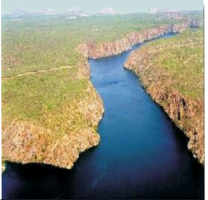
Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante

Sofia Carolina Costa Melo



Rio São Francisco

Maceió
20 de Dezembro de 2005

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Universidade Federal de Alagoas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado em Matemática
Dissertação de Mestrado

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante

Sofia Carolina da Costa Melo

Maceió, Brasil
Dezembro de 2005

Estabilidade de Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante

Sofia Carolina da Costa Melo

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 20 de dezembro de 2005 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Fernando Codá Marques

Prof. Dr. Hilário Alencar (Orientador)

Prof. Dra. Walcy Santos

Ao meu pai Antonio (*in memoriam*).

Agradecimentos

Primeiramente, a Deus pela luz diária.

Ao Professor Hilário Alencar por muitas coisas, dentre elas, pela grande amizade nesses seis anos de convivência, pelo companheirismo em momentos difíceis da minha vida, pela confiança depositada em mim, pelas oportunidades acadêmicas, por me mostrar toda a dedicação e amor pela matemática e, finalmente, por ter me ajudado a crescer como pessoa e como profissional.

Ao Professor Manfredo do Carmo pelas apropriadas conversas matemáticas.

À Professora Walcy Santos pelas valiosas sugestões dadas para a melhoria deste trabalho e pelas palavras encorajadoras para a próxima fase da minha vida acadêmica.

Ao Professor Fernando Codá Marques pela sugestão dada para o apêndice deste trabalho.

Aos Professores Krerley Oliveira e Adán Corcho pela contribuição na minha formação acadêmica.

Ao colega Claudemir Leandro pela ajuda dada neste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas pelo apoio financeiro.

E, finalmente, a minha mãe pela força de todos os dias.

Resumo

Descrevemos um resultado obtido por João Lucas Barbosa e Manfredo Perdigão do Carmo, publicado na Mathematische Zeitschrift em 1984, sobre estabilidade de hipersuperfícies com curvatura média constante não-nula imersas no espaço Euclidiano de dimensão $n+1$. A motivação principal deste trabalho é a demonstração do seguinte resultado:

Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão n, compacta, orientável e x uma imersão com curvatura média constante não-nula da variedade M no espaço Euclidiano de dimensão $n+1$. Então x é estável se, e somente se, a imagem de M por x é uma esfera redonda.

Fazemos a demonstração deste resultado em duas partes, na primeira mostramos, através de um exemplo, que a esfera redonda é uma hipersuperfície estável. Na segunda parte, demonstramos que todos os pontos de uma hipersuperfície com essas características são umbílicos e pela compacidade da hipersuperfície, é a esfera redonda.

Observamos que muitos outros trabalhos se originam do artigo de Barbosa e do Carmo dentre eles, citamos dois trabalhos, um de Barbosa, do Carmo e Eschenburg de 1988 e o outro de Wente de 1991. O primeiro, trata de uma generalização do Teorema de Barbosa e do Carmo, e o segundo, traz uma nova demonstração do mesmo resultado usando uma variação paralela.

Índice

Introdução

Este trabalho descreve um resultado obtido por João Lucas Barbosa e Manfredo Perdigão do Carmo, publicado na Mathematische Zeitschrift em 1984, sobre estabilidade de hipersuperfícies com curvatura média constante não-nula imersas no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$. A motivação principal deste trabalho é a demonstração do seguinte resultado:

Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não-nula. Então x é estável se, e somente se, $x(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera redonda $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Inicialmente, observamos que a condição de x ter curvatura média constante, H, é equivalente ao fato conhecido de x ser ponto crítico de um problema variacional. Mais precisamente, a imersão x tem curvatura média constante não-nula se, e somente se, x é um ponto crítico da n-área $A(t)$ para todas as variações com suporte compacto x_t de x, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, $x_0 = x$, que deixam constante o "volume" $V(t)$ de x_t, isto é, $V(t) = V(0)$ para qualquer $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Os detalhes de tais fatos serão vistos na seção 1.2 .

Problemas variacionais do tipo acima são chamados problemas isoperimétricos. Um procedimento padrão para determinar os pontos críticos destes problemas é, em analogia com os multiplicadores de Lagrange, procurar os pontos críticos da função J, dada por

$$J(t) = A(t) + \lambda V(t),$$

onde λ é constante e as variações x_t de x possuem suporte compacto.

No entanto, quando calcularmos a segunda variação, os dois problemas não estão distantes de uma certa equivalência. Tal fato tinha sido indicado no texto clássico Calculus of Variations, ver [3]. Quando $\lambda = nH$, os pontos críticos para ambos os problemas são os mesmos. Assim encontramos uma relação entre eles da seguinte forma: $A''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto se, e somente se, $J''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto e que satisfazem a hipótese adicional de ter média zero, ou seja,

$$\int_{M^n} f dM = 0,$$

onde f é a componente normal do vetor variacional. Ver Proposição 2.2.2.

A definição de estabilidade, que será usada neste trabalho, está associada ao fato da segunda variação $A''(0)$ ser não negativa para variações de suporte compacto. Então, pelas considerações acima, temos que, para uma imersão x com curvatura média constante não-nula ser estável, basta que $J''(0) \geq 0$ para variações de suporte compacto que satisfazem a condição de média zero. Neste trabalho a hipótese de média zero é fundamental porém, em Mori [8], podemos encontrar uma definição de estabilidade sem usar a condição de média zero. Assim, com a nossa definição de estabilidade, a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é estável, como demonstrado no Exemplo 2.2.1. Daí, temos que se $x(M^n)$ é a esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ então x é estável. A recíproca dessa afirmação, ou seja, a completude da demonstração do resultado principal, depende de um critério de estabilidade, dado por uma fórmula integral. Além disso, vários resultados preliminares são usados antes de concluírmos esta prova.

Observamos que, em [7], Hsiang, Teng e Yu apresentaram exemplos de hipersuperfícies não esféricas $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 2$, que tem curvatura média constante. Claramente, pelo resultado principal, estas imersões são exemplos de hipersuperfícies não-estáveis.

O trabalho está dividido em três capítulos. No capítulo 1 abordamos os conceitos de curvatura média, obtendo resultados que serão fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Iniciaremos o capítulo 2 com os conceitos de variação de uma imersão, área e volume de um certo domínio. Logo em seguida, demonstraremos as fórmulas da primeira variação (área) e da primeira variação do volume. Apresentaremos os problemas variacionais e o Teorema 2.2.1. Também neste capítulo, introduziremos o conceito de estabilidade e mostraremos uma relação entre $A''(0)$ e $J''(0)$ com a hipótese adicional de média zero. Usando este fato, mostraremos que a esfera é estável. O capítulo 3 contém resultados sobre a função suporte de x e a demonstração do teorema principal. Finalmente, usando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz, escreveremos um apêndice com a demonstração do cálculo do primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano na esfera.

Depois da adequada definição de hipersuperfícies estáveis, dada por Barbosa e do Carmo, ocorreu um grande avanço na linha de estabilidade. Dentre os vários trabalhos que usam o artigo [1], vejamos alguns resultados.

Em 1987, ver [10], Alexandre Silveira considerou uma variedade M completa não-compacta de dimensão 2 e mostrou que, se $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão com curvatura média constante estável, então $x(M) \subset \mathbb{R}^3$ é um plano.

Em [2], João Lucas Barbosa, Manfredo do Carmo e Jost Eschenburg generalizaram o Teorema de Barbosa-do Carmo, a saber:

Sejam $\bar{M}^{n+1}(c)$ uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional c e $x : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$ uma imersão de uma variedade diferenciável M^n com curvatura média constante. Então x é estável se, e somente se, $x(M^n) \subset \bar{M}^{n+1}(c)$ é a esfera geodésica.

Ernst Heintze, ver [6], usando estimativas do primeiro autovalor do Laplaciano, demonstrou o Teorema de Barbosa-do Carmo no caso em que $\bar{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$.

No ano de 1991, Henry Wente, no artigo [11], deu uma prova alternativa do Teorema de Barbosa-do Carmo. Ele exibiu uma variação paralela da imersão $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

que preserva volume, permitindo calcular a segunda variação da área $A''(0)$.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar que são inúmeros os trabalhos envolvendo o conceito de estabilidade dado por Barbosa e do Carmo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos alguns conceitos e resultados básicos que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho. Começaremos com os conceitos de curvatura média e segunda forma fundamental, posteriormente, apresentaremos alguns resultados. Parte substancial desse capítulo encontra-se em [5].

Sejam M^n uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$ e $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Denotemos por $\langle , \rangle$ a métrica em $\mathbb{R}^{n+1}$ e, associada a esta métrica, seja $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana em $\mathbb{R}^{n+1}$. Considere em M^n a métrica induzida por x e ∇ a conexão Riemanniana de M^n. Lembremos que, se X e Y são campos locais em M^n, obtemos

$$\nabla_X Y = \left(\overline{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y}\right)^T,$$

onde $\bar{X}$ e $\bar{Y}$ são as extensões locais, respectivamente, de X e Y a $\mathbb{R}^{n+1}$ e T, como expoente, significa a componente tangente do vetor. Indicaremos, para simplificar a notação, a extensão do campo local X por X.

Consideremos $\chi(M^n)$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis em M^n e $\chi(M^n)^\perp$ o espaço dos campos de vetores diferenciáveis normais à M^n. A ***segunda forma fundamental*** da imersão x é a aplicação $B : \chi(M^n) \times \chi(M^n) \longrightarrow \chi(M^n)^\perp$, definida por

$$B(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, \quad \forall X, Y \in \chi(M^n).$$

Visto que, para todo $p \in M^n$, B é uma aplicação bilinear simétrica, então, para cada vetor unitário N normal à M^n em p, podemos associá-la a uma aplicação linear auto-adjunta $S_N : T_pM^n \longrightarrow T_pM^n$, dada por

$$\langle S_N(X), Y \rangle = \langle B(X,Y), N \rangle, \quad \forall X, Y \in T_pM^n,$$

onde T_pM^n representa o espaço tangente à M^n em p.

