{L^2} \right\} \\ &\leq \bar{c} \|f\|_{\mathcal{X}^k} \|g\|_{\mathcal{X}^k}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|fg\|_{\mathcal{X}^k} \leq c \|f\|_{\mathcal{X}^k} \|g\|_{\mathcal{X}^k}.$$

□

Capítulo 2

A Equação Linear de Schrödinger Unidimensional

Estudaremos neste capítulo as propriedades das soluções para a Equação Linear de Schrödinger

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0, \tag{2.1}$$

nos espaços $\mathcal{X}^k$.

Fazendo uso da Transformada de Fourier, sabemos que as soluções nos espaços de Sobolev clássicos $H^s(\mathbb{R})$ para o problema de Cauchy associado a equação (2.1),

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = 0 \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases} \tag{2.2}$$

são dadas pelo operador integral

$$S(t)\phi = \begin{cases} \phi, \quad t = 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t)\phi(y)dy, \quad t \neq 0, \end{cases}$$

onde $K(x,t) = (4\pi i t)^{-1/2} e^{\frac{ix^2}{4t}}$ é a solução fundamental do operador $\mathcal{L} = i\partial_t + \partial_x^2$.

O ponto principal nesse contexto é o fato de $S(t)$ ser um grupo unitário de operadores contínuos nos espaços $H^s(\mathbb{R})$. Nosso trabalho é direcionado para o estudo das propriedades deste grupo nos espaços $\mathcal{X}^k$, dado que alguns modelos não lineares vinculados à esta equação possuem soluções que não estão nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s \in \mathbb{N}$, como veremos na Seção 3.1.

2.1 Conservação da Energia Cinética

Lema 2.1. *Seja* $u(x,t)$ *uma solução do problema* (2.2) *no intervalo* $[0,T]$. *Então,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x \phi(x)|^2 dx,$$

para todo $t \in [0,T]$.

Demonstração. Temos de (2.1) que

$$\partial_t u = i\partial_x^2 u. \tag{2.3}$$

Multiplicando (2.1) por $\overline{u}$, obtemos

$$i\overline{u}\partial_t u + \overline{u}\partial_x^2 u = 0. \tag{2.4}$$

Integrando (2.4) temos que

$$i\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\partial_t u dx + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\partial_x^2 u dx}_{I} = 0. \tag{2.5}$$

Integrando I por partes obtemos

$$I = -\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x u \partial_x \overline{u} dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 dx.$$

Portanto, de (2.5) segue-se que

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\partial_t u dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 dx &= i\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\partial_t u dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} \{\overline{u}\partial_t^2 u + \partial_t u \partial_t \overline{u}\} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \{-\overline{u}\partial_t \partial_x^2 u - \partial_x^2 u \partial_t \overline{u}\} dx \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\partial_t \partial_x^2 u dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 u \partial_t \overline{u}\} dx \\
&= -(I_1 + I_2),
\end{aligned}$$

onde usamos (2.3).

Usando integração por partes duas vezes e usando novamente (2.3), temos que

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u}\partial_t \partial_x^2 u dx = i\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 dx.$$

Também é fácil verificar que

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_x^2 u \partial_t \overline{u}\} dx = -i\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u|^2 dx.$$

Assim, $(I_1 + I_2) = 0$. Portanto

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |\partial_x u(x,t)|^2 dx = 0,$$

que nos dá o resultado desejado. $\square$

2.2 O Grupo Livre de Schrödinger em Espaços de Zhidkov

Nesta seção, vamos mostrar que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um grupo de operadores fortemente contínuos em $\mathcal{X}^k$.

Definição 2.1. *Dado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, um operador linear $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ isómetrico e sobrejetor é dito unitário. Uma família $\{U(t) : t \in \mathbb{R}\}$ de operadores unitários em $\mathcal{H}$ é um grupo unitário de operadores fortemente contínuo se:*

(i) $U(t+s) = U(t)U(s), \qquad \forall s, t \in \mathbb{R};$

(ii) $U(0) = Id;$

(iii) $\forall f \in \mathcal{H}, \quad \forall s \in \mathbb{R},$

$$\lim_{t\to s} \|U(t)f - U(s)f\| = 0.$$

Teorema 2.1. *Para qualquer $k = 1, 2, \ldots$ o operador $S(t)$ considerado em $\mathcal{X}^k$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *para qualquer intervalo limitado $I \subset \mathbb{R}$, a família de operadores $S(t) : \mathcal{X}^k \longrightarrow \mathcal{X}^k$ é uniformemente limitada com respeito a $t \in I$;*

(b) *para qualquer $\phi \in \mathcal{X}^k$ a função $S(t)\phi : I \longrightarrow \mathcal{X}^k$ é contínua e $\lim\limits_{t\to 0} S(t)\phi = \phi$ no sentido do espaço $\mathcal{X}^k$.*

Demonstração. Para verificar (a), precisamos mostrar que

$$\|S(t)\phi\|_{\mathcal{X}^k} \leq C(t)\, \|\phi\|_{\mathcal{X}^k}\,.$$

Com efeito, seja $t \neq 0$, e considere $\phi \in \mathcal{X}^k$. Dessa forma,

$$S(t)\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi i t}} e^{\frac{i(x-y)^2}{4t}} \phi(y)dy.$$

