Universidade Federal de Alagoas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii

Davy Christian Souza Cardoso

Maceió
16 de Junho de 2005


Rio São Francisco

MATEMÁTICA
A ciência
do infinito

Universidade Federal de Alagoas
Departamento de Matemática
Programa de Mestrado em Matemática

Dissertação de Mestrado

O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii

Davy Christian Souza Cardoso

Orientador:
Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández

Apoio Financeiro:
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Alagoas - FAPEAL

Maceió - Junho de 2005

O Problema de Cauchy para o Sistema de Gross-Pitaevskii

Davy Christian Souza Cardoso

Dissertação submetida em 16 de junho de 2005 à Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado em Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández (Orientador)

Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Prof. Dr. José Felipe Linares Ramirez

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho fazemos um estudo das propriedades das soluções do problema de valor inicial (PVI), ou problema de Cauchy, associado ao sistema dispersivo de equações não-lineares de Gross-Pitaevskii, isto é,

$$\textbf{(G-P)} \begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2 u + v = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v - (\mu_0 + a|v|^2)v + u = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde u e v são funções de valores complexos e os parâmetros μ_0 e a são reais. Este modelo descreve a interação entre dois condensados de Bose-Einstein de gases atômicos diluídos e confinados, onde o parâmetro μ_o representa a diferença dos potenciais químicos entre os condensados u e v. Para maiores informações sobre o modelo físico, pode-se ver [**19**].

Estudaremos a boa colocação do problema de valor inicial para o sistema (G-P) com dado inicial (u_0, v_0) no espaço de Sobolev $H^k(\mathbb{R}) \times H^\ell(\mathbb{R})$. Usamos a definição de localmente bem posto no seguinte sentido: existência de única solução em certo intervalo de tempo $[-T, T]$ (***unicidade***); a solução descreve uma curva contínua de $[-T, T]$ em $H^k(\mathbb{R}) \times H^\ell(\mathbb{R})$, para todo dado inicial em $H^k(\mathbb{R}) \times H^\ell(\mathbb{R})$ (***persistência***); e a solução é localmente uniformemente contínua sobre dados iniciais tomados em $H^k(\mathbb{R}) \times H^\ell(\mathbb{R})$ (***dependência uniformemente contínua***). No caso em que as três propriedades anteriores possam ser estendidas a todo intervalo de tempo $[-T, T]$, com $T > 0$, diremos que o PVI é globalmente bem posto. Além disso, se uma das propriedades acima não for válida, diremos que o PVI é localmente mal posto.

A equação cúbica de Schrödinger

$$\text{(SNL)}\quad \begin{cases} i\,\partial_t u + \partial_x^2 u = \alpha|u|^2 u, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in \mathbb{R},\ \alpha = \pm 1, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

tem sido estudada por vários autores. Por exemplo, em dimensão um ($n = 1$), se sabe que o problema de Cauchy associado a (SNL) é localmente bem posto em $H^s(\mathbb{R})$, com $s \geq 0$ (ver [**9**], [**22**]). Aliás, é este o melhor resultado possível de boa colocação em espaços de Sobolev, no sentido de que a aplicação dado-solução não é localmente uniformemente contínua com respeito à norma de $H^s(\mathbb{R})$ para $s < 0$, tanto no caso $\alpha = 1$ (defocusing) como no caso $\alpha = -1$ (focusing). As provas deste resultados podem ser encontradas em [**15**], [**7**] e [**8**].

O sistema (G-P) é um acoplamento linear de duas equações de Schrödinger tipo cúbicas, logo é de se esperar que resultados análogos aos comentados acima para a equação (SNL) sejam obtidos para este sistema. De fato, provaremos os seguintes resultados para o PVI (G-P):

($\mathbf{R}_1$) boa colocação local em $H^s \times H^s$, com $s \geq 0$;
($\mathbf{R}_2$) boa colocação global em $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$;
($\mathbf{R}_3$) má colocação em $H^k \times H^\ell$, com $(k,\ell) \in \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ onde

$$\Omega_1 = (-1/2, 0) \times (-1/2, +\infty) \quad \text{e} \quad \Omega_2 = (-1/2, +\infty) \times (-1/2, 0).$$

Estruturamos este trabalho como segue. No Capítulo 1 apresentamos uma série de resultados preliminares que serão essenciais para o entendimento dos capítulos posteriores. Outro instrumento básico introduzido neste texto é transformada de Fourier. O Capítulo 2 versa sobre alguns dos resultados fundamentais relativos a ela e que serão fortemente usados. Com o instrumental adquirido nos Capítulos 1 e 2, trata-se, no Capítulo 3, algumas das propriedades das soluções para o PVI associado a equação linear de Schrödinger, ou seja,

$$(\mathbf{SL})\quad \begin{cases} i\partial_t u(x,t) = \partial_x^2 u(x,t), \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Este estudo é a base para desenvolver a prova dos resultados (R_1) e (R_2) no Capítulo 4. A idéia fundamental da demonstração de (R_1) é similar à empregada por Bekiranov, Ogawa e Ponce em [**3**], quando provaram boa colocação local para vários sistemas dispersivos. A

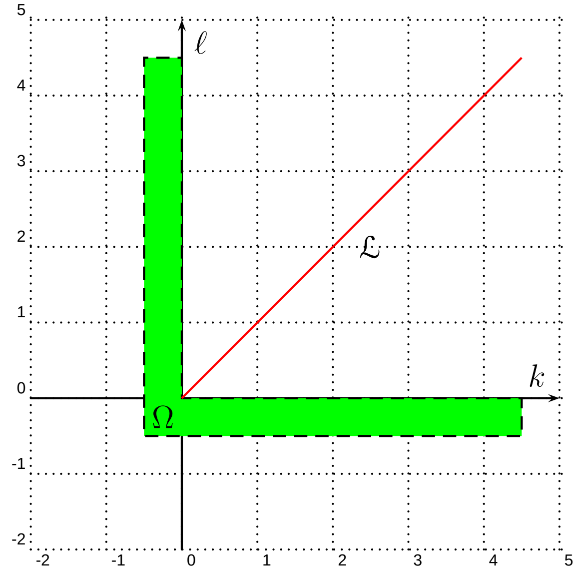

FIGURA 1. A linha $\mathcal{L} := \{\ell = k;\ \ k \geq 0\}$ representa os resultados de boa colocação (R_1) e a região Ω representa os resultados de má colocação (R_3).

mesma consiste em aplicar o princípio de Duhamel ao sistema (G-P) e assim trabalhar com um sistema de equações integrais equivalente, o qual pode ser encarado como um operador de tipo ponto fixo. Provaremos que de fato este operador é uma contração sobre certo espaço de Hilbert que contém as funções contínuas de $[0, T]$ em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, para um certo tempo T que depende de $\|u_0\|_{H^s}$ e $\|v_0\|_{H^s}$. Por outro lado, (R_2) é obtido combinando o resultado local (R_1) e a seguinte lei de conservação em L^2 para o PVI (G-P):

$$\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2} + \|v(\cdot,t)\|^2_{L^2} = \|u_0\|^2_{L^2} + \|v_0\|^2_{L^2}.$$

Finalmente, no Capítulo 5, prova-se a existência de soluções tipo ondas solitárias para (G-P) seguindo os trabalhos [**4**] e [**21**]. Estas soluções serão usadas para provar o resultado (R_3), cuja demonstração usa as idéias implementadas por Kening, Ponce e Vega em [**15**]. Também usamos com este propósito o trabalho [**6**].

CAPíTULO 1

Noções Preliminares

Para dar maior comodidade ao leitor enunciaremos neste capítulo as definições e os resultados que serão essenciais para uma boa compreensão do texto.

1. Espaços L^p

Definição 1.1. *Seja X um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Uma função $\rho : X \to \mathbb{R}^+$ é uma seminorma se*

(1) *ρ é sub-aditiva, isto é,*

$$\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y), \quad \forall\, x, y \in X,$$

(2) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x), \quad \forall\, x \in X$ *e* $\forall\, \lambda \in \mathbb{F}$.

Diremos que ρ é uma norma se além das propriedades 1 e 2 vale

3. $\rho(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Definição 1.2. *Seja $p \in [1, \infty]$ e $X \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos por $L^p(X)$ o conjunto das funções $f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis tais que*

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_X |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, & se\ 1 \leq p < \infty, \\ \inf\{\lambda > 0;\ m(A_\lambda) = 0\} < \infty, & se\ p = \infty, \end{cases}$$

onde $A_\lambda = \{x \in X;\ |f(x)| > \lambda\}$ e m denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3. *Sejam $p, q \in (1, \infty)$. Dizemos que p e q são conjugados quando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dizemos também que 1 e ∞ são conjugados. Denotaremos por p' o conjugado de p.*

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam* $p \in [1, \infty]$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $f \in L^p(X)$ *e* $g \in L^{p'}(X)$. *Então* $f, g \in L^1(X)$ *e*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Ver teorema 3.8 de [**18**]. □

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que duas funções $f, g \in L^p(X)$, $p \geq 1$, estão relacionadas se, e somente se, $f = g$ em quase toda parte, isto é, $m\{x \in X;\ f(x) \neq g(x)\} = 0$. Então, considerando os elementos de $L^p(X)$ como as classes definidas por esta relação de equivalência, obtemos o seguinte resultado

Teorema 1.2. *Os espaços* $L^p(X)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *são espaços de Banach.*

Demonstração. Ver teorema 3.11 de [**18**]. □

Teorema 1.3. *Sejam* $p \in [1, \infty)$ *e* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Se* $f \in L^p(X)$, *então*

$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int_X f(x)\overline{g(x)}\, dx;\ \|g\|_{L^{p'}} = 1\right\}.$$

Demonstração. A desigualdade de Hölder nos diz que $\|f\|_{L^p}$ é cota superior do conjunto $\left\{\int f(x)\overline{g(x)}dx;\ \|g\|_{L^{p'}} = 1\right\}$. Escolhendo $g(x) = \|f\|_{L^p}^{1-p}|f(x)|^{p-2}f(x)$, temos, para $p > 1$, que

$$\|g\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_X \|f\|_{L^p}^{p'-pp'}|f(x)|^{pp'-p'}dx = \|f\|_{L^p}^{-p}\int_X |f(x)|^p dx = 1$$

e, se $p = 1$, como $|g(x)| = |f(x)|^{-1}|f(x)| = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|g\|_{L^\infty} = 1.$$

Por outro lado,

$$\int_X f(x)\overline{g(x)}\, dx = \|f\|_{L^p}^{1-p}\int_X |f(x)|^2|f(x)|^{p-2}dx = \|f\|_{L^p},$$

logo $\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int_X f(x)\overline{g(x)}\, dx;\ \|g\|_{L^{p'}} = 1\right\}$. □

Teorema 1.4 (Desigualdade de Minkowski). *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ *mensurável e* $1 \leq p < \infty$. *Então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Demonstração. Se $p = 1$ é o clássico teorema de Fubini (ver [**18**]). Se $p > 1$ usamos a desigualdade de Hölder e o teorema 1.3 para obter

$$\begin{aligned}
\| \int_Y |f(\cdot, y)|dy\|_{L^p_x} &= \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \int_X \overline{g(x)} \left(\int_Y |f(x,y)|dy\right) dx \\
&= \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \int_Y \int_X \overline{g(x)}\, |f(x,y)|dxdy \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} \int_Y \|g\|_{L^{p'}} \|f(\cdot, y)\|_{L^p_x} dy \\
&= \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p_x} dy,
\end{aligned}$$

onde $p' = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado de p. □

Definição 1.4 (Convolução). *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *A convolução de* f *e* g, *denotada por* $f * g$, *é a função definida por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.5 (Teorema de Young). *Sejam* $p, q, r \in [1, \infty]$ *tais que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1 + \dfrac{1}{r}$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. *Então,* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *e além disso vale*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Para $r < \infty$, sendo

$$p_1 := \frac{p}{1 - p/r}\ , \quad p_2 := \frac{q}{1 - q/r}$$

e r' o conjugado de r, a desigualdade de Hölder (teorema 1.1) nos fornece para cada $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
|f*g(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^{p/r}|g(y)|^{q/r}|f(x-y)|^{1-p/r}|g(y)|^{1-q/r}\,dy \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p|g(y)|^q\,dy\right)^{1/r}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|^{\frac{p}{p_1}r'}|g(y)|^{\frac{q}{p_2}r'}\,dy\right)^{1/r'} \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)^{1/r} \times \\
&\quad \times \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^{\frac{p}{p_1}r'\frac{p_1}{r'}}dy\right)^{\frac{1}{r'}\frac{r'}{p_1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|^{\frac{q}{p_2}r'\frac{p_2}{r'}}dy\right)^{\frac{1}{r'}\frac{r'}{p_2}} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|^p|g(y)|^q\,dy\right)^{1/r}\|f\|_{L^p}^{p/p_1}\|g\|_{L^q}^{q/p_2},
\end{aligned}$$

pois

$$\frac{r'}{p_1}+\frac{r'}{p_2} = r'\left(\frac{1-\frac{p}{r}}{p}+\frac{1-\frac{q}{r}}{q}\right) = 1.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^r}^r &\leq \|f\|_{L^p}^{\frac{p}{p_1}r}\|g\|_{L^q}^{\frac{q}{p_2}r}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|^p|g(y)|^q dy\right)dx \\
&= \|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^q}^{r-q}\int_{-\infty}^{\infty}|g(y)|^q\int_{-\infty}^{\infty}|f(x-y)|^p\,dxdy \\
&= \|f\|_{L^p}^{r-p}\|g\|_{L^q}^{r-q}\|g\|_{L^q}^{q}\|f\|_{L^p}^{p} \\
&= \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