Daí, vamos definir a ***curvatura média*** H da imersão $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$H = \frac{1}{n} \mathrm{tr}\,(S_N). \tag{1.1}$$

Aqui $\operatorname{tr}(S_N)$ significa o traço da matriz da aplicação S_N.

Agora, vamos escrever a norma da segunda forma fundamental por

$$\|B\|^2 = \operatorname{tr}\left(S_N(S_N)^t\right),$$

onde $(S_N)^t$ representa a transposta da matriz associada a aplicação linear S_N.

Seja $\{x_1, ..., x_n\}$ uma base ortonormal de $\chi(M^n)$ de forma que diagonalize a matriz (S_N). Chamamos de ***curvaturas principais*** de x os números reais $k_1, ..., k_n$, tais que

$$S_N(x_i) = k_i x_i.$$

Assim a matriz da aplicação S_N na base $\{x_1, ..., x_n\}$ é

$$(S_N) = (\delta_{ij} k_i),$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Portanto, reescrevendo $\|B\|^2$ e nH em termos das curvaturas principais, temos

$$\|B\|^2 = \operatorname{tr}(S_N(S_N)^t) = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \qquad \text{e} \qquad nH = \operatorname{tr}(S_N) = \sum_{i=1}^{n} k_i. \tag{1.2}$$

Inicialmente, vamos expressar a norma da segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão x em coordenadas.

Lema 1.0.1. *Sejam $\{e_1, ..., e_n\}$ um campo de vetores ortonormais definidos numa vizinhança V de $p \in M^n$ e $N \in \chi(M^n)^\perp$. Então*

(i) $\|B\|^2(p) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N \right\rangle\right)^2(p) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle (p);$

(ii) $nH(p) = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(p) \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_k, N \right\rangle$, $\forall\ p \in V$. *Aqui $g^{ik}(p)$ são as entradas da matriz inversa da matriz $(g_{ik}(p)) = (\langle e_i, e_k \rangle)(p)$.*

Demonstração. (i) Sejam $N \in \chi(M^n)^\perp$ e $X, Y \in \chi(M^n)$. Então $\langle N, Y \rangle = 0$. Isto implica que

$$\left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_X N, Y \right\rangle.$$

Daí

$$\langle S_N(X), Y \rangle = \langle B(X,Y), N \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle = \left\langle -\overline{\nabla}_X N, Y \right\rangle, \tag{1.3}$$

pois $\langle B(X,Y), N \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y - \nabla_X Y, N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y - (\nabla_X Y)^T, N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, N \right\rangle$.

Visto que $S_N(X)$ é um campo vetorial tangente à M^n, podemos escrever

$$S_N(X) = -\overline{\nabla}_X N.$$

Representamos a aplicação linear auto-adjunta S_N na base $\{e_1, ..., e_n\}$ pela matriz

$$(S_N) = \left(\left\langle -\overline{\nabla}_{e_k} N, e_j \right\rangle\right).$$

Assim $(S_N(S_N)^t) = (c_{ki})$, onde $c_{ki} = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, e_i \right\rangle$.

Logo

$$\|B\|^2 = \operatorname{tr}\left(S_N(S_N)^t\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, e_i \right\rangle. \tag{1.4}$$

Sabemos que $\langle N, e_i \rangle = 0$ implica

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, e_i \right\rangle = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_j} e_i \right\rangle.$$

Daí, usando (1.3) na igualdade acima, tem-se

$$\begin{aligned} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} N, e_i \right\rangle &= -\langle B(e_j, e_i), N \rangle \\ &= -\langle B(e_i, e_j), N \rangle \\ &= -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Desta forma, substituindo (1.5) em (1.4), temos que

$$\|B\|^2 (p) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle\right)^2 (p).$$

Agora, como $\langle N, N \rangle = 1$, então

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = 0. \tag{1.6}$$

Ou seja, $\overline{\nabla}_{e_i} N$ é tangente à M^n e pode ser escrito da forma

$$\overline{\nabla}_{e_i} N = \sum_{k=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle e_k.$$

Finalmente, vemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle (p) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j,k=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle \langle e_j, e_k \rangle \right) (p) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle\right)^2 (p). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Portanto

$$\|B\|^2(p) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle (p).$$

(ii) Considerando $S_N(e_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j$, temos

$$(S_N) = \left(\left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, e_i \right\rangle \right).$$

Daí, $\mathrm{tr}\,(S_N) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Logo

$$\langle S_N(e_i), e_k \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, e_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_{jk}.$$

Assim

$$a_{ii} = \sum_{k=1}^{n} g^{ik} \langle S_N(e_i), e_k \rangle .$$

Usando (1.1) e a definição de S_N, obtemos

$$nH = \mathrm{tr}\,(S_N) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} \langle S_N(e_i), e_k \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} \langle B(e_i, e_k), N \rangle = \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_k, N \right\rangle .$$

■

Agora, sejam M^n uma variedade Riemanniana e $p \in M^n$. Um ***referencial geodésico*** de p é o campo de vetores ortonormais $\{e_1, ..., e_n\} \in \chi(M^n)$ definidos numa vizinhança $V \subset M^n$ de p, tal que $\nabla_{e_i} e_j(p) = 0$, $\forall i, j = 1, ..., n$.

O próximo resultado nos fornece mais uma relação em coordenadas para a norma da segunda forma fundamental.

Proposição 1.0.1. *Sejam $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e $\{e_1, ..., e_n\}$ um campo de vetores ortonormais definidos numa vizinhança de $p \in M^n$. Então*

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle (p) = - \|B\|^2 (p).$$

Além disso, se a curvatura média H é constante e $\{e_1, ..., e_n\}$ é um referencial geodésico de $p \in M^n$, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle (p) = 0, \quad \forall k = 1, ..., n.$$

Demonstração. Derivando a equação (1.6),

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} N \right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle. \tag{1.8}$$

Daí, substituindo (1.7) em (1.8) vemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = -\sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_j \right\rangle^2.$$

Logo, pelo item (i) do Lema 1.0.1, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, N \right\rangle = -\|B\|^2.$$

Agora, provaremos a última afirmação da Proposição 1.0.1. Com efeito, sabemos que

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle.$$

Então, calculando $e_i \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle = -e_i \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle$, encontramos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle = -\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle - \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle. \tag{1.9}$$

Sabemos que $\left(\overline{\nabla}_{e_i} e_k\right)^T = (\nabla_{e_i} e_k)$. Como o referencial é geodésico, então $\left(\overline{\nabla}_{e_i} e_k\right)^T = 0$. Usando este fato e observando que $\overline{\nabla}_{e_i} N \in \chi(M^n)$, obtemos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_k\right)^T + \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_k\right)^N \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_k\right)^N \right\rangle = 0.$$

Segue-se, por (1.9),

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle (p) = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle (p).$$

Visto que a segunda forma fundamental é simétrica e o espaço Euclidiano possui curvatura seccional nula, temos, respectivamente,

$$\overline{\nabla}_{e_i} e_k(p) = \overline{\nabla}_{e_k} e_i(p) \quad \text{e} \quad \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_k} e_i(p) = \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_i} e_i(p).$$

Assim

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle (p) &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} e_k \right\rangle (p) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_k} e_i \right\rangle (p) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p).
\end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle (p) = -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle (p). \tag{1.10}$$

Agora, sabendo que $nH = \operatorname{tr}(S_N)$ e que cada entrada da matriz (S_N) é dada por

$$\langle S_N(e_i), e_j \rangle = \langle B(e_i, e_j), N \rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_j, N \right\rangle,$$

podemos escrever nH da seguinte forma:

$$nH = \sum_{i=1}^{n} \langle S_N(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N \right\rangle. \tag{1.11}$$

Usando o fato que H é constante, obtemos

$$\begin{aligned}
e_k \left(\left\langle N, \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle \right) &= e_k (nH) \\
\left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle + \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle &= 0 \\
\left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle &= -\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_k} \left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Finalmente, substituindo a expressão acima em (1.10), vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} N, e_k \right\rangle (p) &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle (p) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\overline{\nabla}_{e_i} e_i \right)^T + \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_i \right)^N \right) \right\rangle (p) \\
&= \left\langle \overline{\nabla}_{e_k} N, \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_i \right)^N \right\rangle (p) = 0,
\end{aligned}$$

pois $\overline{\nabla}_{e_i} N$ é tangente à M^n em p.

■

Mostraremos agora uma relação entre a norma da segunda forma fundamental e a curvatura média da imersão x.

Lema 1.0.2. *Sejam $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão e $p \in M^n$. Então*

$$\|B\|^2 (p) \geq nH^2(p).$$

Além disso, a igualdade ocorre em p se, e somente se, p é um ponto umbílico.

Demonstração. Primeiramente, afirmamos que

$$\sum_{i<j}^{n}\left(k_i^2+k_j^2\right)=(n-1)\sum_{i=1}^{n}k_i^2. \tag{1.12}$$

Provaremos a afirmação usando indução finita. De fato, para $n=2$,

$$\left(k_1^2+k_2^2\right)=(2-1)\left(k_1^2+k_2^2\right).$$

Agora, vamos supor que a igualdade (1.12) seja verdadeira para $n=s$. Assim

$$\sum_{i<j}^{s}\left(k_i^2+k_j^2\right)=(s-1)\sum_{i=1}^{s}k_i^2.$$

Somando $\sum_{i<j}^{s+1}\left(k_i^2+k_j^2\right)$ em ambos os membros da equação acima, encontramos

$$\sum_{i<j}^{s+1}\left(k_i^2+k_j^2\right)+\sum_{i<j}^{s}\left(k_i^2+k_j^2\right)=\sum_{i<j}^{s+1}\left(k_i^2+k_j^2\right)+(s-1)\sum_{i=1}^{s}k_i^2,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\sum_{i<j}^{s+1}\left(k_i^2+k_j^2\right) &= (s-1)\sum_{i=1}^{s}k_i^2+\sum_{i<j}^{s+1}\left(k_i^2+k_j^2\right)-\sum_{i<j}^{s}\left(k_i^2+k_j^2\right)\\ &= s\sum_{i=1}^{s+1}k_i^2.\end{aligned}$$

Logo (1.12) também é verdadeira para $n=s+1$. Portanto verdadeira para todo n, provando nossa afirmação.

