



Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estimativas sobre o Primeiro Autovalor
Não-Nulo de Stekloff**

Claudemir Silvino Leandro

Rio São Francisco





Universidade Federal de Alagoas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado em Matemática
Dissertação de Mestrado

Estimativas sobre o Primeiro Autovalor Não-Nulo de Stekloff

Claudemir Silvino Leandro

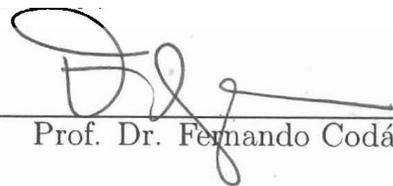
Maceió, Brasil
Dezembro 2005

Estimativas sobre o Primeiro Autovalor Não-Nulo de Stekloff

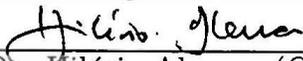
Claudemir Silvino Leandro

Dissertação de Mestrado na área de concentração de Geometria Diferencial submetida em 19 de dezembro de 2005 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

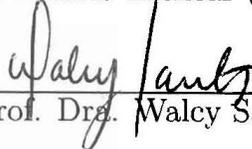
Banca Examinadora:



Prof. Dr. Fernando Codá Marques



Prof. Dr. Hilário Alencar (Orientador)



Prof. Dra. Walcy Santos

A Edvanilda e Fernando.

Agradecimentos

- Primeiramente à Deus, por tudo.
- Ao professor Hilário Alencar, meu orientador, pelas conversas, estímulo e paciência durante todo o Programa de Mestrado em Matemática;
- Aos alunos que fizeram parte comigo da primeira turma de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas: Davy Christian, Márcio Henrique e Sofia Carolina.
- Aos meus amigos: Erikson Alexandre, Fábio Boia, Maria de Andrade e Thales Miranda, pela amizade e aos colegas: Julio de Almeida, Thiago Fontes e José Arnaldo, pelo companherismo.
- Aos professores que contribuíram na minha formação acadêmica: Krerley Oliveira, Adán Corcho Fernández e, especialmente, a Fernando Codá Marques pela sua orientação.
- Aos meus pais, Maria José Silvino e Lourival Lúcio Leandro, e aos meus irmãos, por todo o incentivo que sempre me deram ao longo da minha jornada acadêmica.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas (FAPEAL) pelo financiamento da bolsa de mestrado concedida durante o período 15/02/2004 a 01/01/2006.
- Ao professor Adelailson Peixoto por suas construtivas conversas, amizade e sua atenciosa presença.
- Um agradecimento especial à Clarissa Codá, por sua presença amável em minha vida.

Resumo

Este trabalho visa obter estimativas para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff. Nos concentramos, basicamente, em três artigos de J. F. Escobar, publicados nos anos 1997, 1999 e 2000. Nestes artigos, são obtidas estimativas para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função da geometria da variedade Riemanianna.

Inicialmente, demonstramos um teorema afirmando que para o problema de Stekloff em uma superfície compacta, com curvatura Gaussiana não-negativa e curvatura geodésica da fronteira limitada inferiormente por uma constante positiva c , o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff é necessariamente maior ou igual a c e, além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, a superfície é o disco Euclidiano. Este resultado é obtido usando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz e o Princípio do Máximo.

No problema de Stekloff em variedades Riemannianas n -dimensionais, com $n \geq 3$, mostramos uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função do primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano no bordo da variedade dada. Apresentamos também uma conjectura feita por Escobar afirmando que o teorema descrito no parágrafo anterior também é verdadeiro para dimensões maiores ou igual a três. Esta conjectura se encontra em aberto e mostramos uma contribuição para a mesma exibindo uma estimativa aproximada, embora não tão ótima, feita por Escobar em 1999.

Palavras-chave: Autovalor, Stekloff, Laplaciano.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	10
1.1 Preliminares e Definições	10
1.2 O Tensor Curvatura	15
1.3 As Fórmulas de Green	16
1.4 Problemas de Autovalores	18
1.5 A Fórmula de Bochner-Lichnerowicz	20
2 Teoremas de Comparação em Superfícies	24
2.1 Estimativa Inferior para o Primeiro Autovalor de Stekloff.	24
2.2 Estimativa em Domínios Simplesmente Conexos.	37
3 Teoremas de Comparação em Variedades n-Dimensionais	41
3.1 Estimativas em variedades M^n	41
Referências Bibliográficas	45

Introdução

Este trabalho descreve algumas estimativas sobre o primeiro autovalor não-nulo para o problema de Stekloff obtido por J. F. Escobar, publicado no Journal of Functional Analysis em 1997, 1999 e 2000. Este problema foi introduzido por Stekloff em 1902 no seu trabalho intitulado “Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathématique”, ver [13], e consiste em encontrar uma função φ , não-nula, satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu\varphi \text{ em } \partial M,\end{aligned}$$

onde ν é um número real e M é uma variedade Riemanniana de dimensão n .

A motivação para este problema provém da física, neste caso M é um domínio do plano e a função φ representa o estado de temperatura em M tal que o fluxo na fronteira é proporcional a temperatura.

Visto que tecnicamente é difícil determinar tais autovalores e autofunções, um importante problema teórico consiste em determinar limites inferiores e superiores sobre os autovalores. Como o primeiro autovalor não-nulo tem um caráter variacional dado por

$$\nu_1 = \min_{\int_{\partial M} f = 0} \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma},$$

observamos que é mais comum obtermos estimativas superiores a estimativas inferiores mas, tanto do ponto de vista matemático quanto físico, os limites inferiores são mais interessantes.

Em 1997, Escobar demonstrou, usando o Princípio do Máximo e a Fórmula de Bochner-Lichnerowicz, o seguinte teorema:

Teorema 1. *Seja (M, g) uma superfície compacta com fronteira. Suponhamos M com curvatura Gaussiana, K , não-negativa e, além disso, a curvatura geodésica, k_g , da fronteira ∂M , satisfaça $k_g \geq k_0 > 0$. Então o primeiro autovalor do problema de Stekloff, ν_1 , satisfaz $\nu_1 \geq k_0$. A igualdade ocorre se, e somente se, M é o disco Euclidiano de raio k_0^{-1} .*

Além disso, pelo exemplo 2, seção 2.1, vemos que este resultado pode não ser verificado se retirarmos a hipótese da curvatura Gaussiana ser não-negativa. Este resultado generaliza o Teorema de Payne (1970), o qual tinha mostrado que o teorema acima é verificado para domínios no plano.

Escobar apresentou no mesmo artigo um resultado semelhante para dimensões maiores que dois, a saber:

Teorema 2. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que a curvatura de Ricci de M é não-negativa e a segunda forma fundamental π satisfaz $\pi \geq k_0 I$ em ∂M , $k_0 > 0$. Então*

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}.$$

Os detalhes do Teoremas 1 e Teorema 2 podem ser encontrados nas seções 2.1 e 3.1.

Observamos que no Teorema 2 a estimativa não é ótima no sentido de não sabermos onde ocorre a igualdade, ou seja, a estimativa pode ser melhorada conforme Escobar conjecturou em 1999.

Trabalhando em domínios simplesmente conexos em superfícies, Escobar apresentou outras duas estimativas, a primeira, conforme enunciada a seguir:

Teorema 3. *Seja (M, g_0) uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana constante. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado, simplesmente conexo com $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(x_0))$, onde $B_r(x_0) \subset M$ é uma bola geodésica de raio r com centro $x_0 \in M$. Então*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(x_0)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Ω é isométrico a $B_r(x_0)$.

Usamos para a demonstração deste o Teorema de Weinstock e a Desigualdade Isoperimétrica. A segunda estimativa é uma generalização do Teorema 3 para superfícies compactas com curvatura Gaussiana não-positiva, o qual afirma que:

Teorema 4. *Seja (M, g) uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana não-positiva. Seja $\Omega \subset M$ um conjunto limitado e simplesmente conexo com $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(0))$, onde $B_r(0)$ é a bola Euclidiana de raio r com centro na origem. Então*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(0)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Ω é isométrico a bola Euclidiana $B_r(0)$.

A demonstração deste último segue-se da Desigualdade Isoperimétrica de Weyl para superfícies com curvatura não-positiva, como pode ser visto na seção 2.2. Salientamos que este resultado pode não ser verificado se retirarmos a hipótese dos domínios serem simplesmente conexos, ver exemplo em [6], página 109.

Na seção 3.1 apresentamos, para variedade Riemanniana n -dimensional, compacta e com bordo, com $n \geq 3$, um resultado o qual estabelece uma estimativa para o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função do primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano no bordo da variedade Riemanniana dada. Usaremos para sua demonstração a caracterização variacional do primeiro autovalor não-nulo de Stekloff. Finalizaremos nosso trabalho apresentando a seguinte conjectura feita por Escobar em 1999, ver [6].

Conjectura. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que $\text{Ric}(g) \geq 0$ e a segunda forma fundamental π satisfaz $\pi \geq k_0 I$ em ∂M , $k_0 > 0$. Então*

$$\nu_1 \geq k_0.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, M é a bola Euclidiana de raio $\frac{1}{k_0}$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos as definições básicas e os fatos que serão usados nos capítulos subseqüentes. Na seção 1.1, definiremos operadores importantes em Geometria Riemanniana, como divergente de um campo de vetores e o Laplaciano de uma função $f \in C^\infty(M)$, onde demonstraremos, para tais operadores, sua expressão em coordenadas locais. Na seção 1.2, introduziremos o tensor curvatura, operador indispensável para conceituar curvatura seccional e curvatura escalar, apresentaremos também, na mesma seção, o tensor de Ricci. Na seção 1.3, exibiremos os teoremas de divergência e os teoremas de Green tanto para variedades compactas sem bordo quanto para as variedades compactas com bordo. Introduziremos, na seção 1.4, os problemas de autovalores, dentre os quais o que mais estamos interessados é o problema de autovalor de Stekloff e finalizaremos este capítulo com a fórmula de Bochner-Lichnerowicz e com um resultado decorrente da mesma, bastante utilizado nos demais capítulos desta dissertação.