No caso em que $r=\infty$, temos que

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^\infty}^p &= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right| \\
&\leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.5. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ e $p,q \geq 1$. Denotaremos por $L_t^p(I;L_x^q(\mathbb{R}^n))$, ou simplesmente por $L_t^p(I;L_x^q)$, o espaço das funções mensuráveis $f:\mathbb{R}^n\times I\to\mathbb{C}$ tais que*

$$\|f\|_{L_t^p(I;L_x^q)} := \left(\int_I \|f(\cdot,t)\|_{L_x^q}^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

No caso em que $I = [0, T]$, *com* $T > 0$, *ou* $I = \mathbb{R}$, *denotaremos* $L_t^p(I; L_x^q(\mathbb{R}^n))$ *por* $L_T^p L_x^q$ *e* $L_t^p L_x^q$, *respectivamente.*

Estes espaços são de Banach e vale o seguinte teorema de dualidade, cuja a demonstração segue a idéia usada na prova do teorema 1.3.

TEOREMA 1.6. *Seja* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. *Então*

$$\|f\|_{L_t^p(\mathbb{R}; L_x^q)} = \sup \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\overline{g(x,t)}dxdt; \ \|g\|_{L_t^{p'}(\mathbb{R}; L_x^{q'})} = 1 \right\}.$$

Denotaremos por $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ a classe das funções $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ infinitamente diferenciáveis de suporte compacto, onde o suporte de f é o conjunto

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n; \ f(x) \neq 0\}}.$$

TEOREMA 1.7. *O conjunto* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$, *para* $1 \leq p < \infty$.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que o conjunto $S = \left\{ \sum_{j=1}^n \chi_{A_j} \right\}$ das combinações lineares finitas de funções características χ_{A_j} de subconjuntos A_j de $\mathbb{R}^n$ mensuráveis e limitados é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Então, só resta provar que se $A \subset \mathbb{R}^n$ for limitado e mensurável, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi - \chi_A\|_{L^p} < \varepsilon$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, sejam K um compacto e O um aberto tais que $K \subset A \subset O$ e $m(O \backslash K) < \varepsilon^p$. Escolhamos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $0 \leq \varphi \leq 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset O$ e $\varphi|_K = 1$. Então

$$\|\varphi - \chi_A\|_{L^p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi - \chi_A|^p \leq \int_{O \backslash K} 1 < \varepsilon^p.$$

□

2. Operadores Limitados e Interpolação

Consideremos H um espaço de Hilbert e M um subespaço vetorial de H. Denotamos por $\mathcal{B}(M, H)$ a coleção de todos os operadores limitados $T : M \longrightarrow H$ munido da norma

$$\|T\| = \inf\{C > 0;\ \|Tf\| \leq C\ \|f\|,\ \ \forall\, f \in M\}.$$

TEOREMA 1.8. *Seja H um espaço de Hilbert e M é um subespaço vetorial de H. Então:*

(1) *$(\mathcal{B}(M, H), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach;*
(2) $\|T\| = \sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{\|T\,f\|}{\|f\|} = \sup\limits_{\|f\|=1} \|T\,f\| = \sup\limits_{0<\|f\|\leq 1} \dfrac{\|T\,f\|}{\|f\|}, \quad \forall\, T \in \mathcal{B}(M, H);$
(3) *O operador $T \in \mathcal{B}(M, H)$ admite uma única extensão $\overline{T} \in \mathcal{B}(\overline{M}, H)$, onde $\overline{M}$ denota o fecho de M em H. Além disso, $\|T\| = \|\overline{T}\|$.*

DEMONSTRAÇÃO. Ver teorema 6.2 do capítulo IV de [**11**]. □

TEOREMA 1.9 (Riesz-Thorin). *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $p_0 \neq p_1$ e $q_0 \neq q_1$. Seja T um operador limitado de $L^{p_0}(X)$ em $L^{q_0}(Y)$ e de $L^{p_1}(X)$ em $L^{q_1}(Y)$ com*

$$M_0 = \sup_{f\neq 0} \frac{\|T\,f\|_{L^{q_0}}}{\|f\|_{L^{p_0}}} \quad e \quad M_1 = \sup_{f\neq 0} \frac{\|T\,f\|_{L^{q_1}}}{\|f\|_{L^{p_1}}}.$$

Então T é limitado de $L^{p_\theta}(X)$ em $L^{q_\theta}(Y)$ com norma M_θ tal que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta},$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

DEMONSTRAÇÃO. Ver teorema 2.2 de [**17**]. □

TEOREMA 1.10 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sejam $0 < \alpha < 1$, $1 \leq p < q < \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{q} + (1-\alpha)$. Considerando a aplicação $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}) \to F(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ definida, para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$, por*

$$I_\alpha(f)(x) = \int \frac{f(t)}{|x-t|^\alpha}\, dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

temos que $I_\alpha(f)(x)$ é absolutamente convergente a menos de um conjunto de medida nula da reta. Além disso, se $p > 1$, temos que

$$\|I_\alpha(f)\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad \forall\, f \in L^p(\mathbb{R}).$$

Demonstração. Ver teorema 2.18 de [**17**]. □

3. Espaço de Schwartz

Exibiremos um espaço de funções "muito bem comportadas" para estudar a transformada de Fourier, chamado de *espaço de Schwartz.*

Dados $\alpha \in \mathbb{N}_0^n = \{0\} \cup \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, usaremos as seguintes notações:

- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}$
- $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \circ \partial_2^{\alpha_2} \circ \cdots \circ \partial_n^{\alpha_n}$.

Definição 1.6. *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ está no espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quando é $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha \partial^\beta f(x)\right| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n. \tag{1}$$

Observamos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ dos complexos e que $\rho_{\alpha,\beta}$ é uma seminorma para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Teorema 1.11. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Então $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

$$\lim_{|x|\to\infty} x^\alpha \partial^\beta f(x) = 0, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n. \tag{2}$$

Demonstração. Seja $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, existe $C > 0$ tal que

$$|(1+|x|^2)x^\alpha\partial^\beta f(x)| \leq |x^\alpha \partial^\beta f(x)| + \sum_{j=1}^n |x^{\tilde{\alpha}_j} \partial^\beta f(x)| \leq C, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

onde $\widetilde{\alpha}_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, 2+\alpha_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$. Conseqüentemente, temos

$$|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq \frac{C}{1+|x|^2}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

seguindo , daí, a relação (2).

Por outro lado, se $f \in \mathbb{C}^\infty$ e satisfaz a condição (2), então, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, existe $M > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq 1$ para $|x| > M$; além disso, sendo a função $g(x) = x^\alpha \partial^\beta f(x)$ contínua em $[-M, M]$, existe $C > 0$ tal que $|x^\alpha \partial^\beta f(x)| \leq C$ para $|x| \leq M$, logo

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) \leq \max\{1, C\}.$$

□

A relação (2) significa que as derivadas de f decrescem rapidamente no infinito, isto é, que f e suas derivadas vão mais rápido para 0, do que as potências x^α, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, vão para o infinito, quando $|x| \to \infty$. Diremos, então, que uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é de *decrescimento rápido* quando está no *espaço de Schwartz* .

Teorema 1.12. *Seja $p \in [1, \infty)$. Então o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^p})$, ou seja, para todo $f \in L^p$, existe uma seqüência $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_n \xrightarrow{L^p} f$.*

Demonstração. Sejam $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $r > n/2$. Então

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^p} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^r |\varphi(x)|^p \,\frac{1}{(1+|x|^2)^r}\, dx \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^r |\varphi(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \tfrac{1}{(1+|x|^2)^r}\, dx < \infty. \end{aligned}$$

Isto implica que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, usando o teorema 1.7, observamos que

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \overline{\left(C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p}\right)} \subset \overline{\left(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p}\right)} \subset L^p(\mathbb{R}^n),$$

logo $\overline{(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n); \|\cdot\|_{L^p})} = L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Lema 1.1. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

(1) $x^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$;

(2) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e, além disso,*

$$\partial^\beta (f * g) = (\partial^\beta f) * g = f * (\partial^\beta g), \quad \forall\, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Demonstração. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, segue diretamente da definição do espaço de Schwartz, que $x^\alpha \partial^\beta f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Derivando sob o sinal de integração e usando a comutatividade da convolução, observamos que $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\partial^\beta (f * g) = (\partial^\beta f) * g = f * (\partial^\beta g), \quad \forall\, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Como, para $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\begin{aligned} |x^\alpha| &= |x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}| = |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_n|^{\alpha_n} \\ &\leq (1 + |x_1|)^{\alpha_1} \dots (1 + |x_n|)^{\alpha_n} \\ &\leq (1 + |x|)^{\alpha_1} \dots (1 + |x|)^{\alpha_n} = (1 + |x|)^{|\alpha|} \\ &\leq (1 + |x - y| + |y| + |y||x - y|)^{|\alpha|} = (1 + |x - y|)^{|\alpha|}(1 + |y|)^{|\alpha|} \\ &\leq C\,(1 + |x - y|^2)^{|\alpha|/2}(1 + |y|^2)^{|\alpha|/2}, \end{aligned}$$

então

$$(3) \quad |x^\alpha \partial^\beta (f*g)(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} C\,(1+|x-y|^2)^{|\alpha|/2}|f(x-y)|(1+|y|^2)^{|\alpha|/2}|\partial^\beta g(y)|dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Portanto, usando desigualdade de Hölder no lado direito de (3) obtemos

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta}(f * g) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (f * g)(x) \right| \\ &\leq C \left\| (1 + |\cdot|^2)^{|\alpha|/2} f \right\|_{L^2} \left\| (1 + |\cdot|^2)^{|\alpha|/2} \partial^\beta g \right\|_{L^2} < \infty. \end{aligned}$$

□

A seguir, apresentamos a topologia do espaço de Schwartz gerada pelas seminormas

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) = sup\{|x^\alpha \partial^\beta f(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}^n\}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Definição 1.7. *Dizemos que uma seqüência* $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *converge para* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *se, e somente se,*

$$\lim_{k \to \infty} \rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = 0, \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

Denotaremos isto por

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f.$$

O lema seguinte mostra que esta topologia em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é muito forte.

Lema 1.2. *Sejam* $p \in [1,\infty]$ *e* $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$. *Então* $f_k \xrightarrow{L^p} f$.

Demonstração. Como $\|f_k - f\|_{L^\infty} = \rho_{0,0}(f_k - f)$, o lema vale para $p = \infty$. Consideremos o caso em que $p \in [1,\infty)$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^{-pn_0} dx$ seja finita. Para cada $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, escrevendo $\alpha_j = (0,\ldots,2n_0,\ldots,0) \in \mathbb{N}_0^n$, onde $2n_0$ está posicionado na j-ésima entrada, observamos que

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{pn_0}} \Big((1+|x|^2)^{n_0}|f_k - f|\Big)^p dx \\
&\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \Big((1+|x|^2)^{n_0}|f_k - f|\Big)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{pn_0}}\ dx \\
&\leq C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big((1+|x|^{2n_0})|f_k - f|\big)^p \\
&\leq C \left(\rho_{0,0}(f_k - f) + \sum_{j=1}^{n} \rho_{\alpha_j,0}(f_k - f)\right)^p,
\end{aligned}$$

seguindo daí o lema. □

Seja $d : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, definida por

$$d(f,g) = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n} \frac{1}{2^{\alpha+\beta}} \cdot \frac{\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}{1+\rho_{\alpha,\beta}(f-g)}, \quad f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

É um bom exercício provar a seguinte proposição, que deixamos a cargo do leitor.