Fazendo a mudança de variável $z = \dfrac{y-x}{2\sqrt{t}}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
S(t)\phi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{\pi i}} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z) 2\sqrt{t} dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi i}} \Big(\int_{-\infty}^{-\beta} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z) dz + \int_{-\beta}^{\beta} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z) dz + \int_{\beta}^{+\infty} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z) dz \Big) \\
&= (\pi i)^{-1/2} (I_1 + I_2 + I_3)
\end{aligned}$$

onde $\beta > 0$ arbitrário é fixado. Para calcular I_1 fazemos a mudança $z = -\sqrt{s}$. Desse modo, nossos extremos de integração passam a ser $+\infty$ e β^2 e portanto,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{-\beta} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z) dz = \int_{+\infty}^{\beta^2} e^{is} \phi(x - 2\sqrt{t}\sqrt{s}) \frac{-ds}{2\sqrt{s}} \\
&= -\int_{+\infty}^{\beta^2} \frac{e^{is}\phi(x - 2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}} ds = \int_{\beta^2}^{+\infty} \frac{e^{is}\phi(x - 2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}} ds \\
&= \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{e^{is}\phi(x - 2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}} ds.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes, obtemos

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{e^{is}}{i}\;\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}}\bigg|_{\beta^2}^{\alpha^2}\right. \\
&\quad \left. -\int_{\beta^2}^{\alpha^2}\frac{e^{is}}{i}\left(\frac{-\sqrt{t}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{2s}-\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{4s^{\frac{3}{2}}}\right)ds\right] \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty}\left[\frac{e^{is}}{i}\;\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}}\bigg|_{\beta^2}^{\alpha^2}\right] \\
&\quad +\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{\beta^2}^{\alpha^2}\frac{e^{is}}{i}\left(\frac{\sqrt{t}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{2s}+\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{4s^{\frac{3}{2}}}\right)ds \\
&= \frac{1}{i}\left\{\lim_{\alpha\to+\infty}\left[e^{is}\;\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}}\bigg|_{\beta^2}^{\alpha^2}\right]\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{\beta^2}^{\alpha^2}e^{is}\left(\frac{\sqrt{t}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s}+\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}}\right)ds\right\}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\frac{1}{i}\right|\left|\lim_{\alpha\to+\infty}\left[e^{is}\;\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}}\bigg|_{\beta^2}^{\alpha^2}\right]\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{\beta^2}^{\alpha^2}e^{is}\left(\frac{\sqrt{t}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s}+\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}}\right)ds\right| \\
&\leq \left|\lim_{\alpha\to+\infty}\left[e^{is}\;\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}}\bigg|_{\beta^2}^{\alpha^2}\right]\right| \\
&\quad +\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to+\infty}\left|\int_{\beta^2}^{\alpha^2}e^{is}\left(\frac{\sqrt{t}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s}+\frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}}\right)ds\right| \\
&= I_{1_1}+\frac{1}{2}I_{1_2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\begin{aligned}
I_{1_1} &= \left| \lim_{\alpha\to+\infty} \left[e^{is}\ \frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2\sqrt{s}} \Bigg|_{\beta^2}^{\alpha^2} \right] \right| \\
&= \left| \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\frac{e^{i\alpha^2}\phi(x-2\sqrt{t}\alpha)}{2\alpha} - \frac{e^{i\beta^2}\phi(x-2\sqrt{t}\beta)}{2\beta} \right) \right| \\
&\leq \left| \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{e^{i\alpha^2}\phi(x-2\sqrt{t}\alpha)}{2\alpha} \right| + \left| \frac{e^{i\beta^2}\phi(x-2\sqrt{t}\beta)}{2\beta} \right|,
\end{aligned}$$

mas,

$$\left| \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{e^{i\alpha^2}\phi(x-2\sqrt{t}\alpha)}{2\alpha} \right| = \lim_{\alpha\to+\infty} \left| \frac{e^{i\alpha^2}}{2\alpha} \right| \left| \phi(x-2\sqrt{t}\alpha) \right| = 0.$$

Assim,

$$I_{1_1} \leq \frac{\left| e^{i\beta^2} \right|}{2\beta} \left| \phi(x-2\sqrt{t}\beta) \right| \leq \frac{1}{2}\beta^{-1} \left\| \phi \right\|_{L^\infty}.$$

Temos também que

$$\begin{aligned}
I_{1_2} &= \lim_{\alpha\to+\infty} \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} e^{is} \left(\frac{\sqrt{t}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s} + \frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}} \right) ds \right| \\
&= \lim_{\alpha\to+\infty} \left| \sqrt{t} \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{e^{is}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s} ds + \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}} ds \right| \\
&\leq \lim_{\alpha\to+\infty} \left(\sqrt{t} \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{e^{is}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s} ds \right| + \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}} ds \right| \right) \\
&= \sqrt{t} \lim_{\alpha\to+\infty} \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{e^{is}\phi'(x-2\sqrt{ts})}{s} ds \right| + \lim_{\alpha\to+\infty} \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{\phi(x-2\sqrt{ts})}{2s^{\frac{3}{2}}} ds \right| \\
&= I_{1_{2_1}} + I_{1_{2_2}}.
\end{aligned}$$

Fazendo agora a mudança $z = -2\sqrt{ts}$ obtemos,

$$
\begin{aligned}
I_{1_{2_1}} &= \sqrt{t} \lim_{\alpha \to +\infty} \left| \int_{\beta^2}^{\alpha^2} \frac{e^{is}\phi'(x - 2\sqrt{ts})}{s} ds \right| \\
&= \sqrt{t} \lim_{\alpha \to +\infty} \left| \int_{-2\beta\sqrt{t}}^{-2\alpha\sqrt{t}} e^{\frac{iz^2}{4t}} \phi'(x + z) \left(-\frac{2}{|z|} \right) dz \right| \\
&\leq 2\sqrt{t} \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{|\phi'(x + z)|}{|z|} dz.
\end{aligned}
$$

