Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaços Euclidianos.

Alex Santana dos Santos

Maceió
Fevereiro de 2009

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática

Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaços Euclidianos.

Alex Santana dos Santos

Maceió
2009

Alex Santana dos Santos

Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaço Euclidianos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof Dr. Adán José Corcho Fernández

Maceió
2009

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S237e Santos, Alex Santana dos.
Estimativas de Strichartz e a equação não linear de Schrödinger em espaços euclidianos / Alex Santana dos Santos. – Maceió, 2009.
83f.

Orientador: Adán José Corcho Fernández.
Dissertação (mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Maceió, 2009.

Bibliografia: f. 83.

1. Análise harmônica. 2. Estimativas de Strichartz. 3. Schrödinger,Equação de. I. Título.

CDU: 517.955

Estimativas de Strichartz e a Equação Não Linear de Schrödinger em Espaço Euclideanos

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Análise submetida em 04 de fevereiro de 2009 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Carlos Matt S. Sa

Prof. Dr. Carlos Mateus da Silva Santos (Collegê de France/Paris)

Ediel Azevedo Guerra

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (UFAL).

Prof Dr. Adán José Corcho Fernández (Orientador)

O ideal seria que as pessoas amassem
da mesma forma que sabem fingir.
(Bob Marley)

À minha mãe Margarida e aos meus irmãos
Luiz Mateus e Marcos Santana.

Agradecimentos

- Primeiramente, agradeço ao Deus que acredito por ter sido a minha luz e a força que precisei durante esta jornada, na qual estive distante de tudo e de todos que amo.

- Ao meu orientador, professor Adán Corcho, dedico meus agradecimentos. Sem dúvida, foi a pessoa responsável pelo sucesso deste trabalho.

- Quero agradecer aos professores Ediel Azevedo e Carlos Mateus pelas críticas e sugestões ao presente texto dissertativo, as quais foram fundamentais para melhorias e correções do mesmo. Agradeço ao professor Francisco Vieira (Chico) pela leitura minunciosa e correções do presente texto.

- Quero registrar os meus agradecimentos aos professores desta instituição que contribuíram direta e indiretamente para minha formação matemática. Agradeço a todos os funcionários do Instituto de Matemática da UFAL, em especial à Dona Maria, pela alegria, pela disponibilidade e pelos eternos cafezinhos.

- Durante esses dois anos eu tive uma grande jóia ao meu lado, fundamental nos momentos de alegria e de tristeza, e confesso que cinquenta por cento desse mestrado eu devo a ela. Por isso, quero agradecer e dizer muito obrigado a Priscila Santos Ramos por tudo que representa, nesses anos de convivência, pelo carinho e companheirismo. Sou eternamente grato.

- Agradeço a todos meus os colegas (amigos) de turma pela receptividade. Em particular, Arlyson, André, Carlos Alberto, Darliton, Daniel, Erikson, Everson, Fabio Boia, Marcius e Leandro. Posso afirmar, com certeza, que tive verdadeiros irmãos aqui em Maceió.

- Quero agradecer a José Eduardo pela disponibilidade e por sua enorme paciência.

- Desejo agradecer a todos os meus amigos da Bahia que incentivaram e sempre demonstraram amizade durante esses anos. Em especial, André (Gabeh), Luana, Leonardo, Welton e Bruno. Quero registrar os meus agradecimentos a minha grande amiga Karine, pois mesmo distante, sempre demonstrou amizade e carinho, mostrando assim, o verdadeiro sentido da amizade.

- Por fim, agradeço à Capes/Fapeal que foram responsáveis pelo financiamento dos meus estudos; com certeza, foram fundamentais para a conclusão desta dissertação.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a boa colocação local e global para equação não linear de Schrödinger, com dados iniciais em $L^2(\mathbb{R}^N)$, a saber

$$\begin{cases} iu_t(t,x) + \Delta_x u(t,x) = \gamma \left| u(t,x) \right|^{\alpha} u(t,x) \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \ \in \ L^2(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

onde u é uma função de valores complexos e $\alpha < \frac{4}{N}$.

Palavras-chave: Análise Harmônica, Estimativas de Strichartz, Equação de Schrödinger.

Abstract

In this work we will study local and global well-posedness to Schrödinger nonlinear equation, with initial data in $L^2(\mathbb{R}^N)$, thatis

$$\begin{cases} iu_t(t,x) + \Delta_x u(t,x) = \gamma\left|u(t,x)\right|^{\alpha} u(t,x) \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \;\in\; L^2(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

where u is a complex value function and $0 < \alpha < \frac{4}{N}$.

Keywords: Harmonic Analysis, Schrödinger's equation.

Sumário

Introdução **10**

1 Preliminares e alguns tópicos de Análise Harmônica **13**

1.1 Espaços L^p 13

1.1.1 Convoluções 16

1.2 Interpolação de Operadores 18

1.3 Transformada de Fourier em $\mathbb{R}^N$ 26

1.3.1 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$ 26

1.3.2 Transformada de Fourier no espaço de Schwartz 28

1.3.3 Distribuições Temperadas 31

1.3.4 Os Espaços de Sobolev do tipo $L^2(\mathbb{R}^N)$ 34

2 O grupo livre de Schrödinger **40**

2.1 Propriedades do Grupo Livre de Schrödinger 41

3 As estimativas de Strichartz **47**

4 Teoria de existência de soluções locais e globais em $L^2(\mathbb{R}^N)$ **55**

4.1 Teoria local em L^2 61

4.2 Teoria local em $H^1(\mathbb{R}^N)$ 69

4.3 Teoria global em $L^2(\mathbb{R}^N)$ 72

Referências Bibliográficas **78**

Introdução

O objetivo deste trabalho dissertativo é estudar o problema de Cauchy para a equação não linear Schrödinger com dados iniciais em $L^2(\mathbb{R}^N)$, isto é,

$$(1) \begin{cases} iu_t(t,x) + \Delta_x u(t,x) = \gamma \left| u(t,x) \right|^\alpha u(t,x) \\ \\ u(x,0) = \varphi(x) \;\in\; L^2(\mathbb{R}^N), \quad x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

onde u é uma função de valores complexos e $\alpha < \frac{4}{N}$ (baseado nas referências [3] e [7]). Temos o caso crítico quando $\alpha = \frac{4}{N}$ e para consultas temos como refêrencias [3] e [7].

A equação (1) é chamada equação não linear de Schrödinger (NLS) devido ao físico austríaco Erwin Schrödinger que publicou em 1926 quatro trabalhos nos quais desenvolveu a sua famosa teoria: Mecânica Quântica Ondulatória.

O caminho usado em nosso trabalho para obter uma solução para o problema de Cauchy (1) será encontrar um ponto fixo para o operador

$$\Phi(u)(t) = S(t)\varphi + i\gamma \int_0^T S(t-s) \left| u(s) \right|^\alpha u ds. \qquad (2)$$

Esta equação tem sido o motivo de várias pesquisas, pois ela modela vários fenômenos físicos: no caso unidimensional, a equação não linear de Schrödinger com não-linearidade $\left| u(t,x) \right|^2 u(t,x)$ modela a propagação de ondas pacotes na teoria de ondas aquáticas.

Estudaremos a existência , unicidade e dependência contínua das soluções de seus dados iniciais para o problema de Cauchy (1) (no sentido de Hadamard) e diremos que o problema (1) é bem posto localmente. Veremos ainda que podemos estender estas três propriedades para qualquer intervalo de tempo $[-T, T]$ e assim mostraremos que o problema de Cauchy (1) é bem posto globalmente. Contudo, antes de mostrarmos estas propriedades necessitamos de alguns resultados preliminares. Partindo deste pressuposto estruturamos nosso trabalho da seguinte maneira:

No Capítulo 1, iremos estudar alguns tópicos de análise harmônica, nos quais estabeleceremos algumas ferramentas importantes para a compreensão dos próximos capítulos.

Em seguida, faremos, no capítulo 2, o estudo do problema de Cauchy para a equação linear de Schrödinger, a saber,

$$(3)\begin{cases} iu_t(t,x)+\Delta_x u(t,x)=0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \ \in \ L^2(\mathbb{R}^N), \quad x\in\mathbb{R}^N, t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Consequentemente, obteremos uma família de soluções para o problema de Cauchy (3), a qual denotaremos por $S(t)\varphi$, e mostraremos que esta família de soluções é um grupo unitário em L^2. Além do mais, usando alguns resultados do capítulo 1, encontraremos a estimativa fundamental para a equação de Schrödinger, a saber,

$$\|S(t)\varphi\|_{L^{p'}} \leq (4i\pi\,|t|)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\,\|\varphi\|_{L^p}\,,$$

a qual será usada para provar as famosas estimativas de Strichartz, no capítulo seguinte.

No capítulo 3, iremos estudar os efeitos regularizantes para a equação de Schrödinger, e assim, provaremos as estimativas de Strichartz, que será o principal resultado para a obtenção da teoria local e global em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Inicialmente, as estimativas foram obtidas por Strichartz como uma restrição da transformada de Fourier e foi generalizada por Ginibre e Velo em 1979. Recentemente, foi obtida uma generalização das estimativas de Strichartz em variedades Riemannianas.

No capítulo 4 iremos inicialmente, mostrar que a solução para o problema de Cauchy (1) satistaz a equação integral (2), sendo este resultado uma a aplicação do princípio de Duhamel. Em seguida, provaremos a existência e unicidade de soluções locais com dados iniciais em $L^2(\mathbb{R}^N)$, bem com a dependência contínua das soluções de seus dados iniciais. Para finalizar, provaremos uma lei de conservação em $L^2(\mathbb{R}^N)$, via aproximação de soluções em $H^1(\mathbb{R}^N)$, permitindo isto estender nossas soluções locais em $L^2(\mathbb{R}^N)$ à toda reta.

Capítulo 1

Preliminares e alguns tópicos de Análise Harmônica

Neste capítulo introduziremos conceitos e resultados básicos da Análise Harmônica. Estudaremos as propriedades principais do operador Transformada de Fourier que tem um papel fundamental na teoria que será desenvolvida neste trabalho.

1.1 Espaços L^p

Definição 1.1. *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $X \subset \mathbb{R}^N$. Denotaremos por $L^p(X)$ o conjunto das funções $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que*

$$\|f\|_{L^p} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & se \quad 1 \leq p < \infty \\ \inf \{\lambda > 0 \ ; \ \mu(A_\lambda) = 0\} < \infty, & se \quad p = \infty, \end{cases}$$

onde $A_\lambda = \{x \in X \ ; \ |f(x)| > \lambda\}$ e μ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.

Definição 1.2. *Sejam $p, q \in [1, \infty]$. Dizemos que p e q são conjugados quando*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Denotaremos por p' o conjugado de p. Além disso, dizemos que 1 e ∞ são conjugados.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$, $X \subset \mathbb{R}^N$, $f \in L^p(X)$ *e* $g \in L^{p'}$. *Então,* $fg \in L^1$ *e vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver teorema 3.5 de [8]. □

Corolário 1.1. *Sejam* $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ *tais que*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Suponhamos que $f \in L^p(X) \cap L^q(X)$. *Então,* $f \in L^r(X)$ *e além disso, vale*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\theta} \|f\|_{L^q}^{1-\theta}.$$

Demonstração. Notemos que, $\frac{\theta r}{p} + \frac{(1-\theta)r}{q} = 1$ de onde $\frac{1}{\frac{p}{\theta r}} + \frac{1}{\frac{q}{(1-\theta)r}} = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^r \, dx &= \int_X |f|^{\theta r} |f|^{(1-\theta)r} \, dx \\
&\leq \left(\int_X |f|^{\theta r \frac{p}{\theta r}} \, dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^{(1-\theta)r \frac{q}{(1-\theta)r}} \, dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}} \\
&= \left(\int_X |f|^p \, dx \right)^{\frac{\theta r}{p}} \left(\int_X |f|^q \, dx \right)^{\frac{(1-\theta)r}{q}}.
\end{aligned}$$

Elevando ambos os membros da desigualdade acima a potência $\frac{1}{r}$, obtemos o resultado esperado, ou seja,

$$\left(\int_X |f|^r \, dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_X |f|^p \, dx \right)^{\frac{\theta}{p}} \left(\int_X |f|^q \, dx \right)^{\frac{1-\theta}{q}}.$$

□

Teorema 1.2. *Os espaços* $L^p(X)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $X \subset \mathbb{R}^N$ *são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver teorema 3.11 de [8]. □

Teorema 1.3. *O espaço* $L^2(X)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver teorema 3.11 de [8]. □

Teorema 1.4. *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $X \subset \mathbb{R}^N$. *Se* $f \in L^p(X)$, *então*

$$\|f\|_{L^p} = sup\left\{\int_X f(x)\overline{g(x)}dx;\ \|g(x)\|_{L^{p'}} = 1\right\}.$$

Demonstração. Ver teorema 1.3 de [2]. □

Teorema 1.5 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}^N$ *e a função* $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}$ *mensuráveis. Então, para todo* $1 \leq p < \infty$ *vale a desigualdade*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Demonstração. A afirmação é clara se $p = \infty$. Se $p < \infty$ fazemos $F(x) = \int_Y |f(x,y)|\, dy$. Pelo teorema de dualidade e pela desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}
\|F\|_{L^{p'}_x} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}_x}=1} \int_X g(x)\left(\int_Y |f(x,y)|\, dy\right) dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}_x}=1} \int_Y \int_X |f(x,y)|\, g(x) dx dy \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^{p'}_x}=1} \int_Y \|f\|_{L^p_x} \|g\|_{L^{p'}_x} dy \\
&= \int_Y \|f\|_{L^p_x} dy.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

□

Denotaremos por $C_0(\mathbb{R}^N)$ a coleção de todas as funções contínuas de suporte compacto.

Teorema 1.6. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Então,* $C_0(\mathbb{R}^N)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver o teorema 3.14 de [8]. □

Definição 1.3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $p, q \geq 1$. Denotamos por $L_t^p(I; L_x^q(\mathbb{R}^N))$ o espaço das funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^N \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$\|f\|_{L_t^p(I;L_x^q(\mathbb{R}^N))} = \left(\int_I \|f(\cdot,t)\|_{L_x^q}^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Para facilitar a notação no caso em que $I = [0, T]$, com $T > 0$ ou $I = \mathbb{R}$, denotaremos $L_t^p(I; L_x^q(\mathbb{R}^N))$ por $L_T^p L_x^q$ e $L_t^p L_x^q$, respectivamente.

Teorema 1.7. *Seja $f : \mathbb{R}^N \times I \longrightarrow \mathbb{C}$. Então*

$$\|f\|_{L_t^p(\mathbb{R};L_x^q)} = sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f(x,t)\overline{g(x,t)} dt dx; \ \|g\|_{L_t^{p'}(\mathbb{R};L_x^{q'})} = 1 \right\}.$$

A demonstração é análoga à do teorema 1.4.

1.1.1 Convoluções

Consideremos $f, g \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$. Denotaremos por convolução de f e g a função definida por:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy. \tag{1.2}$$

Uma observação importante a ser feita é que a integral em (1.2) existe. De fato, pelo teorema de Fubini temos que a função $y \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$, para todo x fora de um conjunto de medida nula. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right| dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)| \, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} dy \, |g(y)| \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, dx \\
&= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Teorema 1.8. *A convolução de funções mensuráveis quando definidas, tem as seguintes propriedades algebricas:*

1. $f * g = g * f$

2. $(f * g) * h = f * (g * h)$

3. $(f + g) * h = f * h + g * h.$

Demonstração. Ver torema 1.3 do capítulo 9 de [5]. □

Teorema 1.9. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e, além disso, vale a desigualdade*

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q} . \tag{1.3}$$

Demonstração. Sejam $q \in [1, \infty)$ e p o seu conjugado. Então,

$$|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)| . \tag{1.4}$$

Agora, integrando (1.4) em relação à variável y, segue que

$$\begin{aligned} |f * g| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)| \, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder para obter a última desigualdade acima. Novamente, integrando em relação a variável x e elavando à potência q, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |f * g|^q \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, dy \right)^{\frac{q}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, |g(y)|^q \, dy dx \\ &= \|f\|_{L^1}^{\frac{q}{p}} \int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^q \, dy \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)| \, dx \\ &= \|f\|_{L^1}^{\frac{q}{p}} \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q}^q \\ &= \|f\|_{L^1}^q \|g\|_{L^q}^q . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q} ,$$

como desejavamos mostrar. □

No caso em que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$, para todo $p, q \in [1, \infty)$. Este resultado é conhecido como Desigualdade de Young e sua demosntração faremos na proxima seção.