Com isso, voltaremos a demonstração do Lema.

Tomando $k_1,\ldots,k_n$ as curvaturas principais de x em $p\in M^n$, então, por (1.2), podemos escrever

$$\begin{aligned}\|B\|^2-(nH)^2 &= \sum_{i=1}^{n}k_i^2-\left(\sum_{j=1}^{n}k_j\right)^2\\ &= -2\sum_{i<j}^{n}k_ik_j. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Sabemos que,

$$\sum_{i<j}^{n}(k_i-k_j)^2=\sum_{i<j}^{n}\left(k_i^2+k_j^2\right)-\sum_{i<j}^{n}2k_ik_j.$$

Então, substituindo as expressões (1.12) e (1.13) na equação acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{i<j}^{n} \left(k_i - k_j\right)^2 (p) &= (n-1)\sum_{i=1}^{n} k_i^2(p) - \sum_{i<j}^{n} 2k_ik_j(p) \\
&= (n-1)\left\|B\right\|^2 (p) + \left\|B\right\|^2 (p) - n^2H^2(p) \\
&= n\left(\left\|B\right\|^2 (p) - nH^2(p)\right).
\end{aligned}
\tag{1.14}
$$

Daí, como $\sum_{i<j}^{n} \left(k_i - k_j\right)^2 (p) \geq 0$, temos

$$
\left\|B\right\|^2 (p) \geq nH^2(p).
$$

Usando a expressão (1.14), a igualdade acima ocorre em p se, e somente se, $k_i = k_j$, $\forall i, j$. Isto é, se p for um ponto umbílico. ■

Capítulo 2

Primeira Variação e Problemas Variacionais

Neste capítulo trataremos das fórmulas para a primeira variação da área e de volume, apresentaremos problemas variacionais para hipersuperfícies com curvatura média constante e definiremos estabilidade.

2.1 Primeira Variação

Esta seção aborda a definição de variação para a imersão x e as fórmulas para a primeira variação da área e do volume. Vamos iniciar com um importante conceito que, a partir deste momento, será muito utilizado neste trabalho.

Definição 2.1.1. *Sejam D um domínio relativamente compacto com bordo suave e $\bar{D}$ o fecho deste domínio. Uma* ***variação*** *da imersão $x : \bar{D} \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é uma aplicação $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^∞, para $\epsilon > 0$, tal que*
(i) cada aplicação $x_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, definida por $x_t(p) = X(t, p)$, é uma imersão;
(ii) $x_0 = x$.

Dizemos que x_t é uma ***variação que fixa o bordo*** ∂D, se, para todo $p \in \partial D$, $x_t(p) = x_0(p)$.

Denotaremos por

$$\xi(p) = \frac{\partial x_t(p)}{\partial t}|_{t=0},$$

o ***vetor variação*** de x_t, para $p \in \bar{D}$.

Uma variação é dita ***normal***, se, para todo $p \in \bar{D}$, o vetor variação é da forma $\xi(p) = f(p)N(p)$, onde $f(p)$ é um número real.

Agora, vamos ver a expressão local da métrica $\langle , \rangle^t$ em M^n induzida por x_t. Sejam $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança de $p \in D$ e $\{du_1, ..., du_n\}$ suas respectivas 1-formas locais duais, isto é, para um campo local Y,

$$du_i(Y) = \langle e_i, Y \rangle, \quad i = 1, ..., n.$$

Dados $Y, Z \in \chi(D)$, podemos escrever

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \quad e \quad Z = \sum_{i=1}^{n} z_i e_i.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\langle Y, Z \rangle^t &= \langle dx_t Y, dx_t Z \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} y_i z_j \langle dx_t e_i, dx_t e_j \rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} du_i(Y) du_j(Z) g_{ij}(t) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} (du_i \otimes du_j)(Y, Z)\, g_{ij}(t) \\
&= \left(\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) du_i \otimes du_j \right) (Y, Z),
\end{aligned}$$

onde $g_{ij}(t) = \langle dx_t e_i, dx_t e_j \rangle$ e $(du_i \otimes du_j)(Y, Z) = du_i(Y) du_j(Z)$.

Desta forma, obtemos

$$\langle , \rangle^t = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(t) du_i \otimes du_j.$$

Vejamos que, para cada domínio relativamente compacto $D \subset M^n$, a ***função área*** $A : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por

$$A_D(t) = \int_D dM_t, \tag{2.1}$$

onde dM_t é o elemento de n-área de M^n na métrica induzida por x_t.

Agora vamos definir a função volume num caso mais geral. Seja $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$, $\epsilon > 0$, uma variação da imersão $x : M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$, onde $\bar{M}^{n+1}(c)$ é uma variedade Riemanniana com curvatura seccional c. O volume de M^n é da forma:

$$V_{M^n}(t) = \int_{[0,t] \times M^n} X^* d\bar{M}. \tag{2.2}$$

Aqui $d\bar{M}$ é o elemento de volume na variedade $\bar{M}^{n+1}(c)$.

Particularmente, quando $\bar{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$, temos que a ***função volume*** $V : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ do domínio relativamente compacto $D \subset M^n$ é dada por

$$
\begin{aligned}
V_D(t) &= \int_D dx_1 ... dx_{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \int_D \operatorname{div}(x_1 e_1 + ... + x_{n+1} e_{n+1}) dx_1 ... dx_{n+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \int_{\partial D} \langle x_t, N_t \rangle \, dM_t, \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

onde div representa o divergente do campo e a última igualdade foi obtida pelo Teorema da Divergência.

Dizemos que uma variação ***preserva volume***, se $V_D(t) = V_D(0)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Agora, escrevendo a expressão local do elemento de n-área de M^n na métrica $\langle , \rangle^t$,

$$
dM_t = \sqrt{g(t)} du_1 \wedge ... \wedge du_n = \sqrt{g(t)} dM_0, \qquad (2.4)
$$

onde $g(t) = \det(g_{ij}(t))$ e $dM_0 = dM$.

O próximo resultado, que envolve a derivada do elemento de n-área, nos auxiliará na demonstração da Fórmula da Primeira Variação.

Lema 2.1.1. *Para $t = t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixo e $p \in M^n$, a derivada, com relação a t, do elemento de n-área é dada por*

$$
\frac{d}{dt} dM_t|_{t=t_0} = -nH_{t_0} f_{t_0}(p) dM_{t_0} + \sum_{i=1}^{n} e_i \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} dM_{t_0},
$$

onde T_{t_0} é um vetor tangente à M^n em (t_0, p).

Demonstração. Sejam $\{u_1, ..., u_n\}$ um sistema de coordenadas normais em $p \in M^n$ com relação à métrica $\langle , \rangle^{t_0}$, definido numa vizinhança $V \subset M^n$ de p e $e_i^{t_0} = \frac{\partial}{\partial u_i}(t_0, q)$, para $i = 1, ..., n$ e $q \in D$. Então, pela definição de coordenadas normais, $\left\{e_1^{t_0}, ..., e_n^{t_0}\right\}$ forma uma base ortonormal de T_pM^n com relação à métrica $\langle , \rangle^{t_0}$ e $\nabla_{e_i^{t_0}} e_j^{t_0}(p) = 0$.

Denotaremos por $e_i = dx_t . e_t^{t_0}$ e $E = dx . \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t}$.

Agora, derivando a expressão (2.4), temos

$$
\frac{d}{dt} dM_t|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g(t)}|_{t=t_0} dM_{t_0}.
$$

Vamos calcular $\frac{\partial}{\partial t} \sqrt{g(t)}|_{t=t_0}$, onde $g(t) = \det G(t, p)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g(t)}|_{t=t_0} &= \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det G}|_{t=t_0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\frac{\partial}{\partial t}\det G|_{t=t_0}}{\sqrt{\det G(t_0,p)}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\det G(t,p)\right)|_{t=t_0} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\det G(t_0,p)\right)\left(\frac{\partial G(t,p)}{\partial t}\right)|_{t=t_0} \\
&= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial G(t,p)}{\partial t}\right)|_{t=t_0}, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

pois $G(t_0,p) = \mathrm{Id}$.

Os elementos da matriz $\left(\frac{\partial G}{\partial t}|_{t=t_0}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0} g_{ij}(t)\right)$ são dados por

$$\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0} g_{ij}(t) = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\left\langle dx_t e_i^{t_0}, dx_t e_j^{t_0}\right\rangle = \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0}\left\langle e_i, e_j\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_E e_i, e_j\right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_E e_j\right\rangle. \quad (2.6)$$

Visto que $(-\epsilon,\epsilon)\times M^n$ tem estrutura diferencial de produto, obtemos que

$$[e_i, E] = 0, \quad \forall i = 1, ..., n.$$

Com efeito, fixe $q \in M^n$ e escolha uma parametrização $y : W \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M^n$, $y = (y_1, ..., y_n)$, de M^n em q. Agora, seja

$$\tilde{y} : \mathbb{R}\times W \longrightarrow (-\epsilon,\epsilon)\times M^n$$

a parametrização de $(-\epsilon,\epsilon)\times M^n$ em (t,q), dada por $\tilde{y}(t,p) = (t, y(t))$.