Utilizando a Desigualdade de Hölder, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{|\phi'(x + z)|}{|z|} dz &\leq \left(\int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} |\phi'(x + z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{1}{|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|\phi'\|_{L^2} \left(\int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{1}{|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{1}{|z|^2} dz \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \frac{1}{z^2} dz \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(-z^{-1} \Big|_{-2\alpha\sqrt{t}}^{-2\beta\sqrt{t}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{-1}{-2\beta\sqrt{t}} - \frac{-1}{-2\alpha\sqrt{t}} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
I_{1_{2_1}} \leq 2\sqrt{t} \, \|\phi'\|_{L^2} \left(\frac{1}{2\beta\sqrt{t}} \right)^{\frac{1}{2}}.
$$

Além disso,

$$I_{1_{2_2}} \leq \|\phi\|_{L^\infty} \beta^{-1}.$$

Dessa forma

$$I_{1_2} \leq \beta^{-1} \|\phi\|_{L^\infty} + \frac{2}{\sqrt{2}} t^{\frac{1}{4}} \beta^{-\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2}\beta^{-1} \|\phi\|_{L^\infty} + \frac{1}{2}\left(\beta^{-1} \|\phi\|_{L^\infty} + \frac{2}{\sqrt{2}} t^{\frac{1}{4}} \beta^{-\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L^2}\right) \\ &= C_1\beta^{-1} \|\phi\|_{L^\infty} + C_2 t^{\frac{1}{4}} \beta^{-\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L^2} \\ &= C(1+\sqrt[4]{t}) \|\phi\|_{\mathcal{X}^k}. \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C_3\beta^{-1} \|\phi\|_{L^\infty} + C_4 t^{\frac{1}{4}} \beta^{-\frac{1}{2}} \|\phi'\|_{L^2} \\ &= C(1+\sqrt[4]{t}) \|\phi\|_{\mathcal{X}^k}. \end{aligned}$$

Também é fácil ver que

$$|I_2| \leq 2\beta \|\phi\|_{L^\infty}.$$

Assim,

$$|S(t)\phi(x)| \leq C(1+\sqrt[4]{t}) \|\phi\|_{\mathcal{X}^k}.$$

O que nos dá

$$\|S(t)\phi\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |S(t)\phi(x)| \leq C(1+\sqrt[4]{t}) \|\phi\|_{\mathcal{X}^k},$$

para todo $t \in I$.

Além disso, para $\phi \in C^0_\infty(\mathbb{R})$ temos que

$$\frac{d}{dx}[S(t)\phi] = (\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz^2} \phi'(x+2\sqrt{t}z)dz$$

para cada intervalo $[a,b]$, onde $\phi \neq 0$.

Ou seja,

$$\frac{d}{dx}[S(t)\phi] = S(t)\phi',$$

e como o operador $S(t) : L_2 \longrightarrow L_2$ é unitário, para quaquer $\phi \in \mathcal{X}^k$ em um intervalo finito $I \subset \mathbb{R}$, temos

$$\left\| \frac{d}{dx} S(t)\phi \right\|_{L^2} = \left\| S(t) \frac{d}{dx}\phi \right\|_{L^2} \leq \|S(t)\| \left\| \frac{d}{dx}\phi \right\|_{L^2} = \|\phi'\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{\mathcal{X}^k}$$

e

$$\left\| \frac{d^2}{dx^2} S(t)\phi \right\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{\mathcal{X}^k} .$$

Usando indução obtemos

$$\left\| \frac{d^l}{dx^l} S(t)\phi \right\|_{L^2} \leq \|\phi\|_{\mathcal{X}^k} , \quad l \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Assim

$$\|S(t)\phi\|_{\mathcal{X}^k} = \|S(t)\phi\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{d^j}{dx^j} S(t)\phi \right\|_{L^2} \leq C(1+\sqrt[4]{t})\, \|\phi\|_{\mathcal{X}^k} + k\, \|\phi\|_{\mathcal{X}^k} \leq C(1+\sqrt[4]{t})\, \|\phi\|_{\mathcal{X}^k} ,$$

o que demonstra o item (a).

Faremos agora a prova do item (b). Note que para provar este item é suficiente demonstrar que $S(t)\phi \longrightarrow \phi$ se $t \longrightarrow 0$ em $\mathcal{X}^k$, pois a outra afirmação pode ser verificada por analogia. Fixe um $\varepsilon > 0$ arbitrário. Temos que existe $\beta > 0$ tal que para todo t com $|t| < 1$, as duas desigualdades seguintes acontecem:

$$(\pi i)^{-1/2}(|I_1| + |I_3|) < \frac{\varepsilon}{3(k+1)} \quad \text{e} \quad |(\pi i)^{-1/2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{ix^2} dx - 1| < \frac{\varepsilon}{3(k+1)},$$

onde usamos o fato de que

$$\frac{1}{\sqrt{\pi i}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix^2} dx = 1.$$

Temos também que a função $\phi(x+2\sqrt{t}z)$ converge uniformemente para $\phi(x)$ quando $t \longrightarrow 0$ com respeito a $z \in [-\beta, \beta]$.