1.2 Interpolação de Operadores

Seja H um espaço de Hilbert e A um subespaço vetorial de H. Denotamos por $\mathcal{B}(A, H)$ a coleção de todos os operadores limitados $T : A \longrightarrow H$ munido da seguinte norma:

$$\|T\| = \inf \{C > 0; \quad \|Tf\| \leq C \|f\|, \quad \forall f \in A\}$$

Teorema 1.10. *Sejam H um espaço de Hilbert e A um subespaço vetorial de H. Então,*

1. $(\mathcal{B}(A, H), \|\cdot\|)$ *é um espaço de Banach.*
2. $\|T\| = \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|Tf\|}{\|f\|} = \sup\limits_{\|f\|=1} \|Tf\| \qquad \forall\, T \in \mathcal{B}(A, H)$
3. *O operador $T \in \mathcal{B}(A, H)$ admite uma única extensão $\overline{T} \in \mathcal{B}(\overline{A}, H)$, onde $\overline{A}$ é o fecho de A em H. Além disso,*
$$\|T\| = \left\|\overline{T}\right\|.$$

Demonstração. Ver o teorema 2.10.1 e 2.10.2 de [6]. □

Teorema 1.11 (Teorema das Três Linhas)**.** *Seja F uma função contínua e limitada definida na faixa*

$$S = \{z = x + iy \;\; /0 \leq x \leq 1\},$$

tal que F é analítica no interior de S. Se para cada $y \in \mathbb{R}$

$$|F(iy)| \leq M_0 \;\; e \;\; |F(1 + iy)| \leq M_1,$$

então, para todo $z = x + iy \in S$, segue-se que

$$|F(x + iy)| \leq M_0^{1-x} M_1^x.$$

Antes da demonstração iremos enunciar o seguinte lema.

Lema 1.1. *Sejam F satisfazendo as hipóteses do teorema anterior e S um retângulo compacto. Se $|F(z)| \leq 1$ para todo $z \in \partial S$, então para todo $z \in S$ tem-se que $|F(z)| \leq 1$.*

Demonstração. Ver lema 3.10 de [4] □

Demonstração. (Prova do teorema 1.11) Sem perda de generalidade podemos supor que $M_0, M_1 > 0$. Considerando a função $F(z)/M_0^{1-z}M_1^z$, reduzimos nossa demonstração ao caso em que $M_0 = M_1 = 1$. Deste modo, segue que

$$|F(iy)| \leq 1 \quad e \quad |F(1+iy)| \leq 1.$$

Queremos mostrar que $|F(z)| \leq 1$ para todo $z \in S$. Primeiramente, suponhamos que

$$\lim_{|y| \to \infty} F(x+iy) = 0,$$

uniformemente, para $0 \leq x \leq 1$. O resultado segue do lema anterior, pois neste caso exite $y_0 > 0$ tal que $|F(x+iy)| \leq 1$ para $|y| \geq y_0$, ou seja, $|F(x+iy)| \leq 1$ na fronteira do retângulo com vertices

$$iy_0, \quad 1+iy_0, \quad -iy_0, \quad 1-iy_0.$$

Logo, o lema garanti a estimativa no interior do retângulo.

No caso geral, consideraremos a função

$$F_n(z) = F(z)e^{(z^2-1)/n} \qquad \forall\ n \ \in \ \mathbb{N}$$

Mostraremos que F_n converge uniformemente para 0 em $0 \leq x \leq 1$. Com efeito,

$$\begin{aligned} |F_n(z)| &= |F(x+iy)|\, e^{-y^2/n}e^{(x^2-1)/n} \\ &\leq |F(x+iy)|\, e^{-y^2/n} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

uniformemente, quando $|y| \longrightarrow \infty$, em $0 \leq x \leq 1$, com $|F(iy)| \leq 1$ e $|F(1+iy)| \leq 1$.

Portanto, segue da afirmação acima que $|F_n(z)| \leq 1$. Fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$|F(z)| \leq 1 \quad \forall\ z \in S.$$

□

Teorema 1.12 (Riesz-Thorin). *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^N$, $p_0 \neq p_1$, $q_0 \neq q_1$ *e seja* $T \in \mathcal{B}(L^{p_0}(X), L^{q_0}(Y)) \cap \mathcal{B}(L^{p_1}(X), L^{q_1}(Y))$ *com*

$$M_0 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf(x)\|_{L^{q_0}}}{\|f\|_{L^{p_0}}} \quad e \quad M_1 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf(x)\|_{L^{q_1}}}{\|f\|_{L^{p_1}}}$$

Então, $T \in \mathcal{B}(L^{p_\theta}(X), L^{q_\theta}(Y))$ *com a norma* M_θ *tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{1}{p_1} \ ; \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{1}{q_1} \qquad \theta \in (0,1).$$

Demonstração. Usaremos os seguintes resultados em nossa demonstração, denotando por

$$\langle h, g \rangle = \int_Y h(y) g(y) d\nu(y).$$

Pelo argumento de dualidade, segue que

$$\|h\|_{L^q} = \sup \left\{ |\langle h, g \rangle| \ : \ \|g\|_{L^{q'}} = 1 \right\}$$

e

$$\|T\|_{p,q} = \sup \left\{ |\langle Tf, g \rangle| \ : \ \|g\|_{L^{q'}} = \|f\|_{L^p} = 1 \right\}, \tag{1.5}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'}$.

No caso em que $p, q = \infty$ o resultado é imediato. Por outro lado, se $p < \infty$ e $q' < \infty$, podemos assumir que f, g são funções simples de suporte compacto, isto é,

$$f(x) = \sum_j a_j \mathcal{X}_{A_j}(x) \ \ e \ \ g(x) = \sum_k b_j \mathcal{X}_{B_k}(x),$$

onde os A_j são disjuntos para todo j e os B_k são disjuntos para todo k. E, além disso,

$$\|f\|_{p_\theta} = \|g\|_{q'_\theta} = 1.$$

Consideremos agora $0 \leq Rez \leq 1$ e definamos

$$\frac{1}{p(z)} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q(z)} = \frac{1-z}{q_0} + \frac{z}{q_1}$$

$$\varphi(z) = \varphi(x,z) = \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(z)}} e^{iarg(a_j)\frac{p_\theta}{p(z)}} \mathcal{X}_{A_j}(x)$$

$$\psi(z) = \psi(x,z) = \sum_k |b_k|^{\frac{q'_\theta}{q(z)}} e^{iarg(b_k)\frac{p_\theta}{p(z)}} \mathcal{X}_{B_k}(x).$$

Notemos que, $\varphi(z) = \varphi(x,z) \in L^{p_j}$, onde $j = 0, 1$. De fato,

$$\begin{aligned} |\varphi(z)|^p &= \left| \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(z)}} e^{iarg(a_j)} \mathcal{X}_{A_j}(x) \right|^p \\ &= \left(\sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(z)}} \left| e^{iarg(a_j)} \right| \mathcal{X}_{A_j}(x) \right)^p \\ &= \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(Rez)}p} \mathcal{X}_{A_j}(x), \end{aligned}$$

onde usamos fortemente o fato de que os conjuntos A_j são disjuntos . Portanto,

$$\begin{aligned} \left(\int_X |\varphi(z)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(z)}p} \int_X \mathcal{X}_{A_j}(x) dx \\ &= \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(Rez)}p} \mu(A_j) < \infty. \end{aligned}$$

Assim, a função $\varphi(z) = \varphi(x,z) \in L^{p_j}$, onde $j = 0, 1$. Analogamente, mostra-se que $\psi(z) = \psi(x,z) \in L^{q'_j}$, onde $j = 0, 1$. Logo, $T\varphi(z) \in L^{q_j}$, onde $j = 0, 1$. Claramente, notamos que $\varphi'(z) \in L^{p_j}$, $\psi'(z) \in L^{q'_j}$ e $(T\varphi)'(z) \in L^{q_j}$ para $0 \leq Rez \leq 1$.

Definamos a função

$$F(z) = \langle T\varphi(z); \psi(z) \rangle .$$

Logo, F é limitada, contínua em $0 \leq Rez \leq 1$ e é analítica em seu interior. Mostraremos que F satistaz as hipóteses do teorema das três linhas. De fato,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(it)|^{p_0} &= \left| \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(it)}} \, e^{iarg(a_j)} \mathcal{X}_{A_j}(x) \right|^{p_0} \\
&= \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(it)} p_0} \, \mathcal{X}_{A_j}(x).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{p_\theta}{p(it)} p_0 &= p_\theta p_0 \left(\frac{1-it}{p_0} \right) + p_\theta p_0 \left(\frac{it}{p_1} \right) \\
&= p_\theta - itp_\theta + \frac{p_\theta p_0 it}{p_1} \\
&= p_\theta + itp_\theta \left(-1 + \frac{p_0}{p_1} \right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
|\varphi(it)|^{p_0} &= \sum_j |a_j|^{\frac{p_\theta}{p(it)} p_0} \, \mathcal{X}_{A_j}(x) \\
&= \sum_j |a_j|^{p_\theta + itp_\theta \left(-1 + \frac{p_0}{p_1} \right)} \, \mathcal{X}_{A_j}(x) \\
&= \left(\sum_j |a_j| \, \mathcal{X}_{A_j}(x) \right)^{p_\theta}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\|\varphi(it)\|_{p_0} &= \left(\int_X |\varphi(it)|^{p_0} \, dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= \left(\int_X \left(\sum_j |a_j| \, \mathcal{X}_{A_j}(x) \right)^{p_\theta} dx \right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= \left(\int_X \left(\sum_j |a_j| \, \mathcal{X}_{A_j}(x) \right)^{\frac{p_\theta}{p_0} p_0} dx \right)^{\frac{1}{p_0}}.
\end{aligned}
$$

Claramente,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(it)\|_{p_0} &= \left(\int_X \left(|f|^{\frac{p_\theta}{p_0}}\right)^{p_0} dx\right)^{\frac{1}{p_0}} \\
&= \left\| |f|^{\frac{p_\theta}{p_0}} \right\|_{p_0} \\
&= \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta/p_0} = 1.
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\|\varphi(1+it)\|_{p_1} = \left\| |f|^{\frac{p_\theta}{p_1}} \right\|_{p_1} = \|f\|_{p_\theta}^{p_\theta/p_1} = 1$$

e

$$\|\psi(it)\|_{q_0'} = \|\psi(1+it)\|_{q_1'} = 1.$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder e as hipóteses do teorema, obtemos que

$$\begin{aligned}
|F(it)| &= |\langle T\varphi(it);\psi(it)\rangle| \\
&= \left|\int_Y T\varphi(it)\psi(it)d\nu(y)\right| \\
&\leq \int_Y |T\varphi(it)\psi(it)|\, d\nu(y) \\
&= \|T\varphi(it)\psi(it)|\|_{L^1} \\
&\leq \|T\varphi(it)\|_{L^q} \|\psi(it)\|_{L^{q'}} \\
&\leq M_0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|F(1+it)| &= |\langle T\varphi(1+it);\psi(1+it)\rangle| \\
&\leq \|T\varphi(1+it)\|_{L^{q_1}} \|\psi(1+it)\|_{L^{q_1'}} \\
&\leq M_1.
\end{aligned}$$

Observamos que $\varphi(\theta) = f$, $\psi(\theta) = g$ e $F(\theta) = \langle Tf, g\rangle$. Assim, pelo teorema das três linhas temos que

$$|\langle Tf, g\rangle| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Tomando o supremo e usando (1.5), temos o resultado desejado, ou seja,

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{1}{p_1} \ ; \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{1}{q_1} \qquad \theta \in (0,1).$$

□

Aplicaremos o teorema de interpolação de Riesz-Thorin para demonstrar a desigualdade de Young.

Teorema 1.13 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $p, q \in [1, \infty)$ *com* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} \geq 1$*. Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$*, então* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$*, onde* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1$*. Além disso,*

$$\|f * g\|\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \, . \tag{1.6}$$

Demonstração. Seja $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e definamos o operador

$$Tf(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy$$

Provamos em (1.3) que o operador $T : L^1 \longrightarrow L^q$ é limitado, ou seja,

$$\|Tf\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^q} \, .$$

Donde, concluimos que

$$\|T\|_0 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{L^q}}{\|f\|_{L^1}} \leq \|g\|_{L^q} \, .$$

Por outro lado, vemos que

$$\begin{aligned} |Tf(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y) g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y) g(y)| \, dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|^{q'} \, dy \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(y)|^q \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^q} \, . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Tf(x)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^{q'}} \|g\|_{L^q}.$$

Logo,

$$\|T\|_1 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf(x)\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^{q'}}} \leq \|g\|_{L^q}.$$

Em outras palavras, o operador $T : L^{q'} \longrightarrow L^\infty$ é limitado. Dessa maneira, o toerama de Riesz-Thorin nos assegura que o operador $T : L^p(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^r(\mathbb{R}^N)$ é limitado tal que

$$\begin{aligned} \|T\|_\theta &\leq \|T\|_0^{1-\theta} \|T\|_1^\theta \\ &\leq \|g\|_{L^q}^{1-\theta} \|g\|_{L^q}^\theta \\ &= \|g\|_{L^q}, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'} = 1 - \frac{\theta}{q}$$

e

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + 0 = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{\theta}{q}\right) - 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - 1.$$

Portanto,

$$\|Tf\|_{L^r} = \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

□

Definição 1.4. *Seja $0 < \alpha < N$. O potencial de Riesz de ordem α, denotado por I_α é defiinido por*

$$I_\alpha f(x) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} dy \tag{1.7}$$

onde $C_\alpha = \pi^{-\frac{N}{2}} 2^{-\alpha} \Gamma(N/2 - \alpha/2)/\Gamma(\alpha/2)$.

Teorema 1.14 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sejam $0 < \alpha < N$ e $1 \leq p < q < \infty$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$.*

1. *Se $f \in L^P(\mathbb{R}^N)$, então a integral (1.7) é absolutamente convergente para algum $x \in \mathbb{R}^N$.*

2. *Se $p > 1$, então $\|I_\alpha f(x)\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p}$.*

Demonstração. Ver teorema 2.18 de [7]. □

1.3 Transformada de Fourier em $\mathbb{R}^N$

Nesta seção, iremos estudar os principais resultados para o operador Transformada de Fourier, os quais terão uma grande importância para a compreensão e desenvolvimento dos próximos capítulos.

1.3.1 Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$

Definição 1.5. *Seja $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ pertencente a $L^1(\mathbb{R}^N)$. A Transformada de Fourier de f é a aplicação $\hat{f} = \mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\, e^{-i\xi.x} dx, \tag{1.8}$$

onde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^N$ e

$$x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i. \tag{1.9}$$

Teorema 1.15. *Seja $\hat{f}$ a Transformada de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então,*

1. *$f \longrightarrow \hat{f}$ define uma Transformação linear, satisfazendo*

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \|f\|_{L^1}.$$

2. *$\hat{f}$ é contínua*

3. *Vale o lema de Riemann-Lebesgue, isto é, $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.*

4. *Se $f_h(x) = f(x+h)$, então*

$$\widehat{(f_h)}(\xi) = \hat{f}(\xi) e^{ih.\xi} \quad e \quad (\widehat{e^{ih.\xi} f}) = \widehat{f}(\xi - h).$$

Demonstração. Ver teorema 1.1 do capítulo 9 de [5]. □

O resultado a seguir mostrará a relação entre a convolução e a Transformada de Fourier.

Teorema 1.16. *Sejam f, $g \in L^1$. Então,*

$$(f * g)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi). \tag{1.10}$$

Demonstração. Sabemos que se $f, g \in L^1$, então $f * g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Logo, podemos calcular a Transformada de Fourier da convolução.