Assim, nesta parametrização, temos

$$e_i(t,q) = \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad E = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Portanto, se $g : (-\epsilon,\epsilon)\times M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então

$$\begin{aligned}
[e_i, E](g) &= e_i\left(E(g)\right) - E\left(e_i(g)\right) \\
&= e_i\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) - E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial g}{\partial y_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(q)\frac{\partial g}{\partial y_i}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Logo $[e_i, E] = 0$ e, portanto,

$$\overline{\nabla}_{e_i} E - \overline{\nabla}_E e_i = 0. \qquad (2.7)$$

Daí, usando a equação acima em (2.6), segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0} g_{ij}(t) &= \left\langle \overline{\nabla}_E e_i, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_E e_j \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} E, e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} E \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right), e_j \right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_j} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) \right\rangle .\end{aligned}$$

Desta forma, por (2.5), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g(t)}|_{t=t_0} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial t}|_{t=t_0} g_{ii}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right), e_i \right\rangle_{(t_0,p)} . \tag{2.8}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial x(p)}{\partial t} = f_t(p) N_t(p) + T_t(p),$$

onde $T_t(p)$ é um vetor tangente à M^n em (t,p).

Como N_{t_0} é um vetor normal à M^n com relação à métrica $\langle , \rangle^{t_0}$, vamos reescrever (2.8) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g(t)}|_{t=t_0} &= \sum_{i=1}^{n} e_i(f) \left\langle N, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} + \sum_{i=1}^{n} f_{t_0}(p) \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{t_0} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} ,\end{aligned} \tag{2.9}$$

pois N é ortogonal a e_i em p.

Agora calcularemos cada termo de (2.9). Começaremos com o termo $\sum_{i=1}^{n} f_{t_0}(p) \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N, e_i \right\rangle_{(t_0,p)}$.

Usando a expressão (1.3) em (1.11), vemos que

$$\begin{aligned} nH_{t_0} &= \operatorname{tr}\left(S_{N_{t_0}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle S_{N_{t_0}}(e_i), e_i \right\rangle_{(t_0,p)} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} = -\sum_{i=1}^{n} a_{ii}.\end{aligned}$$

Daí,

$$f_{t_0}(p) \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} N_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} = -nH_{t_0} f_{t_0}(p). \tag{2.10}$$

Para o termo $\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} T, e_i \right\rangle_{(t_0,p)}$ de (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} T_{t_0}, e_i \right\rangle &= e_i \left\langle T_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} - \left\langle T_{t_0}, \overline{\nabla}_{e_i} e_i \right\rangle_{(t_0,p)} \\ &= e_i \left\langle T_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)},\end{aligned} \tag{2.11}$$

pois $\overline{\nabla}_{e_i} e_i(p) = \left(\overline{\nabla}_{e_i} e_i\right)^N (p)$.

Desta forma, substituindo (2.10) e (2.11) em (2.9), temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g(t)}|_{t=t_0} = -nH_{t_0} f_{t_0} + \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle T_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)}.$$

Portanto

$$\frac{d}{dt} dM_t|_{t=t_0} = \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{g(t)}|_{t=t_0} dM_{t_0} = -nH_{t_0} f_{t_0} dM_{t_0} + \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle T_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} dM_{t_0}.$$

■

Neste momento, já dispomos de todas as ferramentas necessárias para a demonstração da Fórmula da Primeira Variação.

Teorema 2.1.1. *(Fórmula da Primeira Variação.) Para toda variação $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que deixa o bordo fixo, temos, em $t = 0$,*

$$A'_D(0) = -n \int_D f H dM, \tag{2.12}$$

onde $f = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0,p), N \right\rangle$ é a componente normal do vetor variação ξ.

Demonstração. Iniciaremos a prova para $t = t_0 \in (-\epsilon, \epsilon)$ fixo.

Derivando a equação (2.1) em relação a t e, em seguida, fazendo $t = t_0$, obtemos

$$A'_D(t_0) = \frac{d}{dt}\int_D dM_t|_{t=t_0} = \int_D \frac{d}{dt} dM_t|_{t=t_0}.$$

Usando o Lema 2.1.1, temos

$$\begin{aligned} A'_D(0) &= \int_D \frac{d}{dt} dM_t|_{t=t_0} \\ &= -\int_D nH_{t_0} f_{t_0} dM_{t_0} + \int_D \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\left\langle T_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} \right) dM_{t_0} \\ &= -\int_D nH_{t_0} f_{t_0} dM_{t_0} \\ &\quad + \int_D d\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left\langle T_{t_0}, e_i \right\rangle_{(t_0,p)} du_1 \wedge ... \wedge \widehat{du_i} \wedge ... \wedge du_n \right), \end{aligned}$$

onde $\widehat{u}$ indica que o termo u não aparece.

Aplicando o Teorema de Stokes, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma:

$$A'_D(0) = -\int_D nH_{t_0} f_{t_0} dM_{t_0} + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial D} (-1)^{i+1} \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} du_1 \wedge ... \wedge \widehat{du_i} \wedge ... \wedge du_n.$$

Por outro lado, temos que $T_{t_0} \equiv 0$ em ∂D, pois a variação fixa o bordo de D. Logo

$$\int_{\partial D} (-1)^{i+1} \langle T_{t_0}, e_i \rangle_{(t_0,p)} du_1 \wedge ... \wedge \widehat{du_i} \wedge ... \wedge du_n = 0.$$

Daí,

$$A'_D(t_0) = -\int_D nH_{t_0} f_{t_0} dM_{t_0}$$

para todo t_0 fixo. Em particular, para $t = 0$,

$$A'_D(0) = -\int_D nHf dM.$$

■

Vejamos agora a fórmula para variação de volume.

Lema 2.1.2. *Seja $X : (-\epsilon, \epsilon) \times \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação que deixa o bordo fixo. Então a* ***primeira variação de volume*** *em $t = 0$ é dada por*

$$V'_D(0) = \int_D f dM, \tag{2.13}$$

onde $f = \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(0, p), N \right\rangle$ é a componente normal do vetor variação ξ.

Demonstração. Dada a variação $X : (-\epsilon, \epsilon) \times M^n \longrightarrow \bar{M}^{n+1}(c)$, sejam $p \in M^n$ fixo e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial ortonormal numa vizinhança V de $x(p)$. Assim

$$X^* d\bar{M} = b(t, p) dt \wedge dM,$$

onde

$$\begin{aligned} b(t,p) &= X^* d\bar{M} = b(t,p) dt \wedge dM \left(\frac{\partial}{\partial t}, e_1, ..., e_n \right) \\ &= d\bar{M} \left(\frac{\partial X}{\partial t}, dx_t e_1, ..., dx_t e_n \right) \\ &= \mathrm{vol} \left(\frac{\partial X}{\partial t}, dx_t e_1, ..., dx_t e_n \right) \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}, N \right\rangle. \end{aligned}$$

Agora, usando o Teorema de Fubini, podemos escrever

$$\int_{[0,t]\times D} b(t,p)dt \wedge dM = \int_{[0,t]} \left(\int_D b(t,p)dM \right) dt.$$

Logo, derivando a expressão (2.2) em relação a t e, em seguida, fazendo $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} V_D'(0) &= \frac{dV_D}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_{[0,t]\times D} X^* d\bar{M}|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\int_{[0,t]} \left(\int_D b(t,p)dM \right) dt|_{t=0} \\ &= \int_D b(t,p)dM|_{t=0} \\ &= \int_D \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(t,p), N \right\rangle dM|_{t=0}. \end{aligned}$$

Portanto

$$V_D'(0) = \int_D f dM.$$

Particularmente, quando $\bar{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$ o resultado é válido.

■

2.2 Problema Variacional para Hipersuperfícies com Curvatura Média Constante

Nesta seção, veremos o problema variacional para hipersuperfícies de curvatura média constante, definiremos estabilidade para estas hipersuperfícies, apresentaremos condições de estabilidade e finalizaremos com um exemplo de hipersuperfície estável.

Seja $f : \bar{D} \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave por partes. Dizemos que f tem ***média zero*** em M^n, se $\displaystyle\int_M f dM = 0$.

O seguinte resultado nos fornecerá condições para a existência de uma variação normal que preserva volume.

Lema 2.2.1. *Seja $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave por partes tal que $\displaystyle\int_M f dM = 0$. Então, existe uma variação normal, que preserva volume, cujo vetor variacional é dado por fN. Além disso, se $f \equiv 0$ no ∂D, a variação pode ser escolhida de modo que deixe o bordo fixo.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos a seguinte variação normal dada por

$$x(t,\bar{t}) = x_0 + tfN + \bar{t}gN, \qquad (2.14)$$

onde $g : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave por partes, que se anula no bordo ∂D e $\displaystyle\int_M g dM \neq 0$.