Proposição 1.1. *Seja a função definida em (4). Então*

(1) d *é uma métrica sobre* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$;
(2) $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \iff f_k \xrightarrow{d} f$.

Teorema 1.13. *O espaço* $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$ *é um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja f_k uma seqüência de Cauchy em $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), d)$. Como, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\|\partial^\alpha f\|_{L^\infty} = \rho_{0,\alpha}(f)$, temos que $\partial^\alpha f_k$ é de Cauchy em $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^\infty})$, logo uniformemente limitada.

Afirmamos que $\partial^\alpha f_k$ é eqüicontínua em cada bola fechada $\overline{B}_r(0)$, $r > 0$, caso contrário, suponhamos que exista $x_0 \in \overline{B}_r(0)$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \exists\, x_k \in \overline{B}_r(0)\,;\ \ |\partial^\alpha f_k(x_k) - \partial^\alpha f_k(x_0)| > \varepsilon \quad e \quad \|x_k - x_0\| < \tfrac{1}{k},$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana. Usando a desigualdade do valor médio obtemos

$$\varepsilon < |\partial^\alpha f_k(x_k) - \partial^\alpha f_k(x_0)| \leq C\|x_k - x_0\| \ \longrightarrow\ 0.$$

Portanto, o teorema de Ascoli-Arzelá implica que $\partial^\alpha f_k$ possui uma subseqüência uniformemente convergente para certa função $f_\alpha \in C(\overline{B}_r(0))$. Porque, para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^\alpha f_k$ é de Cauchy, segue que

$$\partial^\alpha f_k \ \longrightarrow\ f_\alpha$$

uniformemente. Mais ainda, $f_\alpha = \partial^\alpha f$, conseqüentemente $f \in C^\infty(\overline{B}_r(0))$.

Para cada bola $\overline{B}_r(0)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, temos que

$$\sup_{\overline{B}_r(0)} |x^\alpha \partial^\beta f| = \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\overline{B}_r(0)} |x^\alpha \partial^\beta f_k|\right) \leq \limsup \rho_{\alpha,\beta}(f_k),$$

onde vemos que o lado direito é independente do raio da bola, logo $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ é limitado, ou seja, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Só resta provar que de fato $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$. Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_{\alpha,\beta}(f_k - f_m) < \varepsilon$ quando $k, m > n_0$. Como

$$\begin{aligned}\sup_{\overline{B}_r(0)} |x^\alpha \partial^\beta (f_m - f)| &= \lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\overline{B}_r(0)} |x^\alpha \partial^\beta (f_m - f_k)|\right)\\ &\leq \lim_{k\to\infty} \rho_{\alpha,\beta}(f_m - f_k),\end{aligned}$$

segue que $\rho_{\alpha,\beta}(f_m - f) \leq \varepsilon$ quando $m > n_0$, provando a convergência de f_k em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

4. Distribuições Temperadas

Seja $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto dos funcionais lineares e contínuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, uma aplicação linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ está em $S'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \implies \lim_{k\to\infty} T(\varphi_k) = 0.$$

Um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é também chamado de distribuição temperada.

TEOREMA 1.14. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$. *Para cada* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, *a função*

$$\begin{aligned} T_f : \ \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \quad &\longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \end{aligned} \tag{5}$$

define uma distribuição temperada. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, *a aplicação*

$$\begin{aligned} \delta_x : \ \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \quad &\longmapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

é uma distribuição temperada, chamada a distribuição δ *de Dirac centrada no ponto* $x \in \mathbb{R}^n$.

DEMONSTRAÇÃO. Claramente vemos que T_f e δ_x são funcionais lineares. Fazendo $q := \frac{p}{p-1}$ se $p > 1$, ou $q := \infty$ se $p = 1$, pela desigualdade de Holder,

$$|T_f(\varphi)| \leq \|f\varphi\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|\varphi\|_{L^q}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

assim como temos que

$$|\delta_x(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Portanto, empregando o lema 1.2, se $\{\varphi_k\}$ é uma seqüência em Schwartz tal que $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, então

$$T_f(\varphi_k) \longrightarrow 0 \quad e \quad \delta_x(\varphi_k) \longrightarrow 0.$$

□

DEFINIÇÃO 1.8. *Seja* $\{T_k\}$ *uma seqüência em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *e* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Quando*

$$\lim_{k\to\infty} T_k(\varphi) = T(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

dizemos que $\{T_k\}$ *converge a* T *e escreveremos*

$$T_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} T.$$

Essa noção de convergência é muito fraca. De fato, sejam $1 \leq p \leq \infty$ e

$$f_k \xrightarrow{L^p} f.$$

A desigualdade de Hölder (teorema 1.1) nos diz que, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $n \in \mathbb{N}_0$,

$$\begin{aligned}
|T_{f_k}(\varphi) - T_f(\varphi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_k - f)(x)\varphi(x)dx) \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f_k - f)(x)||\varphi(x)|dx \\
&\leq \|f_k - f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q},
\end{aligned}$$

onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, e daí, como $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$T_{f_k} \xrightarrow{\mathcal{S}'} T_f.$$

Daqui por diante usaremos a notação usual de função para denotar os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, identificando por f, em particular, a distribuição temperada T_f definida em (5).

Sendo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, a derivada $\partial^\alpha f$ de f está em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e define uma distribuição temperada dada por

$$\partial^\alpha f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial^\alpha f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Sendo $k \in \mathbb{N}_0$, usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned}
\partial_j^k f(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\partial_j^{k-1} f(x)\varphi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \partial_j^{k-1} f(x)\partial_j\varphi(x)dx_j \right) d\widetilde{x} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} -\partial_j^{k-1} f(x)\partial_j\varphi(x)\ dx \\
&= -\partial_j^{k-1} f(\partial_j\varphi), \quad j = 1, 2, \ldots, n,
\end{aligned}$$

e, repetindo este processo mais $k-1$ vezes,

$$\partial_j^k f(\varphi) = (-1)^k f(\partial_j\varphi).$$

Logo, temos a relação

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha f(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\partial^\alpha\varphi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \qquad (6)
\end{aligned}$$

que motiva a próxima definição, a derivada em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.9 (Derivada de uma distribuição temperada). *Sejam* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ *e* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *A derivada* $\partial^\alpha f$ *de* f *é o funcional*

$$\begin{aligned} \partial^\alpha f: \ \ \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \varphi \ \ &\longmapsto (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \varphi). \end{aligned}$$

Agora, a propósito da próxima definição, observemos que, se $f, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então

$$\begin{aligned} f * \varphi(\phi) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * \varphi(x)\phi(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x-y)dy\,\phi(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x-y)\phi(x)dx\,dy \\ &= f(\varphi(-\,\cdot) * \phi), \quad \forall\,\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Definição 1.10. *Sejam* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *A convolução de* T *com* φ *é a função*

$$T * \varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$T * \varphi(\phi) = T(\varphi(-\,\cdot) * \phi), \quad \forall\,\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 1.15. *Sejam* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$T * \varphi \in C^\infty \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

e

$$\partial^\alpha(T * \varphi) = (\partial^\alpha T) * \varphi = T * (\partial^\alpha \varphi), \quad \forall\,\alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Demonstração. Pelo lema 1.1, $T * \varphi$ está bem definida e sua linearidade é decorrente da linearidade de T e da distributividade da convolução em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Observando a relação (3) do lema 1.1, temos que

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta}(\varphi(-\,\cdot) * \phi) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta(\varphi(-\,\cdot) * \phi)(x) \right| \\ &\leq C \left\| (1 + |\cdot|^2)^{|\alpha|/2}\, \varphi(-\,\cdot) \right\|_{L^1} \left\| (1 + |\cdot|^2)^{|\alpha|/2}\, \partial^\beta \phi \right\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. A continuidade, então, segue da relação anterior, pois o seu lado direito é uma combinação linear finita de seminormas $\rho_{\alpha',\beta'}(\cdot)$, $\alpha', \beta' \in \mathbb{N}_0^n$. Usando novamente o lema 1.1, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ e $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha (T * \varphi)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}\; T * \varphi(\partial^\alpha \phi) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\; T(\; \varphi(-\,\cdot) * \partial^\alpha \phi\;) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\; T(\; \partial^\alpha(\varphi(-\,\cdot) * \phi)\;) \\
&= \partial^\alpha T(\; \varphi(-\,\cdot) * \phi\;) \\
&= (\partial^\alpha T) * \varphi\; (\phi)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha (T * \varphi)(\phi) &= (-1)^{|\alpha|}\; T(\; \partial^\alpha(\varphi(-\,\cdot)) * \phi\;) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\; T(\; (-1)^{|\alpha|}\; \partial^\alpha \varphi(-\,\cdot) * \phi)\;) \\
&= T(\; \partial^\alpha \varphi(-\,\cdot) * \phi\;) \\
&= T * (\partial^\alpha \varphi)\; (\phi).
\end{aligned}$$

□

CAPíTULO 2

Transformada de Fourier

Neste capítulo desenvolvemos a teoria básica da transformada de Fourier, inicialmente em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e posteriormente ampliamos para o espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ mediante o uso do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Finalizamos trabalhando com o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

1. Transformada de Fourier em L^1

Definição 2.1. *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier de f como a função $\widehat{f}$ dada por*

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

onde $\xi \cdot x = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$.

A transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ está bem definida pois

$$|f(x)e^{-i\xi \cdot x}| = |f(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Prosseguimos listando algumas propriedades básicas da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.1. *Sendo $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que:*

(1) *$f \to \hat{f}$ define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, ou seja,*

$$\widehat{af + g} = a\hat{f} + \hat{g} \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \forall a \in \mathbb{C}.$$

(2) *$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}$ e $\hat{f}$ é contínua.*

(3) *$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$ (Riemann-Lebesgue).*

(4) *Sendo* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *temos que*

$$\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\, \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi), \;\; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(5) *Se* $f_h(x) = f(x+h)$, *então*

$$\widehat{(f_h)}(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{ih\cdot\xi} \quad e \quad \widehat{(e^{ih\cdot x} f)}(\xi) = \hat{f}(\xi - h).$$

Demonstração. Da definição de $\hat{f}$ temos que $|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1} < \infty$, $\forall\ \xi \in \mathbb{R}^n$, logo $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2}\|f\|_{L^1}$ e conseqüentemente $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. A linearidade de $\wedge$ decorre diretamente da definição da soma entre funções juntamente com a linearidade do operador integral. Consideremos a seqüencia em $\mathbb{R}^n$, $\{\xi_k\}$, convergindo para $\xi \in \mathbb{R}^n$. Como, para cada natural k, $|f(x)e^{-ix\cdot\xi_k}| = |f(x)|$ e $f(x)e^{-ix\cdot\xi_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)e^{-ix\cdot\xi}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, o teorema da convergência dominada (ver [**18**]) nos fornece

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\xi_k) &= (2\pi)^{-n/2} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi_k} dx \\
&= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k\to\infty} f(x)e^{-ix\cdot\xi_k} dx \\
&= \hat{f}(\xi),
\end{aligned}$$

e daí que $\hat{f}$ é contínua. Com isto ficam provadas as propriedades (1) e (2).

Passamos, agora, à prova do lema de Riemann-Lebesgue (propriedade (3)). Começamos supondo que f é contínua e de suporte compacto. Então, para $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix\cdot\xi}(-1)e^{i\pi} dx \\
&= -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot\left(x - \frac{\xi\pi}{|\xi|^2}\right)} dx \\
&= -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(x + \tfrac{\xi\pi}{|\xi|^2}\right) e^{-i\xi\cdot x}\ dx,
\end{aligned}$$

e portanto vale

$$2\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left[f(x) - f\left(x + \tfrac{\xi\pi}{|\xi|^2}\right)\right] e^{-i\xi\cdot x}\ dx. \tag{8}$$

Notemos que se o suporte de f ($\text{supp}(f)$) estiver contido numa bola $\overline{B}_\rho(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, então

$$\left|\left[f(x) - f\left(x + \tfrac{\xi\pi}{|\xi|^2}\right)\right] e^{-i\xi\cdot x}\right| \leq 2 \max_{x\in\overline{B}_\rho(0)} |f(x)|\chi_{\overline{B}_\rho(0)}(x) \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ |\xi| \gg 1,$$

e além disso

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \left[f(x) - f\left(x + \tfrac{\xi\pi}{|\xi|^2}\right)\right] e^{-i\xi\cdot x} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

logo, pelo teorema da convergência dominada, o lado direito de (8) tende a zero quando $|\xi| \to \infty$, conseqüentemente temos que $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0$. No caso em que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é qualquer, dado $\epsilon > 0$, tomando $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ contínua e de suporte compacto tal que $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon/2$ e ξ com módulo suficientemente grande tal que $|\widehat{g}(\xi)| < \varepsilon/2$, temos que

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\xi)| &\leq |\widehat{(f-g)}(\xi)| + |\widehat{g}(\xi)| \\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f - g\|_{L^1} + \epsilon/2 \leq \epsilon, \end{aligned}$$

valendo, portanto, o item (3) do teorema.