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} (f * g)(x)\, e^{-i\xi . x} dx \\
&= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi . x} dx \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)dy.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi . x} f(x-y)dx \\
&= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi . (x+y-y)} f(x-y)dx \\
&= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} g(y)e^{-i\xi . y}dy \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi . (x-y)} f(x-y)dx \\
&= (2\pi)^{-N/2} (2\pi)^{N/2} \hat{f}(\xi)\, (2\pi)^{N/2} \hat{g}(\xi) \\
&= (2\pi)^{N/2} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).
\end{aligned}$$

□

Consideremos agora a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Claramente, $f \in L^1(\mathbb{R})$. Portanto, podemos calcular a sua Transformada de Fourier e não é dificil verificar que é dada por:

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{-N/2} \frac{\sin \xi}{\xi}, & \text{se} \quad \xi \neq 0 \\ (2\pi)^{-N/2} \quad , & \text{se} \quad \xi = 0 \end{cases}$$

Entretanto, $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$. Concluímos que, em geral, nem sempre podemos recupera a função

f através da Transformada de Fourier, isto é, uma vez conhecida a Transformada de Fourier de uma dada função em $L^1(\mathbb{R}^N)$, não garantimos que exista uma aplicação que seja a inversa da Transformada de Fourier. Este fato indica que devemos estudar a Transformada de Fourier em subespaços de $L^1(\mathbb{R}^N)$ nos quais possamos definir uma aplicação que seja inversa para a Transformada de Fourier. Para maiores informações e exemplos ver seção 9.1 de [5].

1.3.2 Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

Vimos que nem sempre $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ implica que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Uma das grandes aplicações da Transformada de Fourier é reduzir o grau de dificuldade de um dado problema e depois apresentar a solução. Contudo, faz-se necessário obtermos uma inversa para a Transformada de Fourier. Estudaremos a Transformada de Fourier em espaços nos quais podemos definir uma aplicação inversa da Transformada de Fourier. Para maiores referências consultar [2] e [5]

Algumas Notações e Definições: Seja $\mathbb{N}$ o conujunto dos números naturais e $\mathbb{N}^N = \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times ... \times \mathbb{N}}_{N}$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^N$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N)$ é chamado de multi-índices. Além disso, dados $x \in \mathbb{R}^N$ e α multi-índices, definimos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \quad ; \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot .... \cdot x_N^{\alpha_N}. \tag{1.11}$$

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdot ... \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N}. \tag{1.12}$$

Definição 1.6 (Espaço de Schwartz). *Denotamos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, a coleção de todas as aplicações $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| < \infty. \tag{1.13}$$

Definimos a toplogia do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ como sendo a familia das semi-normas dadas em (1.13).

Teorema 1.17. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Então, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se,*

$$\lim_{|x| \to \infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0, \qquad \forall \ \alpha, \beta \ \in N^N.$$

Demonstração. Ver teorema 1.11 de [2]. □

Proposição 1.1. *O espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. Ver teorema 1.12 de [2]. □

Definição 1.7. *Dizemos que uma seqüência $\{f_k\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ quando*

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{\alpha,\beta} = 0 \qquad \forall\ \alpha, \beta\ \in \mathbb{N}^N.$$

Quando nos referirmos à definição precedente, usaremos a seguinte notação

$$f_k \overset{\mathcal{S}}{\to} f.$$

Lema 1.2. *Sejam $p \in [1, \infty]$ e $f_k \overset{\mathcal{S}}{\to} f$. Então, $f_k \overset{L^p}{\to} f$.*

Demonstração. Ver Lema 5.1 do capítulo 9 de [5]. □

A transformada de Fourier de uma função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é definida igualmente à fórmula estabelecida em (1.8).

Teorema 1.18. *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e valem as fórmulas:*

a) $(-i)^{|\alpha|}(\partial^\alpha f)\,\hat{}\,(\xi) = \xi^\alpha \hat{f}(\xi)$.

b) $(-i)^{|\alpha|}(x^\alpha \hat{f}\ )(\xi) = (\partial^\alpha \hat{f}\ )(\xi)$.

Demonstração. Ver teorema 2.2 e 2.3 de [2]. □

Lema 1.3. *Seja $a \in \mathbb{C}/\{0\}$, com $Re(a) \geq 0$ e $g(x) = e^{-a|x|^2}$. Então, $\hat{g}(\xi) = e^{\frac{-|\xi|^2}{4a}}(2a)^{-\frac{N}{2}}$.*

Demonstração. Ver lema 2.1 de [2]. □

Teorema 1.19 (Fórmula de Inversão)**.** *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Por consequência, vale a fórmula de inversão, ou seja,*

$$f(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(x) e^{i\xi . x} d\xi \tag{1.14}$$

e, além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f} g.$$

Demonstração. Ver teorema 2.4 de [2]. □

Definamos o operador $\check{f} = \mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ como segue:

$$\check{f} = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) e^{i\xi . x} d\xi. \tag{1.15}$$

Observemos que $\check{f}$ está bem definido, pois $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$ e $e^{i\xi.x}$ é limitada. Assim, pela fórmula de inversão temos que

$$f(x) = (\hat{f})\check{\ }(\xi).$$

De maneira simples podemos mostrar que

$$f(x) = (\check{f})\hat{\ }(x).$$

Assim, o operador Transformada $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é limitado e bijetor. O próximo resultado é conhecido como a identidade de Parserval em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.20. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle.$$

Equivalentemente,

$$\|f\|_{L^2} = \left\|\hat{f}\right\|_{L^2}.$$

Demonstração. Ver teorema 2.3 do capitulo 9 de [5]. □

De forma geral, dada uma $f \in L^2$ a Transformada de Fourier definida em (1.8) não faz sentido. Por exemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in (-\infty, 1] \\ x^{-1}, & \text{se} \quad (1, +\infty). \end{cases}$$

Claramente, $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, mas não pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$. No entanto, utilizando alguns resultados podemos definir a Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Usando a proposição 1.1, obtemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e utilizando a identidade de Parserval vemos que o operador Transformada de Fourier e sua inversa satisfazem as hipóteses do toerema 1.10, portanto podemos estender o operador transformada para um operador em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.8. *Dada* $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *e* $\{f_n\}$ *qualquer seqüência em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *tal que* $f_n \longrightarrow f$ *em* $L^2(\mathbb{R}^N)$*, segue que*

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n = \hat{f} \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \check{f}_n = \check{f},$$

onde o limite é visto no sentido de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.21. *Transformada de Fourier em* $L^2(\mathbb{R}^N)$ *é definida como a única extensão da transformada em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ *a* $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver teorema 2.7 de [2]. □

1.3.3 Distribuições Temperadas

Na seção precedente observamos que o espaço de Schwartz possui propriedades interessantes referentes a Transformada de Fourier e de forma natural estenderemos estes conceitos para as chamadas funções generalizadas ou distribuições Temperadas.

Definição 1.9. *Dizemos que o operadores* $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C}$ *é uma distribuição temperada, se*

1. T *é um operador linear*

2. T *é contínuo, isto é, se* $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$*, então* $T\varphi_k \longrightarrow 0$ *quando* $k \longrightarrow \infty$.

Denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ a coleção de todas as distribuições temperadas. Em outras palavras, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é o dual topológico do espaço de Schwartz. Vamos considerar alguns exemplos importantes para o estudo da teoria das distribuições.

Primeiramente, os elementos de L^p onde $1 \leq p \leq \infty$ definem distribuições temperadas através da fórmula

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx, \qquad f \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

De fato, usando a desigualdade de Hölder temos,

$$\begin{aligned} |T_f(\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)\varphi(x)|\, dx \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^p}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Usando o lema 1.2 temos o resultado desejado.

Um outro exemplo bem conhecido é a distribuição δ de Dirac centrada no ponto $x \in \mathbb{R}^N$, definida por

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x), \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Facilmente, podemos verificar que δ de Dirac centrada no ponto $x \in \mathbb{R}^N$ é linear. Além disso, temos que

$$|\delta_x(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

onde δ é contínua. Logo, δ é uma distribuição.

Definição 1.10. *Sejam $\{T_k\}$ uma seqüência em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Dizemos que $\{T_k\}$ é convergente para T quando*

$$\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi) \qquad \forall\ \varphi \ \in \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Quando estivermos de agora em diante nos referindo à definição acima escreveremos, $T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$. Esta noção de convergência é muito fraca. De fato, sejam $f_k \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $f_k \xrightarrow{L^p} f$. Usando a desigualdade de Hölder obtemos,

$$\begin{aligned} |T_{f_k}(\varphi) - T_f(\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f_k - f)(x)\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |(f_k - f)(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \|f_k - f\|_{L^p} \|\varphi(x)\|_{L^q}, \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fazendo $k \longrightarrow \infty$, vemos que $T_{f_k} \longrightarrow T_f$, visto que $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Logo, mostramos que a aplicação $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \longrightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é contínua e ainda injetiva. Portanto, podemos identificar $L^p(\mathbb{R}^N)$ como um subconjunto de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Passaremos a denotar os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ com a notação usual de funções f, g. Iremos adotar a seguinte notação

$$f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \tag{1.16}$$

Em particular, se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p < \infty$, escrevemos

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)dx \qquad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \tag{1.17}$$

Agora, definiremos a derivida, a convolução e a Transformada de Fourier de uma distribuição temperada. Para maiores informações consulte a seção 7 do capítulo 9 de [5] e seção 4 do capítulo 1 de [2].

Definição 1.11 (Derivada)**.** *Sejam $\alpha \in N^N$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. A derivada $\partial^\alpha f$ de f é o funcional*

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f \;\; : \;\; \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

Definição 1.12. *Sejam $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. A convolução de T com φ é a aplicação*

$$T * \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$T * \varphi(\phi) = T(\varphi * \phi), \qquad \forall\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Definição 1.13. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. A Transformada de Fourier de f é a distribuição temperada $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ dada por*

$$\hat{f}(\varphi) = f(\hat{\varphi}) \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

e a Transformada inversa de f, denotada por $\mathcal{F}^{-1}(f) = \check{f}$ é dada por

$$\check{f}(\varphi) = f(\check{\varphi}).$$

Teorema 1.22. *A aplicação $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver o teorema 2.8 de [2]. □

Vamos agora estabelecer a relação entre a derivada e a Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, mas antes definamos a coleção $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^N)$ das funções pertecentes a $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, de crescimento lento, isto é, $\phi \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^N)$ quando $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^N$, existe uma constante $C(\alpha)$ e um número natural $n(\alpha)$ tais que

$$|\partial^\alpha \phi(x)| \leq C(\alpha)(1 + |x|^2)^{n(\alpha)} \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Definição 1.14. *Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\phi \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^N)$. Definimos a distribuição ϕT, chamada de* *produto da distribuição T com a função ϕ, por*

$$\phi T(\varphi) = T(\phi\varphi), \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Teorema 1.23. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Denotamos por $x^\alpha f$ o produto da função $\phi(x) = x^\alpha$ com a distribuição temperada f. Então,*

1. $(\partial^\alpha f)\widehat{\ } = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}$;

2. $\partial^\alpha(\hat{f}) = (-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)\widehat{\ }$.

Demonstração. Ver teorema 2.9 de [2]. □

1.3.4 Os Espaços de Sobolev do tipo $L^2(\mathbb{R}^N)$

Nesta seção introduziremos os conceitos clássicos dos Espaços de Sobolev do tipo $L^2(\mathbb{R}^N)$, de ordem $s \in \mathbb{R}$, mediante a Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Os espaços de Sobolev serão denotados por $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.15. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Os Espaços de Sobolev de ordem s são subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ dados por*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) :\ \wedge^s f(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\} \tag{1.18}$$

com norma $\|\cdot\|_s$ definida por

$$\|f\|_{H^s} = \|\wedge^s f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^s \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.19}$$

Observemos que se $s \geq s'$, então $H^s(\mathbb{R}^N) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, seja $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Provaremos que $f \in H^{s'}(\mathbb{R}^N)$, isto é, $\|f\|_{H^{s'}} < \infty$. Notemos que, $s \geq s'$ implica que $(1 + |\xi|^2)^{\frac{s'}{2}} \leq (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$. Vemos que,

$$\begin{aligned} \|f\|_{H^{s'}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{s'} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^2)^{s} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \|f\|_{H^s}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Logo, $H^s(\mathbb{R}^N) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.24. *Os Espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ são espaço de Hilbert quando*

$$\langle f, g\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^s \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi. \tag{1.20}$$

Proposição 1.2. *Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$. Então,*

1. $\left(H^s(\mathbb{R}^N)\right)\widehat{}= L^2(\mathbb{R}^N, (1+|\xi|^2)^s dx)$.
2. *O dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^N)$ é isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração. (Ver proposição 8.1 do capítulo 9 de [5].) □

Teorema 1.25. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então, $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo multi-índice $|\alpha| \leq m$, onde as derivadas são calculadas no sentido das distribuições.*

Demonstração. Primeiramente, se $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, então $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, isto é, $\|\partial^\alpha f\|_{L^2} < \infty$. De fato, usando o teorema (1.23), segue que

$$(\partial^\alpha f)\widehat{}= i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\xi|^\alpha &= |\xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}| \\ &\leq (1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha_1}{2}} \dots (1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha_n}{2}} \\ &\leq (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}. \end{aligned}$$

Assim, para $|\alpha| \leq m$, segue que

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 &= \|(\partial^\alpha f)\widehat{}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |(\partial^\alpha f(x))\widehat{}|^2 \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2\alpha} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{|\alpha|} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{m} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \|f\|_{H^m} < \infty.
\end{aligned}$$

Deste modo, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Reciprocamente, suponhamos agora que $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $|\alpha| \leq m$. Aplicando o teorema binomial, obtemos

$$(1+|\xi|^2)^m \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 = \sum_j^m c_j \, |\xi|^{2j} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2.$$

Notemos que $\sum_j^m c_j \, |\xi|^{2j} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2$ é uma combinação linear de $\left|\xi^\alpha \hat{f}(\xi)\right|^2$. Portanto, estas funções são integráveis devido às hipóteses feitas no teorema (1.23). Logo,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^m} &= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^m \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \sum_j^m c_j \, |\xi|^{2j} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 2 < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ $\square$

Teorema 1.26 (Imersão de Sobolev). *Seja $s > \frac{n}{2}$. Então, $H^m(\mathbb{R}^N)$ pode ser imerso continuamente em $C_\infty(\mathbb{R}^N)$ (a coleção das funções contínuas de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{C}$ que tendem a zero quando $|x| \to \infty$) e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.21}$$

Demonstração. Seja $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Primeiramente, mostraremos que $\hat{f} \in L^1$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s/2}(1+|\xi|^2)^{s/2} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi \qquad (1.22)\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{s} \left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.
\end{aligned}$$

Aplicamos a desigualdade de Hölder em (1.22). Portanto, usando a desigualdade análoga do item (1) do teorema (1.15) para transformada inversa, obtemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^\infty} &= \left\|(\hat{f})\check{}\,\right\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left\|\hat{f}\right\|_{L^1} \\
&\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|\xi|^2)^{-s}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Comentários: Para maiores informações consultar [3].