1.1 Preliminares e Definições

Denotaremos por (M^n, g) uma variedade Riemanniana de classe C^∞ , conexa, compacta e com bordo. Assumiremos que M é orientada e, além disso, que $\partial M \in C^\infty$. Para cada $p \in M$, denotamos por $T_p M$ o espaço tangente a M em p e TM o seu fibrado tangente, o qual definiremos como a união de todos os espaços tangentes. A métrica Riemanniana em M associa, a cada $p \in M$, um produto interno em $T_p M$ o qual denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. A norma associada a esta métrica será representada por $|\cdot|$. A métrica Riemanniana é de classe C^∞ no seguinte sentido: se X e Y são dois campos de vetores de classe C^∞ em M , então $\langle X, Y \rangle$ é uma função real de classe C^∞ em M .

Sejam $f \in C^\infty(M)$ uma função definida numa vizinhança de p e $\xi \in T_p M$ um vetor. Representaremos por $\xi(f)$ a derivada direcional de f em p na direção ξ .

Definição 1.1.1. *Dada uma função real $f \in C^\infty(M)$, definimos o gradiente de f , $\text{grad } f$, como campo de vetores para o qual*

$$\langle \text{grad } f, \xi \rangle = \xi(f) \tag{1.1}$$

para todo $\xi \in TM$.

Segue diretamente das definições que, para $f, h \in C^\infty(M)$, temos

$$\begin{aligned} \text{grad}(f + h) &= \text{grad } f + \text{grad } h, \\ \text{grad}(fh) &= h\text{grad } f + f\text{grad } h. \end{aligned}$$

Visto que a diferenciação de funções em variedades é naturalmente determinada por uma estrutura diferenciável, a derivada de campos de vetores não é determinada por uma estrutura diferenciável. Portanto, faz-se necessário introduzir uma conexão, isto é, uma aplicação ∇ , definida por

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow \mathcal{X}(M) \\ (X, Y) &\rightarrow \nabla_X Y, \end{aligned}$$

onde $\mathcal{X}(M)$ representa o conjunto de campos de vetores, satisfazendo:

1. $\nabla_{f_1 X_1 + f_2 X_2} Y = f_1 \nabla_{X_1} Y + f_2 \nabla_{X_2} Y$;
2. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$;
3. $\nabla_X (fY) = \nabla_X Y + X(f)Y$.

A métrica Riemanniana em M determina uma única conexão, chamada Levi-Civita ou conexão Riemanniana, que satisfaz

1. $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$,
2. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$,

onde $[X, Y]$ é o colchete dos campos X e Y , ou seja, é o campo de vetores dado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Definição 1.1.2. Dado $X \in \mathcal{X}(M)$, definimos *divergente de X* a função real, *div X* , dada por

$$\text{div } X = \text{tr}(Y \mapsto \nabla_Y X).$$

O divergente é uma função de classe C^∞ em M e, claramente, satisfaz para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\begin{aligned} \text{div}(X + Y) &= \text{div } X + \text{div } Y, \\ \text{div}(fX) &= f\text{div } X + \langle \text{grad } f, X \rangle. \end{aligned}$$

Definição 1.1.3. Seja $f \in C^\infty(M)$. O *Laplaciano de f* é a função real, Δf , dada por

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad } f).$$

Segue-se, diretamente, que

$$\begin{aligned}\Delta(f+h) &= \Delta f + \Delta h, \\ \operatorname{div}(h(\operatorname{grad} f)) &= h(\Delta f) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle, \\ \Delta(fh) &= h(\Delta f) + 2 \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle + f(\Delta h).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Consideremos um referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ numa vizinhança de um ponto $p \in M$ e um campo $X = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ definido nesta vizinhança. Podemos escrever o gradiente de f , o divergente de X e o Laplaciano de f neste referencial, como

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f &= \sum_{i=1}^n (e_i f) e_i, \\ \operatorname{div} X &= \sum_{i=1}^n e_i(a_i) - \langle \nabla_{e_i} e_i, X \rangle, \\ \Delta f &= \sum_{i=1}^n e_i e_i f - (\nabla_{e_i} e_i) f,\end{aligned}$$

respectivamente.

Definição 1.1.4. *Seja $f \in C^\infty(M)$. Definimos a Hessiana de f , $Hess f$, como tensor simétrico dado por*

$$Hess f(X, Y) = XYf - \nabla_X Y f.\tag{1.3}$$

Observamos que o Laplaciano é o traço da Hessiana, isto é,

$$\Delta f = \sum_{i=1}^n Hess f(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n e_i e_i f - (\nabla_{e_i} e_i) f.\tag{1.4}$$

Calcularemos agora as expressões dos operadores citados acima em coordenadas locais.

Inicialmente, sejam $U \subset M$ um aberto e $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma carta local. Existem n campos de vetores, $\frac{\partial}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$, associados à carta os quais são chamados derivadas direcionais e satisfazem, para cada $p \in U$ e f , função diferenciável numa vizinhança de p ,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(p)f = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ x^{-1})(x(p)).$$

Para cada $p \in U$, os vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$ formam uma base para o espaço $T_p M$, portanto, dado um campo de vetores X , podemos escrevê-lo nesta base da seguinte forma:

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis.

Observação: Nos cálculos abaixo substituiremos, sempre que for conveniente, $\frac{\partial}{\partial x_i}$ por X_i .

Tomemos $f \in C^\infty(M)$. Então

$$Xf = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f. \quad (1.5)$$

Seja \langle, \rangle a métrica Riemanniana, definimos

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle, & G &= (g_{ij}) \\ g &= \det G, & G^{-1} &= (g^{ij}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde $i, j = 1, \dots, n$. Então

$$Xf = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = \sum_{i,j,k=1}^n x_i g_{ik} g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f = \left\langle X, \sum_{k,j=1}^n \left(g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right) \right\rangle.$$

Segue-se da Definição 1.1.1 que

$$\text{grad } f = \sum_{k,j=1}^n \left(g^{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right). \quad (1.7)$$

Usando os símbolos de Christoffel, os quais são determinados pela igualdade

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$$

em U , calcularemos o divergente do campo X .

Inicialmente observemos que se $Y = \sum_{j=1}^n y_j X_j$ é um campo de vetores, então

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \sum_{j=1}^n y_j \nabla_{X_j} \left(\sum_{i=1}^n x_i X_i \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n y_j x_i \nabla_{X_j} X_i + \sum_{i,j=1}^n y_j X_j(x_i) X_i \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k X_k + \sum_{j,k=1}^n y_j X_j(x_k) X_k \\ &= \sum_{j,k=1}^n y_j \left\{ X_j(x_k) + \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_{ij}^k \right\} X_k. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agora, pela Definição 1.1.2, obtemos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{j=1}^n \left\{ X_j(x_j) + \sum_{i=1}^n x_i \Gamma_{ij}^j \right\}. \quad (1.9)$$

Por outro lado, temos a seguinte igualdade:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right\},$$

ver [5], página 56. Logo

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n x_i \Gamma_{ij}^j &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} + \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_j} g_{il} - \sum_{i,j,l=1}^n x_i g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_l} g_{ij} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j,l=1}^n g^{jl} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{lj} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \operatorname{tr} \left(G^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} G \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\ln g). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Substituindo (1.10) em (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{div} X &= \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j) + \frac{1}{2} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln g) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \left\{ \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j) + \frac{1}{2} \sqrt{g} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\ln g) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (x_j \sqrt{g}). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Usando a Definição 1.1.3 e as equações (1.7) e (1.11), vemos que

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} f \right), \quad (1.12)$$

o qual é a expressão do Laplaciano em coordenadas locais.

1.2 O Tensor Curvatura

Definição 1.2.1. *Sejam $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, definimos o tensor curvatura a correspondência que, para cada $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, associa a função*

$$R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M), \quad (1.13)$$

dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z. \quad (1.14)$$

Propriedades do tensor curvatura

1. Para quaisquer campos $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ temos que

$$R(X, Y) + R(Y, X) = 0;$$

2. A função $R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ pode ser vista como uma função de $T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$, ou seja, $(R(X, Y)Z)(p)$ depende apenas dos valores dos campos X, Y, Z em p .

Sejam x, y vetores linearmente independentes em $T_p M$, então

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)z, t \rangle}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

depende apenas do espaço bi-dimensional gerado por x, y , ver [5] página 94. Denominaremos $K(x, y)$ a curvatura seccional do 2-plano gerado por x, y . Se $G_2(M)$ denota o Grassmanniano, ou seja, a coleção de todos os espaços bi-dimensionais tangentes a M , então $G_2(M)$ pode ser munido de modo natural com uma estrutura diferenciável e, portanto,

$$K : G_2(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

é uma função de classe C^∞ .

No caso particular, quando $\dim M = 2$ e, conseqüentemente, $G_2(M) = TM$ denominamos K a curvatura Gaussiana de M .

Sejam $p \in M, x, y, z \in T_p M$, obtemos para o caso bi-dimensional a igualdade

$$R(x, y)z = K(p) \{ \langle x, z \rangle y - \langle y, z \rangle x \}.$$

Este resultado também é verificado quando a curvatura seccional é constante, ver [5], página 96.