Usando a comutatividade da convolução e os teoremas de Fubini e de mudança de variáveis temos o ítens (4) e (5). □

2. Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

Teorema 2.2. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{f} \in C^\infty$ e*

$$\partial^\alpha \hat{f} = (-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n. \tag{9}$$

Demonstração. Para calcularmos $\partial_j \hat{f}$, com $j = 1, \ldots, n$, da Regra de Leibniz (ver [**16**]), podemos derivar diretamente dentro do sinal de integração, aparecendo

$$\begin{aligned} \partial_j \hat{f}(\xi) &= \partial_j \left((2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx\right) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} (-ix_j) f(x) e^{-i\xi\cdot x} dx \\ &= -i\widehat{(x_j f)}(\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

e

$$\partial_j^k = (-i)^k \widehat{(x_j^k f)}, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \hat{f} &= (-i)^{\alpha_n}\ \partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2}\cdots\partial_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\ \widehat{(x_n^{\alpha_n} f)} \\
&= (-i)^{\alpha_{n-1}+\alpha_n}\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_{n-2}^{\alpha_{n-2}}(x_{n-1}^{\alpha_n} x_n^{\alpha_n} f)^\wedge \\
&= (-i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha f)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 2.3. *Para todo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ assim como*

$$\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Demonstração. Falta mostrar (10). Sendo $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, integrando por partes obtém-se

$$\begin{aligned}
\widehat{(\partial_j f)}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_j f(x)e^{-ix\cdot\xi}dx_j\ d\widetilde{x} \\
&= (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\widetilde{x}\cdot\widetilde{\xi}}\Big[f(x)e^{-ix_j\xi_j}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\xi_j\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix_j\xi_j}dx_j\Big]d\widetilde{x}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Como para cada $(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ a função $t \to \widetilde{f}(t)e^{\pm it\tau}$ está em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, onde $\widetilde{f}(t) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, temos que

$$f(x)e^{-ix_j\xi_j}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x_j\to\infty} f(x)e^{-ix_j\xi_j}\Big|_{-x_j}^{x_j} = \lim_{x_j\to\infty}\Big(\widetilde{f}(x_j)e^{-ix_j\xi_j} - \widetilde{f}(x_j)e^{ix_j\xi_j}\Big) = 0.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\widehat{(\partial_j f)}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} i\xi_j\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i\widetilde{x}\cdot\widetilde{\xi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix_j\xi_j}dx_j\ d\widetilde{x} \\
&= i\xi_j\hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n,
\end{aligned}$$

e por indução, para cada k natural,

$$\widehat{(\partial_j^k f)}(\xi) = i^k\xi_j^k\hat{f}(\xi),$$

seguindo então (10). □

O teorema anterior é uma das propriedades mais importantes da transformada de Fourier, mostrando que o operador diferencial agindo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é transformado no operador de multiplicação por $i^{|\alpha|}\xi^\alpha$, transformando, assim, equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em equações algébricas.

A seguir mostraremos que a transformada é invertível no espaço de Schwartz, cuja inversa possui propriedades semelhantes.

Teorema 2.4. *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, vale a fórmula de inversão*

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \tag{11}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g. \tag{12}$$

Antes de demonstrarmos o teorema 2.4, provaremos o seguinte lema, que será usado com esse objetivo.

Lema 2.1. *Seja $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, com $Re\, a > 0$, e $g(x) = e^{-a|x|^2}$. Então $\hat{g}(\xi) = e^{-|\xi|^2/4a}(2a)^{-n/2}$.*

Demonstração. Basta fazer em uma dimensão, pois, em $\mathbb{R}^n$, $\hat{g}(\xi)$ é um produto de n integrais iguais. Como $g'(x) = -2axg(x)$, os teoremas 2.2 e 2.3 nos dão que

$$(\hat{g})'(\xi) = -i\widehat{(xg)}(\xi) = \tfrac{i}{2a}\widehat{(g')}(\xi) = -\tfrac{\xi}{2a}\hat{g}(\xi).$$

Agora, observando que $\hat{g}(0) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\,x^2} dx = (2a)^{-1/2}$, a unicidade da solução do problema de cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{x}{2a} y(x) = 0 \\ y(0) = (2a)^{-1/2}, \end{cases}$$

nos fornece que $\hat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/4a}(2a)^{-1/2}$. $\square$

Demonstração do teorema 2.4. Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. O teorema 2.2 nos diz que $\hat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, e, juntamente com o Teorema 2.3 e o item *2* do Teorema 2.1, para cada

$\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$,

$$\begin{aligned} |\xi^\alpha \partial^\beta \hat{f}(\xi)| &= |\xi^\alpha (-i)^{|\beta|} \widehat{(x^\beta f)}(\xi)| = |(-i)^{|\beta|} (-i^2)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{(x^\beta f)}(\xi)| \\ &= |(-i)^{|\alpha+\beta|} i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{(x^\beta f)}(\xi)| = |(\partial^\alpha (x^\beta f))^\wedge(\xi)| \\ &\leq (2\pi)^{-n/2} \|\partial^\alpha (x^\beta f)\|_{L^1}, \end{aligned}$$

logo $\rho_{\alpha,\beta}(\hat{f}) < \infty$, provando que$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Porque, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, $f(x)g(y)e^{-iy\lambda x}$ é mensurável, da desigualdade de Minkowski (teorema 1.4), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(\lambda x)dx &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-iy\cdot\lambda x} dy dx \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(y) e^{-iy\cdot\lambda x} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \hat{f}(\lambda y) dy, \end{aligned}$$

acarretando (12) e que

$$\begin{aligned} f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)dx &= \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f(x/\lambda)\hat{g}(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g(x/\lambda)\hat{f}(x)dx \\ &= g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)dx. \end{aligned}$$

Escolhendo $g(x) = e^{-|x|^2/2}$ na igualdade anterior, o lema 2.1 nos dá o caso particular da formula de inversão da transformada

$$f(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)d\xi,$$

e daí, usando o item 5 do teorema 2.1,

$$f(x) = f_x(0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f_x)}(\xi)d\xi = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix\cdot\xi} d\xi.$$

$\square$

Considerando o operador

$$\begin{aligned} \mathcal{G} :\ \ \mathcal{S}(R) &\longrightarrow \mathcal{S}(R) \\ f &\longmapsto \mathcal{G}(f) := \check{f}, \end{aligned}$$

onde, para cada $f \in \mathcal{S}(R)$, $\check{f}$ está definido por

$$\check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

pela fórmula da inversão (11), temos que

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi = (\hat{f})^{\vee}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

e

$$\begin{aligned} (\check{f})^{\wedge}(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \check{f}(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(-\xi) e^{ix \cdot (-\xi)} d\xi \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \\ &= f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathcal{G}$ é a inversa da transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Agora podemos anunciar o teorema seguinte.

Teorema 2.5. *A restrição da transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo e $\mathcal{F}^{-1}$ vem dada por*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{i\xi \cdot x} d\xi, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.6 (Igualdade de Plancherel em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). *Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Demonstração. Tomando, na igualdade (12) do teorema 2.4, $\hat{g} = \overline{f}$, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} f \hat{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f} g \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \check{\overline{f}} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\, \overline{\hat{f}} \\ &= \|\hat{f}\|_{L^2}. \end{aligned}$$

$\square$

Mostramos, portanto, que $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2}) \longrightarrow (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2})$ é um isomorfismo de espaços vetoriais normados, isto é, um operador linear contínuo que é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, usando o teorema 1.8, como $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = L^2(\mathbb{R}^n)$, a transformada e a transformada inversa podem serem extendidas como operadores lineares contínuos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, permitindo, assim, definir a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

3. Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Em geral, dada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, a expressão

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\xi\cdot x}dx, \ \ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

não faz sentido. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1] \\ 1/x, & x \in (1, \infty) \end{cases} \tag{13}$$

está em $L^2(\mathbb{R})$ mas não em $L^1(\mathbb{R})$.

Definição 2.2 (Transformada de Fourier em L^2). *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f, onde também denotaremos por $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$, e a transformada inversa $\vee$ são dadas por*

$$\hat{f} = \lim_{k\to\infty} \hat{f}_k \quad e \quad \check{f} = \lim_{k\to\infty} \check{f}_k,$$

onde $\{f_k\}$ é uma seqüência qualquer em Schwartz convergindo a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 2.1. *Seja $f(x) = e^{-it|x|^2}$. Então, pelo lema 2.1,*

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \lim_{\varepsilon\to 0+} (e^{-(it+\varepsilon)|x|^2})^\wedge(\xi) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0+} e^{-|\xi|^2/4(it+\varepsilon)}(2(it+\varepsilon))^{-n/2} \\ &= e^{i|\xi|^2/4t}(2it)^{-n/2}. \end{aligned}$$

Teorema 2.7. *A transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$, definida como única extensão da transformada em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a $L^2(\mathbb{R}^n)$, é um operador unitário.*

Demonstração. Sendo $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, tomemos uma seqüência $\{f_k\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ onde $f_k \to f$ em L^2. Logo, pela continuidade, em L^2, da transformada direta e inversa, temos

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k\|_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \|\hat{f}_k\|_{L^2} = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

além de que

$$(\hat{f}\,)^\vee = \lim_{k\to\infty} (\hat{f}_k)^\vee = \lim_{k\to\infty} f_k = f$$

e

$$(\check{f})^\wedge = \lim_{k\to\infty} (\check{f}_k)^\wedge = \lim_{k\to\infty} f_k = f,$$

onde o limite é entendido em L^2. □

Observemos que o teorema anterior estende a igualdade de Plancherel (teorema 2.6) do espaço de Schwartz para $L^2(\mathbb{R}^n)$.

4. Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

Por (12), observando que, para cada $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\ &= f(\widehat{\varphi}), \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

assim como

$$\check{f}(\varphi) = f(\check{\varphi}), \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

definiremos a transformada de Fourier e a transformada inversa para distribuições temperadas.

Definição 2.3 (Transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f é a distribuição temperada $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ dada por*

$$\hat{f}(\varphi) = f(\widehat{\varphi}), \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

e a transformada inversa de f, denotada por $\check{f}$, é o funcional dado por

$$\check{f}(\varphi) = f(\check{\varphi}), \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

TEOREMA 2.8. *A transformada de Fourier* $\wedge := \mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *é um isomorfismo cuja inversa é dada pela transformada inversa* $\vee$*. Ela é contínua com inversa contínua no sentido que se* $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$*, então*

$$\hat{f}_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{f} \quad e \quad \check{f}_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} \check{f}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{C}$. Inicialmente vejamos que

$$\begin{aligned} \widehat{f+ag}(\varphi) = (f+ag)(\widehat{\varphi}) &= f(\widehat{\varphi}) + ag(\widehat{\varphi}) \\ &= \hat{f}(\varphi) + a\hat{g}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Como

$$(\hat{f}\,)^{\vee}(\varphi) = \hat{f}(\varphi^{\vee}) = f((\varphi^{\vee})^{\wedge}) = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

e

$$(\check{f})^{\wedge}(\varphi) = \check{f}(\widehat{\varphi}) = f(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

temos que $\vee \circ \wedge = \wedge \circ \vee$ é a identidade no espaço das distribuições temperadas. Agora, para analisarmos a continuidade, sejam $\{f_k\}$ uma seqüência de distribuições temperadas e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tais que $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$, ou seja, $\lim_{k\to\infty} f_k(\varphi) = f(\varphi), \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Como, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\hat{f}_k(\varphi) = f_k(\widehat{\varphi}), \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

temos que

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}_k(\varphi) = f(\widehat{\varphi}) = \hat{f}(\varphi), \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Usando o mesmo argumento para a transformada inversa $\vee$, finalizamos a demonstração.