Por essa razão, existe $t_0 > 0$ tal que se $|t| < t_0$, então

$$|(\pi i)^{-1/2} \int_{-\beta}^{\beta} e^{iz^2} \phi(x + 2\sqrt{t}z)dz - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(k+1)}.$$

Além disso, pela continuidade forte do grupo unitário e^{itD} no espaço L^2

$$\|\frac{d^l}{dx^l} S(t)\phi - \phi^{(l)}\|_{L^2} < \frac{\varepsilon}{(k+1)} \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

para t suficientemente pequeno. Dessa forma, $\|S(t)\phi - \phi\|_{\mathcal{X}^k} < \varepsilon$ para todo t, o que demonstra a proposição. $\square$

Capítulo 3

O Problema de Cauchy associado à Equação não Linear de Schrödinger

Neste capítulo, estudaremos a teoria da existência local, no tempo, para o Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2 u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in I \\ u(x,0) = \phi \in \mathcal{X}^k. \end{cases}$$

3.1 Família especial de soluções em $\mathcal{X}^k$

Nesta seção, vamos procurar soluções do tipo

$$u(x,t) = e^{-iwt} f(x) \tag{3.1}$$

para a equação

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = |u|^2 u. \tag{3.2}$$

Derivando (3.1) em relação a t, obtemos

$$\partial_t u = -iwe^{-iwt} f(x)$$

e derivando duas vezes em relação a x, obtemos

$$\partial_x^2 u = e^{-iwt} f^{''}(x).$$

Substituindo na equação (3.2) temos

$$i(-iwe^{-iwt} f(x)) + e^{-iwt} f^{''}(x) = f(x)^2 e^{-iwt} f(x),$$

que nos dá

$$wf(x) + f^{''}(x) = [f(x)]^3. \tag{3.3}$$

Fazendo $y = f(x)$, a equação (3.3) é equivalente ao sistema autônomo de primeira ordem

$$\begin{cases} y^{'} = z \\ z^{'} = y^3 - wy \end{cases}$$

que tem os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(-\sqrt{w}, 0), \quad (0,0) \quad \text{e} \quad (\sqrt{w}, 0),$$

se $w > 0$.

Multiplicando a equação (3.3) por $f^{'}(x)$ e depois integrando obtemos,

$$(f^{'}(x))^2 + w(f(x))^2 = \frac{1}{2}(f(x))^4 + B.$$

Tomando o limite quando $x \longrightarrow \pm\infty$, temos $B = w^2/2$ e conseqüentemente a equação acima toma a forma

$$\begin{aligned} (f^{'}(x))^2 &= \frac{(f(x))^4}{2} - w(f(x))^2 + \frac{w^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}[(f(x))^2 - w]^2. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Separando as variáveis obtemos

$$\frac{dy}{y^2 - b^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}dx, \qquad \text{com} \qquad y < b.$$

Que depois de intergrarmos nos dá

$$\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{y-b}{y+b}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}x,$$

ou seja

$$\ln\left(\frac{b-y}{b+y}\right) = b\sqrt{2}\,x.$$

Usando a aplicação exponencial obtemos

$$\frac{b-y}{b+y} = e^{b\sqrt{2}\,x}.$$

Fazendo $b = \sqrt{w}$, temos

$$\frac{\sqrt{w}-y}{\sqrt{w}+y} = e^{\sqrt{2w}\,x}$$

que nos dá

$$y = \frac{(1 - e^{\sqrt{2w}\,x})}{(1 + e^{\sqrt{2w}\,x})}\sqrt{w}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $e^{-\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}}$, obtemos

$$y = \frac{(e^{-\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}} - e^{\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}})}{(e^{-\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}} + e^{\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}})}\sqrt{w}.$$

Ou ainda

$$y = -\frac{(e^{\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}} - e^{-\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}})}{(e^{\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{2w}\,x}{2}})}\sqrt{w}.$$

Ou seja

$$y = f(x) = \sqrt{w}\ tgh(\frac{\sqrt{2w}\ x}{2}).$$

Portanto,

$$u(x,t) = -e^{-iwt}\sqrt{w}\ tgh(\frac{\sqrt{2w}\ x}{2}),$$

é uma solução da equação (3.2).

3.2 A Formulação Integral

Nesta seção, provaremos a equivalência entre o Problema de Cauchy associado à ENLS e a equação integral

$$u(x,t) = S(t)\phi + i\int_0^t S(t-s)|u|^2 u ds.$$

Lema 3.1. *Seja f uma função integrável, então*

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\int_0^z f(z,s)ds\right) = \int_0^z f_z(z,s)ds + f(z,z).$$

Demonstração. De fato, considere a função

$$H(z) = \int_0^z f(z,s)ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos que

$$H(z) = F(z,z) - F(z,0),$$

onde F é uma antiderivada de f.

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^z f(z,s)ds \\
&= F_z(z,z) + F_s(z,z) - F_z(z,0) + F_s(z,0)0 \\
&= F_z(z,z) - F_z(z,0) + f(z,z) \\
&= \int\limits_0^z f_z(z,s)ds + f(z,z).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 3.1 (A Formulação Integral). *Uma função $u(x,t) \in C(I;X^3) \cap C^1(I;X^1)$ satisfaz o problema*

$$
\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in I, \\ u(x,0) = \phi \in X^3 \end{cases} \tag{3.5}
$$

se, e somente se, $u(x,0) = u_0(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e esta função é uma solução de

$$
u(x,t) = S(t)\phi + i\int\limits_0^t S(t-s)|u|^2 u ds. \tag{3.6}
$$

Demonstração. Inicialmente, seja $u(x,t) \in C(I;X^3)$ uma função satisfazendo a equação (3.6). Mostraremos que ela é uma solução do problema (3.5). Para isto, devemos verificar que esta função satisfaz a primeira igualdade do problema (3.5), pois a segunda é obviamente satisfeita. Claramente, $|u|^2 u \in C(I;X^3)$. Vamos mostrar que $\mathcal{L}[S(t)\phi] = 0$ para todo t.

Temos que

$$
S(t)\phi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t)\phi(y)dy, \qquad t \neq 0.
$$

Fazendo a mudança $z = y - x$, obtemos

$$S(t)\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(-z,t)\phi(x+z)dz.$$

Mas, K é uma função par na primeira variável, logo

$$S(t)\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} K(y,t)\phi(x+y)dy.$$

Desse modo,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[S(t\phi] = S(t)(\frac{d^2\phi}{dx^2}),$$

onde o lado direito é contínuo.