Definição 1.2.2. *Seja $p \in M$, o tensor de Ricci, $Ric : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por*

$$Ric(x, y) = tr(z \rightarrow R(x, z)y).$$

Denominamos o traço de Ric com respeito à métrica Riemanniana por curvatura escalar e representamos por S . Dessa forma, para qualquer base ortonormal, $\{e_1, \dots, e_n\}$, de T_pM , temos

$$Ric(x, y) = \sum_{i=1}^n \langle R(x, e_i)y, e_i \rangle$$

e, em particular, Ric é uma forma bilinear simétrica em T_pM . Se $x = |x|e_n$, vemos que

$$Ric(x, x) = \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} K(e_i, e_n) \right\} |x|^2.$$

No caso geral, obtemos

$$S = \sum_{i \neq j} K(e_i, e_j).$$

1.3 As Fórmulas de Green

Seja M uma variedade Riemanniana com a métrica Riemanniana dada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Associamos a tal métrica uma teoria de integração a qual possui as seguintes propriedades:

1. A função f é mensurável se, para cada carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \circ x^{-1}$ é mensurável na imagem de U em \mathbb{R}^n ;
2. Para toda cobertura $\{x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \in I\}$, onde I é um conjunto aberto de M por cartas subordinadas a partição da unidade $\{\varphi_\alpha : \alpha \in I\}$, a medida Riemanniana em M é dada pela densidade

$$dv = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} \sqrt{g_{\alpha}} dx_{\alpha}^1 \dots dx_{\alpha}^n,$$

onde $dx_{\alpha}^1 \dots dx_{\alpha}^n$ é a densidade da medida de Lebesgue em $x_{\alpha}(U_{\alpha}) \subset \mathbb{R}^n$ e g_{α} é o determinante da matriz $G_{\alpha} = (g_{\alpha})_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial(x_{\alpha})_i}, \frac{\partial}{\partial(x_{\alpha})_j} \right\rangle$ da carta $x_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

O ponto essencial é que a densidade $\sqrt{g_{\alpha}} dx_{\alpha}^1 \dots dx_{\alpha}^n$ no domínio U é independente da função x . A partição da unidade é o artifício no qual a medida é definida globalmente em M .

Teorema 1.3.1 (Teorema da Divergência). *Seja X uma campo de vetores de classe C^1 com suporte compacto. Então*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dv = 0 \tag{1.15}$$

Demonstração. Ver [4], página 142.

Teorema 1.3.2 (Teorema de Green). *Sejam $h \in C^1(M)$ e $f \in C^2(M)$ tais que $h(\text{grad } f)$ tem suporte compacto. Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle\} dv = 0. \quad (1.16)$$

Se também assumirmos que f e h têm suporte compacto e, além disso, $h \in C^2(M)$ então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dv = 0 \quad (1.17)$$

Demonstração. Segue-se diretamente do Teorema 1.3.1 e da igualdade (1.2). ■

Suponhamos que M tem fronteira $\partial M \neq \emptyset$ com a métrica e a medida de ∂M induzida pela métrica Riemanniana e pela densidade em M . Denotamos a densidade em ∂M por $d\sigma$. Seja η o vetor normal unitário apontando para fora em ∂M . Diante disso, temos a seguinte versão do Teorema da Divergência.

Teorema 1.3.3 (Teorema da Divergência). *Seja X uma campo de vetores de classe $C^1(\overline{M})$ com suporte compacto em \overline{M} . Então*

$$\int_M (\text{div } X) dv = \int_{\partial M} \langle X, \eta \rangle d\sigma. \quad (1.18)$$

Demonstração. Ver [4], página 143.

Teorema 1.3.4 (Fórmula de Green). *Sejam $h \in C^1(\overline{M})$, $f \in C^2(\overline{M})$ tais que $h(\text{grad } f)$ tem suporte compacto em \overline{M} . Então*

$$\int_M \{h\Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle\} dv = \int_{\partial M} h \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma \quad (1.19)$$

Se h também é $C^2(\overline{M})$ e ambas f , h tem suporte compacto em M , então

$$\int_M \{h\Delta f - f\Delta h\} dv = \int_{\partial M} \left\{ h \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \frac{\partial h}{\partial \eta} \right\} d\sigma \quad (1.20)$$

Demonstração. Usar o Teorema 1.3.3 e a equação (1.2). ■

Como aplicação dos Teoremas de Green temos os seguintes resultados.

Corolário 1.3.1. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta sem bordo e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Então φ é uma função constante.*

Demonstração. Usando o Teorema 1.3.2 temos, tomando $h = f = \varphi$,

$$\int_M \{\varphi\Delta\varphi + |\text{grad}\varphi|^2\} dv = 0.$$

Como $\Delta\varphi = 0$ em M , temos

$$\int_M |\text{grad}\varphi|^2 dv = 0,$$

logo $\text{grad } \varphi = 0$ e, conseqüentemente, φ é constante. ■

Corolário 1.3.2. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta com bordo e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, tal que*

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M \\ \varphi &= 0 \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Então φ é a função identicamente nula.

Demonstração. Tomando $h = f = \varphi$ no Teorema 1.3.4, obtemos

$$\int_M \{\varphi\Delta\varphi + |\text{grad}\varphi|^2\} dv = \int_{\partial M} \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} d\sigma.$$

Usando as hipóteses do corolário vemos que $\int_M |\text{grad}\varphi|^2 dv = 0$, o que implica que $|\text{grad}\varphi| = 0$ e, portanto, $\varphi = \text{cte}$. Visto que $\varphi = 0$ em ∂M , temos que $\varphi \equiv 0$. ■

1.4 Problemas de Autovalores

Os modelos matemáticos para os problemas de autovalores em Geometria Riemanniana surgiram das aplicações físicas em diversas áreas como: acústica, ondulatória, elasticidade, etc. Estes problemas vêm sendo estudados desde o século XVIII e são rigorosamente divididos em dois tipos: problemas diretos e problemas inversos.

O problema direto, o qual é o nosso interesse neste trabalho, busca informações sobre os autovalores e as autofunções, ver Definição 1.4.1, do problema correspondente em termos da geometria da variedade Riemanniana, embora saibamos que usualmente não é possível determinar especificamente tais autofunções e autovalores.

Um importante problema teórico consiste em determinar limites inferiores e superiores sobre os autovalores. Devido a sua forma variacional, ver [3], página 16, vemos que é mais fácil obter limites superiores do que limites inferiores para os autovalores mas, tanto do ponto de vista matemático quanto físico, os limites inferiores são os mais interessantes, ver [1], capítulo III.

No problema inverso assume-se que um dos autovalores do problema é conhecido e busca-se obter informações sobre a variedade Riemanniana (M, g) como: curvatura, topologia, etc, ver [1], capítulo VII.

Em virtude disso, apresentaremos, nesta seção, alguns problemas de autovalores importantes em geometria Riemanniana e faremos algumas considerações. Para maiores detalhes e informações ver [1], capítulo III; [3], capítulo I; [12], capítulo III e [8], capítulo II.

Problemas de autovalor fechado: Seja M compacta, conexa e sem bordo. Encontrar todos os números reais ν para os quais existe uma solução não-trivial $\varphi \in C^2(M)$ para

$$\Delta\varphi + \nu\varphi = 0.$$

Problemas de autovalor de Dirichlet: Seja M compacta, conexa e com bordo. Encontrar todos os números reais ν para os quais existe uma solução não-trivial $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$ satisfazendo

$$\begin{aligned}\Delta\varphi + \nu\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \varphi &= 0 \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Problemas de autovalor de Neumann: Para $\partial M \neq \emptyset$, M compacta e conexa. Encontrar todos os números reais ν para os quais o sistema

$$\begin{aligned}\Delta\varphi + \nu\varphi &= 0 \text{ em } M \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= 0 \text{ em } \partial M\end{aligned}$$

admite uma solução não-trivial $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$.

Problemas de autovalor de Stekloff: Seja M compacta, conexa e com $\partial M \neq \emptyset$. Encontrar todos os números reais ν para os quais o sistema

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu\varphi \text{ em } \partial M.\end{aligned}\tag{1.21}$$

admite uma solução não-trivial $\varphi \in C^2(M) \cap C^0(\overline{M})$.

Definição 1.4.1. *Uma função φ satisfazendo qualquer um dos problemas descritos acima é denominada autofunção e ν é dito autovalor para o problema correspondente. O conjunto das soluções para cada um dos problemas acima associado ao autovalor ν constitui um espaço vetorial denominado auto-espaço E_ν .*

Um resultado simples é que, para qualquer um dos problemas anteriores, os autovalores devem ser não-negativos. De fato, usando as fórmulas de Green e a condição de fronteira, considerando $f = g = \varphi$, obtemos que

$$\nu = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dv}{\int_M \varphi^2 dv},$$

nos três primeiros problemas. No problema de Stekloff, usando o mesmo argumento anterior, vemos que

$$\nu = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma}.$$

Visto que nosso objetivo, nesta dissertação, é estimar o primeiro autovalor de Stekloff, apresentaremos alguns resultados para este problema que serão bastante usados posteriormente. Para os leitores interessados em maiores informações sobre os problemas de autovalores: fechado, Dirichlet e Neumann recomendamos [1], [3] e [12], como citados anteriormente.

Teorema 1.4.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. O conjunto de autovalores do problema de Stekloff consiste de uma seqüência*

$$0 \leq \nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \uparrow +\infty$$

e cada um dos seus auto-espacos associados possui dimensao finita. Além disso, o espaco vetorial gerado por todos os auto-espacos é denso em $L^2(M)$.

Demonstração. Ver [8], página 28.

Teorema 1.4.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Existe um mínimo para o problema variacional*

$$\nu_1 = \min_{f \in A} \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma},$$

onde $A = \{f \in C^\infty(M); \int_{\partial M} f d\sigma = 0\}$. O mínimo satisfaz o problema de Stekloff (1.21).

Demonstração. Ver [8], página 26.

Teorema 1.4.3. *O k -ésimo autovalor para o problema de Stekloff é caracterizado por*

$$\nu_k = \max_{\{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}} \left(\min_{\varphi \perp \{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}} \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|^2 dv}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma} \right),$$

onde as funções $\{f_1, f_2, \dots, f_{k-1}\}$ são contínuas por partes.