$\square$

DEFINIÇÃO 2.4. *Seja* $\Phi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$*. Dizemos que* Φ *é de crescimento lento quando, para todo* $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$*, existe uma constante* $C(\alpha)$ *e um número natural* $N(\alpha)$ *tais que*

$$|\partial^{\alpha}\Phi| \leq C(\alpha)(1+|x|^2)^{N(\alpha)},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ *com* $|x|$ *suficientemente grande. Denotaremos o conjunto das funções de crescimento lento por* $Q(\mathbb{R}^n)$*.*

Sejam $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Observando que, para qualquer $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\partial^\alpha(\Phi\varphi)(x)|$ é limitado superiormente por uma combinação linear finita de termos da forma

$$C(1+|x|^2)^N \partial^\beta \varphi(x),$$

concluímos que $\Phi\varphi$ está no espaço de Schwartz, motivando a próxima definição.

Definição 2.5. *Sejam $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$. Definimos a distribuição ΦT, chamada de produto da distribuição T com a função Φ, por*

$$\Phi T(\varphi) = T(\Phi\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Teorema 2.9. *Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Denotando $x^\alpha f$ o produto da função $\Phi(x) = x^\alpha$ com a distribuição temperada f, então*

(i) $(\partial^\alpha f)^\wedge = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \hat{f}$;
(ii) $\partial^\alpha(\hat{f}) = (-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)^\wedge$.

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. O resultado segue observando que para cada $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha f)^\wedge(\varphi) = (\partial^\alpha f)(\hat{\varphi}) &= (-1)^{|\alpha|} f(\partial^\alpha \hat{\varphi}) \\ &= (-1)^{|\alpha|} f((-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha\varphi}) \\ &= i^{|\alpha|}\hat{f}(x^\alpha\varphi) \\ &= i^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{f}(\varphi)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha \hat{f})(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\hat{f}(\partial^\alpha\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} f(i^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{\varphi}) \\ &= (-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)(\hat{\varphi}) \\ &= (-i)^{|\alpha|}(x^\alpha f)^\wedge(\varphi).\end{aligned}$$

□

Teorema 2.10. *Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\widehat{T * \varphi} = (2\pi)^{n/2}\,\widehat{T}\widehat{\varphi},$$

onde $T * \varphi$ *e* $\widehat{T}\widehat{\varphi}$ *estão nas definições 1.10 e 2.5, respectivamente.*

Demonstração. Este resultado segue do ítem *4* do teorema 2.1 e que $\varphi(-\cdot) = \hat{\hat{\varphi}}$, pois

$$\begin{aligned} \widehat{T * \varphi}\,(\phi) &= T * \varphi\,(\hat{\phi}) \\ &= T(\ \varphi(-\cdot) * \hat{\phi}\ ) \\ &= T(\ \hat{\hat{\varphi}} * \hat{\phi}\ ) \\ &= (2\pi)^{n/2}\, T(\widehat{\hat{\varphi}\phi}) \\ &= (2\pi)^{n/2}\, \widehat{T}(\hat{\varphi}\phi) \\ &= (2\pi)^{n/2}\, \widehat{T}\ \widehat{\varphi}(\phi), \quad \forall\, \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

□

5. Os Espaços de Sobolev

Abordaremos nesta seção os espaços de Sobolev do tipo $L^2(\mathbb{R})$ de ordem $s \in \mathbb{R}$ através da transformada de Fourier em $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Definição 2.6 (Espaços de Sobolev na reta). *Sendo* $s \in \mathbb{R}$ *temos um subconjunto de* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *chamado um espaço de Sobolev, dado por*

$$H^s(\mathbb{R}) := \{f \in S'(\mathbb{R}); (1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})\}, \tag{14}$$

ou seja, se $f \in S'(\mathbb{R})$, *denotando*

$$\|f\|_{H^s} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}},$$

então $f \in H^s(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$ *quando*

$$\|f\|_{H^s} < \infty.$$

Observamos que $H^s(\mathbb{R}) \subset H^r(\mathbb{R})$ para $r \leq s$, e, usando a *Igualdade de Plancherel* em L^2,

$$H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}). \tag{15}$$

Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, poderíamos ter definido os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ como subconjuntos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e encontraríamos estimativas similares ao caso real apresentadas a seguir. Fizemos esta opção porque neste trabalho necessitamos apenas dos $H^s(\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.11. *Para cada $s \in \mathbb{R}$ o espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno*

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_s : \quad H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f, g) \qquad &\longmapsto \langle f, g \rangle_s := \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi. \end{aligned}$$

Teorema 2.12. *Sejam $s, k \in \mathbb{R}$, com $k > 0$, e $f \in H^s(\mathbb{R})$. Então $f^{(\alpha)} \in H^{s-k}(\mathbb{R})$ para todo natural α tal que $\alpha \leq k$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in \mathbb{N}_0$ tal que $\alpha \leq k$. Pelo teorema 2.9 segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{s-k} |\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{s-k} \xi^{2\alpha} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{s-k+\alpha} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

logo $f^{(\alpha)} \in H^{s-k}(\mathbb{R})$. □

Teorema 2.13 (Imersão de Sobolev). *Se $s > 1/2$, então $H^s(\mathbb{R}) \subseteq C_\infty(\mathbb{R})$ e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \xi^2)^{-s} d\xi \right)^{1/2} \|f\|_{H^s},$$

onde $C_\infty(\mathbb{R})$ é a coleção das funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$.

Mais geralmente temos que se $s > k + 1/2$, onde $k \in \mathbb{N}_0$, então $H^s(\mathbb{R})$ é imerso continuamente em $C^k_\infty(\mathbb{R})$, o espaço das funções com k derivadas contínuas tais que

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(\alpha)}(x) = 0, \quad \forall\, \alpha \in \{0, 1, \dots, k\},$$

munido da norma

$$\|f\|_{\infty,k} := \max_{\alpha \le k} \|f^{(\alpha)}\|_{L^\infty}.$$

Além disso, vale

$$\|f\|_{L^\infty} \le C_s \|f\|_{H^s}.$$

Demonstração. Seja $f \in H^s(\mathbb{R})$. Inicialmente vejamos que $\hat{f}$ é mensurável. De fato, quando $s > 1/2$ a integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{-s} d\xi$ é finita, logo

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{-s/2}(1+\xi^2)^{s/2}|\hat{f}(\xi)|d\xi \\ &\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{s}|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2} \\ &\le \|f\|_{H^s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

onde novamente aplicamos a desigualdade de Hölder (teorema 1.1). Portanto, usando desigualdade análoga ao item (2) do teorema 2.1 para a transformada inversa, segue que

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^\infty} &= \|(\hat{f}\,)^\vee\|_{L^\infty} \le \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \|(\hat{f}\,)\|_{L^1} \\ &\le \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{-s} d\xi\right)^{1/2} \|f\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Agora consideremos o caso em que $s > k + 1/2$ para certo $k \in \mathbb{N}$. O teorema 2.12 nos diz que $f^{(\alpha)} \in H^{s-k}(\mathbb{R})$, $\forall\, \alpha \in \{0, 1, \dots, k\}$. Como $s - k > 1/2$, pelo que vimos anteriormente, segue que $f^{(\alpha)} \in C_\infty(\mathbb{R})$, $f \in C^k_\infty(\mathbb{R})$ e a inclusão contínua desejada. $\square$

Teorema 2.14. *Seja $s \in \mathbb{N}_0$. Então $f \in H^s(\mathbb{R})$ se, e somente se,*

$$\sum_{\alpha \le s} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2} < \infty.$$

Demonstração. Sendo C_1 e C_2 constantes reais tais que

$$C_1(1+\xi^2)^s \leq \sum_{\alpha\leq s} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2(1+\xi^2)^s,$$

usando (2.9) e Plancherel, temos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^s} &\leq \tfrac{1}{C_1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\leq s}|\xi^\alpha|^2\right)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \tfrac{1}{C_1}\sum_{\alpha\leq s}\int_{-\infty}^{\infty}|i^\alpha\xi^\alpha\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \tfrac{1}{C_1}\sum_{\alpha\leq s}\|\widehat{f^{(\alpha)}}(\xi)\|_{L^2}^2 \\
&= \tfrac{1}{C_1}\sum_{\alpha\leq s}\|f^{(\alpha)}(\xi)\|_{L^2}^2 d\xi,
\end{aligned}$$

assim como

$$\sum_{\alpha\leq s}\|f^{(\alpha)}\|_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{\alpha\leq s}|\xi^\alpha|^2\right)|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq C_2\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^s|\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

$\square$

CAPíTULO 3

Equação Linear de Schrödinger

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades das soluções para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = i\ \partial_x^2 u(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{16}$$

Tomemos u_0 em $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Usando a transformada de Fourier em relação à variável espacial, obtemos

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u}(\xi,t) = i\widehat{\partial_x^2 u}(\xi,t) = -i\xi^2 \hat{u}(\xi,t), & \xi \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \hat{u}(\xi,0) = \hat{u}_0(\xi), & \xi \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

A solução desta família de equações diferenciais ordinárias é dada por

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-i\xi^2 t}\hat{u}_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Agora, aplicando a transformada inversa em ambos os lados de (17), usando o teorema 2.10 e o exemplo 2.1, percebemos que a solução de (16) é da forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left(e^{-it\xi^2}\hat{u}_0\right)^{\vee}(x) \\ &= (2\pi)^{-1/2}\left(\left(e^{-it\xi^2}\right)^{\vee} * u_0\right)(x) \\ &= \left(e^{ix^2/4t}(4i\pi t)^{-1/2} * u_0\right)(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{18}$$

Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$, definamos

$$e^{it\partial_x^2} f := \left(e^{-it\xi^2}\hat{f}\right)^{\vee}.$$

Vemos, então, que a solução do problema linear homogêneo (16) é dada por

$$u(x,t) = e^{it\partial_x^2}u_0(x).$$

Para maior comodidade, usaremos daqui por diante a notação

$$S(t) := e^{it\partial_x^2}. \tag{19}$$

1. Propriedades do Grupo Livre de Schrödinger

A seguir, estabelecemos algumas propriedades da família de operadores $\{S(t);\ t \in \mathbb{R}\}$.

TEOREMA 3.1. *A família de operadores $\{S(t);\ t \in \mathbb{R}\}$ é um grupo unitário de operadores, ou seja:*

(1) *Para todo $t \in \mathbb{R}$, $S(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ é uma isometria.*
(2) $S(t)S(t') = S(t+t')$ *com* $(S(t))^{-1} = S(-t) = (S(t))^*$.
(3) $S(0) = I$.
(4) *Para cada $f \in L^2(\mathbb{R})$, a função*

$$\begin{aligned} \Phi_f :\ \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto S(t)f \end{aligned}$$

é contínua, isto é, descreve uma curva contínua em $L^2(\mathbb{R})$.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ e $t, t' \in \mathbb{R}$. Usando a igualdade de Plancherel, temos que

$$\|S(t)f\|_{L^2}^2 = \|\big(e^{-it\xi^2}\hat{f}\,\big)^\vee\|_{L^2}^2 = \|e^{-it\xi^2}\hat{f}\|_{L^2}^2 = \|\hat{f}\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2,$$

demonstrando que $S(t) : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ é uma isometria. Aplicando a relação da transformada com sua inversa segue que

$$\begin{aligned} S(t+t')f &= \left(e^{-it\xi^2}e^{-it'\xi^2}\hat{f}\right)^\vee \\ &= \left(e^{-it\xi^2}\left(e^{-it'\xi^2}\hat{f}\right)^{\vee\wedge}\right)^\vee \\ &= \left(e^{-it\xi^2}\left(S(t')f\right)^\wedge\right)^\vee \\ &= S(t)\circ S(t')\,f, \quad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Empregando (12) juntamente com o fato que $\check{\overline{g}} = \overline{\hat{g}}$, segue que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} (S(t)f)(x)\overline{g(x)}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx^2}\hat{f}(x)\check{\overline{g}}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(\overline{e^{it\xi^2}\hat{g}}\right)^{\wedge}(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{(e^{it\xi^2}\hat{g})^{\vee}(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{(S(-t)g)(x)}dx.\end{aligned}$$

O item (3) diz que $\Phi_f(0) = f$. De fato,

$$S(0)f = \left(e^{-i0\xi^2}\hat{f}\right)^{\vee} = (\hat{f})^{\vee} = f.$$

Agora verificaremos a continuidade de Φ_f observando que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\tau}\|\Phi_f(t) - \Phi_f(\tau)\|_{L^2} &= \lim_{t\to\tau}\|S(t)f - S(\tau)f\|_{L^2} \\ &= \lim_{t\to\tau}\left\|\left(e^{-it\xi^2}\hat{f} - e^{-i\tau\xi^2}\hat{f}\right)^{\vee}\right\|_{L^2} \\ &= \lim_{t\to\tau}\left\|\left(e^{-it\xi^2} - e^{-i\tau\xi^2}\right)\hat{f}\right\|_{L^2} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do teorema da convergência dominada de Lebesgue. □

2. Propriedades Suavizantes

Nesta seção apresentaremos duas propriedades globais com efeito suavizante do grupo $\{S(t);\ t\in\mathbb{R}\}$, uma das quais, conhecida como estimativas de Strichartz, será aplicada no próximo capítulo.