Vamos mostrar a existência de $\dfrac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi]$. Temos que

$$\begin{aligned}
S(t)\phi &= \int_{-\infty}^{+\infty} (4\pi it)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iy^2}{4t}}\phi(x+y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} (4\pi it)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iy^2}{4t}}\phi(x+y)dy + \int_{0}^{+\infty} (4\pi it)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iy^2}{4t}}\phi(x+y)dy \\
&= S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança $z = -y$, obtemos

$$\begin{aligned}
S_1 &= \int_{-\infty}^{0} (4\pi it)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iz^2}{4t}}\phi(x-z) - dz \\
&= \int_{0}^{+\infty} (4\pi it)^{-\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iz^2}{4t}}\phi(x-z)dz.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S(t)\phi = (4\pi it)^{-\frac{1}{2}} \int_{0}^{+\infty} e^{\frac{iy^2}{4t}}(\phi(x-y) + \phi(x+y))dy.$$

Fazendo agora a mudança $z = y^2/4$ otemos,

$$\begin{aligned} S(t)\phi &= (4\pi i)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \int\limits_0^{+\infty} e^{iz} \frac{\phi(x+2\sqrt{tz}) + \phi(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}} \sqrt{t} dz \\ &= (4\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{iz} \frac{\phi(x+2\sqrt{tz}) + \phi(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}} dz. \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] = (4\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{iz} \frac{\phi'(x+2\sqrt{tz}) - \phi'(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{t}} dz,$$

pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[\phi(x+2\sqrt{tz})] &= \phi'(x+2\sqrt{tz}) 2\sqrt{z} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\phi'(x+2\sqrt{tz})\sqrt{z}}{\sqrt{t}} \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}[\phi(x-2\sqrt{tz})] = \frac{-\phi'(x-2\sqrt{tz})\sqrt{z}}{\sqrt{t}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] &= (4\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{iz} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{t}} \left(\frac{\phi'(x+2\sqrt{tz}) - \phi'(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}} \right) dz \\ &= (4\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{iz} \frac{\phi'(x+2\sqrt{tz}) - \phi'(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{t}} dz. \end{aligned}$$

Seja $c > 0$ e consideremos

$$J := \int\limits_0^{c} e^{iz} \frac{\phi'(x+2\sqrt{tz}) - \phi'(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{t}} dz,$$

Integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} J &= -ie^{iz}\frac{\phi'(x+2\sqrt{tz})-\phi'(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{t}}\bigg|_0^c - \int_0^c -ie^{iz}\frac{\phi''(x+2\sqrt{tz})+\phi''(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}dz \\ &= -ie^{ic}\frac{\phi'(x+2\sqrt{tc})-\phi'(x-2\sqrt{tc})}{\sqrt{t}} + i\int_0^c e^{iz}\frac{\phi''(x+2\sqrt{tz})+\phi''(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}dz, \end{aligned}$$

onde $\phi'(x) \longrightarrow 0$ se $|x| \longrightarrow \infty$ e, conseqüentemente o primeiro termo do lado direito dessa igualdade tende a zero se $c \longrightarrow \infty$ uniformemente com respeito a t para qualquer intervalo limitado.

Assim, devido as estimativas de I_1 e I_3 do teorema anterior, o segundo termo do lado direito é uma integral imprópria que converge uniformemente em t para qualquer intervalo limitado que não contenha zero. Para qualquer $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}$ a derivada $\dfrac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi]$ é determinada e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] &= i\,(4\pi i)^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} e^{iz}\frac{\phi''(x+2\sqrt{tz})+\phi''(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}dz \\ &= i\,(4\pi it)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)dy, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{iz}\frac{\phi''(x+2\sqrt{tz})+\phi''(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}dz &= \int_0^{+\infty} e^{iz}\frac{\phi''(x+2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}dz + \int_0^{+\infty} e^{iz}\frac{\phi''(x-2\sqrt{tz})}{\sqrt{z}}dz \\ &= I_4 + I_5. \end{aligned}$$

Em I_4, fazendo a mudança $y = x + 2\sqrt{tz}$ obtemos

$$I_4 = \int_x^{+\infty} \frac{e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)}{\sqrt{t}}dy,$$

e em I_5, fazendo $y = x - 2\sqrt{tz}$ obtemos

$$
\begin{aligned}
I_5 &= -\int_x^{-\infty} \frac{e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)}{\sqrt{t}}dy \\
&= \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)}{\sqrt{t}}dy
\end{aligned}
$$

com isso

$$
\begin{aligned}
I_4 + I_5 &= \frac{1}{\sqrt{t}}\left\{\int_x^{+\infty} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)dy + \int_{-\infty}^{x} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)dy\right\} \\
&= t^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}\phi''(y)dy.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] = i\frac{\partial^2}{\partial x^2}[S(t)\phi].$$

Isto nos dá

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[S(t)\phi] &= i\frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[S(t)\phi] \\
&= i^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}[S(t)\phi] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[S(t)\phi] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Como se nota claramente, a prova dessa relação para $t < 0$ pode ser feita de maneira análoga.

Se $t = 0$, então obviamente $\frac{\partial^2}{\partial x^2}[S(t)\phi] = \phi''$. Além disso, de acordo com os argumentos acima $\frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] = iS(t)\phi''$ e portanto $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi] = i\phi''$. Assim, existe $\frac{\partial}{\partial t}[S(t)\phi]\Big|_{t=0} = i\phi''$ e, dessa forma $\mathcal{L}[S(t)\phi]\Big|_{t=0} = 0$.