Como queremos uma variação que preserva volume, vamos impor a condição

$$V_D(t, \bar{t}) = \quad cte.$$

Assim, usando (2.3), temos

$$\begin{aligned} V_D(t,\bar{t}) &= \frac{1}{n+1}\int_D \langle x(t,\bar{t}), N\rangle \, dM_{(t,\bar{t})} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_D \left(\langle x_0, N\rangle + \langle tfN, N\rangle + \langle \bar{t}gN, N\rangle\right) dM_{(t,\bar{t})} \\ &= \frac{1}{n+1}\int_D \left(\langle x_0, N\rangle + tf + \bar{t}g\right) dM_{(t,\bar{t})}. \end{aligned}$$

Derivando $V_D(t,\bar{t})$ com relação a t e $\bar{t}$, temos, respectivamente,

$$\frac{\partial V_D}{\partial t} = \frac{1}{n+1}\left[\int_D f dM_{(t,\bar{t})} + \int_D tf\frac{\partial}{\partial t}dM_{(t,\bar{t})}\right] \quad \text{e} \quad \frac{\partial V_D}{\partial \bar{t}} = \frac{1}{n+1}\left[\int_D g dM_{(t,\bar{t})} + \int_D \bar{t}g\frac{\partial}{\partial \bar{t}}dM_{(t,\bar{t})}\right].$$

Fazendo $t = \bar{t} = 0$, tem-se

$$\left(\frac{\partial V_D}{\partial t}\right)|_{t=0} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial V_D}{\partial \bar{t}}\right)|_{t=0} = \frac{1}{n+1}\int_D g dM \neq 0. \tag{2.15}$$

Sabemos que a derivada de V_D com relação a $\bar{t}$ é não-nula, V_D é de classe C^k e $V_D(0,0)$ é constante. Portanto, o Teorema da Função Implícita garante a existência de uma função φ suave numa vizinhança de $t = 0$, tal que $\bar{t} = \varphi(t)$ e cuja derivada é dada por

$$\varphi'(t) = -\frac{\left(\dfrac{\partial V_D}{\partial t}\right)}{\left(\dfrac{\partial V_D}{\partial \bar{t}}\right)}.$$

Agora, reescrevendo a variação (2.14),

$$y_t = x_t(t, \varphi(t)) = x_0 + tfN + \varphi(t)gN,$$

obtemos uma variação normal que preserva volume.

Usando as expressões de (2.15) para calcular a derivada φ', em $t = 0$, vemos que

$$\varphi'(0) = -\frac{\left(\dfrac{\partial V_D}{\partial t}\right)|_{t=0}}{\left(\dfrac{\partial V_D}{\partial \bar{t}}\right)|_{t=0}} = -\left(\int_D f dM\right)\left(\int_D g dM\right)^{-1} = 0$$

Daí, o vetor variacional de y_t é dado por

$$\frac{d}{dt}y_t|_{t=0} = fN + \varphi'(0)gN = fN.$$

Portanto encontramos uma variação normal que preserva volume, cujo vetor variacional é fN.

Finalmente, se $f \equiv 0$ no ∂D, então

$$y_t(p) = x_0(p) + (tf(p) + \varphi(t)g(p))\, N = x_0(p) = y_0(p), \qquad \forall p \in \partial D.$$

■

Vemos que, dada uma variação $x_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ da imersão x, podemos escrever

$$H = A_D^{-1}(0)\int_D HdM, \tag{2.16}$$

e, logo, definir $J_D : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$J_D(t) = A_D(t) + nHV_D(t). \tag{2.17}$$

No próximo resultado, relacionaremos $A_D(t)$ com $J_D(t)$ em $t = 0$.

Proposição 2.2.1. *Seja $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. As seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) x tem curvatura média constante $H \neq 0$;
(ii) Para cada domínio relativamente compacto $D \subset M$ com bordo suave e cada variação $x_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ que preserva volume e deixa o bordo fixo, temos $A'_D(0) = 0$;
(iii) Para cada $D \subset M$ relativamente compacto e cada variação (não necessariamente preservando volume) que fixa o bordo ∂D, tem-se $J'_D(0) = 0$.

Demonstração. Demonstraremos a Proposição na seguinte ordem: $(i) \Longrightarrow (iii)$, $(iii) \Longrightarrow (ii)$ e $(ii) \Longrightarrow (i)$.

$(i) \Longrightarrow (iii)$ Seja $x_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação de x que deixa o bordo fixo. Derivando a expressão (2.17), em relação a t e, em seguida, fazendo $t = t_0$, vemos que

$$J'_D(0) = A'_D(0) + nHV'_D(0). \tag{2.18}$$

Substituindo as expressões (2.12) e (2.13) em (2.18), pois o bordo é fixo, temos

$$J'_D(0) = -\int_D nHfdM + nH\int_D fdM = 0.$$

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Visto que $J'_D(0) = 0$, temos, por (2.18), que

$$A'_D(0) = -nHV'_D(0).$$

Tomando uma variação que preserva volume, segue-se que $V'_D(0) = 0$.

Portanto

$$A'_D(0) = 0.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Suponhamos que, para algum ponto $p \in D$, $H = H_0$ ou seja,

$$(H - H_0)(p) \neq 0.$$

Agora, sem perda de generalidade, assumiremos

$$(H - H_0)(p) > 0.$$

Sejam os conjuntos

$$D^+ = \{q \in D; (H - H_0)(q) > 0\} \quad \text{e} \quad D^- = \{q \in D; (H - H_0)(q) < 0\}.$$

Vamos definir funções suaves $\varphi, \psi : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, não-negativas, tais que

$$\int_D (\varphi + \psi)(H - H_0)(p) dM = 0$$

para $p \in \text{supp}\varphi \subset D^+$ e $\text{supp}\psi \subset D^-$. Aqui $\text{supp}\varphi$ denota o suporte de φ.

Dado $\epsilon > 0$, a função contínua $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\beta(t) = \begin{cases} exp\left(\dfrac{2\,(t+\epsilon)\left(t + \dfrac{\epsilon}{2}\right)}{\epsilon}\right), -\epsilon < t < -\dfrac{\epsilon}{2}; \\ \\ 0, t \in (-\infty, \epsilon] \cup \left[-\dfrac{\epsilon}{2}, \infty\right). \end{cases}$$

Para $b = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \beta(s) ds = \int_{-\epsilon}^{-\frac{\epsilon}{2}} \beta(s) ds$ e $a \in [0, \infty)$, definimos

$$\gamma_a(t) = \frac{a}{b} \int_{-\infty}^{t} \beta(s) ds,$$

onde $\gamma_a(t) = 0$, se $t \leq -\epsilon$ e $\gamma_a(t) = a$, se $t \geq -\dfrac{\epsilon}{2}$.

Considerando a função não-negativa $\varphi : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, para $\epsilon > 0$, $p \in D^+$ e $B(p;\epsilon) \subset D^+$, escrevemos $\varphi_a : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$\varphi_a(q) = \gamma_a\left(-|q - p|\right),$$

tal que $\varphi_a(q) = 0$ se $|q - p| > \epsilon$ e $\varphi_a(q) = a$ se $|q - p| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Isto é,

$$\varphi_a(q) = 0, \;\text{ se }\; q \notin B(p;\epsilon) \;\text{ e }\; \varphi_a(q) = a, \;\text{ se }\; q \in B(p; \frac{\epsilon}{2}).$$

Agora, seja $F : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ a função dada por

$$F(a) = \int_D \varphi_a h dM,$$

onde $h(p) = (H - H_0)(p) > 0$, pois $p \in D^+$.

Visto que F é sobrejetora, então existe $a_0 \in [0, \infty)$, tal que

$$F(a_0) = \int_{D^+} h dM = \int_D \varphi_{a_0} h dM.$$

Assim, como φ_a é não-negativa, tomaremos $\varphi = \varphi_a$.

Faremos cálculos análogos para a função $\psi : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi \geq 0$.

Vejamos que

$$\begin{aligned}
\int_D (\varphi + \psi)(H - H_0)\, dM &= \int_{D^+} \varphi (H - H_0)\, dM + \int_{D^-} \psi (H - H_0)\, dM \\
&= \int_{D^+} h dM + \int_{D^-} h dM \\
&= \int_D h dM = \int_D (H - H_0)\, dM.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (2.16), vamos obter

$$\int_D (H - H_0)\, dM = 0.$$

Portanto

$$\int_D (\varphi + \psi)(H - H_0)\, dM = 0,$$

e, além disso, $\mathrm{supp}\varphi \subset D^+$ e $\mathrm{supp}\psi \subset D^-$.

Agora, tomando $f = (\varphi + \psi)(H - H_0)$, temos que $f \equiv 0$ no ∂D e $\int_D f dM = 0$. Logo, pelo Lema 2.2.1, obtemos uma variação que preserva volume, cujo vetor variacional é fN.

Por hipótese

$$A'_D(0) = -\int_D nHf dM = 0.$$

Isto implica

$$\int_D Hf dM = 0$$

$$\int_D Hf dM - H_0 \int_D f dM = 0$$

$$\int_D f (H - H_0)\, dM = 0.$$

Desta forma

$$0 = \int_D f (H - H_0)\, dM = \int_D (\varphi + \psi)(H - H_0)^2\, dM > 0,$$

pois $(\varphi + \psi) \geq 0$, $(H - H_0) > 0$ e $H - H_0$ é contínua. Assim obtemos uma contradição. Logo $H = H_0$ em D. Como $D \subset M^n$ é arbitrário, temos que a imersão x tem curvatura média constante H_0.

■

Vimos na Proposição 2.2.1 que os problemas variacionais descritos em (ii) e (iii) são equivalentes enquanto consideramos apenas a primeira variação, e que os pontos críticos de ambos os problemas são as hipersuperfícies de curvatura média constante. Entretanto, quando consideramos a segunda variação em tais pontos críticos, os problemas não são mais equivalentes. Assim, vamos estabelecer uma relação entre $A''_D(0)$ e $J''_D(0)$. Porém, antes vejamos o seguinte resultado:

Teorema 2.2.1. *Dada uma imersão x com curvatura média constante, sejam $x_t : \bar{D} \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação normal de x que fixa o bordo ∂D e fN o vetor variação de x_t. Então*

$$J''_D(0)(f) = \int_D \left(-f\Delta f - \|B\|^2 f^2\right) dM, \tag{2.19}$$

onde Δf denota o Laplaciano de f.

Demonstração. Inicialmente, vamos derivar (2.17). Assim encontramos

$$J'_D(t) = A'_D(t) + nHV'_D(t).$$

Como o bordo é suave, podemos substituir as equações (2.12) e (2.13) na expressão acima, obtendo

$$J'_D(t) = \int_D (-nH_t + nH) f_t dM_t = \int_D -n (H_t - H) f_t dM_t,$$

onde H_t é a curvatura média da imersão x_t, $f_t = \left\langle \dfrac{\partial x}{\partial t}, N_t \right\rangle$ e N_t é o vetor unitário normal à x_t.