Lema 3.1. *Se* $t \neq 0$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ *e* $p' \in [1,2]$, *então* $S(t): L^{p'} \to L^p$ *é contínua e*

$$\|S(t)f\|_{L^p} \leq C\,|t|^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L^{p'}}.$$

Demonstração. Do item 1 do teorema 3.1, temos que $S(t): L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ tem norma igual a 1. Usando (18) e a desigualdade de Young (teorema 1.5), temos

$$\begin{aligned} \|S(t)f\|_{L^\infty} &= \| \left(e^{i|\cdot|^2/4t}(4i\pi t)^{-1/2}\right) * f\|_{L^\infty} \\ &\leq C\,\|\tfrac{e^{i|\cdot|^2/4t}}{\sqrt{t}}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^1} \\ &\leq C\,|t|^{-1/2}\|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\sup_{f\neq 0}\frac{\|S(t)f\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^1}} \leq C\,|t|^{-1/2}.$$

Logo, o teorema de Riesz-Thorin (1.9) fornece que $S(t): L^{p'}(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$, com $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, é limitado e

$$\sup_{f\neq 0}\frac{\|S(t)f\|_{L^p}}{\|f\|_{L^{p'}}} \leq \left(C\,|t|^{-1/2}\right)^\theta 1^{1-\theta},$$

onde

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2}+\theta, \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2}, \quad \theta \in (0,1),$$

e daí

$$\|S(t)f\|_{L^p} \leq C\,|t|^{-1/2(1/p'-1/p)}\|f\|_{L^{p'}}.$$

□

Teorema 3.2 (Estimativas de Strichartz). *Sejam* $p \geq 2$ *e* $\dfrac{2}{q} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{p}$. *O grupo* $\{S(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ *satisfaz:*

(20) $$\|S(t)f\|_{L^q_t(\mathbb{R};L^p_x)} \leq C\|f\|_{L^2},$$

onde C *é uma constante que depende somente de* p.

Demonstração. O item 2 do teorema 3.1 e a desigualdade de Hölder (teorema 1.1) nos dão

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(S(t)f)(x)\overline{g(x,t)}\,dxdt &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{S(-t)g(x,t)}\,dxdt\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}f(x)\int_{-\infty}^{\infty}\overline{S(-t)g(x,t)}\,dtdx\\
&\leq \|f\|_{L^2_x}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}S(-t)g(\cdot,t)\,dt\right\|_{L^2_x}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{-\infty}^{\infty}S(-t)g(\cdot,t)dt\right\|^2_{L^2_x} &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}S(-t)g(x,t)dt\right)\overline{\left(\int_{-\infty}^{\infty}S(-t')g(x,t')dt'\right)}dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}S(-t)g(x,t)\,\overline{S(-t')g(x,t')}\,dxdtdt'\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,t)\,\overline{S(t-t')g(x,t')}\,dxdtdt'\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,t)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\overline{S(t-t')g(x,t')}dt'\right)\,dtdx\\
&\leq \|g\|_{L^{q'}_t(\mathbb{R};L^{p'}_x)}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}S(t-t')g(\cdot,t')dt'\right\|_{L^q_t(\mathbb{R};L^p_x)},
\end{aligned}$$

onde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$. Agora, usando a desigualdade de Minkowski (teorema 1.4) e o lema 3.1, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{-\infty}^{\infty}S(t-t')g(\cdot,t')dt'\right\|_{L^p_x} &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|S(t-t')g(x,t')|\,dt'\right)^p dx\right)^{1/p}\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|S(t-t')g(x,t')|^p\,dx\right)^{1/p}dt'\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\|S(t-t')g(\cdot,t')dt'\|_{L^p_x}\,dt'\\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}C|t-t'|^{-1/2(1/p'-1/p)}\|g(\cdot,t')\|_{L^{p'}_x}dt'\\
&= C\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|t-t'|^{\alpha}}\|g(\cdot,t')\|_{L^{p'}_x}dt'
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p'} - \dfrac{1}{p}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Daí, quando $\dfrac{1}{q'} = \dfrac{1}{q} + (1-\alpha)$ e $0 < 1-\alpha < 1$, isto é,

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{q} + \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad p > 2,$$

do teorema 1.10 (Hardy-Littlewood-Sobolev) segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{-\infty}^{\infty} S(t-t')g(\cdot,t')dt' \right\|_{L_t^q L_x^p} &\leq \left\| C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|t-t'|^{\alpha}} \left\| g(\cdot,t') \right\|_{L^{p'}} dt' \right\|_{L_t^q} \\
&\leq C \left\| g \right\|_{L_t^{q'}(\mathbb{R};L_x^{p'})}.
\end{aligned}$$

Portanto, o teorema 1.6 de dualidade juntamente com o que vimos nos fornecem

$$\begin{aligned}
\left\| S(t)f \right\|_{L_t^q(\mathbb{R};L_x^p)} &= \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (S(t)f)(x)\ \overline{g(x,t)}\ dxdt \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \|f\|_{L_x^2} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} S(-t)g(\cdot,t)\ dt \right\|_{L_x^2} \\
&\leq \sup_{\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}=1} \|f\|_{L_x^2} \left(\left\| \int_{-\infty}^{\infty} S(t-t')g(\cdot,t')dt' \right\|_{L_t^q(\mathbb{R};L_x^p)} \right)^{1/2} \\
&\leq C \left\| f \right\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

$\square$

CAPíTULO 4

Boa Colocação para o Problema de Cauchy Associado ao Sistema de Gross-Pitaevskii

Neste capítulo estudaremos a boa colocação para o problema de Cauchy associado ao sistema de Groos-Pitaevskii, isto é,

$$
\begin{cases}
i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2 u + v = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\
i\partial_t v + \partial_x^2 v - (\mu_0 + a|v|^2) v + u = 0, & \\
u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x). &
\end{cases} \tag{21}
$$

Denotaremos por $\mathcal{F}_x = \wedge_x$ e $\mathcal{F}_t = \wedge_t$ as transformadas de Fourier nas variáveis x e t, respectivamente, e por $\langle \cdot \rangle : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função dada por $\langle x \rangle = 1 + |x|$. Além disso, definimos os operadores derivadas parciais D_x e D_t em $L^2(\mathbb{R}^2)$ por

$$D_x := \mathcal{F}_x^{-1} i\xi \mathcal{F}_x \quad \text{e} \quad D_t := \mathcal{F}_t^{-1} i\tau \mathcal{F}_t,$$

respectivamente. Observando que $\langle i\xi \rangle = \langle \xi \rangle$, denotamos

$$\langle D_x \rangle := \mathcal{F}_x^{-1} \langle \xi \rangle \mathcal{F}_x.$$

Através do teorema de Plancherel, observamos que a norma $\| \cdot \|_{H^s}$ no espaço de Sobolev H^s é equivalente a $\| \langle D_x \rangle^s \cdot \|_{L^2}$. De fato, usando que $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} \dfrac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \xi^2 \rangle^s} = 1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\| \langle D_x \rangle^s f \|_{L^2} &= \| (\langle \xi \rangle^s \hat{f})^\vee \|_{L^2} = \| \langle \xi \rangle^s \hat{f} \|_{L^2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|)^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\simeq \left(\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= \| f \|_{H^s}.
\end{aligned}
$$

Sejam $b, s \in \mathbb{R}$. O espaço de Hilbert $H_t^b(\mathbb{R}; H_x^s(\mathbb{R})) = H^b(\mathbb{R}; H^s)$ é definido como o completamento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ com a norma

$$\|f\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s(\mathbb{R}))} = \|\langle D_t\rangle^b f\|_{L_t^2(\mathbb{R};H_x^s(\mathbb{R}))}. \tag{22}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s(\mathbb{R}))} &= \|\langle D_t\rangle^b f\|^2_{L_t^2(\mathbb{R};H_x^s(\mathbb{R}))} = \int_{-\infty}^{\infty} \|\langle D_t\rangle^b f(\cdot,t)\|_{H_x^s} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi^2\rangle^s \left|\langle D_t\rangle^b \hat{f}^x(\xi,t)\right|^2 d\xi\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi^2\rangle^s \left|\left(\langle\tau\rangle^b \hat{f}^{t,x}(\xi,\tau)\right)^{\vee_t}(t)\right|^2 d\xi\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi^2\rangle^s \int_{-\infty}^{\infty} \left|\left(\langle\tau\rangle^b \hat{f}^{x,t}(\xi,\tau)\right)^{\vee_t}(t)\right|^2 dt\ d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi^2\rangle^s \int_{-\infty}^{\infty} \left|\langle\tau\rangle^b \hat{f}^{x,t}(\xi,\tau)\right|^2 d\tau\ d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi^2\rangle^s \langle\tau\rangle^{2b} |\hat{f}^{x,t}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi,
\end{aligned}$$

onde $\hat{f}^{x,t}$ é a transformada de Fourier de f em ambas as variáveis x e t, isto é,

$$\begin{aligned}
\hat{f}^{x,t}(\xi,\tau) &= (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^t(x,\tau)e^{-i\xi x}dx \\
&= (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi-it\tau} f(x,t)dtdx, \quad \forall\,(\xi,\tau)\in\mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Portanto, por conveniência, podemos definir a norma do espaço misto $H_t^b(\mathbb{R}; H_x^s(\mathbb{R}))$ estabelecido em (22) por

$$\|f\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s(\mathbb{R}))} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau\rangle^{2b}|\hat{f}^{t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi\right)^{1/2}. \tag{23}$$

Agora, introduzimos os espaços de funções $X^{s,b}$, onde construiremos as soluções locais de (21). Estes espaços foram originalmente usados por Bourgain em [**2**] quando estudou a Boa Colocação para a equação periódica não linear de Schrödinger, assim como para equação de Korteweg-de Vries.

Sejam $b, s \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $X^{s,b}$ o espaço associado ao grupo unitário da equação linear de Schrödinger, definido como o completamento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ com a norma

$$\|f\|_{X^{s,b}} := \|S(-t)f\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s(\mathbb{R}))}. \tag{24}$$

Usando a norma (23) e a propriedade da transformada de Fourier vista no item 5 do teorema 2.1, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{X^{s,b}}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau\rangle^{2b}\left|[S(-t)f(x,t)]^{\wedge_{t,x}}(\xi,\tau)\right|^2 d\tau\, d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau\rangle^{2b}\left|\left[e^{it\xi^2}\hat{f}^x(\xi,t)\right]^{\wedge_t}(\tau)\right|^2 d\tau d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau\rangle^{2b}\left|\hat{f}^{t,x}(\xi,\tau-\xi^2)\right|^2 d\tau d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s}\langle\tau+\xi^2\rangle^{2b}|\hat{f}^{x,t}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi. \qquad (25)
\end{aligned}$$

Observação 4.1. *Para $b > 1/2$ e $f \in X^{s,b}$, aplicando, então, o teorema 2.13 (Imersão de Sobolev), observamos que*

$$\|f\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};H_x^s)} = \|S(-t)f\|_{L_t^\infty(\mathbb{R};H_x^s)} \le C\,\|S(-t)f\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} = C\,\|f\|_{X^{s,b}}$$

e que a aplicação $t \longrightarrow f(\cdot,t)$ está em $C(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}))$.

1. Resultados Principais

Enunciaremos a seguir os teoremas principais que serão provados no final deste capítulo. Começamos definindo $\psi = \psi(t)$ como sendo uma função par infinitamente diferenciável e de suporte compacto, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, tal que $0 \le \psi(t) \le 1$ e

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \le 1, \\ 0, & \text{se } |t| \ge 2. \end{cases}$$

Daqui por diante, denotaremos ψ_δ a função $\psi_\delta(t) := \psi(t/\delta)$, $\forall\, \delta > 0$. Aliás, várias constantes serão denotadas por C.

Teorema 4.1 (Boa Colocação Local em $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 0$). *Sejam $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, $s \geq 0$, e $b \in (1/2, 1)$. Então existe um tempo positivo $T = T\left(\|u_0\|_{H^s}, \|v_0\|_{H^s}\right)$ e uma única solução $(u(t), v(t))$ para o PVI (21) tais que:*

(1) $(\psi_T u, \psi_T v) \in X^{s,b} \times X^{s,b}$;
(2) $(u, v) \in C([0, T]; H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}))$.