Usando esses argumentos vamos mostrar que

$$\mathcal{L}\left\{ i\int\limits_0^t S(t-s)(|u|^2)ds \right\} = -|u|^2 u.$$

Seja agora

$$F(t) = i\int\limits_0^t S(t-s)(|u|^2 u)ds.$$

Assim,

$$\mathcal{L}(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + i\frac{\partial F}{\partial t}.$$

Mas

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = i\int\limits_0^t S(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}|u|^2 u ds,$$

e, de acordo com o lema anterior

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= i\int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} S(t-s)|u|^2 u ds + i|u|^2 u \\
&= i\int\limits_0^t i\frac{\partial^2}{\partial x^2} S(t-s)|u|^2 u ds + i|u|^2 u \\
&= -\int\limits_0^t S(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}|u|^2 u ds + i|u|^2 u,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$i\frac{\partial F}{\partial t} = -i\int\limits_0^t S(t-s)\frac{\partial^2}{\partial x^2}|u|^2 u ds - |u|^2 u.$$

Que nos dá

$$\mathcal{L}(F) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + i\frac{\partial F}{\partial t} = -|u|^2 u.$$

Desta maneira, a primeira afirmação de que qualquer solução X^3 da equação (3.6) satisfaz o problema (3.5) está provada, pois claramente $u(x,0) = \phi$.

Agora vamos provar que qualquer solução X^3 do problema (3.5), satisfaz à equação (3.6). Seja u uma solução do problema (3.5), e defina

$$w(x,t) = S(t)\phi + i\int_0^t S(t-s)|u|^2 u ds.$$

Dessa dorma, w é solução da equação

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u = -|u|^2 u,$$

e como u é solução do problema (3.5), segue que u também é solução dessa equação.

Segue assim, que $u - w$ é solução do problema linear homogêneo

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in I \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

Nos resta então provar que esse problema tem como única solução, a trivial $u \equiv 0$ de $C(I : X^3)$.

Vamos supor que $u(x,t)$ é uma solução X^3 do problema no intervalo de tempo I. Mostramos no Lema 2.1 que

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty} |u_x(x,t)|^2 dx = 0$$

para todo $t \in I$. Por esse motivo, a função $u(x,t)$ é constante em x para qualquer t fixado. Mas, como $u(x,0) \equiv 0$, a demonstração está completa. $\square$

3.3 Boa Colocação do Problema de Cauchy

Nesta seção vamos provar que o Problema de Cauchy associado à Equação Não Linear de Schrödinger é localmente bem posto nos espaços de Zhidkov.

Teorema 3.2. *Sejam k um inteiro positivo e $\phi \in \mathcal{X}^k(\mathbb{R})$. Então, existem um tempo positivo $T = T(\|\phi\|_{\mathcal{X}^k})$ e uma única solução $u \in C([0,T_k],\mathcal{X}^k)$ do problema de valor inicial* (3.5)*. Além disso, a aplicação dado-solução $\phi \longrightarrow u$ é Lipschitz-contínua, ou seja, dada uma seqüência $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{X}^k$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{\mathcal{X}^k} = 0$, então as correspondentes soluções u_n associadas* *aos dados ϕ_n satisfazem* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{[0,T]} \|u_n(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{\mathcal{X}^k} = 0$. *Ainda, u pode ser estendida a um intervalo maximal $[0, T_k^*]$ com as seguintes alternativas:*

- $T_k^* = +\infty$

ou, caso contrário,

- $\lim\limits_{t\to T_k^*} \|u(x,t)\|_{\mathcal{X}^k} = +\infty.$

Demonstração. Primeiro provaremos a existência e, para isso, usaremos a equação integral equivalente ao problema (3.5), ou seja, procuraremos uma solução para a equação

$$u(x,t) = S(t)\phi + i\int_0^t S(t-s)|u(x,s)|^2 u(x,s)ds. \tag{3.7}$$

Definamos então o operador

$$\Phi[u] = S(t)\phi + i\int_0^t S(t-s)|u(x,s)|^2 u(x,s)ds \tag{3.8}$$

na bola de raio a de $C([0,T],\mathcal{X}^k)$, definida por

$$B_k[a,T] := \{u \in C([0,T],\mathcal{X}^k) : \|u\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k} \le a\}.$$

Nosso objetivo é achar os valores adequados para as constantes a e T de modo que o operador Φ satisfaça as seguintes condições:

(i) $\Phi : B_k[a,T] \longrightarrow B_k[a,T]$;

(ii) Φ é uma contração, isto é, existe $\lambda \in [0,1)$ tal que

$$\|\Phi[u] - \Phi[w]\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k} \le \lambda \|u - w\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k},$$

para todo $u, w \in B_k[a,T]$.

Sendo satisfeitas as condições (i) e (ii) para Φ, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, temos que este operador possui um único ponto fixo em $B_k[a,T]$ o qual é solução da equação integral (3.8). Então resta fazer funcionar as condições (i) e (ii) acima para o operador Φ.