Calculando a segunda derivada de $J'_D(t)$, temos

$$J''_D(t) = \int_D -n\frac{\partial}{\partial t} (H_t - H) f_t dM_t + \int_D -n (H_t - H) \frac{\partial}{\partial t} f_t dM_t + \int_D -n (H_t - H) f_t \frac{\partial}{\partial t} dM_t.$$

Para $t = 0$, sabemos que $H_t = H$. Então

$$J''_D(0) = \int_D -n\frac{\partial H_t}{\partial t}(0,p) f dM.$$

Agora, seja $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial geodésico de $p \in D$. Denotamos $e_i(t,p) = dx_t e_t^{t_0}$ e $E = dx\dfrac{\partial}{\partial t}$.

Usando o item (ii) do Lema 1.0.1, vamos calcular $\dfrac{\partial nH_t}{\partial t}$. Logo

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial nH_t}{\partial t}|_{t=0}(p) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(t)\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, N_t\right\rangle(t,p)\right)|_{t=0} \\
&= \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}(t)|_{t=0}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle + \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(0)\left\langle \overline{\nabla}_E\overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle \\
&\quad + \sum_{i,k=1}^{n} g^{ik}(0)\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), \left(\overline{\nabla}_E N_t\right)|_{t=0}\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Visto que $\overline{\nabla}_E N_t$ é um vetor tangente à M^n em p, então

$$
\frac{\partial nH_t}{\partial t}|_{t=0}(p) = \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}(t)|_{t=0}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle + \sum_{i,k=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_E\overline{\nabla}_{e_i}e_i(p), N\right\rangle . \tag{2.20}
$$

Agora, derivando a expressão

$$
\sum_{j=1}^{n} g^{ij}(t)g_{jk}(t) = \delta_{ik},
$$

em relação a t, fazendo $t=0$ e usando $g^{ij}(0) = g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e a expressão (2.6), obtemos

$$
\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}(0) = -\frac{\partial g_{ik}}{\partial t}(0) = -E\left(\langle e_i, e_k\rangle(t,p)\right)|_{t=0} = -\left\langle \overline{\nabla}_E e_i, e_k\right\rangle - \left\langle e_i, \overline{\nabla}_E e_k\right\rangle .
$$

Conhecendo (2.7) e o fato de $E = fN$, pois a variação é normal, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}(0) &= -\left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}E, e_k\right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_k}E\right\rangle\right) \\
&= -f\left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}N, e_k\right\rangle + \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_k}N\right\rangle\right).
\end{aligned}
$$

Substituindo (1.3) na igualdade acima, vemos que

$$
\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}(0) = 2f\left\langle B(e_i,e_k), N\right\rangle = 2f\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k, N\right\rangle .
$$

Assim podemos reescrever o termo $\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}|_{t=0}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle$ de (2.20) da seguinte forma:

$$
\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial g^{ik}}{\partial t}|_{t=0}\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle = \sum_{i,k=1}^{n} 2f\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}e_k(p), N\right\rangle = 2f\left\|B\right\|^2 . \tag{2.21}
$$

Aqui a última igualdade foi obtida pelo item (i) do Lema 1.0.1.

Por outro lado, usando o fato do espaço ser o Euclidiano e a expressão(2.7), no termo $\sum_{i,k=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_E\overline{\nabla}_{e_i}e_i, N\right\rangle$ de (2.20), obtemos

$$\left\langle \overline{\nabla}_E\overline{\nabla}_{e_i}e_i, N\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_E e_i, N\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}E, N\right\rangle = e_i\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}E, N\right\rangle - f\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}N, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle.$$

Visto que $f = \langle E, N\rangle$ e usando (1.6) temos

$$e_i(f) = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}E, N\right\rangle + \left\langle E, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}E, N\right\rangle + f\left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{e_i}E, N\right\rangle.$$

Logo

$$e_ie_i(f) = e_i\left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}E, N\right\rangle\right)$$

e, portanto, pelo item (i) do Lema 1.0.1, encontramos

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle \overline{\nabla}_E\overline{\nabla}_{e_i}e_i, N\right\rangle = \sum_{i=1}^{n}e_ie_i(f) - \sum_{i=1}^{n}f\left\langle \overline{\nabla}_{e_i}N, \overline{\nabla}_{e_i}N\right\rangle = \Delta f - f\left\|B\right\|^2. \tag{2.22}$$

Substituindo (2.21) e (2.22) em (2.20), vemos que

$$\frac{\partial nH_t}{\partial t}|_{t=0} = \Delta f + 2f\left\|B\right\|^2 - f\left\|B\right\|^2.$$

Finalmente, concluímos que

$$J_D''(0) = \int_D -\frac{\partial nH_t}{\partial t}f dM = \int_D -\left(f\Delta f + \left\|B\right\|^2 f^2\right)dM.$$

■

Observação 2.2.1. *Enunciamos e demonstramos o Teorema* 2.2.1 *para uma variação normal, porém este resultado é verdadeiro para qualquer variação. A demonstração pode ser vista no apêndice do artigo de Barbosa e do Carmo, ver* [1].

Agora, usando o Teorema 2.2.1, estabeleceremos uma relação entre as segundas derivadas de $A_D(t)$ e $J_D(t)$ em $t = 0$. Além disso, denotaremos por $\Im_D$ o conjunto de todas as funções suaves por partes $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, tais que $f \equiv 0$ no bordo ∂D e $\int_D f dM = 0$.

Proposição 2.2.2. *Para toda variação* $x_t : \bar{D} \subset M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ *da imersão* x *que preserva volume e que fixa o bordo, temos* $A_D''(0) \geq 0$ *se, e somente se,* $J_D''(0)(f) \geq 0$ *para toda* $f \in \Im_D$.

Demonstração. Seja $f \in \Im_D$. Então, pelo Lema 2.2.1, existe uma variação normal $y_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ que preserva volume e que fixa o bordo.

Assim, por (2.17), obtemos

$$J_D''(0) = A_D''(0) + nHV_D''(0). \tag{2.23}$$

Como, por hipótese, a variação preserva volume e $A_D''(0) \geq 0$, vemos que

$$J_D''(0)(f) = A_D''(0) \geq 0.$$

Vamos supor agora, que $J_D''(0) \geq 0$ para toda $f \in \Im_D$.

Agora, consideremos $x_t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma variação que preserva volume, fixa o bordo ∂D e tal que fN seja a componente normal do seu vetor variação.

Sabemos que

$$x_t(p) = x_0(p) + tf(p)v(p),$$

onde $v(p)$ é a direção da variação.

Tomando $p \in \partial D$, temos $x_t(p) = x_0(p)$, ou seja, $f \equiv 0$ para todo $p \in \partial D$. Daí, por (2.13), vemos que

$$\int_D f dM = V_D'(0) = 0.$$

Isto implica que $f \in \Im_D$.

Visto que x_t preserva volume temos, por (2.23)

$$J_D''(0) = A_D''(0) + nHV_D''(0) = A_D''(0).$$

Portanto $A_D''(0) \geq 0$ para a variação x, pois $J_D''(0) \geq 0$. Finalmente, pelo Lema 2.2.1, $J_D''(0)(f)$ depende apenas de f. ∎

Neste momento, definiremos estabilidade para imersões $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ com curvatura média constante não-nula. Como vimos, os problemas variacionais descritos em (i) e (ii) da Proposição 2.2.1 caracterizam estas imersões. Assim escolheremos um dos problemas para trabalharmos nossa definição. Aqui optamos pelo problema descrito no item (ii).

Definição 2.2.1. *Sejam $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e $D \subset M^n$ um domínio relativamente compacto com bordo suave ∂D. O domínio D será dito **estável**, se $A_D''(0) \geq 0$ para toda variação que preserva volume e fixa o bordo. Dizemos que x é uma **imersão estável**, se qualquer $D \subset M^n$ é estável.*

Uma conseqüência da Proposição 2.2.2 nos fornece uma condição para um domínio ser estável relacionando as segundas derivadas de $A_D(t)$ e $J_D(t)$ em $t = 0$.

Corolário 2.2.1. *O domínio $D \subset M^n$ será dito estável se, e somente se, $J_D''(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \Im_D$.*

Demonstração. Pela Definição 2.2.1, sabemos que $D \subset M^n$ é estável se $A''_D(0) \geq 0$, para toda variação que preserva volume e deixa o bordo fixo.

Daí, pela Proposição 2.2.2, temos que $J''_D(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \Im_D$. ∎

Vejamos, no próximo exemplo, que a esfera

$$\mathbb{S}^n(r) = \left\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = r\right\}, \tag{2.24}$$

é estável.

Exemplo 2.2.1. $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *é estável.*

Tomaremos $\mathbb{S}^n(1)$ a esfera de raio 1 e $D \subset \mathbb{S}^n(1)$ um domínio. Seja $f \in \Im_D$. Assim, podemos estender a função $f : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ para uma função suave por partes $\bar{f} : \mathbb{S}^n(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\bar{f} \equiv 0$ em $\mathbb{S}^n(1) - D$.

Denotaremos por $\lambda_1(\mathbb{S}^n(1))$ o primeiro autovalor não-nulo do problema

$$\Delta g + \lambda g = 0.$$

É conhecido que,

$$\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) = \inf\left\{\left(\int_{\mathbb{S}^n(1)} |\nabla g|^2\, dM\right)\left(\int_{\mathbb{S}^n(1)} g^2 dM\right)^{-1}\right\}, \tag{2.25}$$

para toda função suave por partes $g : \mathbb{S}^n(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^n(1)} g dM = 0$, onde ∇g denota o gradiente de g na métrica induzida pela inclusão $\mathbb{S}^n(1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Donde decorre claramente a desigualdade

$$\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) \leq \left(\int_{\mathbb{S}^n(1)} |\nabla g|^2\, dM\right)\left(\int_{\mathbb{S}^n(1)} g^2 dM\right)^{-1}, \tag{2.26}$$

Integrando sobre D a igualdade

$$\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2\,|\nabla f|^2\,,$$

vamos obter

$$\frac{1}{2}\int_D \Delta f^2 dM = \int_D f\Delta f dM + \int_D |\nabla f|^2\, dM.$$

Aplicando o Teorema de Stokes, e substituindo em (2.19) encontramos

$$J''_D(0)(f) = \int_D \left(-f\Delta f - \|B\|^2 f^2\right) dM = \int_D \left(|\nabla f|^2 - \|B\|^2 f^2\right) dM,$$

pois o bordo é vazio.