Demonstração. Ver [8], página 32.

1.5 A Fórmula de Bochner-Lichnerowicz

A fórmula de Bochner-Lichnerowicz, embora seja uma identidade simples, é bastante utilizada em Análise Geométrica para obter desigualdades importantes, como se vê em vários teoremas de comparação e em estimativas do gradiente. Também é bastante aplicada para estimar autovalores em variedades Riemanniana compactas e, portanto, será bastante usada em diversas partes desta dissertação.

Proposição 1.5.1 (Fórmula de Bochner-Lichnerowicz). *Seja $f \in C^3$ uma função definida em M . Então*

$$\frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) = |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f).$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em torno do ponto p . Neste referencial, o gradiente de f é dado por

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n a_i e_i.$$

Logo

$$e_i f = f_i = \langle \text{grad } f, e_i \rangle = a_i,$$

portanto,

$$\text{grad } f = \sum_{i=1}^n f_i e_i.$$

Conseqüentemente,

$$|\text{grad } f|^2 = \sum_{i=1}^n f_i^2.$$

Observe que, para cada $j = 1, \dots, n$, temos

$$\left(\frac{1}{2} |\text{grad } f|^2 \right)_j = \sum_{i=1}^n f_i f_{ij}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (|\text{grad } f|^2)_{jj} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n f_i f_{ij} \right)_j = \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{ijj}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

A equação de Ricci é dada por, para todo $1 \leq i, j \leq n$,

$$f_{jij} = f_{ijj} + R_{ij} f_j, \quad (1.23)$$

onde R_{ij} denota os coeficientes do tensor de Ricci.

Usando a simetria da hessiana e a equação de Ricci, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\Delta |\text{grad } f|^2) &= \sum_{i,j=1}^n (f_{ij}^2 + f_i f_{jji} + R_{ij} f_i f_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n f_{ij}^2 + \sum_{i,j=1}^n f_i f_{jji} + \sum_{i,j=1}^n R_{ij} f_i f_j \\ &= |\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f). \end{aligned}$$

■

Proposição 1.5.2. *Sejam (M^n, g) uma variedade n -dimensional, compacta com fronteira e $f \in C^\infty(M)$. Então*

$$\begin{aligned} &\int_M ((\Delta f)^2 - |\text{Hess } f|^2 - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f)) \, dv \\ &= \int_{\partial M} (\pi(\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v) + u(\overline{\Delta} v + (n-1)h_g u) - \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle) \, d\sigma, \end{aligned}$$

onde $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$, $v = f$, $\bar{\Delta}$ é o Laplaciano e $\overline{\text{grad}}$ é o gradiente em ∂M com respeito à métrica induzida em M , e além disso, π é a segunda forma fundamental e h_g é a curvatura média.

Demonstração. Integrando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz, obtemos que

$$\int_M \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) dv = \int_M (|\text{Hess } f|^2 + \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle + \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f)) d\sigma.$$

Por outro lado, usando o Teorema da Divergência, vemos que o membro esquerdo da expressão acima é dado por

$$\begin{aligned} \int_M \frac{1}{2} \Delta (|\text{grad } f|^2) dv &= \frac{1}{2} \int_M \text{div } \text{grad } (|\text{grad } f|^2) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial M} \langle \text{grad } (|\text{grad } f|^2), \eta \rangle d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\text{grad } f|^2) d\sigma. \end{aligned}$$

Agora, para calcularmos os termos da expressão acima na fronteira, tomaremos um campo ortonormal numa vizinhança do ponto $P \in \partial M$, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, tal que e_n seja o vetor normal apontando para fora. Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\text{grad } f|^2) = \frac{1}{2} e_n \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} + f_n f_{nn}. \quad (1.24)$$

Observe que, para $1 \leq i \leq n-1$,

$$f_{in} = e_i e_n f - \nabla_{e_i} e_n f = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} e_n, e_j \rangle f_j = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} f_j = u_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_{ij} v_j,$$

onde h_{ij} são os coeficientes da segunda forma fundamental. Dessa forma,

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i f_{in} = \sum_{i=1}^{n-1} v_i u_i - \sum_{i,j=1}^{n-1} h_{ij} v_i v_j = \langle \overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} u \rangle - \pi(\overline{\text{grad}} v, \overline{\text{grad}} v). \quad (1.25)$$

Usando integração por partes, temos

$$\int_M \langle \text{grad } f, \text{grad } (\Delta f) \rangle = - \int_M (\Delta f)^2 dv + \int_{\partial M} (\Delta f) \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma. \quad (1.26)$$

Como $p \in \partial M$ e $\Delta f = f_{nn} + \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii}$, vemos que

$$\begin{aligned}
\Delta f - f_{nn} &= \sum_{i=1}^{n-1} f_{ii} = \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_i f - \nabla_{e_i} e_i f \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} e_i e_i f - \bar{\nabla}_{e_i} e_i f + \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\nabla}_{e_i} e_i f - \nabla_{e_i} e_i f \\
&= \bar{\Delta} f + \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i} e_i - \nabla_{e_i} e_i, e_n \rangle f_n,
\end{aligned}$$

onde última igualdade segue-se da definição do $\bar{\Delta}$ e do fato que $\bar{\nabla}$ é a projeção ortogonal de ∇ em ∂M . Portanto

$$\begin{aligned}
\Delta f - f_{nn} &= \bar{\Delta} f - \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} e_i, e_n \rangle f_n \\
&= \bar{\Delta} f + \sum_{i=1}^{n-1} \langle e_i, \nabla_{e_i} e_n \rangle f_n = \bar{\Delta} v + (n-1)h_g u, \tag{1.27}
\end{aligned}$$

onde h_g é a curvatura média.

Usando (1.24), (1.25) e (1.27), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial \eta} (|\text{grad } f|^2) d\sigma - \int_{\partial M} (\Delta f) \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma = \\
&\int_{\partial M} \langle \overline{\text{grad } v}, \overline{\text{grad } u} \rangle d\sigma - \int_{\partial M} \pi (\overline{\text{grad } v}, \overline{\text{grad } v}) d\sigma - \int_{\partial M} u (\bar{\Delta} v + (n-1)h_g u) d\sigma
\end{aligned}$$

Usando esta última igualdade, temos

$$\begin{aligned}
&\int_M \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) dv + \int_M |\text{Hess } f|^2 dv + \int_M \langle \text{grad } f, \text{grad}(\Delta f) \rangle dv - \int_{\partial M} (\Delta f) \frac{\partial f}{\partial \eta} d\sigma = \\
&\int_{\partial M} \langle \overline{\text{grad } v}, \overline{\text{grad } u} \rangle d\sigma - \int_{\partial M} \pi (\overline{\text{grad } v}, \overline{\text{grad } v}) d\sigma - \int_{\partial M} u (\bar{\Delta} v + (n-1)h_g u) d\sigma,
\end{aligned}$$

e, portanto, usando a equação (1.26), concluímos que

$$\begin{aligned}
\int_M ((\Delta f)^2 - \text{Ric}(\text{grad } f, \text{grad } f) - |\text{Hess } f|^2) dv &= \int_{\partial M} \pi (\overline{\text{grad } v}, \overline{\text{grad } v}) d\sigma - \\
&\int_{\partial M} \langle \overline{\text{grad } v}, \overline{\text{grad } u} \rangle d\sigma + \int_{\partial M} u (\bar{\Delta} v + (n-1)h_g u) d\sigma.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 2

Teoremas de Comparação em Superfícies

Neste capítulo, analisaremos o problema de autovalores de Stekloff para as superfícies, ou seja, em variedades Riemannianas de dimensão igual a dois. Nosso interesse neste problema é estimar, inferiormente e superiormente, o primeiro autovalor não-nulo do problema de Stekloff em função da geometria da superfície. Na seção 2.1, usaremos a geometria da superfície para estimar, inferiormente, o primeiro autovalor de Stekloff em superfícies de curvatura Gaussiana não-negativa. Na seção 2.2, estimaremos superiormente o primeiro autovalor de Stekloff em domínios simplesmente conexos na superfície.

2.1 Estimativa Inferior para o Primeiro Autovalor de Stekloff.

Seja (M, g) uma superfície compacta com fronteira. Discutiremos o primeiro autovalor não-nulo do problema de Stekloff, a saber:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= \nu_1\varphi \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Teorema 2.1.1. *Seja (M, g) uma superfície compacta com fronteira. Suponhamos M com curvatura Gaussiana, K , não-negativa e, além disso, a curvatura geodésica, k_g , da fronteira ∂M , satisfaça $k_g \geq k_0 > 0$. Então o primeiro autovalor do problema de Stekloff, ν_1 , satisfaz $\nu_1 \geq k_0$. A igualdade ocorre se, e somente se, M é o disco Euclidiano de raio k_0^{-1} .*

Demonstração. Seja φ uma autofunção não-constante para o problema de Stekloff. Aplicando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz à função $f = \frac{1}{2}|\text{grad } \varphi|^2$, obtemos

$$\Delta f = |\text{Hess}\varphi|^2 + \langle \text{grad } \varphi, \text{grad } (\Delta\varphi) \rangle + K|\text{grad } \varphi|^2.$$

Como φ é uma função harmônica e $K \geq 0$, temos

$$\Delta f = |\text{Hess}\varphi|^2 + K|\text{grad}\varphi|^2 \geq 0, \quad (2.1)$$

e, portanto, f é uma função subharmônica. O Princípio do Máximo mostra que se M é uma variedade Riemanniana compacta com bordo e $f \in C^2(M)$ é uma função tal que

$$\Delta f \geq 0$$

em M e, além disso, seja P é o ponto de máximo de f então verifica-se que:

1. Se P é um ponto interior em M então f é identicamente constante;
2. Se $P \in \partial M$ então $\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) > 0$, ou seja, a derivada na direção normal apontando para fora tomada em P é positiva, ver [11].

Suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) > 0$. Seja (t, x) as coordenadas de Fermi em torno de P , ou seja, x representa um ponto sobre ∂M e t a distância à fronteira do ponto x .

Escreveremos a métrica na coordenada de Fermi.

Observemos, primeiramente, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle. \\ &= \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$0 = \frac{d}{dx} \left\langle \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dx} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle. \quad (2.3)$$

Usando (2.2) e (2.3) temos que, fixado x ,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(t, x), \frac{\partial}{\partial x}(t, x) \right\rangle = cte.$$

para todo t . Tomando $t = 0$, obtemos

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}(t, x), \frac{\partial}{\partial x}(t, x) \right\rangle = 0, \quad \forall (t, x) \in M,$$

portanto

$$g = dt^2 + h^2(t, x)dx^2,$$

onde $h^2(t, x) = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}(t, x), \frac{\partial}{\partial x}(t, x) \right\rangle$.

Considerando que ∂M está parametrizada pelo comprimento de arco, temos que $h(P) = 1$ e $\frac{\partial h}{\partial x}(P) = 0$.

Calcularemos, agora, o gradiente de φ . Para isso escrevamos

$$\text{grad } \varphi = a \frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \left\langle \text{grad } \varphi, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle = a \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \left\langle \text{grad } \varphi, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = bh^2. \end{aligned}$$

Logo

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} |\text{grad } \varphi|^2 = \langle \text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi \rangle &= \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + h^{-2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2, \end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - h^{-3} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Calculando a expressão acima no ponto P , obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (2.4)$$

pois P é um ponto de máximo de f na direção x .

Por outro lado, sabemos, da equação (1.12), que o Laplaciano em coordenadas locais é dado por

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right).$$

Observe que

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h^{-2} \end{pmatrix}, \quad g = \det G = h^2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= h^{-1} \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h g^{i1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(h g^{i2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(h^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right\} \\ &= h^{-1} \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{-2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + h^{-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\}. \end{aligned}$$

Tomando a equação acima no ponto P , obtemos que

$$\Delta\varphi = \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \quad (2.5)$$

Agora, calcularemos a curvatura geodésica de ∂M . Observemos que

$$\begin{aligned} k_g &= - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = - \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \\ &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial t} (h^2) = -h \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

Tomando esta última igualdade em P , vemos que

$$k_g = - \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.6)$$

Resulta de (2.5) e (2.6) que

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - k_g \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0. \quad (2.7)$$

Derivando f em relação a t obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - h^{-3} \frac{\partial h}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Assumindo a expressão acima em P e usando o fato que $k_g = - \frac{\partial h}{\partial t}$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + k_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Usando (2.7) concluímos, em P ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} + k_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - k_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \\ &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) \neq 0$, segue-se de (2.4) que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}. \quad (2.9)$$

A condição de fronteira implica que $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \nu_1 \varphi$, logo $-\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu_1 \varphi$ e, conseqüentemente,

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} = \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (2.10)$$

Dessa forma, (2.9) e (2.10) implicam

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t} \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \nu_1 \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Usando (2.8), (2.10) e (2.11) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 - \nu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \nu_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \\ &= k_g |\text{grad } \varphi|^2 - \nu_1 |\text{grad } \varphi|^2 \\ &= (k_g - \nu_1) |\text{grad } \varphi|^2 < 0. \end{aligned}$$

Logo $\nu_1 > k_g(P) \geq k_0$.

Suponhamos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$. Sabemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + h^{-2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - h^{-3} \frac{\partial h}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2.$$

Derivando a expressão acima em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + h^{-2} \left\{ \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right\} - 2h^{-3} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &\quad - h^{-3} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\} + 3h^{-4} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial h}{\partial x}(P) = 0$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2. \quad (2.12)$$

Utilizando a equação (2.10) em (2.12), vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \nu_1^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \\ &= \nu_1^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + (-\nu_1 \varphi) \left(-\nu_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$, obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P) = \nu_1^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 \leq 0, \quad (2.13)$$

pois P é um ponto de máximo de f na direção x .

Aplicando a condição de fronteira e a igualdade $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(P) = 0$ na equação (2.8), encontraremos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t}(P) &= k_g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 + \nu_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ &= k_g \nu_1^2 \varphi^2 + \nu_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Visto que $\frac{\partial f}{\partial t}(P) = -\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) < 0$ temos

$$k_g \nu_1^2 \varphi^2 + \nu_1 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} < 0$$

e portanto

$$k_g \nu_1^3 \varphi^2 + \nu_1^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} < 0. \quad (2.14)$$

Somando (2.13) com (2.14) resulta

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu_1^2 \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + k_g \nu_1^3 \varphi^2 < 0,$$

o qual completando o quadrado desta última desigualdade, obtemos

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \nu_1^2 \varphi \right)^2 + \nu_1^3 (k_g - \nu_1) \varphi^2 < 0,$$

portanto $\nu_1 > k_g \geq k_0$.

Suponhamos agora que f é constante. Observe que $f \neq 0$ pois φ não é constante, logo f é harmônica e segue-se da equação (2.1) que $Hess \varphi = 0$ e $K = 0$ em M .

Seja $\{e_1, e_2\}$ um campo ortonormal tal que e_1 é tangente a ∂M e $e_2 = \eta$. Logo

$$\begin{aligned} 0 = Hess \varphi(e_1, e_2) &= e_1 e_2 \varphi - \nabla_{e_1} e_2 \varphi \\ &= e_1 (\nu_1 \varphi) - k_g e_1 \varphi \\ &= (\nu_1 - k_g) e_1 \varphi. \end{aligned}$$

Observe que se $e_1 \varphi = 0$ em ∂M então $\varphi = cte$ em ∂M .

Dessa forma, chegamos ao seguinte sistema:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 0 \text{ em } M \\ \varphi &= cte \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Considere $\psi = \varphi - cte$. Temos

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= 0 \text{ em } M \\ \psi &= 0 \text{ em } \partial M.\end{aligned}$$

Pelo corolário (1.3.2) temos que ψ é constante. Conseqüentemente φ é constante, o que é uma contradição. Logo $\nu_1 = k_g$, exceto quando $e_1\varphi = 0$. Como $Hess\varphi(e_1, e_1) = 0$ temos

$$\begin{aligned}Hess\varphi(e_1, e_1) &= e_1e_1\varphi - \nabla_{e_1}e_1\varphi \\ &= e_1e_1\varphi + k_g e_2\varphi \\ &= e_1e_1\varphi + k_g\nu_1\varphi = 0.\end{aligned}$$

Portanto φ satisfaz, na fronteira, a equação diferencial de segunda ordem dada por

$$\begin{aligned}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k_g\nu_1\varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= \varphi(l)\end{aligned}$$

onde l representa o comprimento de ∂M .

Como a função φ não é identicamente nula temos que φ_1 se anula num número finito de pontos, portanto $\nu_1 = k_g$, exceto num número finito de pontos. Usando a continuidade de k_g , concluímos que $\nu_1 = k_g$ em todos os pontos. Logo $\nu_1 = k_g \geq k_0$.

Se $\nu_1 = k_0$, então f é constante, pois caso contrário, $\frac{\partial f}{\partial \eta}(P) > 0$ e teríamos $\nu_1 > k_g(P) \geq k_0$, contradição. Como f é constante temos que $k_g = k_0$ em todos os pontos e $K = 0$ em M , logo M é o disco de raio $\frac{1}{k_0}$. ■

Estabeleceremos agora algumas relações entre os primeiros autovalores não-nulos de Stekolff em variedades Riemannianas com métricas conformes.

Sejam (M, g_0) uma superfície compacta com fronteira e $g = e^{2f}g_0$ a métrica conforme obtida da métrica g_0 . Denotamos por $\nu_1(g)$ o primeiro autovalor não-nulo para o problema de Stekolff com respeito à métrica g . As seguintes proposições estabelecem a relação entre $\nu_1(g)$ e $\nu_1(g_0)$.

Proposição 2.1.1.

$$\nu_1(g) \geq (\max e^{f(x)})^{-1} \nu_1(g_0).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C^1(\overline{M})$. Definimos

$$Q_g(\varphi) = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|_g^2 dv_g}{\int_{\partial M} \varphi^2 d\sigma_g}.$$

Como a integral de Dirichlet é um invariante conforme e $d\sigma_g = e^f d\sigma_{g_0}$, temos

$$Q_g(\varphi) = \frac{\int_M |\text{grad } \varphi|_{g_0}^2 dv_0}{\int_{\partial M} \varphi^2 e^f d\sigma_0} \geq \frac{Q_{g_0}(\varphi)}{\max_{x \in \partial M} e^{f(x)}}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\nu_1(g) = \min_{f \in A} \frac{\int_M |\text{grad } f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma},$$

onde $A = \{f \in C^\infty / \int_{\partial M} f d\sigma = 0\}$.