1. Denotaremos por $W^{m,p}$ o espaço das funções $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $D^\alpha u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ no sentido das distribuições, para todo multi-indíce α com $|\alpha| \leq m$, munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

Teorema 1.27 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Sejam* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *e* j, m *números inteiros tal que* $0 \leq j \leq m$. *Se*

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{n} + \theta\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{n}\right) + \frac{1-\theta}{q}$$

para algum $\theta \in \left[\frac{j}{m}, 1\right]$, *então existe* $C = C(n, m, j, \theta, q, r)$ *tal que*

$$\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\| \leq C \left(\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\| \right)^\theta \|u\|_{L^q}^{1-\theta}$$

para todo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Consultar a demonstração em [1]. □

2. Em particular, se $u \in H^m(\mathbb{R}^N)$ e $v \in L^2$, então

$$\langle u, v \rangle_{H^m, H^{-m}} = \int_{\mathbb{R}^N} u(x)\overline{v(x)}dx. \tag{1.23}$$

3. Em particular, definido o operador linear continuo $\Delta : H^1 \longrightarrow H^{-1}$, a forma linear $\Delta u \in H^{-1}$ em H^1 é definida por

$$\langle \Delta u, v \rangle_{H^{-1}, H^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \nabla \overline{v(x)} dx. \tag{1.24}$$

Antes de finalizar este capítulo definiremos o seguinte operador. Dado $\epsilon > 0$, o operador J_ϵ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ é definido por

$$J_\epsilon u = (I - \epsilon\Delta)^{-1} u. \tag{1.25}$$

Logo, se $u \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, então $u_\epsilon = J_\epsilon u \ \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é a única solução de

$$u_\epsilon - \epsilon \Delta u_\epsilon = u. \tag{1.26}$$

Proposição 1.3. *Sejam* $\lambda > 0$, $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $f \in H^{-1}(\mathbb{R}^N)$, *satisfazendo* $-\Delta u + \lambda u = f$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *para algum* $p \in [1, \infty)$, *então* $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e vale a seguinte desigualdade*

$$\lambda \|u\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver a proposição (1.5.1) de [3]. □

Em geral, vale $\|J_\epsilon f\|_X \leq \|f\|_X$, onde $X = H^1(\mathbb{R}^N)$, $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ ou $L^p(\mathbb{R}^N)$ onde $p \in [1, \infty)$. Em particular, J_ϵ pode ser estendido continuamente para algum operador $\mathcal{B}(X)$ com norma

$\|J_\epsilon f\|_X \leq 1$. Além do mais, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4. *Se X é algum dos seguintes espaços $H^1(\mathbb{R}^N)$, $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ ou $L^p(\mathbb{R}^N)$, onde $p \in [1, \infty)$, então*

1. $\langle J_\epsilon f, g\rangle_{X,X^*} = \langle f, J_\epsilon g\rangle_{X,X^*}, \quad \forall\ f \in\ X,\ g \in\ X^*$
2. *$J_\epsilon f \longrightarrow f$ em X quando $\epsilon \longrightarrow 0$ para todo $f \in X$*
3. *Se f_ϵ é limitada em X quando $\epsilon \longrightarrow 0$, então $(J_\epsilon f_\epsilon - f) \longrightarrow 0$ em X quando $\epsilon \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Ver a proposição (1.5.2) de [3]. □

Capítulo 2

O grupo livre de Schrödinger

Neste capítulo iremos estudar o problema de Cauchy para equação linear de Schrödinger, dada por:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{2.1}$$

Nosso objetivo será encontrar o grupo livre de Schrödinger e estudar as suas propriedades as quais serão de suma importância para obtermos as estimativas de Strichartz e, por consequência, para o estudo da boa colocação do problema de Cauchy da equação não-linear de Schrödinger nos espaços $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Sejam $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$ e $u \in C^\infty(\mathbb{R}; S(\mathbb{R}^N))$. Aplicando a transformada de Fourier em (2.1), obtemos

$$\begin{cases} i\hat{u}_t - 4\pi^2 \left|\xi\right|^2 \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{\varphi}(\xi). \end{cases} \tag{2.2}$$

Assim, reduzimos o problema de equações diferenciais parcias a um problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Por outro lado, a solução de (2.2) é dada por:

$$\hat{u}(t) = e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t} C. \tag{2.3}$$

Usando a condição de valor inicial em (2.3) temos que

$$\hat{u}(t) = e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{\varphi}(\cdot). \tag{2.4}$$

Daí, aplicando a transformada inversa de Fourier encontramos uma família de soluções do problema (2.1) dada por:

$$u(t) = (e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{\varphi})\check{\ }(\cdot) \tag{2.5}$$

ou, equivalentemente,

$$u(t) = (e^{-it\Delta})\varphi(\cdot). \tag{2.6}$$

Para maior comodidade denotaremos por $S(t) = e^{-it\Delta}$ *o operador livre de Schrödinger*. Assim, (2.6) é expressado por:

$$u(t) = S(t)\varphi(\cdot). \tag{2.7}$$

2.1 Propriedades do Grupo Livre de Schrödinger

Faremos agora um breve estudo das propriedades do operador $S(t)$. Primeiramente, notemos que

$$\mathcal{F}(S(t)\varphi)(\xi) = e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{\varphi}(\xi) \tag{2.8}$$

Teorema 2.1. *A família de operadores $\{S(t)\}$ é um grupo unitário de operadores em $L^2(\mathbb{R}^N)$, ou seja,*

1. *$\forall\ t \in \mathbb{R}$; $S(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é uma isometria, isto é,*

$$\|S(t)f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

2. *$S(t)S(s) = S(t+s)$ com $S(t)^{-1} = S(-t) = S(t)^*$.*

3. *$S(0) = I$.*

4. *Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tem-se que a função $\phi_f : \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ definida por $\phi_f = S(t)\varphi$ é uma aplicação contínua, isto é, ϕ_f descreve uma curva em $L^2(\mathbb{R}^N)$.*

Observação 2.1. *Notemos que à medida em que f é mais regular, isto é, $f \in C^{2k}$ temos que $\phi_f \in C^{k-1}$ (baseado em $\partial_t\phi_f = \Delta\phi_f$).*

Demonstração. 1. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Então, utilizando a igualdade de Plancherel

$$\begin{aligned}
\|S(t)f\|_{L^2}^2 &= \left\|(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{f})\check{}\,\right\|_{L^2}\\
&= \left\|e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{f}\right\|_{L^2}\\
&= \left\|\hat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Portanto, o operador $S(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é uma isometria.

2. Basta observar que,

$$\begin{aligned}
S(t+s)f &= \left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2(t+s)}\hat{f}\right)\check{}\\
&= \left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}e^{-i4\pi^2|\xi|^2 s}\hat{f}\right)\check{}\\
&= \left\{e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\left[\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 s}\hat{f}\ \right)\check{}\ \right]\hat{}\ \right\}\check{}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S(t+s)f &= \left\{e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\left[S(s)f\ \right]\hat{}\ \right\}\check{}\\
&= S(t)\circ S(s)(f).
\end{aligned}$$

Logo, $S(t+s) = S(t)S(s)$. Além disso, aplicando a igualdade de Plancherel, temos

$$\begin{aligned}
\langle S(t)f, g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^N}(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{f})\check{}\ \overline{g(x)}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{f}\right)\left(\overline{g(x)}\right)\check{}\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{f}\right)\overline{\hat{g}(x)}dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\hat{f}\left(\overline{e^{i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{g}(x)}\right)dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}f\left(\overline{e^{i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{g}(x)}\right)\hat{}\ dx\\
&= \int_{\mathbb{R}^N}f\,\overline{\left(e^{i4\pi^2|\xi|^2 t}\hat{g}(x)\right)\check{}}\ dx\\
&= \langle f, S(-t)g\rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$S(t)^* = S(-t).$$

3. $S(0) = I$. De fato,

$$\begin{aligned} S(0)f &= \left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2.0}\hat{f}\right)\check{} \\ &= \left(\hat{f}\right)\check{} = f. \end{aligned} \tag{2.10}$$

4. Mostraremos agora que $\phi_f(t)$ é contínua em $L^2(\mathbb{R}^N)$. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\tau}\|\phi_f(t)-\phi_f(\tau)\|_{L^2} &= \lim_{t\to\tau}\|S(t)f - S(\tau)f\|_{L^2} \\ &= \lim_{t\to\tau}\left\|\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2(t)}\hat{f}\right)\check{} - \left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2(\tau)}\hat{f}\right)\check{}\right\|_{L^2} \\ &= \lim_{t\to\tau}\left\|\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2(t)}\hat{f} - e^{-i4\pi^2|\xi|^2(\tau)}\hat{f}\right)\check{}\right\|_{L^2} \\ &= \lim_{t\to\tau}\left\|\left[\left(e^{-i4\pi^2|\xi|^2(t)} - e^{-i4\pi^2|\xi|^2(\tau)}\right)\hat{f}\right]\check{}\right\|_{L^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do teorema da convergência dominada. □

Além disso, segue de (2.8) que

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(S(t)\varphi)(x)| &= \left|e^{-i4\pi^2|\xi|^2t}\widehat{\varphi}(x)\right| \\ &= \left|e^{-i4\pi^2|\xi|^2t}\right| |\widehat{\varphi}(x)| \\ &= |\widehat{\varphi}(x)|, \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Portanto, $\forall\ s,t \in \mathbb{R}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|S(t)\varphi\|_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}|\mathcal{F}(S(t)\varphi)(\xi)|\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}}|\widehat{\varphi}(\xi)|\,d\xi = \|\widehat{\varphi}\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Desta maneira, sendo $S(\mathbb{R}^N)$ denso em $H^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, podemos estender a família de soluções $\{S(t)\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ a um grupo unitário em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

O teorema seguinte caracterizará grupos unitários de operadores. Este resultado permitirá estendermos o grupo livre Schrödinger para os espaços de Hilbert.

Teorema 2.2. (*M.H Stone*) *A família de operadores $\{T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, definida no espaço de Hilbert H, é um grupo unitário se, e somente se, existe um operador auto-adjunto A, densamente definido em H, tal que*

$$T(t) = e^{itA}. \tag{2.11}$$

Mas, precisamente, denotado por $D(A)$ o domínio do operador A (o qual é denso em H), se $f \in D(A)$, então

$$\lim_{t \to o} \frac{T(t)f - f}{t} = iAf. \tag{2.12}$$

Demonstração. Ver teorema 4.5 de [7] □

Lema 2.1. *Dado $t \neq 0$, defina K_t sendo a aplicação dada por:*

$$K_t(x) = \left(\frac{1}{4it\pi}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}}. \tag{2.13}$$

Então, $S(t)\varphi = K_t * \varphi$, isto é ,

$$S(t)\varphi = \left(\frac{1}{4it\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{i|x-y|^2}{4t}} \varphi(y)dy \tag{2.14}$$

$\forall t \neq 0$ *e* $\forall\ \varphi \in S(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Ver exemplo 1.26 de [7]. □

Proposição 2.1. *Sejam $p \in [2;\infty]$ e $t \neq 0$. Então, $S(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é contínuo e vale a desigualdade*

$$\|S(t)\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi\,|t|)^{-N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}\,. \tag{2.15}$$

$\forall\ \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$

Demonstração. Seja $\varphi \in S(\mathbb{R}^N)$. Utilizando o lema precedente e a desigualdade de Young, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} &= \|K_t * \varphi\|_{L^\infty} \\
&\leq \|K_t(x)\|_{L^\infty} \|\varphi(x)\|_{L^1} \\
&= \left\| (4it\pi)^{-\frac{N}{2}} e^{\frac{i|x|^2}{4t}} \right\|_{L^\infty} \|\varphi(x)\|_{L^1} \\
&= \left| (4it\pi)^{-\frac{N}{2}} \right| \|\varphi(x)\|_{L^1} .
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Portanto,

$$
\|S(t)\varphi\|_{L^\infty} \leq \left| (4it\pi)^{-\frac{N}{2}} \right| \|\varphi\|_{L^1} . \tag{2.17}
$$

Logo, o operador $S(t) : L^1(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é limitado e sua norma é dada por:

$$
\|S(t)\|_0 = \sup \frac{\|S(t)\varphi\|_{L^\infty}}{\|\varphi\|_{L^1}} \leq \left| (4it\pi)^{-\frac{N}{2}} \right| . \tag{2.18}
$$

Por outro lado, o teorema 2.1, diz que o operador $S(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é limitado, com norma

$$
\|S(t)\|_1 = \sup \frac{\|S(t)\varphi\|_{L^2}}{\|\varphi\|_{L^2}} = 1. \tag{2.19}
$$

Assim, pelo teorema de interpolação de Riesz-Thorin, obtemos que o operador $S(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^N)$ é limitado e, além disso ,

$$
\begin{aligned}
\|S(t)\|_p &\leq \|S(t)\|_0^{1-\theta} \|S(t)\|_1^{\theta} \\
&= 1^{1-\theta} (4\pi |t|)^{-\frac{N}{2}\theta} \\
&= (4\pi |t|)^{-\frac{N}{2}\theta} ,
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

onde

$$
\tfrac{1}{p'} = \tfrac{1-\theta}{2} + \theta \quad \text{e} \quad \tfrac{1}{p} = \tfrac{1-\theta}{2} \qquad \forall\, \theta \in (0,1).
$$

Observamos que,

$$
\tfrac{1}{p'} = \tfrac{1}{p} + \theta \ \Rightarrow \ \tfrac{1}{p'} - \tfrac{1}{p} = \theta.
$$

Segue por (2.20) que

$$\begin{aligned}\|S(t)\varphi\|_{L^p} &\leq (4i\pi|t|)^{-\frac{N}{2}\theta}\|\varphi\|_{L^p}\\ &= (4i\pi|t|)^{-\frac{N}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)}\|\varphi\|_{L^{p'}}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Por outro lado, obtemos

$$\tfrac{1}{p'}+\tfrac{1}{p}=1 \quad\Rightarrow\quad \tfrac{1}{p'}=1-\tfrac{1}{p}.$$

Logo,

$$\|S(t)\varphi\|_{L^{p'}} \leq (4i\pi|t|)^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|\varphi\|_{L^p}. \tag{2.22}$$

□

Este resultando é conhecido como a estimativa fundamental para a equação de Schrödinger e será utilizada no capítulo seguinte para provarmos as estimativas de Strichartz.

Capítulo 3

As estimativas de Strichartz

Neste capítulo, estudaremos os efeitos regularizantes para a equação de Schrödinger. Inicialmente, definiremos o conceito de par admissível e em seguinda, provaremos as estimativas de Strichartz.

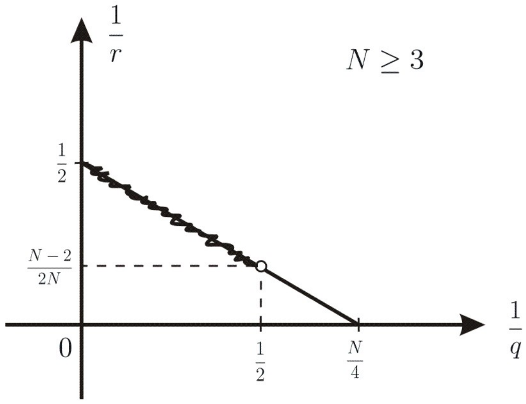
Definição 3.1. *Dizemos que o par (q, r) é admissível se,*

$$\frac{2}{q} = N\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{3.1}$$

e

$$2 \leq r \leq \frac{2N}{N-2}. \tag{3.2}$$

Para $N \geq 3$ fixado, temos o seguinte segmento de reta no qual podemos localizar os pares admissiveis.



Observação 3.1. *Notemos que, em (3.2), se $N = 1$, temos que $2 \leq r \leq \infty$. No caso $N = 2$ em (3.2), temos que $2 \leq r < \infty$*

Observação 3.2. *Se (q, r) é algum par admissível, então $2 \leq q \leq \infty$. Observamos que $(\infty, 2)$ é admissível.*

Observação 3.3. *Nossa demonstração das estimativas de Strichartz excluirá os pontos extremos, isto é, $r \neq \frac{2N}{N-2}$, pois no caso em que $r = \frac{2N}{N-2}$ a provas das estimativas são mais delicadas e foram demonstradas por Keel e Tao. Para maiores informações, consultar* [3].

Teorema 3.1 (Estimativas de Strichartz)**.** *As seguintes propriedades são válidas:*
1) *Para todo $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ a função $t \longrightarrow S(t)\varphi$ pertence*

$$L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N)) \cap C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$$

Além disso, existe C tal que

$$\|S(t)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R},L^r(\mathbb{R}^N))} \leq C\|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N). \tag{3.3}$$

2) *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$, $J = \bar{I}$ e $t_0 \in J$. Se (q, r) é um par admissível e $f \in L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N))$, então a função $t \longrightarrow \theta_f(t)$, $\forall\ t \in I$ definida por*

$$\theta_f(t) = \int_{t_o}^{t} S(t-s)f(s)ds.$$

pertence a $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N))$. Além disso, existe uma constante C independente de I tal que

$$\|\theta_f(t)\|_{L^q_T L^r_x} \leq C\|f\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad q, q' \neq 2. \tag{3.4}$$

3) *Se (q, r) é um par admissível e $f \in L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N))$, então, a função $\theta_f(t)$ pertence a $C(I, L^2(\mathbb{R}^N))$ e vale a seguinte desigualdade*

$$\|\theta_f\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq C\|f\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração em alguns passos, para maior comodidade. Inicialmente, provaremos as propriedade 2 *e* 3. Por conveniência, assumiremos que $I = [0, T)$

para algum $T \in (0, \infty)$ e $t_0 = 0$. A prova é a mesma para o caso geral. Iremos definir o operador ϕ_f (*onde* $t \in (0,T)$) o qual auxiliará em nossa demonstração.

$$\phi f(s) = \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad \forall s \in [0,T). \tag{3.5}$$

Passo 1: Prova de 2). Para todos (q,r) pares admissíveis, as aplicações ϕ_f *e* θ_f são contínuas em $L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N)) \longrightarrow L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N))$. De fato, faremos a prova somente para o operador θ_f, pois, para o operador ϕ_f, a demonstração é similar.