Pelo Lema 1.0.2, $\|B\|^2 = n$. Daí

$$J''_D(0)(f) = \int_D \left(|\nabla f|^2\, dM - nf^2\right) dM = \int_D |\nabla f|^2\, dM - n\int_D f^2 dM.$$

Visto que $\bar{f} : \mathbb{S}^n(1) \longrightarrow \mathbb{R}$ e

$$\int_{\mathbb{S}^n(1)} \bar{f} dM = \int_D f dM = 0$$

podemos usar a expressão (2.26). Logo

$$\begin{aligned} J_D''(0)(f) &= \int_D |\nabla f|^2 \, dM - n \int_D f^2 dM \\ &= \int_{\mathbb{S}^n(1)} \left|\nabla \bar{f}\right|^2 dM - n \int_{\mathbb{S}^n(1)} \bar{f}^2 dM \\ &\geq \lambda_1 \left(\mathbb{S}^n(1)\right) \int_{\mathbb{S}^n(1)} \bar{f}^2 dM - n \int_{\mathbb{S}^n(1)} \bar{f}^2 \\ &= \lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) \int_D f^2 dM - n \int_D f^2 \\ &= \int_D f^2 \left(\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) - n\right) dM. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Agora, usando o apêndice deste trabalho que nos dá os autovalores do Laplaciano na esfera unitária, temos em particular, que o primeiro autovalor $\lambda_1(\mathbb{S}^n(1))$ é igual a n. Assim, substituindo $\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) = n$ em (2.27) obtemos

$$J_D''(0)(f) \geq \int_D f^2 \left(\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) - n\right) dM = 0.$$

Logo $J_D''(0) \geq 0$ para toda $f \in \Im_D$.

Portanto, pelo Corolário 2.2.1, D é estável e como D é arbitrário, concluímos que $\mathbb{S}^n(1)$ é estável.

■

Capítulo 3

Teorema de Barbosa-do Carmo

Neste capítulo, escreveremos o Laplaciano da função suporte de x em termos da segunda forma fundamental e da curvatura média da imersão e apresentaremos a Fórmula de Minkowski. Logo em seguida, demonstraremos o resultado principal deste trabalho, a saber: o Teorema de Barbosa-do Carmo.

Definiremos agora, campo de Jacobi e equação de Jacobi.

Definição 3.0.2. *Sejam $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante e $D \subset M^n$ um domínio relativamente compacto com bordo suave. Um **campo de Jacobi** em D é o campo vetorial normal $J = fN$, que satisfaz a **equação de Jacobi***

$$\Delta f + \|B\|^2 f = 0,$$

onde $f \in \Im_D$.

Veremos agora uma boa ferramenta para encontrar soluções da equação de Jacobi.

Proposição 3.0.3. *Sejam $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H e v um vetor unitário fixo em $\mathbb{R}^{n+1}$. Então a função $f = \langle v, N \rangle$ satisfaz a equação de Jacobi, ou seja, $\Delta f + \|B\|^2 f = 0$.*

Demonstração. Vamos considerar um referencial geodésico $\{e_1, ..., e_n\}$ de $p \in M^n$. É conhecido que o Laplaciano de uma função f neste referencial é dado por

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i f(p). \tag{3.1}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\Delta f(p) &= \sum_{i=1}^{n} e_i e_i \langle v, N\rangle (p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} v, N\right\rangle + \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} v, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle + \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p).
\end{aligned}
$$

Escrevendo v como combinação linear da base $\{e_1, ..., e_n, N\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, obtemos

$$
v = \langle v, e_1\rangle e_1 + ... + \langle v, e_n\rangle e_n + \langle v, N\rangle N.
$$

Logo

$$
\sum_{i=1}^{n} \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle = \langle v, e_1\rangle \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_1, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle + ... + \langle v, N\rangle \sum_{i=1}^{n} \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle .
$$

Visto que H é constante, então, usando a Proposição 1.0.1, temos

$$
\sum_{i=1}^{n} \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle = \langle v, N\rangle \sum_{i=1}^{n} \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle = -\langle v, N\rangle \|B\|^2 .
$$

Portanto

$$
\Delta f(p) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle v, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p) = -\|B\|^2 f(p).
$$

■

No próximo resultado, mostraremos que a função suporte de uma imersão satisfaz uma equação diferencial parcial.

Lema 3.0.2. *Sejam $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não-nula H e $g = \langle x, N\rangle$ a função suporte de x. Então g satisfaz a seguinte equação:*

$$
\Delta g = -nH - \|B\|^2 g. \tag{3.2}
$$

Demonstração. Tomaremos um referencial geodésico de $p \in M^n$. Assim

$$
\overline{\nabla}_{e_i} x = e_i.
$$

Usando (3.1), vemos que

$$\Delta g(p) = \sum_{i=1}^{n} e_i e_i \langle x, N\rangle (p).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\Delta g(p) &= \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, N\right\rangle + \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\langle e_i, N\rangle + \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle\right)(p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} e_i \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} x, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p) + \sum_{i=1}^{n} \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle e_i, \overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p) + \sum_{i=1}^{n} \left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Escrevendo x como combinação linear da base $\{e_1, ..., e_n, N\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos

$$x = \langle x, e_1\rangle e_1 + ... + \langle x, e_n\rangle e_n + \langle x, N\rangle N. \tag{3.4}$$

Daí, vamos reescrever o termo $\left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle$ de (3.3) da seguinte forma:

$$\left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle = \left\langle \langle x, e_1\rangle \left\langle e_1, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle + ... + \langle x, N\rangle \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle\right\rangle.$$

Pela Proposição 1.0.1, segue-se que

$$\left\langle x, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle = \langle x, N\rangle \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle. \tag{3.5}$$

Finalmente, substituindo (1.5) e (3.5) em (3.3), obtemos

$$\Delta g(p) = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_i} e_i, N\right\rangle (p) + \sum_{i=1}^{n} \langle x, N\rangle \left\langle N, \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i} N\right\rangle (p) = -nH(p) - g(p)\|B\|^2.$$

■

Agora, o próximo resultado apresenta uma clássica fórmula integral, a saber: Fórmula de Minkowski, que será diretamente usada na demonstração do Teorema de Barbosa-do Carmo.

Proposição 3.0.4. *(Fórmula de Minkowski.) Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta sem bordo e $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Então a função suporte $g = \langle x, N\rangle$ satisfaz*

$$\int_M gHdM = -\int_M dM.$$

Demonstração. Sejam X o vetor posição com origem em p e $\{e_1, ..., e_n\}$ um referencial geodésico de $p \in M^n$.

Calculando o divergente da componente tangente de X, vemos que

$$div_M X^T = \sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} X, e_j \right\rangle - \sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} X^N, e_j \right\rangle. \tag{3.6}$$

Aqui $X = X^T + X^N$, onde X^N é a componente normal de X.

Como o referencial é geodésico, temos $\overline{\nabla}_{e_j} X = e_j$. Logo

$$\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} X, e_j \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left\langle e_j, e_j \right\rangle = n. \tag{3.7}$$

Vamos calcular $\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} X^N, e_j \right\rangle$. Visto que $\left\langle X^N, e_j \right\rangle = 0$, obtemos

$$\left\langle \overline{\nabla}_{e_j} X^N, e_j \right\rangle = -\left\langle X^N, \overline{\nabla}_{e_j} e_j \right\rangle = -\left\langle X, \left(\overline{\nabla}_{e_j} e_j\right)^N \right\rangle.$$

Desta forma

$$\sum_{j=1}^{n} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} X^N, e_j \right\rangle = -\sum_{j=1}^{n} \left\langle X, \left(\overline{\nabla}_{e_j} e_j\right)^N \right\rangle = -nHg. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.7) e (3.8) em (3.6), tem-se

$$div_M X^T = nHg + n = n\left(gH + 1\right).$$

Integrando a expressão acima sobre M^n temos

$$\int_M div_M X^T dM = n \int_M \left(gH + 1\right) dM.$$

Finalmente, usando o Teorema de Stokes e o fato de M^n ser uma variedade compacta sem bordo, $\partial M^n = \emptyset$, encontramos

$$\int_M gHdM = -\int_M dM. \tag{3.9}$$

■

Agora, usando os principais resultados deste trabalho, vamos demonstrar o Teorema de Barbosa-do Carmo.

Teorema 3.0.2. *Sejam M^n uma variedade Riemanniana compacta, orientável e $x : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante não-nula. Então x é estável se, e somente se, $x(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos supor que a imersão x com curvatura média constante H seja estável. Tomemos a função suporte $g = \langle x, N\rangle$ de x.