Portanto, tomando o ínfimo sobre todas as funções $\varphi \in A$, obtemos que

$$\nu_1(g) \geq \left(\max_{x \in \partial M} e^{f(x)} \right)^{-1} \nu_1(g_0).$$

■

Segue-se diretamente da proposição anterior, os seguintes resultados:

Corolário 2.1.1. *Se f for constante em ∂M , então*

$$\nu_1(g) = e^{-f} \nu_1(g_0).$$

Corolário 2.1.2. *Seja (M, g_0) uma superfície compacta com fronteira e curvatura Gaussiana não-negativa. Suponhamos que a curvatura geodésica de ∂M , com respeito à métrica g_0 , satisfaz $k_{g_0} \geq k_0 > 0$. Então para a métrica $g = e^{2f} g_0$, temos*

$$\nu_1(g) \geq \left(\max_{x \in \partial M} e^{f(x)} \right)^{-1} k_g$$

e

$$\nu_1(g) \geq \left(\max_{x \in \partial M} e^{f(x)} \right)^{-1} \left(\min_{x \in \partial M} \left\{ e^{f(x)} k_g(x) - \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}}(x) \right\} \right).$$

Demonstração. A primeira desigualdade é conseqüência direta da Proposição 2.1.1 e do Teorema 2.1.1. A segunda desigualdade segue do fato que, se $g = e^{2f} g_0$, então k_g e k_{g_0} satisfazem

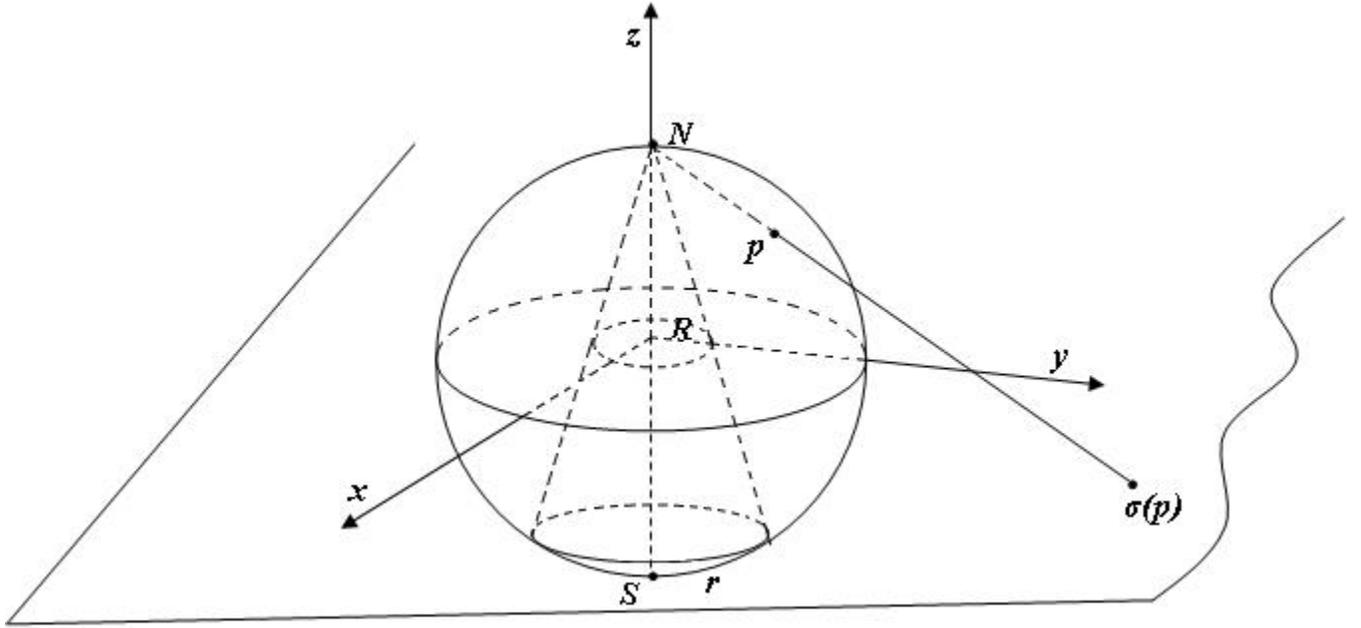
$$k_g = e^{-f} \left(k_{g_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \right).$$

■

Apresentaremos, a seguir, dois exemplos do problema de autovalor de Stekloff.

Exemplo 1. *Sejam S^2 a esfera unitária em \mathbb{R}^3 e $N = \{(0, 0, 1)\}$ o pólo norte. Seja $\sigma: S^2 - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica, a qual é definida por*

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$



Usando coordenadas locais temos que

$$\varphi(u, v) = \left(\sqrt{1 - v^2} \cos u, \sqrt{1 - v^2} \sin u, v \right), \quad v \in (-1, 1)$$

é uma parametrização de $S^2 - \{N \cup S\}$ e, além disso

$$\psi = \sigma \circ \varphi = \left(\sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \cos u, \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \sin u \right).$$

Desta forma,

$$\varphi_u = \left(-\sqrt{1 - v^2} \sin u, \sqrt{1 - v^2} \cos u, 0 \right), \quad \varphi_v = \left(\frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}} \cos u, \frac{-v}{\sqrt{1 - v^2}} \sin u, 1 \right)$$

implicam

$$g_{11} = 1 - v^2, \quad g_{12} = 0 \text{ e } g_{22} = \frac{1}{1 - v^2}.$$

Por outro lado, os coeficientes de ψ são dados por

$$\bar{g}_{11} = \frac{1+v}{1-v}, \quad \bar{g}_{12} = 0 \text{ e } \bar{g}_{22} = \frac{1}{(1-v)^3(1+v)}.$$

Observe que

$$\bar{g}_{11} = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 g_{11}, \quad \bar{g}_{12} = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 g_{12} \text{ e } \bar{g}_{22} = \left(\frac{1}{1-v}\right)^2 g_{22}.$$

Portanto, para $w_1, w_2 \in T_p S$ temos

$$\lambda^2 \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)},$$

onde $\lambda = \frac{1}{1-v}$.

Como

$$\sigma^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}, \frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2} \right),$$

temos

$$v = \frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}.$$

Denominamos $x = (x_1, x_2)$, podemos escrever

$$v = \frac{-1+\|x\|^2}{1+\|x\|^2} \Rightarrow 1-v = \frac{2}{1+\|x\|^2}$$

Definimos a métrica em $T_p S$ por

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{\lambda^2} \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= (1-v)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \left(\frac{2}{1+\|x\|^2} \right)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)}, \end{aligned}$$

a qual representamos abreviadamente por

$$(\sigma^{-1})^*(g_0) = e^{2f} \delta_{ij},$$

onde $e^{2f} = \frac{4}{(1+\|x\|^2)^2}$.

A bola geodésica de raio r com centro $S = (0, 0, -1)$, $B_r(S) \subset S^2$ satisfaz que $\sigma(B_r(S)) = B_R(0)$, onde $R = \tan\left(\frac{r}{2}\right)$. Tomando $g = (\sigma^{-1})^*(g_0)$ vemos que a função f é constante em ∂B_R . Dessa forma o corolário (2.1.1) implica que

$$\nu_1(g) = e^{-f} \frac{1}{R}. \quad (2.15)$$

Usando a igualdade

$$k_g = e^{-f} \left(k_{g_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \right), \quad (2.16)$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
k_g &= e^{-f} \left(k_{g_0} + \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \right) \\
&= e^{-f} \frac{1}{R} + e^{-f} \frac{\partial f}{\partial \eta_{g_0}} \\
&= e^{-f} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\
&= \frac{1+R^2}{2} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1+R^2}{2} \right) \\
&= \frac{1+R^2}{2R} - R = \frac{1-R^2}{2R} = \left(\frac{2R}{1-R^2} \right)^{-1} \\
&= \left(\frac{2 \tan(r/2)}{1 - \tan^2(r/2)} \right)^{-1} = \tan^{-1} r = \cot r.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado, por (2.15) e (2.17) temos

$$\begin{aligned}
\nu_1(g) &= k_g + \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\
&= \cot r + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1+R^2}{2} \right) \\
&= \cot r + R \\
&= \cot r + \tan \frac{r}{2}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2. Considere \mathbb{R}^3 munido com a métrica $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$, onde $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Definimos espaço Hiperbólico o conjunto

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; \langle x, x \rangle = -1, x_3 > 0\}.$$

Seja $D = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; u_1^2 + u_2^2 < 1\}$. Consideremos a “projeção estereográfica” $\sigma : H^2 \rightarrow D$ definida por

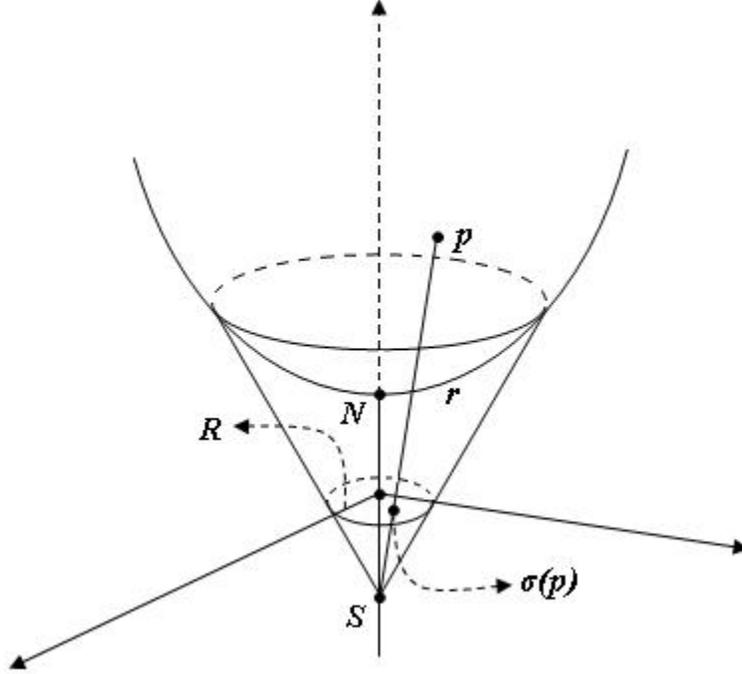
$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3} \right).$$

Usando coordenadas locais temos que

$$\varphi(u, v) = \left(v \cos u, v \sin u, \sqrt{1+v^2} \right),$$

$v > 0$ e $u \in (0, 2\pi)$, é uma parametrização do espaço hiperbólico excluindo apenas um meridiano e o ponto $N = (0, 0, 1)$, mas qualquer ponto a menos de N é coberto ajustando o domínio.

Os coeficientes de φ são $g_{11} = v^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = \frac{1}{1+v^2}$.