Seja $f \in L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N))$, então

$$\begin{aligned}
\|\theta_f\|_{L^r_x} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\int_0^t S(t-s)f(s)ds\right|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} && (3.6)\\
&\leq \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^N} |S(t-s)f(s)|^r dx\right)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \int_0^t \|S(t-s)f(s)\|_{L^r_x} ds && (3.7)\\
&\leq \int_0^t (|t-s|)^{-N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} \|f\|_{L^{r'}} ds \\
&= \int_0^t (|t-s|)^{-\frac{2}{q}} \|f\|_{L^{r'}} ds && (3.8)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{X}_{[0,T)} (|t-s|)^{-\frac{2}{q}} \|f\|_{L^{r'}} ds \leq I_\alpha(\|f(s)\|_{L^{r'}}). && (3.9)
\end{aligned}$$

Usamos em (3.6) a desigualdade de Minkowski, em seguida aplicamos em (3.7) a estimativa fundamental (proposição 2.1) e $\alpha = -\frac{2}{q} + 1$.

Verificaremos agora, que (3.9) satisfaz as hipóteses do teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev, para $\alpha = -\frac{2}{q}+1$ (ver teorema 1.14). De fato, da observação (3.2) temos que $2 \leq q \leq \infty$, logo $0 \leq \alpha \leq 1$. Por outro lado, temos que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1 = \alpha + \frac{2}{q}.$$

Daí,

$$\frac{1}{q} - \frac{2}{q} = -\frac{1}{q'} + \alpha \Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{q} = -\frac{1}{q'} + \alpha \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q'} - \alpha.$$

Portanto, $I_\alpha(f(s))$ é um potencial de Riesz (ver definição 1.4) em relação à variável temporal satisfazendo às hipóteses do teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev para $N = 1$ e $\alpha = -\frac{2}{q} + 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \|\theta_f\|_{L^q_T L^r_x} &\leq \|I_\alpha(\|f(s)\|_{L^{r'}})\|_{L^q_T} \\ &\leq C\,\|f\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Logo,

$$\|\theta_f\|_{L^q_T L^r_x} \leq C\,\|f\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}. \tag{3.11}$$

para todo par admissível (q, r).

Passo 2: Prova de 3). Para todo par (q, r) admissível, a aplicação θ_f é contínua em $L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N)) \longrightarrow C(I, L^2(\mathbb{R}^N))$. De fato, seja $f \in L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N))$, então

$$\begin{aligned} \|\theta_f(t)\|^2_{L^2} &= \left(\int_0^t S(t-s)f(s)ds, \int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau\right)_{L^2}. \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t S(t-s)f(s)ds\overline{\int_0^t S(t-\tau)f(\tau)d\tau}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t\int_0^t S(t-s)f(s)\overline{S(t-\tau)f(\tau)}d\tau ds dx \\ &= \int_0^t\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N} S(t-s)f(s)\overline{S(t-\tau)f(\tau)}dx d\tau ds \\ &= \int_0^t\int_0^t (S(t-s)f(s), S(t-\tau)f(\tau))_{L^2}\, d\tau ds. \end{aligned}$$

Agora, aplicando as propriedades do grupo livre de Schrödinger, obtemos

$$\begin{aligned} \|\theta_f(t)\|^2_{L^2} &= \int_0^t\int_0^t (f(s), S^*(t-s)\left[S(t-\tau)f(\tau)\right])_{L^2}\, d\tau ds \\ &= \int_0^t\int_0^t (f(s), S(-t+s)\left[S(t-\tau)f(\tau)\right])_{L^2}\, d\tau ds. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\|\theta_f(t)\|_{L^2}^2 &= \int_0^t \int_0^t (f(s), S(s-\tau)f(\tau))_{L^2}\, d\tau ds \\
&= \int_0^t \left(f(s), \int_0^t S(s-\tau)f(\tau)d\tau \right)_{L^2} ds \\
&= \int_0^t (f(s), \phi_f(s))_{L^2}\, ds \\
&= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} f(s)\phi_f(s) dxds.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em relação à variável espacial, segue que

$$\begin{aligned}
\|\theta_f(t)\|_{L^2}^2 &\leq \int_0^t \|f(s)\|_{L_x^{r'}} \|\phi_f(s)\|_{L_x^r} ds \\
&\leq \|f\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} \|\phi_f(s)\|_{L_T^q L_x^r} \qquad (3.12) \\
&\leq \|f\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} C \|f\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} \qquad (3.13) \\
&= C \|f\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}}^2 .
\end{aligned}$$

Aqui, para obtermos (3.13), utilizamos a desigualdade de Hölder em relação ao tempo e aplicamos em (3.14) a estimativa do item 2 do teorema. Logo, tomando o supremo em relação à variável tempo, obtemos o resultado desejado:

$$\|\theta_f\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq C \|f\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} . \qquad (3.14)$$

Passo 3: Prova de 1). Queremos mostrar que, para qualquer par (q, r) admissível, temos que

$$\|S(t)\varphi\|_{L^q(\mathbb{R}, L^r(\mathbb{R}^N))} \leq C \|\varphi\|_{L^2} \quad \forall \varphi \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Inicialmente, consideremos os operadores

$$\delta_f(t) = \int_{\mathbb{R}} S(t-s)f(s)ds \qquad \forall t \in [0, T). \qquad (3.15)$$

e

$$\Gamma_f(t) = \int_{\mathbb{R}} S(-t)f(t)dt \qquad \forall t \in [0,T). \tag{3.16}$$

Notemos que, pelo passo 1, o operador $\delta_f(t) : L^{q'}(I, L^{r'}(\mathbb{R}^N)) \longrightarrow L^q(I, L^r(\mathbb{R}^N))$ é limitado, ou seja,

$$\|\delta_f(t)\|_{L_t^q L_x^r} \leq C \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}, \tag{3.17}$$

para qualquer par admissível (q,r).

Além disso, podemos mostrar de forma análoga ao passo 2 e utilizando (3.18) que o operador $\Gamma_f(t) : L^{q'}(\mathbb{R}, L^{r'}(\mathbb{R}^N)) \longrightarrow C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$ é limitado e satisfaz

$$\|\Gamma_f(t)\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}. \tag{3.18}$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \langle S(t)\varphi(\cdot), \psi(t) \rangle_{L^2} dt \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi(\cdot), S(-t)\psi(t) \rangle_{L^2} dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\cdot)\overline{S(-t)\psi(t)} dx dt \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\cdot)\overline{S(-t)\psi(t)} dt dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\cdot)\overline{\Gamma_\psi(t)} dx \right|.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schawarz e utilizando (3.19), temos que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}} \langle S(t)\varphi(\cdot), \psi(t) \rangle_{L^2} dt \right| &= \left| \langle \varphi(\cdot), \Gamma_\psi(t) \rangle_{L^2} \right| \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2} \|\Gamma_\psi(t)\|_{L^2} && (3.19) \\
&\leq \|\varphi\|_{L^2} \|\psi\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}}. && (3.20)
\end{aligned}$$

O resultado, segue do fato de que

$$\|S(t)\varphi\|_{L_T^q L_x^r} = \sup \left\{ \left| \int_0^t (S(t)\varphi, \psi)_{L^2} dt \right| \; ; \; \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N); \; \|\psi\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} = 1 \right\}.$$

Portanto,

$$\|S(t)\varphi\|_{L^q_T L^r_x} \leq \|\varphi\|_{L^2}.$$

$\square$

Corolário 3.1. *Sejam* (q_0, p_0)*,* (q_1, p_1) *pares admissíveis. Então,* $\forall\ T > 0$ *vale a seguinte estimativa*

$$\|\phi_f(t)\|_{L^{q_1}(I, L^{p_1}(\mathbb{R}^N))} \leq C\, \|f\|_{L^{q_0'}(I, L^{p_0'}(\mathbb{R}^N))}. \tag{3.21}$$

Demonstração. Pela hipótese, os pontos (q_0, p_0), (q_1, p_1) estão contidos no segmento entre $P = (0, 1/2)$ e $Q = \left(\frac{N}{4} - \frac{N}{2p(N)}; \frac{1}{p(N)}\right)$ com $p(N) = \infty$, se $N = 1, 2$. Caso contrário,$p(N) = \frac{2N}{N-2}$, se $N \geq 3$. Portanto, sem perda de generalidade, podemos supor que $p_0 \in [2, p_1)$. Logo, aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi_f(t)\|_{L^{q_0}_T L^{p_0}_x} &= \left(\int_0^T \|\phi_f(t)\|^{q_0}_{L^{p_0}}\, dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq \left(\int_0^T \|\phi_f(t)\|^{q_0(1-\theta)}_{L^2} \|\phi_f(t)\|^{q_0\theta}_{L^{p_1}}\, dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\leq \sup_{[0,T]} \|\phi_f(t)\|^{(1-\theta)}_{L^2} \left(\int_0^T \|\phi_f(t)\|^{q_0\theta}_{L^{p_1}}\, dt\right)^{\frac{1}{q_0}}, \qquad (*)
\end{aligned}$$

desde que,

$$\frac{1}{p_0} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{2},$$

isto é,

$$\theta = \frac{p_1(2-p_0)}{p_0(2-p_1)}.$$

Por outro lado, usando o fato de que (q_0, p_0), (q_1, p_1) são pares admissíveis, sabemos que

$$\frac{2}{q_0} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p_0} \quad e \quad \frac{2}{q_1} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p_1}.$$

Obtemos que
$$\frac{N}{4} = \frac{p_0}{q_0(p_0-2)} = \frac{p_1}{q_1(p_1-2)}.$$
Assim,
$$\frac{q_0}{q_1} = \frac{p_0(2-p_1)}{p_1(2-p_0)} = \frac{1}{\theta}.$$
Portanto,
$$q_1 = q_0\theta.$$
Segue de $(*)$ que
$$\begin{aligned} \|\phi_f(t)\|_{L_T^{q_0}L_x^{p_0}} &\leq \|\phi_f(t)\|_{L_T^{\infty}L_x^2}^{(1-\theta)} \left(\int_0^T \|\phi_f(t)\|_{L^{p_1}}^{q_1}\, dt\right)^{\frac{\theta}{q_1}}. \\ &= \left(\|\phi_f(t)\|_{L_T^{\infty}L_x^2}\right)^{(1-\theta)} \left(\|\phi_f(t)\|_{L_T^{q_1}L_x^{p_1}}\right)^{\theta}. \end{aligned}$$
Agora, aplicando as estimativas dois e três do teorema 3.1 de Strichartz, segue que
$$\begin{aligned} \|\phi_f(t)\|_{L_T^{q_0}L_x^{p_0}} &\leq C\left(\|f\|_{L_T^{q_1'}L_x^{p_1'}}\right)^{(1-\theta)} \left(\|f\|_{L_T^{q_1'}L_x^{p_1'}}\right)^{\theta} \\ &= \|f\|_{L_T^{q_1'}L_x^{p_1'}}. \end{aligned}$$
Para finalizar a prova, usando o arguemento de dualidade, obtemos a desigualdade desejada
$$\|\phi_f(t)\|_{L^{q_1}(I,L^{p_1}(\mathbb{R}^N))} \leq C\,\|f\|_{L^{q_0'}(I,L^{p_0'}(\mathbb{R}^N))}. \tag{3.22}$$
□

As estimativas do teorema 3.1 podem ser generalizadas para vários espaços envolvendo derivadas. Por exemplo, sejam (p_0, q_0) e (p_1, q_1) pares admissíveis. Para todo $m \geq 0$, segue que
$$\|S(t)\varphi\|_{L_T^q W^{m,r}} \leq C\,\|\varphi\|_{H^m} \tag{3.23}$$
e
$$\|\phi_f(t)\|_{L^{q_0}(I,W^{m,p_0})} \leq C\,\|f\|_{L^{q_1'}(I,W^{m,p_1'})}. \tag{3.24}$$

Capítulo 4

Teoria de existência de soluções locais e globais em $L^2(\mathbb{R}^N)$

Neste capítulo, faremos o estudo da boa colocação para problema de Cauchy da equação não linear de Schrödinger com dados iniciais em $L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u = \gamma \left|u\right|^\alpha u & \gamma \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = \varphi(x) & x \in \mathbb{R}^N, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $S(t)$ é o grupo livre de Schrödinger.

Salietamos que u é solução de (4.1) se, e somente se, u satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)\varphi + i\gamma \int_0^t S(t-s) \left|u(s)\right|^\alpha u(s) ds. \tag{4.2}$$

Este resultado é conhecido como Princípio de Duhamel. Vejamos a prova desta afirmação. Seja $f(t) = \gamma \left|u(t)\right|^\alpha u(t)$. Definamos

$$w(s) = S(t-s)u(s)$$

Então,

$$w(s+h) - w(s) = S(t-s-h)u(s+h) - S(t-s)u(s).$$

Segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{w(s+h)-w(s)}{h} &= \frac{S(t-s-h)u(s+h)-S(t-s-h+h)u(s)}{h}\\
&= \frac{S(t-s-h)u(s+h)-S(t-s-h)S(h)u(s)}{h}\\
&= \frac{S(t-s-h)u(s+h)-S(t-s-h)u(s)}{h}\\
&+ \frac{S(t-s-h)u(s)-S(t-s-h)S(h)u(s)}{h}\\
&= S(t-s-h)\left[\frac{u(s+h)-u(s)}{h}-\left(\frac{S(h)u(s)-u(s)}{h}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Fazendo $h \longrightarrow 0$, temos que

$$\frac{u(s+h)-u(s)}{h} \longrightarrow \partial_s u(s).$$

Além do mais, pelo teorema 2.2, segue que

$$\frac{S(h)u(s)-u(s)}{h} \longrightarrow i\Delta u.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
w'(s) &= S(t-s)\left(\partial_s u(s) - i\Delta u\right)\\
&= iS(t-s)f(s).
\end{aligned}
$$

Portanto, integrando ambos os membros de 0 a τ, onde $\tau \in [0,t)$. Obtemos,

$$\int_0^\tau w'(s)ds = i\int_0^\tau S(t-s)f(s)ds.$$

Daí,

$$S(t-\tau)u(\tau)-S(t)u(0) = i\int_0^\tau S(t-s)f(s)ds.$$

Fazendo $\tau \longrightarrow t$, temos que

$$S(0)u(t) - S(t)u(0) = i\int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Portanto,

$$u(t) = S(t)\varphi + i\gamma \int_0^t S(t-s)\,|u(s)|^\alpha\, u(s)ds.$$

Afirmação 4.1. *Sejam $\alpha < \frac{4}{N}$ e (q, r) um par admisível tal que $r = \alpha + 2$ e $q = \frac{4(\alpha+2)}{\alpha N}$. Então,*

$$\||u|^\alpha\, u\|_{L_x^{r'}} = \|u\|_{L_x^r}^{\alpha+1}.$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\|\,|u|^\alpha\, u\|_{L_x^{r'}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|u|^\alpha\,|u|)^{r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(\alpha+1)r'}\,dx\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{\alpha+1}{r-1}r}\,dx\right)^{\frac{r-1}{r}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{r-1}{r-1}r}\,dx\right)^{\frac{\alpha+1}{r}}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{r}\,dx\right)^{\frac{\alpha+1}{r}}\\
&= \|u\|_{L_x^r}^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

Afirmação 4.2. *Sejam α, q e r satisfazendo as hipóteses da afirmação anterior. Então,*

$$\|\,|u|^\alpha\, u\|_{L_T^{q'}L_x^{r'}} \leq T^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\,\|u\|_{L_T^q L_x^r}^{\alpha+1}.$$