Das definições de Φ e $\mathcal{X}^k$, e fazendo uso do corolário da desigualdade de Minkowski temos que

$$\|\Phi[u(\cdot,t)]\|_{\mathcal{X}^k} \leq \|S(t)\phi\|_{\mathcal{X}^k} + \int\limits_0^t \left\|S(t-s)|u(\cdot,s)|^2 u(\cdot,s)ds\right\|_{\mathcal{X}^k} \tag{3.9}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Já sabemos que

$$\|S(t)\phi\|_{\mathcal{X}^k} \leq C(1+\sqrt[4]{t})\,\|\phi\|_{\mathcal{X}^k}\,. \tag{3.10}$$

Por outro lado, usando a proposição 1.2 temos que

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^t \left\|S(t-s)|u(\cdot,s)|^2 u(\cdot,s)ds\right\|_{\mathcal{X}^k} &\leq C\int\limits_0^t (1+\sqrt[4]{t-s})\,\|u(\cdot,s)\|^3_{\mathcal{X}^k}\,ds \\
&\leq C(1+\sqrt[4]{t})\int\limits_0^t \|u(\cdot,s)\|^3_{\mathcal{X}^k}\,ds \\
&\leq C(1+\sqrt[4]{t})t\left(\sup_{[0,t]}\|u(\cdot,s)\|_{\mathcal{X}^k}\right)^3
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Combinando (3.9), (3.10) e (3.11), obtemos

$$\|\Phi[u(\cdot,t)]\|_{\mathcal{X}^k} \leq C(1+\sqrt[4]{t})\left\{\|\phi\|_{\mathcal{X}^k} + t\left(\sup_{[0,t]}\|u(\cdot,s)\|_{\mathcal{X}^k}\right)^3\right\}. \tag{3.12}$$

Tomando o Supremo em $[0,T]$ em ambos os membros de (3.12) verifica-se a desigualdade

$$\|\Phi[u]\|_{L^\infty_T\mathcal{X}^k} \leq C(1+\sqrt[4]{T})\,\|\phi\|_{\mathcal{X}^k} + CT(1+\sqrt[4]{T})\,\|u\|^3_{L^\infty_T\mathcal{X}^k}\,.$$

Tomando $a = 3C\,\|\phi\|_{\mathcal{X}^k}$ e usando o fato de que $u \in B_k[a,T]$ temos que

$$\begin{aligned}\|\Phi[u]\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k} &\leq \frac{a}{3}(1+\sqrt[4]{T}) + CT(1+\sqrt[4]{T})a^3 \\ &\leq \frac{a}{3} + \frac{a\sqrt[4]{T}}{3} + CT(1+\sqrt[4]{T})a^3.\end{aligned}$$

Tomando T tal que

$$\sqrt[4]{T} \leq 1 \quad \text{e} \quad CT(1+\sqrt[4]{T}) \leq \frac{1}{3a^2} \tag{3.13}$$

segue-se que

$$\|\Phi[u]\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k} \leq \frac{a}{3} + \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = a,$$

o que torna (i) verdadeira.

Das condições estabelecidas em (3.13) para T, obsevamos que $(1+\sqrt[4]{T}) \leq 2$.

Assim, afim de satisfazer (3.13) é suficiente tomar

$$T_k \leq T_1 = \min\left\{1, \frac{1}{54C^3 \|\phi\|_{\mathcal{X}^k}^2}\right\}.$$

Vamos agora refinar o valor de T, se necessário, para provar que Φ é uma contração. Sejam $u, w \in B_k[a,T]$, então usando a desigualdade de Minkowski segue-se que, para todo $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\|\Phi[u(\cdot,t)] - \Phi[w(\cdot,t)]\|_{\mathcal{X}^k} &\leq \int_0^t \left\|S(t-s)|u(\cdot,s)|^2 u(\cdot,s) - |w(\cdot,s)|^2 w(\cdot,s)\right\|_{\mathcal{X}^k} ds \\ &\leq C\int_0^t (1+\sqrt[4]{t-s}) \left\||u(\cdot,s)|^2 u(\cdot,s) - |w(\cdot,s)|^2 w(\cdot,s)\right\|_{\mathcal{X}^k} ds \\ &\leq C(1+\sqrt[4]{t}) \int_0^t \left\||u(\cdot,s)|^2 u(\cdot,s) - |w(\cdot,s)|^2 w(\cdot,s)\right\|_{\mathcal{X}^k} ds\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\big\||u|^2u-|w|^2w\big\|_{\mathcal{X}^k}=\big\||u|^2u-|w|^2w\big\|_{L^\infty}+\sum_{i=1}^{k}\big\|\partial_x^i(|u|^2u-|w|^2w)\big\|_{L^2}.$$

Onde

$$\begin{aligned}
\big\||u|^2u-|w|^2w\big\|_{L^\infty} &= \big\||u|^2(u-w+w)-|w|^2w\big\|_{L^\infty}\\
&= \big\||u|^2(u-w)+w(|u|^2-|w|^2)\big\|_{L^\infty}\\
&\leq \||u|^2\|_{L^\infty}\big\|u-w\big\|_{L^\infty}+\|w\|_{L^\infty}\big\||u|+|w|\big\|_{L^\infty}\big\||u|-|w|\big\|_{L^\infty}\\
&\leq \||u|^2\|_{L^\infty}\big\|u-w\big\|_{L^\infty}+\|w\|_{L^\infty}\big\||u|+|w|\big\|_{L^\infty}\big\|u-w\big\|_{L^\infty}\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{L^\infty}\left(\big\||u|^2\big\|_{L^\infty}+\|w\|_{L^\infty}\big\||u|+|w|\big\|_{L^\infty}\right)\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{L^\infty}[a^2+a(a+a)]\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{\mathcal{X}^k}3a^2.
\end{aligned}$$