Tomando

$$\psi = \sigma \circ \varphi = \left(\frac{v}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \cos u, \frac{v}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \operatorname{sen} u \right),$$

obtemos,

$$\bar{g}_{11} = \frac{v^2}{(1 + \sqrt{1 + v^2})^2}, \quad \bar{g}_{12} = 0 \text{ e } \bar{g}_{22} = \frac{1}{(1 + v^2)(1 + \sqrt{1 + v^2})^2}.$$

donde,

$$\bar{g}_{11} = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \right)^2 g_{11}, \quad \bar{g}_{12} = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \right)^2 g_{12} \text{ e } \bar{g}_{22} = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}} \right)^2 g_{22}.$$

Portanto para $w_1, w_2 \in T_p H^2$ temos,

$$\lambda^2 \langle w_1, w_2 \rangle_p = \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)},$$

onde $\lambda = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + v^2}}$. Como

$$\sigma^{-1}(x_1, x_2) = \left(\frac{2x_1}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{2x_2}{1 - x_1^2 - x_2^2}, \frac{1 + x_1^2 + x_2^2}{1 - x_1^2 - x_2^2} \right),$$

escrevendo $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$, obtemos

$$\sqrt{1 + v^2} = \frac{1 + \|x\|^2}{1 - \|x\|^2} \Rightarrow 1 + \sqrt{1 + v^2} = \frac{2}{1 - \|x\|^2}.$$

Definimos a métrica em $T_p H^2$ por

$$\begin{aligned}\langle w_1, w_2 \rangle_p &= \frac{1}{\lambda^2} \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \left(1 + \sqrt{1 + v^2}\right)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)} \\ \langle w_1, w_2 \rangle_p &= \left(\frac{2}{1 - \|x\|^2}\right)^2 \langle d\sigma_p(w_1), d\sigma_p(w_2) \rangle_{\sigma(p)},\end{aligned}$$

ou abreviadamente por

$$(\sigma^{-1})^*(g_0) = e^{2f} \delta_{ij},$$

onde $e^{2f} = \frac{4}{(1 - \|x\|^2)^2}$.

Tomemos agora a bola geodésica de centro $N = (0, 0, 1)$ e raio r . Então $r = \ell(\alpha(t))$, onde $t \in [0, R]$ e $\alpha(t) = \sigma^{-1}(t) = \left(0, \frac{2t}{1 - t^2}, \frac{1 + t^2}{1 - t^2}\right)$.

Dessa forma,

$$r = \int_0^R \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^R \frac{2}{1 - t^2} dt = \ln \left(\frac{1 + R}{1 - R}\right).$$

Logo $e^r = \frac{1 + R}{1 - R}$ e, portanto, $R = \frac{e^r - 1}{e^r + 1} = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$. Novamente pelo corolário (2.1.1) temos,

$$\nu_1(g) = e^{-f} \frac{1}{R}.$$

Usando (2.16), vemos que

$$\begin{aligned}k_g &= e^{-f} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\ &= \frac{1 - R^2}{2} \frac{1}{R} - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1 - R^2}{2}\right) \\ &= \frac{1 - R^2}{2R} + R = \frac{1 + R^2}{2R} \\ &= \frac{e^{2r} + 1}{e^{2r} - 1} = \frac{e^r + e^{-r}}{e^r - e^{-r}} \\ &= \coth r.\end{aligned}$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned}\nu_1(g) &= k_g + \frac{\partial}{\partial \eta_{g_0}} (e^{-f}) \\ &= \coth r + \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1 - R^2}{2}\right) \\ &= \coth r - R \\ &= \coth r - \tanh \frac{r}{2}.\end{aligned}$$

Este exemplo nos mostra que, se a curvatura Gaussiana for negativa então o Teorema 2.1.1 pode não ser verificado.

2.2 Estimativa em Domínios Simplesmente Conexos.

Seja M um domínio simplesmente conexo do plano. R. Weinstock obteve em [15] que o primeiro autovalor não-nulo de Stekloff, ν_1 , satisfaz $\nu_1 \leq \frac{2\pi}{L}$, onde L é o comprimento da fronteira e a igualdade é satisfeita se, e somente se, M é o disco unitário. Posteriormente, J. Hersch, L. E Payne e M. M Schiffer demonstraram em [9] que $\nu_1\nu_2 \geq \frac{4\pi^2}{L^2}$, onde ν_2 é o segundo autovalor não-nulo do problema de Stekloff. Nesta seção, apresentaremos um resultado, demonstrado por Escobar em [6], o qual generaliza os resultados obtidos por Weinstock, ou seja, obtemos um resultado análogo para superfícies compactas com fronteira.

Teorema 2.2.1. *Seja (M, g_0) uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana constante. Seja $\Omega \subset M$ um domínio limitado, simplesmente conexo com $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(x_0))$, onde $B_r(x_0) \subset M$ é uma bola geodésica de raio r com centro $x_0 \in M$. Então*

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(x_0)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Ω é isométrico a $B_r(x_0)$.

Demonstração. Seja $g_1 = cg_0$, $c > 0$. Considere (M, g_1) . Como (M, g_0) tem curvatura Gaussiana constante K_0 , então (M, g_1) terá curvatura constante e igual a $\frac{1}{c}K_0$. Além disso, pelo Corolário 2.1.1 temos que

$$\nu_1(g_1) = c\nu_1(g_0).$$

Dessa forma, basta considerarmos no enunciado do teorema a curvatura Gaussiana de (M, g_0) , $K_0 \in \{1, 0, -1\}$. Portanto, temos que M é isométrica a esfera unitária, o plano Euclidiano ou ao espaço hiperbólico de curvatura -1 . O Teorema de Wienstock diz que $\nu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{L}$, onde L é o perímetro de $\partial\Omega$. A desigualdade isoperimétrica em M implica que, em M , $L \geq L(r)$ onde $L(r)$ representa o perímetro da $\partial B_r(x_0)$, igualdade satisfeita somente quando Ω é isométrica a $B_r(x_0)$. Portanto

$$\nu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{L(r)}. \tag{2.18}$$

No Exemplo 1 mostramos que, se $B_r(x_0) \in S^2$, então

$$\begin{aligned}
 \nu_1(B_0(x_0)) &= \cot r + \tan\left(\frac{r}{2}\right) \\
 &= \frac{\cos r}{\sin r} + \frac{\sin\left(\frac{r}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos^2\left(\frac{r}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{r}{2}\right)}{\cos\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= \frac{\cos^2\left(\frac{r}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{r}{2}\right) + 2 \sin^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right)} \\
 &= \frac{1}{2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{1}{\sin r}.
 \end{aligned}$$

Se no Exemplo 1 tomarmos $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ e

$$\beta(t) = \sigma^{-1}(\alpha(t)) = \left(\frac{2R \cos t}{1 + R^2}, \frac{2R \sin t}{1 + R^2}, \frac{-1 + R^2}{1 + R^2} \right)$$

então

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \|\beta'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1 + R^2} dt = 2\pi \left(\frac{2R}{1 + R^2} \right),$$

onde $R = \tan\left(\frac{r}{2}\right)$. Logo

$$\begin{aligned}
 L(r) &= 2\pi \left(\frac{2 \tan\left(\frac{r}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
 &= 2\pi \left(\frac{2 \tan\left(\frac{r}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
 &= 2\pi \left(2 \sin\left(\frac{r}{2}\right) \cos\left(\frac{r}{2}\right) \right) = 2\pi \sin r.
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\nu_1(B_r(x_0)) = \frac{2\pi}{L(r)}.$$

Analogamente, usando o Exemplo 2, se $B_r(x_0) \subset H^2$, então

$$\begin{aligned}
\nu_1(B_0(x_0)) &= \coth r - \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \\
&= \frac{\cosh r}{\sinh r} - \frac{\sinh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{r}{2}\right)} \\
&= \frac{\cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right)} - \frac{\sinh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{r}{2}\right)} \\
&= \frac{\cosh^2\left(\frac{r}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right) - 2 \sinh^2\left(\frac{r}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{1}{\sinh r}.
\end{aligned}$$

Tomando agora $\alpha(t) = (R \cos t, R \sin t)$ e

$$\beta(t) = \sigma^{-1}(\alpha(t)) = \left(\frac{2R \cos t}{1 - R^2}, \frac{2R \sin t}{1 - R^2}, \frac{1 + R^2}{1 - R^2} \right),$$

temos

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \|\beta'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2R}{1 - R^2} dt = 2\pi \left(\frac{2R}{1 - R^2} \right),$$

onde $R = \tanh\left(\frac{r}{2}\right)$. Logo

$$\begin{aligned}
L(r) &= 2\pi \left(\frac{2 \tanh\left(\frac{r}{2}\right)}{1 - \tanh^2\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{2 \tanh\left(\frac{r}{2}\right)}{\cosh^{-2}\left(\frac{r}{2}\right)} \right) \\
&= 2\pi \left(2 \sinh\left(\frac{r}{2}\right) \cosh\left(\frac{r}{2}\right) \right) = 2\pi \sinh r.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos

$$\nu_1(B_r(x_0)) = \frac{2\pi}{L(r)}. \quad (2.19)$$

No caso da bola Euclidiana, vê-se facilmente que (2.19) é satisfeita. Observamos que para todos estes casos a igualdade de (2.18) é satisfeita. ■

Generalizamos este último resultado para superfícies completas e simplesmente conexas com curvatura Gaussiana não-positiva, como pode ser visto em [6], página 108.

Teorema 2.2.2. *Seja (M, g) uma superfície completa simplesmente conexa com curvatura Gaussiana não-positiva. Seja $\Omega \subset M$ um conjunto limitado e simplesmente*

conexo com $\text{Área}(\Omega) = \text{Área}(B_r(0))$, onde $B_r(0)$ é a bola Euclidiana de raio r com centro na origem. Então

$$\nu_1(\Omega) \leq \nu_1(B_r(0)).$$

A igualdade ocorre se, e somente se, Ω é isométrico a bola Euclidiana $B_r(0)$.