Demonstração. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\| \, |u|^{\alpha} u\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} &= \left(\int_0^T \| \, |u|^{\alpha} u\|_{L_x^{r'}}^{q'} \, dt \right)^{\frac{1}{q'}} \\
&= \left(\int_0^T 1. \, \|u\|_{L_x^{r}}^{(\alpha+1)q'} \, dt \right)^{\frac{1}{q'}} .
\end{aligned}
$$

Aplicando a desigualdade de Hölder em relação à variável temporal com $p = \frac{q}{q-(1+\alpha)q'}$ e $p' = \frac{q}{(1+\alpha)q'}$, segue que

$$
\begin{aligned}
\| \, |u|^{\alpha} u\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} &\leq \left\{ \left(\int_0^T 1dt \right)^{1-\frac{\alpha+1}{q}q'} \left(\int_0^T \|u\|_{L_x^{r}}^{(\alpha+1)q' \frac{q}{(\alpha+1)q'}} \, dt \right)^{\frac{\alpha+1}{q}q'} \right\}^{\frac{1}{q'}} \qquad (4.3) \\
&= \left(\int_0^T 1dt \right)^{\frac{1}{q'}-\frac{\alpha+1}{q}} \left(\int_0^T \|u\|_{L_x^{r}}^{q} \, dt \right)^{\frac{\alpha+1}{q}} \\
&= T^{\left(\frac{1}{q'}-\frac{\alpha+1}{q}\right)} \|u\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha+1} \\
&= T^{\left(1-\frac{1}{q}-\frac{\alpha+1}{q}\right)} \|u\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha+1} \\
&= T^{\left(1-\frac{1}{q}-\frac{\alpha+1}{q}\right)} \|u\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha+1} \\
&= T^{\left(1-\frac{\alpha+2}{q}\right)} \|u\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha+1} \\
&= T^{\left(1-\frac{N\alpha}{4}\right)} \|u\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha+1} .
\end{aligned}
$$

□

Afirmação 4.3. *Sejam α, q e r satisfazendo as hipóteses das afirmações anteriores. Então,*

$$
\| \, |u|^{\alpha} u - |v|^{\alpha} v\|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} \leq CT^{(1-\frac{N\alpha}{4})} \left(\|u\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha} + \|v\|_{L_T^{q} L_x^{r}}^{\alpha} \right) \|u-v\|_{L_T^{q} L_x^{r}} .
$$

Lema 4.1. *Seja $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por:*

$$
g(z) = |z|^{\alpha} z.
$$

Então,

$$
| \, |z_1|^{\alpha} z_1 - |z_2|^{\alpha} z_2| \leq C \left(|z_1|^{\alpha} + |z_2|^{\alpha} \right) |z_1 - z_2|
$$

Demonstração. De fato, façamos a prova para $\alpha - 1 < 0$, pois para o caso contrário a prova é análoga. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $|z_1| < |z_2|$. Portanto,

$$\begin{aligned} \left| |z_1|^\alpha z_1 - |z_2|^\alpha z_2 \right| &= \left| |z_1|^\alpha z_1 - \ |z_2|^\alpha z_1 + |z_2|^\alpha |z_1 - z_2| \right| \\ &\leq |z_2|^\alpha |z_1 - z_2| + |z_1| \left| \ |z_1|^\alpha - |z_2|^\alpha \right| \end{aligned}$$

Aplicando o teorema do valor médio com $\theta \in (0,1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| |z_1|^\alpha z_1 - |z_2|^\alpha z_2 \right| &\leq |z_2|^\alpha |z_1 - z_2| + |z_1| \, \alpha \left((1-\theta) |z_1| + \theta |z_2| \right)^{\alpha - 1} \left| \ |z_1| - |z_2| \ \right| \\ &\leq |z_2|^\alpha |z_1 - z_2| + |z_1| \, \alpha \, |z_1|^{\alpha-1} |z_1 - z_2| \\ &\leq |z_1 - z_2| \left(|z_1|^\alpha + |z_2|^\alpha \right) \end{aligned}$$

□

Façamos agora a prova da afirmação (4.3).

Demonstração. Aplicando o lema anterior, temos que

$$\| \, |u|^\alpha u - |v|^\alpha v \|_{L_x^{r'}} \leq C \left(\| \, |u|^\alpha |u - v| \|_{L_x^{r'}} + \| \, |v|^\alpha |u - v| \|_{L_x^{r'}} \right). \quad (*)$$

Por outro lado, $r = \alpha + 2$ implica que $r' = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$. Logo, $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1}$, onde $r_1 = \frac{r}{\alpha}$. Portanto, aplicando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \| \, |u|^\alpha |u - v| \|_{L_x^{r'}} &\leq \| \, |u|^\alpha \|_{L_x^{r_1}} \|u - v\|_{L_x^r} \\ &= \|u\|_{L_x^r}^\alpha \|u - v\|_{L_x^r} . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Analogamente,

$$\| \, |v|^\alpha |u - v| \|_{L_x^{r'}} \leq \| \, v\|_{L_x^r}^\alpha \|u - v\|_{L_x^r} .$$

Segue que

$$\begin{aligned} \| \, |u|^\alpha |u - v| \|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} &= \left(\int_0^T \left(\| \, |u|^\alpha |u - v| \|_{L_x^{r'}} \right)^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\leq \left(\int_0^T \left(\| \, |u| \|_{L_x^r}^{\alpha q'} \|u - v\|_{L_x^r}^{q'} \right) dt \right)^{\frac{1}{q'}} . \end{aligned}$$

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder em relação à variável temporal, com $p = \frac{q}{(\alpha+1)q'}$ e

$p' = \frac{q}{q-(1+\alpha)q'}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\| \, |u|^{\alpha} |u-v| \|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} &\leq \left(\int_0^T 1. \left(\| \, |u| \|_{L_x^r}^{\alpha q'} \|u-v\|_{L_x^r}^{q'} \right) dt \right)^{\frac{1}{q'}} \qquad (4.5)\\
&\leq \left(\int_0^T 1 dt \right)^{\frac{1}{q'} - \frac{\alpha+1}{q}} \left(\int_0^T \|u\|_{L_x^r}^{\frac{\alpha q}{\alpha+1}} \|u-v\|_{L_x^r}^{\frac{q}{(\alpha+1)}} dt \right)^{\frac{(\alpha+1)}{q}}\\
&= T^{1-\frac{N\alpha}{4}} \left(\int_0^T \|u\|_{L_x^r}^{\frac{\alpha q}{\alpha+1}} \|u-v\|_{L_x^r}^{\frac{q}{(\alpha+1)}} dt \right)^{\frac{(\alpha+1)}{q}}. \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

Novamente, utilizando a desigualdade de Hölder com $p = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ e $p' = \alpha+1$, segue que

$$\begin{aligned}
\| \, |u|^{\alpha} |u-v| \|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} &\leq T^{1-N\alpha/4} \left(\int_0^T \|u\|_{L_x^r}^{\frac{\alpha q}{\alpha+1} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha}} dt \right)^{\frac{\alpha}{q}} \left(\int_0^T \|u-v\|_{L_x^r}^{\frac{q}{\alpha+1} \cdot \alpha+1} dt \right)^{\frac{1}{q}}\\
&= T^{1-\frac{N\alpha}{4}} \left(\int_0^T \|u\|_{L_x^r}^q dt \right)^{\frac{\alpha}{q}} \left(\int_0^T \|u-v\|_{L_x^r}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}\\
&= T^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|u\|_{L_T^q L_x^r}^{\alpha} \|u-v\|_{L_T^q L_x^r}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\| \, |u|^{\alpha} |u-v| \|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} \leq T^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|u\|_{L_T^q L_x^r}^{\alpha} \|u-v\|_{L_T^q L_x^r}. \qquad (4.7)$$

Semelhantemente,

$$\| \, |v|^{\alpha} |u-v| \|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} \leq \|v\|_{L_T^q L_x^r}^{\alpha} T^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|u-v\|_{L_T^q L_x^r}. \qquad (4.8)$$

Portanto, utilizando (4.7) e (4.8) em $(*)$ temos que

$$\| \, |u|^{\alpha} u - |v|^{\alpha} v \|_{L_T^{q'} L_x^{r'}} \leq C T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} \left(\|u\|_{L_T^q L_x^r}^{\alpha} + \|v\|_{L_T^q L_x^r}^{\alpha} \right) \|u-v\|_{L_T^q L_x^r}.$$

$\square$

4.1 Teoria local em L^2

Nesta seção estudaremos a boa colocação local para o problema de Cauchy (4.1) com dados iniciais em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 4.1. *Sejam $\gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha < \frac{4}{N}$ e $r = \alpha + 2$. Consideremos (q, r) um par admisível e $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Então, existem $T = T(\|\varphi\|_{L^2}) > 0$, $M = M(\|\varphi\|_{L^2}) > 0$ e uma única solução u para o problemade Cauchy (4.1) tal que*

$$\|u\|_{L^q_T L^r_x} \leq M. \tag{4.9}$$

Demonstração. **Existência:** Mostraremos, de fato, que existem soluções para o problema de Cauchy (4.1) com dados iniciais em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Para isto, basta considerar o operador integral Φ para (4.1), ou seja,

$$\Phi(u) = S(t)\varphi + i\gamma \int_0^t S(t-s)\,|u(s)|^\alpha\, u(s)ds. \tag{4.10}$$

Desejamos encontrar um ponto fixo para Φ, isto é,

$$\Phi(u) = u.$$

Assim, definamos para $T > 0$ e $M > 0$, a bola,

$$E = \left\{ u \in L^q\left([0,T]; L^r(\mathbb{R}^N)\right) \cap C\left([0,T], L^2(\mathbb{R}^N)\right) : \ \|u\|_{L^q_T L^r_x} \leq M \right\}. \tag{4.11}$$

Logo, (E, D_E) é um espaço métrico completo munido da métrica

$$D_E(u,v) = \|u - v\|_{L^q_T L^r_x}.$$

Mostraremos que $\Phi(u) \in E$, para todo $u \in E$, e ainda mais, que Φ é uma contração. Com efeito, seja $u \in E$, então

$$\|\phi(u)\|_{L^q_T L^r_x} \quad = \quad \left\| S(t)\varphi + i\gamma \int_0^t S(t-s)\,|u(s)|^\alpha\, u(s)ds \right\|_{L^q_T L^r_x}.$$

Aplicando as estimativas de Strichartz e a afirmação 4.2, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\phi(u)\|_{L^q_T L^r_x} &\leq \| \|S(t)\varphi\|_{L^q_T L^r_x} + |\gamma| \left\| \int_0^t S(t-s)\,|u(s)|^{\alpha}\,u(s)ds \right\|_{L^q_T L^r_x} \\
&\leq C_0\,\|\varphi\|_{L^2} + C_1\,|\gamma|\,\|\,|u|^{\alpha}\,u\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \qquad (4.12)\\
&\leq C_0\,\|\varphi\|_{L^2} + C_1 T^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\,\|u\|^{\alpha+1}_{L^q_T L^r_x} \\
&\leq C_0\,\|\varphi\|_{L^2} + C_1 T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} M^{\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Escolhendo $M = 2C_0\,\|\varphi\|_{L^2}$ e $T > 0$ com

$$C_1 T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} M^{\alpha+1} \leq \frac{M}{2},$$

temos que

$$\|\phi(u)\|_{L^q_T L^r_x} \leq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M. \qquad (4.13)$$

Portanto, $\phi(u) \in E$.

Sejam agora $u, v \in E$. Aplicando a estimativa de Strichartz, segue que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^q_T L^r_x} &= |\gamma| \left\| \int_0^T S(t-s)\left(|u|^{\alpha}\,u - |v|^{\alpha}\,v\right)(s)ds \right\|_{L^q_T L^r_x} \\
&\leq C\,\|\,|u|^{\alpha}\,u - |v|^{\alpha}\,v\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \\
&\leq C T^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\left(\|u\|^{\alpha}_{L^q_T L^r_x} + \|v\|^{\alpha}_{L^q_T L^r_x}\right)\|u-v\|_{L^q_T L^r_x} \qquad (4.14)\\
&\leq C T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} M^{\alpha}\,\|u-v\|_{L^q_T L^r_x}.
\end{aligned}$$

Tomando T satisfazendo (4.13) e a condição

$$C T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} M^{\alpha} \leq \frac{1}{2}.$$

Segue que

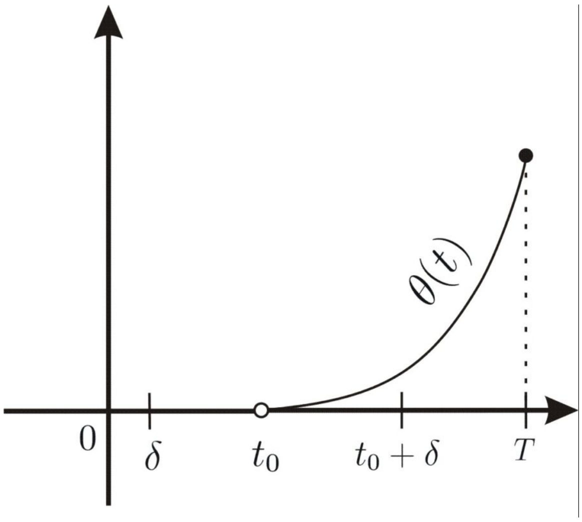
$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\|_{L^q_T L^r_x} \leq \frac{1}{2}\,\|u-v\|_{L^q_T L^r_x},$$

isto é, $\Phi(u)$ é uma contração. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach garantimos que existe $u \in L^q_T L^r_x$ tal que $\Phi(u) = u$ em E. Portanto, com este argumento mostramos a existência de solução para o problema de Cauchy (4.1).

Unicidade

Sejam $u, v \in L^q_T L^r_x$ soluções de (4.1) no intervalo $[0, T)$. Mostraremos que $u \equiv v$. Definamos, $\theta(\tau) = \|u(\tau) - v(\tau)\|_{L^q_\tau L^r_x}$, onde $0 \leq \tau \leq T$. Observemos que

$$\begin{aligned}\theta(0) &= \|u(0) - v(0)\|_{L^q_\tau L^r_x} \\ &= \|\varphi(x) - \varphi(x)\|_{L^q_\tau L^r_x} = 0.\end{aligned}$$



Vamos supor que $\theta(t) > 0 \ \forall \ t \neq 0$ e definir

$$t_0 = \inf \{t \in [0, T] \ / \ \theta(t) > 0\}.$$

Notemos que o gráfico de θ é o que está esboçado acima, pois θ é contínua. De fato, seja $t_n \longrightarrow t_0$.

$$\begin{aligned}\theta(t_n) &= \left\| \|u - v\|_{L^r_x} \mathcal{X}_{[0,t_n]}(t_n) \right\|_{L^q_T} \\ &\leq \left\| \|u - v\|_{L^r_x} \right\|_{L^q_T}.\end{aligned}$$

Aplicando o teorema da convergência dominada, obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\theta(t_n) &= \lim_{n\to\infty}\left\| \|u-v\|_{L_x^r}\mathcal{X}_{[0,t_n]}(t_n)\right\|_{L_T^q}\\
&= \left\| \|u-v\|_{L_x^r}\lim_{n\to\infty}\mathcal{X}_{[0,t_n]}(t_n)\right\|_{L_T^q}\\
&= \left\| \|u-v\|_{L_x^r}\mathcal{X}_{[0,t_0]}(t_0)\right\|_{L_T^q}\\
&= \theta(t_0).
\end{aligned}$$

Portanto, a função θ é contínua.