Integrando (3.2) sobre M^n, obtemos

$$\int_M \Delta g dM = -\int_M (nH + \|B\|^2 g)dM.$$

Usando o Teorema de Stokes e o fato de $\partial M^n = \emptyset$, vemos que

$$\int_M (nH + \|B\|^2 g)dM = 0,$$

isto é,

$$nH\int_M dM = -\int_M \|B\|^2 gdM.$$

Multiplicando a equação acima por H, segue-se que

$$nH^2\int_M dM = -H\int_M \|B\|^2 gdM. \tag{3.10}$$

Seja $f = gH + 1$. Substituindo f em (3.9), tem-se

$$\int_M fdM = 0. \tag{3.11}$$

Então, pelo Lema 2.2.1, existe uma variação normal que preserva volume, fixa o bordo e tal que fN é seu vetor variacional. Assim, pelo Teorema 2.2.1, temos

$$J''_M(0)(f) = \int_M (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2)dM. \tag{3.12}$$

Agora, afirmamos que

$$-f\Delta f - \|B\|^2 f^2 = nH^2 f - \|B\|^2 f. \tag{3.13}$$

Com efeito,

$$-f\Delta f - \|B\|^2 f^2 = -(gH+1)H\Delta g - \|B\|^2 (H^2g^2 + 2Hg + 1).$$

Logo, usando (3.2) na igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
-f\Delta f - \|B\|^2 f^2 &= -(H^2g + H)(-nH - \|B\|^2 g) - \|B\|^2 (H^2g^2 + 2Hg + 1) \\
&= nH^3g + nH^2 + \|B\|^2 H^2g^2 + \|B\|^2 Hg - \|B\|^2 H^2g^2 - 2\|B\|^2 Hg - \|B\|^2 \\
&= nH^2(gH+1) - \|B\|^2 (gH+1) \\
&= nH^2 f - \|B\|^2 f.
\end{aligned}$$

Portanto provamos a afirmação.

Daí, substituindo (3.13) em (3.12) vamos obter que

$$J''_M(0)(f) = \int_M (nH^2 f - \|B\|^2 f) dM = nH^2 \int_M f dM - \int_M \|B\|^2 f dM.$$

Sabemos por (3.11) que f tem média zero, então

$$J''_M(0) = -\int_M \|B\|^2 f dM.$$

Como x é estável e $f \in \Im_D$, temos, pelo Corolário 2.2.1, que

$$J''_M(0)(f) \geq 0.$$

Logo

$$-\int_M \|B\|^2 f dM = -\int_M \|B\|^2 (gH + 1) dM \geq 0.$$

Ou seja,

$$-\int_M \|B\|^2 gH dM \geq \int_M \|B\|^2 dM. \tag{3.14}$$

Substituindo (3.14) na expressão (3.10) segue-se

$$nH^2 \int_M dM = -\int_M \|B\|^2 gH dM \geq \int_M \|B\|^2 dM.$$

Agora, pelo Lema 1.0.2, obtemos

$$nH^2 \int_M dM \geq \int_M \|B\|^2 dM \geq nH^2 \int_M dM,$$

o que implica

$$nH^2 \int_M dM = \int_M \|B\|^2 dM.$$

Além disso, pelo Lema 1.0.2, x é uma imersão umbílica em todos os pontos. Usando o fato de M^n ser compacta, temos que $x(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma esfera geodésica. ∎

Apêndice

O Primeiro Autovalor do Laplaciano na Esfera

Neste apêndice, vamos determinar o primeiro autovalor não-nulo, $\lambda_1(\mathbb{S}^n(1))$, $n > 1$, para o problema

$$\Delta f + \lambda f = 0 \tag{3.15}$$

na esfera $\mathbb{S}^n(1)$.

Tal λ_1 será determinado usando o seguinte resultado:

Seja $f \in C^3(M)$, onde M é uma variedade Riemanniana. Então

$$\frac{1}{2}\Delta(|\mathrm{grad} f|^2) = |\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}\Delta f\rangle + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f),$$

onde grad f denota o gradiente de f, Hess f é a Hessiana de f e Ric é a curvatura de Ricci.

A equação acima é a conhecida ***Fórmula de Bochner-Lichnerowicz*** e sua demonstração pode ser encontrada em [9] na p.15.

O próximo teorema explicita o primeiro autovalor λ_1 não-nulo do Laplaciano na esfera unitária.

Teorema 3.0.3. *Seja λ_1 o primeiro autovalor de $\mathbb{S}^n(1)$. Então $\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) = n$.*

Demonstração. Integrando sobre $\mathbb{S}^n(1)$ a fórmula de Bochner-Lichnerowicz, temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{S}^n(1)} \Delta(|\mathrm{grad} f|^2) dM = \int_{\mathbb{S}^n(1)} \big(|\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}\Delta f\rangle + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f)\big)\, dM.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos que

$$\int_{\mathbb{S}^n(1)} \big(|\mathrm{Hess} f|^2 + \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad}\Delta f\rangle + \mathrm{Ric}\,(\mathrm{grad} f, \mathrm{grad} f)\big)\, dM = 0. \tag{3.16}$$

Visto que

$$|\mathrm{Hess} f|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} f_{ii}^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_{ii}\right)^2,$$

então

$$|\text{Hess} f|^2 \geq \frac{(\Delta f)^2}{n}. \tag{3.17}$$

Por outro lado, na esfera $\mathbb{S}^n(1)$, temos

$$\text{Ric}\,(\text{grad} f, \text{grad} f) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} K(e_j, e_n) \right\} |\text{grad} f|^2 = (n-1)\,|\text{grad} f|^2, \tag{3.18}$$

onde $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de $T_p\mathbb{S}^n(1)$, $e_n = \dfrac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|}$ e $K(e_j, e_n)$ representa a curvatura seccional.

Agora, usando a condição $\Delta f + \lambda f = 0$ em $\mathbb{S}^n(1)$ e substituindo as expressões (3.17) e (3.18) em (3.16), vemos que

$$\frac{\lambda^2}{n} \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM - \lambda \int_{\mathbb{S}^n(1)} |\text{grad} f|^2 \, dM + (n-1) \int_{\mathbb{S}^n(1)} |\text{grad} f|^2 \, dM \leq 0. \tag{3.19}$$

Integrando sobre $\mathbb{S}^n(1)$ a igualdade $\Delta f^2 = 2 f \Delta f + 2\,|\text{grad} f|^2$, temos

$$\int_{\mathbb{S}^n(1)} \Delta f^2 dM = \int_{\mathbb{S}^n(1)} \left(2 f \Delta f + 2\,|\text{grad} f|^2\right) dM.$$

Aplicando o Teorema de Green na expressão acima, obtemos

$$-\int_{\mathbb{S}^n(1)} f \Delta f dM = \int_{\mathbb{S}^n(1)} |\text{grad} f|^2 \, dM.$$

Utilizando novamente o fato do $\Delta f + \lambda f = 0$, vemos que

$$\lambda \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM = \int_{\mathbb{S}^n(1)} |\text{grad} f|^2 \, dM.$$

Dessa forma, usando a desigualdade (3.19), observamos que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^2}{n} \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM - \lambda^2 \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM + (n-1)\lambda \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM &\leq 0 \\ \lambda\,(\lambda - n\lambda + (n-1)n) \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM &\leq 0 \\ \lambda\,(-\lambda(n-1) + (n-1)n) \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM &\leq 0 \\ \lambda(n-\lambda)(n-1) \int_{\mathbb{S}^n(1)} f^2 dM &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo

$$n - \lambda \leq 0.$$

Daí, concluímos que $\lambda \geq n$.

Agora, vamos exibir uma autofunção f, não-constante, para o problema (3.15) tal que $\lambda = n$.

Inicialmente, seja $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x_1, ..., x_{n+1}) = x_1 + ... + x_{n+1}.$$

Notemos que, dados $f : \mathbb{S}^n(r) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função e k um inteiro não-negativo, F pode ser escrita como

$$F(x) = r^k f(\xi), \tag{3.20}$$

onde $r = 1$ e $f = F|_{\mathbb{S}^n}$.

O Laplaciano em $\mathbb{R}^{n+1}$ de (3.20) é dado por

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} F = r^{k-2} \left\{ \Delta_{\mathbb{S}^n} f + k\,(k + n - 1)\, f \right\}.$$

A Demonstração da equação acima pode ser vista, por exemplo, em [4] na p.35.

Daí, para $k = 1$, tem-se

$$\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} F = \Delta_{\mathbb{S}^n} f + nf.$$

Visto que F é harmônica, pois $\Delta_{\mathbb{R}^{n+1}} F = 0$, temos que f é uma autofunção associada ao autovalor λ. Portanto,

$$\lambda_1(\mathbb{S}^n(1)) = n.$$

■

Referências Bibliográficas

[1] BARBOSA, J. L. & DO CARMO, M. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*. Mathematische Zeitschrift **185**, 339-353, 1984.

[2] BARBOSA J. L., DO CARMO M. & ESCHENBURG. *Stability of hypersurface of constant mean curvature in Riemannian manifolds*. Mathematische Zeitschrift **197**, 123-138 (1988).

[3] BOLZA, O. *Vorlesungen über Variationsrechnung*. Berlin-Leipzig: Teubner, 1909.

[4] CHAVEL, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, volume 115, Second Edition, Pure and Applied Mathematics Series, Academic Press, Florida, 1984.

[5] DO CARMO, M. *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Terceira Edição, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[6] HEINTZE, E. *Extrinsic upper bounds for* λ_1. Mathematische Annalen **280**, 389-402 (1988).

[7] HSIANG, W., TENG, Z & YU, W. *New examples of constant mean curvature immersions of* $(2k-1)$*-spheres into euclidean* $2k$*-space*. Annals of Mathematics **117**, 609-625 (1983).

[8] MORI, H. *Stable complete constant mean curvature surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *and* $\mathbb{H}^3$. Transactions of the American Mathematical Society **278**, Nº 2, 671-687 (1983).

[9] SCHOEN, R. & YAU, S. *Lectures on Differential Geometry*. Vol. 1, International Press Inc, Boston, 1994.

[10] SILVEIRA, A. *Stability of complete noncompact surfaces with constante mean curvature*. Mathematische Annalen **277**, 629-638 (1987).

[11] WENTE, H. *A note on the stability theorem of J.L. Barbosa and M. do Carmo for closed surfaces of constant mean curvature* . Pacific Journal of Mathematics **147**, Nº 2, 375-379 (1991).

Índice Remissivo