Além disso, a aplicação dado-solução $(u_0, v_0) \longmapsto (u(t), v(t))$ é localmente Lipschitz de $H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ em $C([0, T]; H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}))$.

Com relação à boa colocação global, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2 (Boa Colocação Global em $L^2 \times L^2$). *Seja $(u_0, v_0) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Então a única solução dada pelo teorema 4.1 pode ser estendida globalmente para todo intervalo de tempo $[0, T]$.*

2. Estimativas Lineares

Apresentaremos, como o primeiro resultado desta seção, a Regra de Leibniz para derivadas fracionais.

Teorema 4.3. *Seja $\alpha \in (0, 1)$ e $p \in (1, \infty)$. Então*

$$\|D^\alpha(fg) - fD^\alpha g\|_{L^p} \leq C\|g\|_{L^\infty}\|D^\alpha f\|_{L^p}.$$

Demonstração. Ver teorema A.12 do apêndice de [**13**]. □

Os seguintes resultados nos dão propriedades suavizantes fundamentais dos espaços $X^{s,b}$. As provas que desenvolveremos para estes espaços foram estabelecidas nos trabalhos [**12**] e [**14**].

Lema 4.1. *Sendo* $s \in \mathbb{R}$, $b \in (1/2, 1)$ *e* $\delta \in (0,1)$, *então, para* $F \in X^{s,b}$, *vale*

$$\|\psi_\delta F\|_{X^{s,b}} \leq C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X^{s,b}}. \tag{26}$$

Além disso, se $a, b \in (0, 1/2)$ *com* $a < b$ *e* $\delta \in (0,1)$, *então, para* $F \in X^{s,b}$, *temos que*

$$\|\psi_\delta F\|_{X^{s,-b}} \leq C\delta^{(b-a)/4(1-a)}\|F\|_{X^{s,-a}}. \tag{27}$$

Demonstração. Observamos que para provar (26) é suficiente provar a seguinte desigualdade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\,\rangle^{2b}d\tau \leq C\delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\,\rangle^{2b}d\tau, \quad \forall\, \xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

De fato, se (28) é válida, então

$$\begin{aligned}
\|\psi_\delta F\|^2_{X^{s,b}} &= \int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau+\xi^2\rangle^{2b}|(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi \\
&\leq C\delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\xi\rangle^{2s}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\tau+\xi^2\rangle^{2b}|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi \\
&= C\delta^{1-2b}\|F\|^2_{X^{s,b}}.
\end{aligned}$$

Provaremos, então, (28). Usando a igualdade de Plancherel (teorema 2.6), observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty}|(\psi_\delta \widehat{F}^{x}(\xi,\cdot))(t)|^2\ dt \\
&\leq \|\psi_\delta\|^2_{L^\infty}\|\widehat{F}^{x}(\xi,\cdot)\|^2_{L^2} \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau \\
&\leq \delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\,\rangle^{2b}d\tau \quad \forall\, \xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{29}$$

onde usamos na última igualdade que $1 < \delta^{1-2b}$ $(0 < \delta < 1$ e $1 - 2b < 0)$. Empregando o teorema 2.1-(5) e o teorema 2.3, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2 |\tau + \widetilde{\xi}\,|^{2b} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} |(\psi_\delta \widehat{F}^x(\xi,\cdot))^{\wedge t}(\tau - \widetilde{\xi})|^2 |\tau|^{2b} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{i\widetilde{\xi}t}\psi_\delta \widehat{F}^x(\xi,\cdot))^{\wedge t}(\tau)|^2 |\tau|^{2b} d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |D_t^b(\; e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\psi_\delta \widehat{F}^x(\xi,\cdot)\;)(t)|^2 dt \\
&= \|D_t^b(e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\psi_\delta \widehat{F}^x(\xi,\cdot))\|_{L_t^2}^2 \\
&\leq C\|D_t^b(e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot)\psi_\delta) - e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot)D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2 + \\
&\quad + \|e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}(\xi,\cdot)D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2, \quad \forall\, \xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Agora usamos o teorema 4.3 e novamente o teorema 2.1-(5), junto ao fato de $0 < b < 1$, para obter

$$
\begin{aligned}
\|D_t^b(e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot)\psi_\delta) - e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot)D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2 &\leq C\, \|\psi_\delta\|_{L^\infty}^2 \|D_t^b(e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot))\|_{L_t^2}^2 \\
&= C\, \|\tau^b (e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot))^{\wedge t}\|_{L_\tau^2}^2 \\
&= C\, \|\tau^b\, \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau - \widetilde{\xi})\|_{L_\tau^2}^2 \\
&= C \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2 |\tau + \widetilde{\xi}\,|^{2b} d\tau \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2 \langle \tau + \widetilde{\xi}\,\rangle^{2b} d\tau, \quad \forall\, \xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, aplicando o lema de imersão de Sobolev (teorema 2.13) e que $\widehat{\psi_\delta}(\cdot) = \delta\, \widehat{\psi}(\delta\ \cdot)$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}(\xi,\cdot)D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2 &\leq \|e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot)\|_{L_t^\infty}^2\ \|D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2 \\
&\leq C\ \|e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x(\xi,\cdot)\|_{H_t^b}^2\ \|D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2 \\
&\leq C\ \|D_t^b\psi_\delta\|_{L_t^2}^2 \int_{-\infty}^{\infty} |(e^{i\widetilde{\xi}\cdot}\widehat{F}^x)^{\wedge t}(\xi,\tau)|^2\langle\tau\rangle^{2b}d\tau \\
&= C\ \int_{-\infty}^{\infty} |\tau^b\delta\widehat{\psi}(\delta\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \left|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau-\widetilde{\xi})\right|^2 \langle\tau\rangle^{2b}d\tau \\
&= C\ \delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty} \tau^{2b}|\widehat{\psi}(\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\rangle^{2b}d\tau \\
&= C\ \delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\rangle^{2b}d\tau, \quad \forall\ \xi,\widetilde{\xi}\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Logo, segue-se de (30) que

$$
\int_{-\infty}^{\infty}|(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2|\tau+\widetilde{\xi}\,|^{2b}d\tau \leq C\delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\,\rangle^{2b}d\tau, \quad \forall\xi,\widetilde{\xi}\in\mathbb{R}. \tag{31}
$$

Portanto, como

$$
\begin{aligned}
\langle\tau+\widetilde{\xi}\,\rangle^{2b} &= (1+|\tau+\widetilde{\xi}\,|)^{2b} \\
&\leq C(1+|\tau+\widetilde{\xi}\,|^{2b}),
\end{aligned}
$$

as desigualdades obtidas em (29) e (31) nos dão que

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\rangle^{2b}d\tau &\leq C\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau + \\
&\qquad + \int_{-\infty}^{\infty}|(\psi_\delta F)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2|\tau+\widetilde{\xi}|^{2b}d\tau\Big) \\
&\leq C\delta^{1-2b}\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2\langle\tau+\widetilde{\xi}\,\rangle^{2b}d\tau, \quad \forall\ \xi,\widetilde{\xi}\in\mathbb{R},
\end{aligned}
$$

valendo, então, a estimativa (26). $\square$

Lema 4.2. *Seja $s \in \mathbb{R}$, $b \in (1/2, 1)$ e $\delta \in (0,1)$. Então, para $F \in H_t^b(\mathbb{R}; H_x^s(\mathbb{R}))$, temos que*

$$\left\| \psi_\delta \int_0^t F(t')dt' \right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \leq C\delta^{(1-2b)/2} \|F\|_{H_t^{b-1}(\mathbb{R};H_x^s)}, \tag{32}$$

$$\left\| \psi_\delta \int_0^t F(t')dt' \right\|_{L_t^\infty((0,T);H_x^s)} \leq C\delta^{(1-2b)/2} \|F\|_{H_t^{b-1}(\mathbb{R};H_x^s)}. \tag{33}$$

Demonstração. Como $b > 1/2$, a imersão de Sobolev (teorema 2.13) mostra que

$$\left\| \psi_\delta \int_0^t F(t')dt' \right\|_{L_t^\infty((0,T);H_x^s)} \leq C \left\| \psi_\delta \int_0^t F(t')dt' \right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)},$$

logo a inequação (33) é obtida imediatamente de (32). Do que segue deriva a estimativa (32). Dividimos em três partes a integral

$$\begin{aligned}
\psi_\delta \int_0^t F(t',x)dt' &= \tfrac{1}{2\pi}\, \psi_\delta \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi + it'\tau} \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau dt' \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\, \psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \left(\int_0^t e^{it'\tau} dt' \right) \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\, \psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\, \frac{e^{it\tau}-1}{i\tau} \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(e^{ix\xi + it\tau}\, \tfrac{1-\psi(\tau)}{i\tau} + \\
&\qquad e^{ix\xi+it\tau}\, \tfrac{1-e^{-it\tau}}{i\tau}\, \psi(\tau) - e^{ix\xi}\, \tfrac{1-\psi(\tau)}{i\tau} \Big) \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \\
&= \tfrac{1}{2\pi} (\, I_1 + I_2 + I_3 \,),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\, \frac{1-e^{-it\tau}}{i\tau}\, \psi(\tau) \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \\
I_2 &= \psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\, \frac{1-\psi(\tau)}{i\tau} \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \\
I_3 &= -\psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\, \frac{1-\psi(\tau)}{i\tau} \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau.
\end{aligned}$$

Começamos fazendo

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} &= \left\|\psi_\delta \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-it)^k}{ik!}\, \tau^{k-1}\, \psi(\tau)\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)d\xi d\tau\right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \Big\| \underbrace{\frac{\psi_\delta\, t^k}{k!}}_{\psi_{k,\delta}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\, \tau^{k-1}\, \psi(\tau)\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)d\xi d\tau}_{h_k} \Big\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)}.
\end{aligned}$$

Examinando a demonstração de (26) do lema 4.1 e observando que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi_{k,\delta} h_k)^{\wedge t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau &\leq \|\tfrac{\psi_\delta}{k!}\, t^k\|_{L^\infty}^2 \|\hat{h}_k^x(\xi,\cdot)\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\tfrac{(2\delta)^k}{k!}\right)^2 \|\hat{h}_k^{t,x}(\xi,\cdot)\|_{L^2}^2, \quad \forall\, \xi\in\mathbb{R},\ \ k\in\mathbb{N},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|D_t^b \psi_{k,\delta}\|_{L_t^2}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\tau^b \widehat{\psi_{k,\delta}}(\tau)|^2 d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |\tau^b\ \tfrac{\delta^{k+1}}{k!}\ \widehat{\psi\ t^k}(\delta\tau)|^2 d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tfrac{|\tau^2|^b}{\delta^{2b}}\ \tfrac{\delta^{2k+1}}{(k!)^2}\ |\widehat{\psi\ t^k}(\tau)|^2 d\tau \\
&\leq \left(\tfrac{\delta^k}{k!}\right)^2 \delta^{1-2b} \int_{-\infty}^{\infty} |1+\tau^2|\ |\widehat{\psi\ t^k}(\tau)|^2 d\tau \\
&\leq C\left(\tfrac{\delta^k}{k!}\right)^2 \delta^{1-2b} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi\ t^k}(\tau)|^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} |\tau\ \widehat{\psi\ t^k}(\tau)|^2 d\tau\right) \\
&\leq C\left(\tfrac{\delta^k}{k!}\right)^2 \delta^{1-2b} \left(\|\psi\ t^k\|_{L_t^2}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} |(\psi\ t^k)'(t)|^2 dt\right) \\
&\leq C\left(\tfrac{\delta^k}{k!}\right)^2 \delta^{1-2b} \left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(t)\ t^k + k\ \psi(t)\ t^{k-1}|^2 dt\right) \\
&\leq C\left(\tfrac{\delta^k}{k!}\right)^2\ \delta^{1-2b}\ (2^k k)^2 \\
&= C\ \left(\tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!}\right)^2\ \delta^{1-2b},
\end{aligned}$$

chegamos em

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} |(\psi_{_{k,\delta}} h_k)^{\wedge_{t,x}}(\xi,\tau)|^2 \langle\tau\rangle^{2b} d\tau \\
\leq\ & C\left(\left(\tfrac{2^k\delta^k}{k!}\right)^2 \|\hat{h}_k^{t,x}(\xi,\cdot)\|_{L^2}^2 + \|D_t^b(\psi_{_{k,\delta}}\ \hat{h}_k(\xi,\cdot))\|_{L_t^2}^2\right) \\
\leq\ & C\ \left(\tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!}\right)^2\ \delta^{1-2b} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}_k^{t,x}(\xi,\tau)|^2 \langle\tau\rangle^{2b} d\tau, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