Por consequência, $u(t_0,x) = v(t_0,x) = \psi(x)$. Então, definindo $\tilde{u}(t) = u(t+t_0)$ e $\tilde{v}(t) = v(t+t_0)$, onde $\tilde{u},\tilde{v}$ são respectivamente soluções de

$$\begin{cases} i\tilde{u} + \Delta_x\tilde{u} = \gamma\,|\tilde{u}|^\alpha\,\tilde{u}\\ \tilde{u}(x,t_0) = \psi(x)\end{cases} \tag{4.15}$$

e

$$\begin{cases} i\tilde{v} + \Delta_x\tilde{v} = \gamma\,|\tilde{v}|^\alpha\,\tilde{u}\\ \tilde{v}(x,t_0) = \psi(x).\end{cases} \tag{4.16}$$

Assim, procedendo de forma análoga a (4.14), obtemos

$$\|\tilde{u}-\tilde{v}\|_{L_\delta^q L_x^r} \le C\delta^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\left(\|\tilde{u}\|^\alpha_{L_\delta^q L_x^r} + \|\tilde{v}\|^\alpha_{L_\delta^q L_x^r}\right)\|\tilde{u}-\tilde{v}\|_{L_\delta^q L_x^r},$$

onde $\delta \in [0, T-t_0]$.
Definamos agora

$$\tilde{\theta}(\delta) = \|\tilde{u}\|^\alpha_{L_\delta^q L_x^r} + \|\tilde{v}\|^\alpha_{L_\delta^q L_x^r}.$$

Claramente, $\tilde{\theta}$ é contínua pelos mesmos motivos que θ. Assim, podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\tilde{\theta}(\delta) < 1$, pois $\tilde{\theta}(0) = 0$. Segue que

$$\|\tilde{u}-\tilde{v}\|_{L_\delta^q L_x^r} \le C\delta^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\|\tilde{u}-\tilde{v}\|_{L_\delta^q L_x^r}.$$

Escolhendo $\delta > 0$ menor possível, caso necessário, tal que

$$C\delta^{(1-\frac{N\alpha}{4})} \leq \frac{1}{2},$$

temos que

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^q_\delta L^r_x} \leq \frac{1}{2} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^q_\delta L^r_x}.$$

Logo,

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^q_\delta L^r_x} = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 = \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^q_\delta L^r_x} &= \|u - v\|_{L^q_{t_0+\delta} L^r_x} \\ &= \theta(t_0 + \delta). \end{aligned}$$

Logo, $\theta(t_0 + \delta) = 0$ o que é uma contradição, pois definimos t_0 como o menor dos t tal que $\theta(t) > 0$. Portanto, $\theta(t) = 0$ para todo $t \in [0, T)$, ou seja, $u \equiv v$. □

Teorema 4.2. *Sejam $\gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha < \frac{4}{N}$ e $r = \alpha + 2$. Consideremos (q, r) um par admisível e $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Então,*

1. *$\exists\ T^*(\varphi) > 0$ e uma única solução maximal u em $[0, T^*)$ tal que $u \in L^q_T L^r_x$, $\forall\ T < T^*$*

2. *Alternativa de explosão: uma das duas possibilidades abaixo ocorre*

   - *$T^* = \infty$, isto é, temos uma solução global ou*
   - *$T^* < \infty$ e $\lim\limits_{t \to T^*} \|u(t)\|_{L^2} = \infty$, isto é, temos uma explosão em tempo finito.*

3. *(Dependência Contínua) Seja $T < T^*$. Então, existem $\delta > 0$ e $C > 0$ tais que se $\|\varphi - \psi\|_{L^2} < \delta$, então $T^*(\psi) > T$ e vale*

$$\|u - v\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|u - v\|_{L^q_T L^r_x} \leq C \|\varphi - \psi\|_{L^2}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração de forma sucinta.
1) Basta definir $T^* = \sup \{T > 0\ /\ \exists\ u\ \in\ L^q_T L^r_x$ solução de (4.1)$\}$
2) Vamos supor que $T^* < \infty$ tal que $\exists\ t_n \longrightarrow T^*$ e $M > 0$ tal que

$$\|u(t_n)\|_{L^2} \leq M$$

Considerando $\psi_n = u(t_n)$, obtemos que $\|\psi_n\|_{L^2} \leq M$. Seja $v_n(t)$ uma solução de (4.1) com dado inicial ψ_n. Notemos que $v_n(t)$ está bem definida em $[0, T(M))$, pelo teorema (4.1). Consideremos

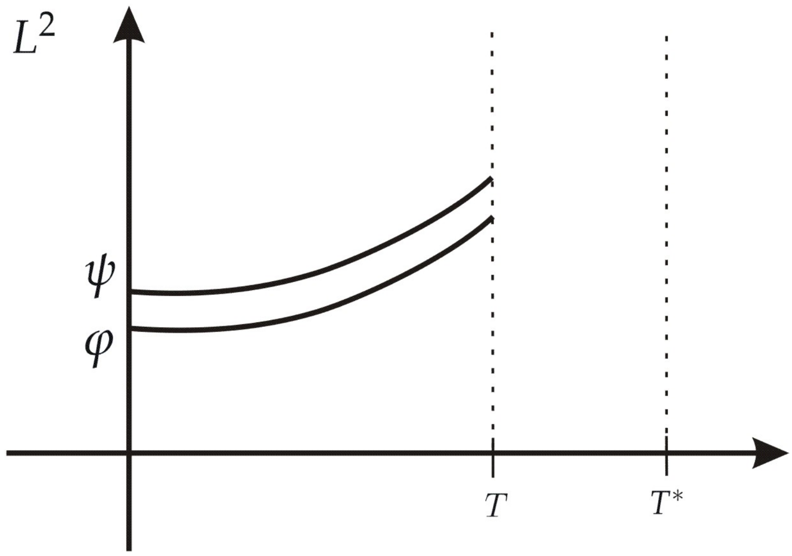
$$\tilde{u}_n(t) = \begin{cases} u(t), & \text{se } t < t_n \\ v_n(t - t_n), & \text{se } t_n \leq t < t_n + T(M). \end{cases}$$

Temos que $\tilde{u}_n(t)$ é solução de (4.1) em $[0, t_n + T(M))$. Usando o fato de que $t_n \longrightarrow T^*$, então existe $n_0 > 1$ tal que $t_{n_0} + T(M) > T^*$. Logo, $\tilde{u}_{n_0}(t)$ é uma solução em $[0, t_{n_0} + T(M))$, o que é uma contradição, pois o intervalo $[0, T^*)$ é maximal. Portanto,

$$T^* = \infty \ ou$$

$$T^* < \infty \ e \ \lim_{t \to T^*} \|u(t)\|_{L^2} = \infty.$$

3) Provaremos agora a dependência contínua das soluções de seus dados iniciais.



Sejam $T < T^*$ e $M = 2 \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{L^2}$.

Considerando $\psi \in L^2$ tal que $\|\psi\|_{L^2} \leq M$, obtemos do teorema 4.1 que existem $K(M) > 0$, $T(M) > 0$ e uma única solução v de (4.1) verificando

$$v(0, x) = \psi(x) \ \ e \ \ \|v\|_{L^q_{T(M)} L^r_x} \leq K(M).$$

Podemos considerar ψ_1 e ψ_2 tais que $\|\psi_j\|_{L^2} \leq M$, onde $j = 1, 2$ e v_1, v_2 são soluções de

(4.1) em $[0, T(M)]$, com dados iniciais ψ_1 *e* ψ_2 respectivamente. Agora, aplicando Strichartz e a desigualdade (4.14), obtemos que

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} &\leq \|S(t)(\psi_1 - \psi_2)\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} \\ &+ |\gamma| \left\| \int_0^T S(t-s) \left(|v_1|^\alpha v_1 - |v_2|^\alpha v_2 \right)(s) ds \right\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} \\ &\leq C_0 \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2_x} + P \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde $P = C_1 T(M)^{\left(1-\frac{N\alpha}{4}\right)} K(M)^\alpha$. Ainda,

$$\|v_1 - v_2\|_{L^q_{T(M)}L^r_x} \leq C T(M)^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|v_1 - v_2\|_{L^q_{T(M)}L^r_x}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|v_1 - v_2\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} &+ \|v_1 - v_2\|_{L^q_{T(M)}L^r_x} \leq C_0 \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2_x} + \\ &+ P' \left(\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} + \|v_1 - v_2\|_{L^q_{T(M)}L^r_x} \right). \end{aligned}$$

onde $P' = C_{\alpha,M} T(M)^{1-\frac{N\alpha}{4}}$.

Escolhendo $T(M)$ sufientemente pequeno tal que $C_{\alpha,M} T(M)^{1-\frac{N\alpha}{4}} \leq \frac{1}{2}$, obtemos que

$$\|v_1 - v_2\|_{L^\infty_{T(M)}L^2_x} + \|v_1 - v_2\|_{L^q_{T(M)}L^r_x} \leq 2C_0 \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2_x} \quad (*)$$

em $[0, T(M)]$.

Vimos que soluções de (4.1) definidas no mesmo intervalo com dados inicias diferentes, têm uma certa dependência contínua dos dados inciais. Agora, provaremos a dependência contínua das soluções para intervalos diferentes com dados inicias próximos.

Fixemos agora a solução u de (4.1) em $[0, T]$. Escolhendo $A = max\{1, 2C_0\}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T \leq nT(M)$. Em seguida, definimos $\delta = \frac{M}{2A^n}$. Sendo u solução em $[0, T]$, temos

$$\|u(0)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2} \leq \frac{M}{2}.$$

Assim, tomando ψ tal que $\|\psi-\varphi\|_{L^2}\le\delta$, então $\|\psi\|_{L^2}\le\|\varphi\|_{L^2}+\delta$. Logo,

$$\|\psi\|_{L^2}\le\frac{M}{2}+\delta\le M.$$

Portanto, pelo teorema (4.1), existe uma solução v com dado inicial ψ no intervalo $[0,T(M)]$.

Considerando o intervalo $[0,\frac{T}{n}]$, onde u e v são soluções de (4.1) com dados iniciais φ e ψ respectivamente, vale a seguinte desigualdade $(*)$:

$$\|u-v\|_{L^\infty_{T/n}L^2_x}+\|u-v\|_{L^q_{T/n}L^r_x}\le A\,\|\psi-\varphi\|_{L^2_x}.$$

Além do mais,

$$\left\|u\left(\frac{T}{n}\right)\right\|_{L^2}\le\frac{M}{2}$$

pela definição de M. Assim,

$$\begin{aligned}\left\|v\left(\frac{T}{n}\right)\right\|_{L^2} &= \left\|v\left(\frac{T}{n}\right)-u\left(\frac{T}{n}\right)\right\|_{L^2}+\left\|u\left(\frac{T}{n}\right)\right\|_{L^2}\\ &\le A\,\|\psi-\varphi\|_{L^2}+\frac{M}{2}\\ &\le A\delta+\frac{M}{2}\le M.\end{aligned}$$

Definimos, então

$$\tilde{\varphi}=u\left(\frac{T}{n}\right),\qquad \tilde{\psi}=v\left(\frac{T}{n}\right)$$

e

$$\tilde{u}(t)=u\left(t+\frac{T}{n}\right),\qquad \tilde{v}(t)=v\left(t+\frac{T}{n}\right)$$

onde $\tilde{u}(t)$ e $\tilde{v}(t)$ são soluções com dados inicias $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}$ respectivamente em $[0,T/n]$. Equivaletemente, significa dizer que u,v estão definidas em $[T/n,2T/n]$ e satifaz a desigualdade

$$\|u-v\|_{L^\infty_{2T/n}L^2_x}+\|u-v\|_{L^q_{2T/n}L^r_x}\le A^2\,\|\psi-\varphi\|_{L^2_x}. \tag{4.18}$$

Repetindo o mesmo argumento n vezes, podemos definir u_i solução em $[(i-1)\frac{T}{n},i\frac{t}{n}]$, onde

$i = 1, 2, 3, ..., n$, tal que

$$\|u_i - v\|_{L^{\infty}_{iT/n}L^2_x} + \|u_i - v\|_{L^q_{iT/n}L^r_x} \leq A^i \|\psi - \varphi\|_{L^2_x}.$$

Assim, pela unicidade podemos redefinir u tal que

$$u\mid_{[(i-1)\frac{T}{n}, i\frac{t}{n}]} = u_i.$$

Logo,

$$\|u - v\|_{L^{\infty}_T L^2_x} + \|u - v\|_{L^q_T L^r_x} \leq C \|\psi - \varphi\|_{L^2_x}$$

□

Portanto, as soluções de (4.1) dependem continuamente dos dados iniciais.

4.2 Teoria local em $H^1(\mathbb{R}^N)$

Nesta seção mostraremos a existência de soluções para o problema de Cauchy (4.1) com dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Isto será útil no estudo das soluções globais em $L^2(\mathbb{R}^N)$, pois necessitamos da existência de soluções em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para podermos aproximar soluções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ atráves de soluções em $H^1(\mathbb{R}^N)$, no momento de obtermos quantidades conservadas.

Teorema 4.3. *Seja $\alpha < \frac{4}{N-2}$. Então, se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, existem $T = T(\|\varphi\|_{H^1}) > 0$ e uma única solução u da equação integral* (4.2) *no intervalo* $[0, T]$, *com*

$$u \in C([0, T], H^1(\mathbb{R}^N)) \subset L^q([0, T], W^{1,r}(\mathbb{R}^N))$$

onde $r = \frac{N(\alpha+2)}{N+\alpha}$, $q = \frac{4(\alpha+2)}{\alpha(N-2)}$ e $W^{1,r}(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$ com derivadas de ordem 1 no sentido das distribuições. Mais ainda, a aplicação $u_0 \longrightarrow u(t)$ é localmente Lipschitz.

Demonstração. Definamos,

$$E = \left\{u \in C([0, T], H^1(\mathbb{R}^N)) \subset L^r([0, T], W^{1,r}(\mathbb{R}^N) \ : \ \|u\|_T < R\right\}$$

onde

$$\|u\|_T = \sup_{[0,T]} \|u\|_{H^1} + \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L_x^r}^q + \|\nabla u(t)\|_{L_x^r}^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

Mostremos que o operador $\Phi : E \longrightarrow E$

$$\Phi(u) = S(t)\varphi + i\gamma \int_0^t S(t-s) \, |u(s)|^\alpha \, u(s) ds.$$

é uma contração . De fato, usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned} \| \, |u|^\alpha \, \nabla u\|_{L_x^{r'}} &\leq C \, \| \, |u|^\alpha \|_{L_x^l} \, \|\nabla u\|_{L_x^r} \\ &= C \, \|u\|_{L_x^{\alpha l}}^\alpha \, \|\nabla u\|_{L_x^r} \, , \end{aligned}$$

onde $\frac{1}{r'} = \frac{1}{l} + \frac{1}{r}$.