E

$$\begin{aligned}
\partial_x^i(|u|^2u-|w|^2w) &= u\partial_x^i|u|^2+\partial_x^iu|u|^2-w\partial_x^i|w|^2-\partial_x^iw|w|^2\\
&= \underbrace{(u-w)\partial_x^i|u|^2}_{I}+\underbrace{w(\partial_x^i|u|^2-\partial_x^i|w|^2)}_{II}\\
&\quad+\underbrace{(\partial_x^iu-\partial_x^iw)|u|^2}_{III}+\underbrace{\partial_x^iw(|u|^2-|w|^2)}_{IV},
\end{aligned}$$

que nos dá,

$$\begin{aligned}
\big\|I\big\|_{L^2} &\leq \big\|u-w\big\|_{L^\infty}\big\|\partial_x^i|u|^2\big\|_{L^2}\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{\mathcal{X}^k}\big\|2Re(\overline{u}\partial_x^iu)\big\|_{L^2}\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{\mathcal{X}^k}2\big\|(\overline{u}\partial_x^iu)\big\|_{L^2}\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{\mathcal{X}^k}2\big\|\overline{u}\big\|_{L^\infty}\big\|\partial_x^iu\big\|_{L^2}\\
&\leq \big\|u-w\big\|_{\mathcal{X}^k}2a^2,
\end{aligned}$$

onde usamos o Lema 1.1. Com procedimentos análogos para II, III e IV temos que

$$\left\|\partial_x^i(|u|^2u-|w|^2w)\right\|_{L^2}\leq\left\|u-w\right\|_{\mathcal{X}^k}Ca^2.$$

O que nos dá

$$\|\Phi[u(\cdot,t)]-\Phi[w(\cdot,t)]\|_{\mathcal{X}^k}\;\;\leq\;\; C(1+\sqrt[4]{t})ta^2\sup_{[0,t]}\left\|u-w\right\|_{\mathcal{X}^k}$$

para todo $t\in[0,T]$.

Tomando o supremo no intervalo $[0,T]$ em ambos os membros obtemos

$$\begin{aligned}\|\Phi[u]-\Phi[w]\|_{L_T^\infty\mathcal{X}^k} &\leq C(1+\sqrt[4]{T})Ta^2\left\|u-w\right\|_{L_T^\infty\mathcal{X}^k}\\ &\leq 2CTa^2\left\|u-w\right\|_{L_T^\infty\mathcal{X}^k}\end{aligned}$$

Escolhendo portanto

$$T_k\leq T_2=\frac{1}{4Ca^2}=\frac{1}{36C^3\|\phi\|_{\mathcal{X}^k}}.$$

o operador Φ satisfaz a condição (ii).

Finalmente, tomando

$$T_k=\min\left\{1,\frac{1}{54C^3\left\|\phi\right\|_{\mathcal{X}^k}^2},\frac{1}{36C^3\|\phi\|_{\mathcal{X}^k}}\right\},$$

temos satisfeitas as condições (i) e (ii), o que prova a existência.

Vamos agora provar a unicidade. A solução encontrada acima é única em $B_k[a,T]\subset C([0,T_k],\mathcal{X}^k)$. Agora provaremos a unicidade no espaço $C([0,T_k],\mathcal{X}^k)$. Com efeito, sejam $u,w\in C([0,T_k],\mathcal{X}^k)$ com $M=\left\|u\right\|_{L_T^\infty\mathcal{X}^k}$ e $N=\left\|w\right\|_{L_T^\infty\mathcal{X}^k}$. Então, para todo $0\leq T\leq T_k$, usando argumentos análogos aos que foram usados anteriormente, temos que

$$\|u(\cdot,t)-w(\cdot,t)\|_{\mathcal{X}^k}\;\;\leq\;\; C(M,N)\int_0^t\|u(\cdot,s)-w(\cdot,s)\|_{\mathcal{X}^k}\,ds$$

para todo $t \in [0,T]$. Assim,

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{\mathcal{X}^k} \leq C(M,N)t \|u(\cdot,s) - w(\cdot,s)\|_{L_t^\infty \mathcal{X}^k},$$

para todo $t \in [0,T]$, e portanto

$$\|u(\cdot,t) - w(\cdot,t)\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k} \leq C(M,N)T \|u(\cdot,s) - w(\cdot,s)\|_{L_T^\infty \mathcal{X}^k}.$$

Logo, se $C(M,N)T \leq 1/2$, então

$$u(\cdot,t) = w(\cdot,t), \quad \forall t \in [0,T] \quad T \leq \frac{1}{2C(M,N)}.$$

Repetindo esse argumento um número finito de vezes temos a unicidade em $[0,T_k]$. O que conclui nossa demonstração. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BARTLE, Robert G.; *The Elements of Integration*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.

[2] CASTRO Jr., Armando de; *Curso de teoria da medida*, Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro (2004).

[3] CARDOSO, David C. S.; *O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2005.

[4] FERNANDEZ, Pedro Jesus *Medida e Integração*, Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro (2002).

[5] GALLO, Clément; *Schrödinger Group on Zhidkov spaces*, Advances Differential Equations, 9 (1971), 509–5388.

[6] Y. S. Kivshar, B. Luther-Davies; *Dark solitons: physics and applications*, Physics Reports, 298 (1998), 81–197.

[7] LIMA, Elon Lages; *Curso de Análise vol.2*, Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro (2005).

[8] LINARES, Felipe; PONCE, Gustavo; *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Publicações Matemáticas, Impa, Rio de Janeiro, 2ª edição 2006.

[9] IÓRIO, Rafael José, IÓRIO, Valéria de Magalhães; *Equações Diferenciais Parciais: Uma introdução*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro,1988.

[10] RUDIN, Walter; *Real and Complex Analysis*, TMH Edition, New York, 2ª edição, 1974.

[11] ZHIDKOV, P. E.; *Korteweg-de Vries and Nonlinear Schrödinger Equations: Qualitative Theory*, Lecture Notes im Mathematics 1756, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2001.

[12] ZHIDKOV, P. E.; *The Cauchy Problem for Nonlinear Schrödinger Equations*, Soobshch. OlYal, R5 87–373, Dubna (1987).