Demonstração. O Teorema de Wienstock diz que

$$\nu_1(\Omega) \leq \frac{2\pi}{L},$$

onde L é o perímetro de $\partial\Omega$. A desigualdade isoperimétrica de Weyl em variedades com curvaturas não-positivas, ver [14], diz que

$$L^2 \geq 4\pi A,$$

onde $A = \text{Área}(\Omega)$ e a igualdade é satisfeita apenas para a bola Euclidiana. Dessa forma temos que $L \geq 2\pi r$, portanto

$$\nu_1(\Omega) \leq \frac{1}{r} = \nu_1(B_r(0)).$$

■
A hipótese do domínio ser simplesmente conexo nos teoremas anteriores é indispensável e um exemplo, o qual nos mostra isto, foi construído por Escobar e pode ser encontrado em [6], página 109.

Capítulo 3

Teoremas de Comparação em Variedades n -Dimensionais

Neste capítulo discutiremos estimativas, superiores e inferiores, do primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em variedades n -dimensionais. Veremos no Teorema 3.1.1 que a estimativa encontrada não é ótima como no caso de superfícies, ver Teorema 2.1.1. Finalizaremos este capítulo com uma conjectura feita por J. F. Escobar em [6], página 115.

3.1 Estimativas em variedades M^n .

O próximo teorema estabelece uma estimativa superior do primeiro autovalor não-nulo de Stekloff em função do primeiro autovalor do Laplaciano na fronteira da variedade Riemanniana.

Teorema 3.1.1. *Seja M^n , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que a curvatura de Ricci de M é não-negativa e a segunda forma fundamental de ∂M , $\pi \geq 0$. Então*

$$\left(\min_{x \in \partial M} h_g(x) \right) \nu_1 < \frac{2\lambda_1}{n-1},$$

onde λ_1 é o primeiro autovalor não-nulo do Laplaciano em ∂M e h_g é a curvatura média.

Demonstração. A Proposição 1.5.2 mostra que para uma função suave f definida em M e $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$ em ∂M , a seguinte identidade é satisfeita,

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta f)^2 - |Hess f|^2) dv &= \int_M Ric(grad f, grad f) dv + \int_{\partial M} (\bar{\Delta} f + (n-1)h_g u) u d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \pi(\overline{grad} f, \overline{grad} f) d\sigma, \end{aligned}$$

onde \overline{grad} , $\overline{\Delta}$ representam, respectivamente, o gradiente e o Laplaciano em ∂M com respeito à métrica induzida em ∂M . Seja φ_1 a primeira autofunção do Laplaciano em ∂M .

Seja f uma função harmônica em M satisfazendo que $f = \varphi_1$ em ∂M . Aplicando a Proposição 1.5.2 encontramos que

$$\int_{\partial M} (\Delta\varphi_1 + (n-1)h_g u) u d\sigma - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} \varphi_1, \overline{grad} u \rangle d\sigma < 0.$$

Usando o Teorema de Green, obtemos

$$\int_{\partial M} \langle \overline{grad} \varphi_1, \overline{grad} u \rangle d\sigma = - \int_{\partial M} u \overline{\Delta} \varphi_1 d\sigma,$$

portanto,

$$2 \int_{\partial M} u \overline{\Delta} \varphi_1 d\sigma < -(n-1) \int_{\partial M} h_g u^2 d\sigma.$$

Como $\overline{\Delta} \varphi_1 + \lambda \varphi_1 = 0$ em ∂M , temos que

$$-2\lambda_1 \int_{\partial M} \varphi_1 u d\sigma < -(n-1) \int_{\partial M} h_g u^2 d\sigma,$$

donde

$$\frac{2\lambda_1}{n-1} > \frac{\int_{\partial M} h_g u^2 d\sigma}{\int_{\partial M} \varphi_1 u d\sigma}.$$

Dessa forma

$$\frac{2\lambda_1}{n-1} > \min_{x \in \partial M} h_g(x) \frac{\int_{\partial M} u^2 d\sigma}{\int_{\partial M} \varphi_1 u d\sigma}. \quad (3.1)$$

Observe que o primeiro autovalor não-nulo para o problema de Stekloff tem a seguinte caracterização:

$$\nu_1 = \min_{\int_{\partial M} f=0} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma}.$$

Por outro lado, usando o Teorema de Green e a condição de fronteira, obtemos que

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \min_{\int_{\partial M} f=0} \frac{\int_M |\nabla f|^2 dv}{\int_{\partial M} f^2 d\sigma} \\ &= \min_{\Delta f=0} \frac{\int_{\partial M} u^2 d\sigma}{\int_{\partial M} u f d\sigma}. \end{aligned}$$

Usando esta última igualdade e a desigualdade (3.1), obtemos

$$\frac{2\lambda_1}{n-1} > \left(\min_{x \in \partial M} h_g(x) \right) \nu_1.$$

■

Teorema 3.1.2. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que a curvatura de Ricci de M é não-negativa e a segunda forma fundamental π satisfaz $\pi \geq k_0 I$ em ∂M , $k_0 > 0$. Então*

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}.$$

Demonstração. Usando a Proposição 1.5.2 temos que, para uma função suave f definida em M , $u = \frac{\partial f}{\partial \eta}$ em ∂M , a seguinte identidade é satisfeita:

$$\begin{aligned} \int_M ((\Delta f)^2 - |Hess f|^2) dv &= \int_M Ric(grad f, grad f) dv + \int_{\partial M} (\overline{\Delta} f + (n-1)h_g u) u d\sigma \\ &\quad - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \pi(\overline{grad} f, \overline{grad} f) d\sigma, \end{aligned}$$

onde \overline{grad} , $\overline{\Delta}$ representam, respectivamente, o gradiente e o Laplaciano em ∂M com respeito à métrica induzida em ∂M .

Seja f a primeira autofunção do problema de Stekloff. Como f é harmônica, obtemos, usando a identidade acima, que

$$\begin{aligned} 0 &> \int_M (-|Hess f|^2 - Ric(grad f, grad f)) dv \\ &= \int_{\partial M} (\overline{\Delta} f + (n-1)h_g u) u d\sigma - \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + \int_{\partial M} \pi(\overline{grad} f, \overline{grad} f) d\sigma \\ &\geq -2 \int_{\partial M} \langle \overline{grad} f, \overline{grad} u \rangle d\sigma + k_0 \int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma. \end{aligned}$$

Usando a condição de fronteira da função f , obtemos que

$$0 > -2\nu_1 \int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma + k_0 \int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma.$$

Observe que

$$\int_{\partial M} |\overline{grad} f|^2 d\sigma > 0,$$

pois, caso contrário, teríamos $f \equiv cte$ em ∂M e, portanto, $f \equiv cte$ em M . Isto é uma contradição visto que f é a primeira autofunção de Stekloff. Dessa forma concluímos que

$$\nu_1 > \frac{k_0}{2}.$$

Vimos no teorema anterior que $\nu_1 > \frac{k_0}{2}$ quando $n \geq 3$. No Teorema 2.1.1, ou seja, quando $n = 2$, obtemos uma estimativa melhor, $\nu_1 \geq k_0$. Dessa forma vemos que a estimativa obtida pelo teorema acima não é ótima, isto é, ela pode ser melhorada. Diante disso, Escobar acreditava, conforme conjectura em [6], página 115, que o Teorema 3.1.2 também é verdadeiro quando $\nu_1 \geq k_0$, isto é, que o resultado a seguir também é válido. ■

Conjectura 3.1.1. *Seja (M^n, g) , $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana compacta com fronteira. Assuma que $\text{Ric}(g) \geq 0$ e a segunda forma fundamental π satisfaz $\pi \geq k_0 I$ em ∂M , $k > 0$. Então*

$$\nu_1 \geq k_0.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, M é a bola Euclidiana de raio $\frac{1}{k_0}$.

Referências Bibliográficas

- [1] Berard, P. H., *Lectures on Spectral Geometry*, XV Colóquio Brasileiro de Matemática. 1985.
- [2] Calderón, A. P., *On an Inverse Boundary Value Problem*, Seminar in Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics, Soc. Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro (1980), 65-73.
- [3] Chavel, I., *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press Inc, Orlando, FL, vol. 115, 1984.
- [4] Chavel, I., *Riemannian Geometry: A modern Introduction*, Cambridge University Press, 1997.
- [5] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1988.
- [6] Escobar, J. F., *An Isoperimetric Inequality and the First Non-zero Steklov Eigenvalue*, J. Functional Analysis. **165** (1999), 101-116.
- [7] Escobar, J. F., *The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue*, J. Functional Analysis. **150** (1997), 544-556.
- [8] Escobar, J. F., *Topics en PDE'S and Differential Geometry*, XII Escola de Geometria Diferencial, 2002.
- [9] Hersch, J., Payne, L. E., Schiffer, M. M., *Some Inequalities for Stekloff Eigenvalue*, Arch. Rational Mech. Anal. **57** (1975), 99-114.
- [10] Morgan, F., *Riemannian Geometry: A Beginner's Guide*, A. K. Peters, 1997.
- [11] Protter, M. H., Weinberger H. F., *Maximum Principles in Differential Equations*, Springer Verlag, 1984.
- [12] Schoen, R., Yau, S. T., *Lectures on Differential Geometry*, International Press Inc, Boston, vol. 1. 1994.
- [13] Stekloff, M. W., *Sur Les Problèmes Fondamentaux de la Physique Mathématique*, Ann. Sci. École Norm, Sup. **19** (1902), 455-490.
- [14] Weil, A., *Sur Les Surfaces on Courbure Negative*, C. R. Acad. Sci. Paris 182,(1926) 1096-1071.

- [15] Weinstock, R., *Inequalities for a classical eigenvalue problem*, J, Rational Mech. Anal. **3** (1954), 745-753.