Além disso, pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg para $p = \alpha l, \ \theta = 1, \ m = 1, \ j = 0$ temos que

$$\|u\|_{L_x^{\alpha l}}^\alpha \leq \|\nabla u\|_{L_x^r}$$

e

$$\| \, |u|^\alpha \, \nabla u\|_{L_x^{r'}} \leq C \, \|\nabla u\|_{L_x^r}^{\alpha+1} \, ,$$

onde $\frac{1}{\alpha l} = \frac{1}{r} - \frac{1}{N}$, ou seja, $\frac{1}{l} = \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{N}$. Por outro lado,

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{1}{r} - \frac{1}{r} = 1 - \frac{2}{r}$$

Portanto,

$$\frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{N} = 1 - \frac{2}{r} \Longrightarrow \frac{\alpha}{r} = \frac{N + \alpha}{N(\alpha + 2)}$$

Assim,

$$\| \, |u|^\alpha \, u\|_{W^{1,r'}} \leq C \, \|u\|_{W^{1,r}}^{\alpha+1} \qquad (*)$$

Agora, mostraremos que $\Phi(u) \in E$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_T &= \sup_{[0,T]} \|\Phi(u)\|_{H^1} + \left(\int_0^T \|\Phi(u)\|_{L_x^r}^q + \|\nabla \Phi(u)\|_{L_x^r}^q \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \sup_{[0,T]} \|\Phi(u)\|_{H^1} + \left(\int_0^T \left\| (\Phi(u)\|_{L_x^r} + \|\nabla \Phi(u)\|_{L_x^r} \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|\Phi(u)\|_{L_T^\infty H^1} + \|\Phi(u)\|_{L_T^q W^{1,r}}
\end{aligned}$$

Notemos que, utilizando a desigualdade triangular e as estimativas de Strichartz, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L_T^\infty H^1} &\leq \|S(t)\varphi\|_{L_T^\infty H^1} + \left\| \int_0^T S(t-s).\gamma \, |u|^\alpha \, u ds \right\|_{L_T^\infty H^1} \\
&\leq C \|\varphi\|_{H^1} + C \| \, |u|^\alpha \, u\|_{L_T^{q'} W^{1,r'}} .
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{L_T^q W^{1,r}} &\leq \|S(t)\varphi\|_{L_T^q W^{1,r}} + \left\| \int_0^T S(t-s).\gamma \, |u|^\alpha \, u ds \right\|_{L_T^q W^{1,r}} \\
&\leq C \|\varphi\|_{H^1} + C \| \, |u|^\alpha \, u\|_{L_T^{q'} W^{1,r'}} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_T &\leq C \|\varphi\|_{H^1} + C \| \, |u|^\alpha \, u\|_{L_T^{q'} W^{1,r'}} \\
&= C \|\varphi\|_{H^1} + C \left(\int_0^T \| |u|^\alpha \, u\|_{W^{1,r'}}^{q'} \, dt \right)^{\frac{1}{q'}}
\end{aligned}$$

Aplicando $(*)$ na desigualdade acima, temos que

$$\|\Phi(u)\|_T \leq C \|\varphi\|_{H^1} + \left(\int_0^T |u\|_{W^{1,r}}^{(\alpha+1)q'} \, dt \right)^{\frac{1}{q'}}$$

Agora, fazendo cálculos análogos da afirmação 4.2, obtemos que

$$\|\Phi(u)\|_T \leq \|\varphi\|_{H^1} + T^\delta \|u\|_{L_T^q W^{1,r}}^{\alpha+1}$$

onde $\delta = 1 - \frac{\alpha+2}{q} = 1 - \frac{\alpha(N-2)}{4}$. Escolhendo $R = 2C\|\varphi\|_{H^1}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)\|_T &\leq \|\varphi\|_{H^1} + T^\delta \|u\|_T^{\alpha+1} \\ &\leq \frac{R}{2} + CT^\delta \frac{R^{\alpha+1}}{(2C)^{\alpha+1}} \\ &\leq R, \end{aligned}$$

desde que, T seja suficientemente pequeno tal que

$$CT^\delta \frac{R^\alpha}{(2C)^{\alpha+1}} \leq \frac{1}{2}$$

Assim, $\Phi : E \longrightarrow E$ é um operador bem definido. Prosseguindo de forma análoga ao teorema 4.1 podemos verificar que Φ é uma contração, logo, pelo teorema do ponto fixo, existe uma solução u tal que $\Phi(u) = u$. A dependência contínua segue análogamente da demonstração do teorema 4.2 □

4.3 Teoria global em $L^2(\mathbb{R}^N)$

Observamos que, os resultados da seção 4.1 mostraram a boa colocação local em $L^2(\mathbb{R}^N)$ para o problema de Cauchy (4.1). Uma pergunta a ser feita: Será que existem soluções globais em $L^2(\mathbb{R}^N)$? A resposta é sim. O teorema seguinte mostrará essa afirmação.

Teorema 4.4. *Sejam $\gamma \in \mathbb{R}$ e u satisfazendo os teoremas* (4.1) *e* (4.2). *Então,*

$$\|u(t,x)\|_{L^2} = \|\varphi(x)\|_{L^2} \quad \forall\ t\ \in\ [0, T^*)$$

Antes da prova do teorema iremos mostrar que a solução para o problema (4.1) pode ser aproximada por soluções com dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^N)$, pois soluções neste espaço são mais regulares. Definamos o seguinte operador.

Dado $\epsilon > 0$, o operador J_ϵ é definido em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$

$$J_\epsilon u = (I - \epsilon\Delta)^{-1} u \tag{4.19}$$

com domínio em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para $g(u) = \gamma |u|^\alpha u$, defini-se $g_\epsilon(u_\epsilon) = J_\epsilon g(J_\epsilon u)$. Logo, pelo teorema 4.1, existe $T = T(\|\varphi\|_{L^2})$ e $u_\epsilon = J_\epsilon u_\epsilon$ em $[0,T]$ tal que

$$\begin{cases} i\,(u_\epsilon)_t + \Delta_x u_\epsilon = g_\epsilon(u_\epsilon) \\ u_\epsilon(x,0) = \varphi(x). \end{cases} \tag{4.20}$$

onde $J_\epsilon u_\epsilon \in L^q_T L^r_x$ e (q,r) são admissíveis. Daí, segue o seguinte fato:

$$H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \Rightarrow L^{r'}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^N)$$

assim,

$$g(J_\epsilon u_\epsilon) \in L^{q'}_T L^{r'}_x \hookrightarrow L^{q'}_T H^{-1}_x$$

e

$$g_\epsilon = J_\epsilon g(J_\epsilon u_\epsilon) \in L^{q'}_T H^1_x.$$

Portanto,

$$\begin{cases} i\,(u_\epsilon)_t + \Delta_x u_\epsilon = g_\epsilon(u_\epsilon) = f \ \in \ L^{q'}_T H^1_x \\ u_\epsilon(x,0) = \varphi(x) \ \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{4.21}$$

Observemos que, se u é solução de

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_x u = f(t,x) \\ u(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

então, $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$. De fato, usando a estimativa de Strichartz temos que

$$\|u\|_{L^\infty_t L^2_x} \leq C\,\|f\|_{L^{q'}_t L^{r'}_x},$$

onde (q,r) são admissíveis e $f \in L^{q'}_t L^{r'}_x$.

Consideremos uma seqüência $f_n \in C^\infty_c(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ tal que $f_n \longrightarrow f$ em $L^{q'}_t L^{r'}_x$. Defina

$$u_n = i\int_0^t S(t-s) f_n(s,x)ds$$

Assim, pela estimativa de Strichartz temos que $u_n \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$. Aplicando novamente a estimativa de Strichartz,

$$\begin{aligned}\|u-u_n\|_{L_t^\infty L_x^2} &= \left\|i\int_0^t S(t-s)(f_n-f)(s,x)ds\right\|_{L_t^\infty L_x^2}\\ &\leq C\|f_n-f\|_{L_t^{q'}L_x^{r'}} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Portanto, $u_n \longrightarrow u$. Logo, $u \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^N))$.

Agora, podemos provar o teorema 4.4.

Demonstração. Inicialmente, provaremos o resultado para u_ϵ solução de (4.21) em um intervalo suficientemente pequeno. Notemos que sendo u_ϵ solução de (4.21), temos a seguinte equação

$$i\,(u_\epsilon)_t + \Delta_x u_\epsilon = g_\epsilon(u_\epsilon) \tag{4.23}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $\overline{iu_\epsilon}$, obtemos

$$i\,(u_\epsilon)_t\,\overline{iu_\epsilon} + \overline{iu_\epsilon}\Delta_x u_\epsilon = \overline{iu_\epsilon}g_\epsilon(u_\epsilon) \tag{4.24}$$

Integrando a equação acima encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} i\,(u_\epsilon)_t\,\overline{iu_\epsilon}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Delta_x u_\epsilon\overline{iu_\epsilon}dx = \int_{\mathbb{R}^N} g_\epsilon(u_\epsilon)\overline{iu_\epsilon}dx \tag{4.25}$$

Agora, aplicando a identidade de Plancherel

$$\int_{\mathbb{R}^N} i\,(\hat{u}_\epsilon)_t\,\overline{\widehat{iu_\epsilon}}dx + \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\Delta_x u_\epsilon}\overline{\widehat{iu_\epsilon}}dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat{g}_\epsilon(u_\epsilon)\overline{\widehat{iu_\epsilon}}dx \tag{4.26}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{1+|\xi|^2}i\,(\hat{u}_\epsilon)_t\,(1+|\xi|^2)\overline{\widehat{iu_\epsilon}}dx &+ \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{1+|\xi|^2}\widehat{\Delta_x u_\epsilon}(1+|\xi|^2)\overline{\widehat{iu_\epsilon}}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{1+|\xi|^2}\hat{g}_\epsilon(u_\epsilon)(1+|\xi|^2)\overline{\widehat{iu_\epsilon}}dx\end{aligned}$$

Tomando a parte real da igualdade acima, obtemos

$$\langle i\,(u_\epsilon)_t\,, iu_\epsilon\rangle_{H^{-1},H^1} \;+\; \langle \Delta_x u_\epsilon, iu_\epsilon\rangle_{H^{-1},H^1} = \langle g_\epsilon(u_\epsilon), iu_\epsilon\rangle_{H^{-1},H^1}$$

Observemos que

$$\langle \Delta_x u_\epsilon, iu_\epsilon \rangle_{H^{-1},H^1} = -i \langle \nabla u_\epsilon, \nabla u_\epsilon \rangle_{L^2} = i \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\langle g_\epsilon(u_\epsilon), iu_\epsilon \rangle_{H^{-1},H^1} &= \langle J_\epsilon g(J_\epsilon u_\epsilon), iu_\epsilon \rangle_{H^{-1},H^1} \\
&= \langle g(J_\epsilon u_\epsilon), iJ_\epsilon(u_\epsilon) \rangle_{H^{-1},H^1} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\gamma| \, |J_\epsilon(u_\epsilon)|^\alpha \, J_\epsilon(u_\epsilon)(-i)J_\epsilon(u_\epsilon) dx \\
&= -i \, |\gamma| \int_{\mathbb{R}^N} |J_\epsilon(u_\epsilon)|^{\alpha+2} \, dx.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{d}{dt} |u_\epsilon|^2 \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |u_\epsilon| \, (u_\epsilon)_t dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} iu_\epsilon i(u_\epsilon)_t dx \\
&= -\langle i \, (u_\epsilon)_t \, , iu_\epsilon \rangle_{H^{-1},H^1} \\
&= \langle i\Delta_x u_\epsilon, iu_\epsilon \rangle_{H^{-1},H^1} - \langle g_\epsilon(u_\epsilon), iu_\epsilon \rangle_{H^{-1},H^1} \\
&= -i \, \|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 + i \, |\gamma| \int_{\mathbb{R}^N} |J_\epsilon(u_\epsilon)|^{\alpha+2} \, dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_\epsilon\|_{L^2}^2 + i \left(\|\nabla u_\epsilon\|_{L^2}^2 - |\gamma| \int_{\mathbb{R}^N} |J_\epsilon(u_\epsilon)|^{\alpha+2} \, dx \right) = 0$$

e olhando para a parte real, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \|u_\epsilon(t,x)\|_{L^2}^2 = 0$$

Então,

$$\|u_\epsilon(t,x)\|_{L^2} = \|u_\epsilon(0,x)\|_{L^2} = \|\varphi(x)\|_{L^2} \tag{4.27}$$

Mostraremos que $u_\epsilon \longrightarrow u$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$ em $L^\infty(I, L^2(\mathbb{R}^N))$. Notemos que

$$u_\epsilon = S(t)\varphi + i\int_0^t S(t-s)g_\epsilon(u_\epsilon)ds. \tag{4.28}$$

Assim,

$$u - u_\epsilon = i\int_0^t S(t-s)\left(g(u) - g_\epsilon(u_\epsilon)\right)ds. \tag{4.29}$$

Aplicando Strichartz, temos que

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq C\,\|g(u) - g_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \tag{4.30}$$

e

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^q_T L^r_x} \leq C\,\|g(u) - g_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \tag{4.31}$$

Desta maneira, temos que

$$\|u - u_\epsilon\|_{L^\infty_T L^2_x} + \|u - u_\epsilon\|_{L^q_T L^r_x} \leq C\,\|g(u) - g_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \tag{4.32}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|g(u) - g_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} &= \|g_\epsilon(u_\epsilon) - g_\epsilon(u) + g_\epsilon(u) - J_\epsilon(g(u)) + J_\epsilon(g(u)) - g(u)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \\
&\leq \|g_\epsilon(u_\epsilon) - g_\epsilon(u)|\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} + \|g_\epsilon(u) - J_\epsilon(g(u))\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \\
&+ \|J_\epsilon(g(u)) - g(u)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \\
&= I + II + III.
\end{aligned}$$

Iremos calcular cada uma das normas precedentes. Aplicando a afirmação (4.3), temos que

$$I = \|g_\epsilon(u_\epsilon) - g_\epsilon(u)|\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \leq CT^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\left(\|u_\epsilon\|^\alpha_{L^q_T L^r_x} + \|u\|^\alpha_{L^q_T L^r_x}\right)\|u_\epsilon - u\|_{L^q_T L^r_x}$$

Tomando T suficientemente pequeno tal que

$$CT^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\left(\|u_\epsilon\|^{\alpha}_{L^q_T L^r_x}+\|u\|^{\alpha}_{L^q_T L^r_x}\right)\leq\frac{1}{2},$$

segue que

$$I=\|g_\epsilon(u_\epsilon)-g_\epsilon(u)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}\leq\frac{1}{2}\|u_\epsilon-u\|_{L^q_T L^r_x} \tag{4.33}$$

Por outro lado, $J_\epsilon(u)\longrightarrow u$ quando $\epsilon\longrightarrow 0$, pela proposição 1.4. Portanto, pelo teorema da convergência dominada

$$\begin{aligned} II=\|g_\epsilon(u)-J_\epsilon(g(u))\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} &= \|J_\epsilon(g(J_\epsilon u)-J_\epsilon(g(u))\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}\\ &= \|J_\epsilon\left(g(J_\epsilon u)-g(u)\right)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}\\ &\stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

Mais ainda,

$$III=\|J_\epsilon(g(u))-g(u)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x}\stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}0$$

Seja $a_\epsilon=II+III$, então

$$\|g(u)-g_\epsilon(u_\epsilon)\|_{L^{q'}_T L^{r'}_x} \leq \frac{1}{2}\|u_\epsilon-u\|_{L^q_T L^r_x}+a_\epsilon$$

para T suficientemente pequeno. Logo,

$$\|u-u_\epsilon\|_{L^\infty_T L^2_x}+\|u-u_\epsilon\|_{L^q_T L^r_x}\leq\frac{1}{2}\|u_\epsilon-u\|_{L^q_T L^r_x}+a_\epsilon$$

Fazendo $\epsilon\longrightarrow 0$ obtemos que $u_\epsilon\longrightarrow u$.

Portanto, pela equação (4.27) temos que

$$\|u(t,x)\|_{L^2}=\|\varphi(x)\|_{L^2} \tag{4.34}$$

para T suficientemente pequeno.

Finalmente, no caso geral em que $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^N)$. Iremos aproximar $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^N)$ por seqüência

$\varphi_n \in H^1(\mathbb{R}^N)$, ou seja, $\varphi_n \xrightarrow{L^2} \varphi$, pois $H^1(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos u_n solução de (4.1) com dados iniciais φ_n. Assim, pela densidade, temos que $u_n \xrightarrow{L^2} u$. Então,

$$
\begin{array}{ccc}
\|u_n(t,x)\|_{L^2} = & \|\varphi_n(x)\|_{L^2} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle n\longrightarrow\infty} & \Big\downarrow{\scriptstyle n\longrightarrow\infty} \\
\|u(t,x)\|_{L^2} = & \left\|\varphi_(x)\right\|_{L^2}
\end{array}
$$

para T suficientemente pequeno. Aplicando o mesmo argumento de extensão usado para dependência contínua, obtemos

$$\|u(t,x)\|_{L^2} = \|\varphi(x)\|_{L^2} \quad \forall\ t \in [0, T^*).$$

Portanto, a existência global de soluções segue da alternativa de explosão. Finalmente, podemos estender as soluções locais para soluções globais. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] A. Friedman; *Partial Differential Equations*,Holt, Rinehart and Winston, New York,1976.

[2] Cardoso, David C. S.; *O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, Maceió-AL, 2005.

[3] Cazenave, Thierry; *Semilinear Schrödinger Equation*, American Mathematical Society, 2003

[4] Conway, J. B., *Functions of One Complex Variable I* - Second Edition. Springer-Verlag, 1978.

[5] Iório, Rafael ; Iório, Valéria de Magalhães; *Equações Diferenciais Parciais: Uma introdução*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro,1988.

[6] Kreyszig, E.; *Introductory Functional Analysis with Applications.*, John Wiley e Sons, New York, 1978

[7] Linares, Felipe; Ponce, Gustavo; *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Publicações Matemáticas, Impa, Rio de Janeiro,2ª edição 2006.

[8] Rudin, Walter; *Real and Complex Analysis*, TMH Edition, New York, 2ª edição, 1974.