valendo, então,

$$
\begin{aligned}
\|\psi_{_{k,\delta}} h_k\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} &= \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s} \int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{2b} |(\psi_{_{k,\delta}} h_k)^{\wedge_{t,x}}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi\right\}^{1/2} \\
&\leq C\tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!}\ \delta^{(1-2b)/2} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s} \int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{2b} |\hat{h}_k^{t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau d\xi\right\}^{1/2} \\
&= C\tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!}\ \delta^{(1-2b)/2}\ \|h_k\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)}, \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R},\ \forall\, k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Portanto, voltamos a I_1 com

$$
\begin{aligned}
&\|I_1\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} C\tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!}\ \delta^{(1-2b)/2}\ \|h_k\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\
=\ & C\ \delta^{(1-2b)/2} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!} \left\| \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\ \tau^{k-1}\ \psi(\tau)\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\
=\ & C\delta^{(1-2b)/2} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!} \left\| \langle\tau\rangle^b \langle\xi\rangle^s \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\ \tau^{k-1}\ \psi(\tau)\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau\right)^{\wedge_{t,x}} \right\|_{L_\tau^2(\mathbb{R};L_\xi^2)} \\
=\ & C\ \delta^{(1-2b)/2} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!} \left\| \langle\tau\rangle^{b-1} \langle\tau\rangle\ |\tau|^{k-1}\ \psi(\tau) \langle\xi\rangle^s \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\xi d\tau \right\|_{L_\tau^2(\mathbb{R};L_\xi^2)} \\
\leq\ & C\ \delta^{(1-2b)/2} \left\| \langle\tau\rangle^{b-1} \langle\xi\rangle^s \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) \right\|_{L_\tau^2(\mathbb{R};L_\xi^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{2^k\delta^k}{(k-1)!} \\
=\ & C\delta^{(1-2b)/2}\ \|F\|_{H_t^{b-1}(\mathbb{R};H_x^s)}.
\end{aligned}
$$

A relação (28) com $\widetilde{\xi}=0$ nos diz que (26) também vale em $H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)$, logo

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} &\leq C\ \delta^{(1-2b)/2}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\ \frac{1-\psi(\tau)}{i\tau}\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)\ d\xi d\tau\right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)}\\
&= C\ \delta^{(1-2b)/2}\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi+it\tau}\ \hat{g}^{t,x}(\xi,\tau)\ d\xi d\tau\right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)}\\
&= C\ \delta^{(1-2b)/2}\ \|g\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)},
\end{aligned}$$

onde $\hat{g}^{t,x}(\xi,\tau)=\dfrac{1-\psi(\tau)}{i\tau}\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)$, seguindo que

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} &\leq C\ \delta^{(1-2b)/2}\left\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau\rangle^b\hat{g}^{t,x}\right\|_{L_\tau^2(\mathbb{R};L_\xi^2)}\\
&\leq C\ \delta^{(1-2b)/2}\left\|\langle\xi\rangle^s\langle\tau\rangle^b\tfrac{4}{\langle\tau\rangle}\widehat{F}^{t,x}\right\|_{L_\tau^2(\mathbb{R};L_\xi^2)}\\
&\leq C\ \delta^{(1-2b)/2}\ \|F\|_{H_t^{b-1}(\mathbb{R};H_x^s)}. \qquad (34)
\end{aligned}$$

Para encontrarmos um limitante superior adequado para o termo I_3, chegando, desta forma, na estimativa procurada, primeiramente vemos que

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} &= \left\|\psi_\delta\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \frac{1-\psi(\tau)}{i\tau}\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)d\tau d\xi\right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)}\\
&= \|\psi_\delta\|_{H_t^b(\mathbb{R})}\left\|\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\ \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\psi(\tau)}{i\tau}\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)d\tau\right)d\xi\right\|_{H_x^s(\mathbb{R})}\\
&\leq C\delta^{(1-2b)/2}\ \|f\|_{H_x^s(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

onde $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\psi(\tau)}{i\tau} \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\tau$; daí

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} &\le C\delta^{(1-2b)/2} \,\|\langle\xi\rangle^s \hat{f}\|_{L^2_\xi} \\
&= C\delta^{(1-2b)/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \langle\xi\rangle^s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\psi(\tau)}{\tau} \widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau) d\tau \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\le C\delta^{(1-2b)/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{-b} \langle\tau\rangle^{b} \tfrac{4}{\langle\tau\rangle} \langle\xi\rangle^s |\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)| d\tau \right]^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= C\delta^{(1-2b)/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{-2b} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{2(b-1)} \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{F}^{t,x}(\xi,\tau)|^2 d\tau \right] d\xi \right)^{1/2} \\
&= C\delta^{(1-2b)/2} \,\|F\|_{H_t^{b-1}(\mathbb{R};H_x^s)}.
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.4. *Seja* $s \in \mathbb{R}$, $b \in (1/2, 1)$ *e* $\delta \in (0,1)$. *Então*

$$\|\psi_\delta S(t)\, u_0\|_{X^{s,b}} \le C\delta^{(1-2b)/2} \|u_0\|_{H^s}, \tag{35}$$

$$\left\| \psi_\delta \int_0^t S(t-t') F(t') dt' \right\|_{X^{s,b}} \le C\delta^{(1-2b)/2} \|F\|_{X^{s,b-1}}. \tag{36}$$

Demonstração. Como $S(t)\psi_\delta = \psi_\delta S(t)$, empregando as propriedades de grupo de $S(t)$ vista no teorema 3.1 temos que

$$\begin{aligned}
\|\psi_\delta S(t)\, u_0\|_{X^{s,b}} &= \|S(-t)\psi_\delta S(t)\, u_0\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\
&= \|S(0)\psi_\delta\, u_0\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\
&= \|\psi_\delta\, u_0\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi^2\rangle^s \langle\tau^2\rangle^s |\widehat{\psi}_\delta^t(\tau)|\; |\widehat{u}_0^x(\xi)|^2 d\xi\; d\tau \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau\rangle^{2b} |\delta \widehat{\psi}^t(\delta\tau)|^2 d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \langle\xi\rangle^{2s} |\widehat{u}_0^x(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= \left(\delta \int_{-\infty}^{\infty} \langle\tau/\delta\rangle^{2b} |\widehat{\psi}^t(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} \|u_0\|_{H_x^s} \\
&\le C\; \delta^{(1-2b)/2}\; \|u_0\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Agora, aplicando a estimativa (32), obtemos

$$\begin{aligned}\left\|\psi_\delta \int_0^t S(t-t')F(t')dt'\right\|_{X^{s,b}} &= \left\|S(-t)\psi_\delta \int_0^t S(t-t')F(t')dt'\right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\ &= \left\|\psi_\delta \int_0^t S(-t')F(t')dt'\right\|_{H_t^b(\mathbb{R};H_x^s)} \\ &\leq C\delta^{(1-2b)/2}\|S(-t)F\|_{H_t^{b-1}(\mathbb{R};H_x^s)} \\ &= C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X^{s,b-1}}.\end{aligned}$$

□

O resultado seguinte vem imediatamente da imersão de Sobolev e de (36).

Corolário 4.1. *Seja $b \in (1/2, 1)$ e $\delta \in (0, 1)$. Então nós temos*

$$\left\|\psi_\delta \int_0^t S(t-t')F(t')dt'\right\|_{L^\infty((0,T);H_x^s)} \leq C\delta^{(1-2b)/2}\|F\|_{X^{s,b-1}}.$$

3. Estimativas Não Lineares

A seguir, apresentamos a prova da estimativa trilinear que será crucial na prova do teorema 4.1.

Lema 4.3. *Sejam $u_1, u_2 \in X^{s,b}$ com $s \geq 0$ e $b \in (1/2, 1)$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que, para cada $a \leq 0$, temos que*

$$\||u_1|^2 u_2\|_{X^{s,a}} \leq C\ \|u_1\|^2_{X^{s,b}}\|u_2\|_{X^{s,b}}, \tag{37}$$

$$\||u_1|^2 u_1 - |u_2|^2 u_2\|_{X^{s,a}} \leq C\ (\|u_1\|^2_{X^{s,b}} + \|u_2\|^2_{X^{s,b}})\|u_1 - u_2\|_{X^{s,b}}. \tag{38}$$

Demonstração. É suficiente mostrar (37) em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Para $a \leq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
\||u_1|^2 u_2\|_{X^{s,a}} &= \|\langle \tau+\xi^2\rangle^a \langle\xi\rangle^s \widehat{|u_1|^2 u_2}\|_{L^2_\tau L^2_\xi} \\
&\leq \sup_{\xi,\tau} \langle \tau+\xi^2\rangle^a \|\langle\xi\rangle^s (u_1\overline{u_1}u_2)^{\wedge_{t,x}}\|_{L^2_\tau L^2_\xi} \\
&\leq (2\pi)^{-2} \|\langle\xi\rangle^s \hat{u}_1^{t,x} * \hat{\overline{u_1}}^{t,x} * \hat{u}_2^{t,x}\|_{L^2_\tau L^2_\xi}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\hat{u}_1^{t,x} * \hat{\overline{u_1}}^{t,x} * \hat{u}_2^{t,x}(\omega) &= \int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}_1^{t,x}(\omega-y)\, (\hat{\overline{u_1}}^{t,x} * \hat{u}_2^{t,x})(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2} \hat{u}_1^{t,x}(\omega-y)\, \hat{\overline{u_1}}^{t,x}(y-z)\hat{u}_2^{t,x}(z)\, dz\, dy, \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

e, para cada $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle\xi\rangle &\leq 1+|\xi-\zeta|+|\zeta|+|\xi-\eta||\eta-\zeta|\langle\zeta\rangle+|\xi-\zeta||\zeta| \\
&= (\ 1+|\xi-\zeta|+|\xi-\eta||\eta-\zeta|\ )\,(1+|\zeta|) \\
&\leq (\ 1+|\xi-\eta|+|\eta-\zeta|+|\xi-\eta||\eta-\zeta|\ )\ \langle\zeta\rangle \\
&= (1+|\xi-\eta|)(1+|\eta-\zeta|)\ \langle\zeta\rangle \\
&= \langle\xi-\eta\rangle\langle\eta-\zeta\rangle\langle\zeta\rangle,
\end{aligned}$$

escrevendo $\omega=(\xi,\tau), y=(y_1,y_2), z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2$ e $\hat{\widehat{w}}_j(\xi,\tau)=\langle\xi\rangle^s\widehat{\widehat{u}}_j(\xi,\tau),\ \ j=1,2,$ para $s\geq 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
\||u_1|^2u_2\|_{X^{s,a}} &\leq \tfrac{1}{(2\pi)^2}\|\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\langle\xi-y_1\rangle^s\hat{u}_1^{t,x}(\omega-y)\langle y_1-z_1\rangle^s\hat{\bar{u}}_1^{t,x}(y-z)\langle z_1\rangle^s\hat{u}_2^{t,x}(z)dzdy\|_{L^2_\tau L^2_\xi}\\
&= \tfrac{1}{(2\pi)^2}\|\int_{\mathbb{R}^2}\int_{\mathbb{R}^2}\hat{\widehat{w}}_1(\omega-y)\ \hat{\bar{\widehat{w}}}_1(y-z)\ \hat{\widehat{w}}_2(z)\ dz\ dy\|_{L^2_\tau L^2_\xi}\\
&= \|\widehat{\widehat{|w_1|^2w_2}}\|_{L^2_\tau L^2_\xi}\\
&= \||w_1|^2w_2\|_{L^2_tL^2_x}\\
&= \||w_1|^4|w_2|^2\|^{1/2}_{L^1_tL^1_x}\\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\||w_1(\cdot,t)|^4\|_{L_x^{3/2}}\||w_2(\cdot,t)|^2\|_{L^3_x}dt\right)^{1/2}\\
&\leq \||w_1|^4\|^{1/2}_{L_t^{3/2}L_x^{3/2}}\||w_2|^2\|^{1/2}_{L^3_tL^3_x}\\
&\leq \|w_1\|^2_{L^6_tL^6_x}\|w_2\|_{L^6_tL^6_x}.
\end{aligned}
$$

Sendo $f_j(\xi,\tau)=\langle\tau+\xi^2\rangle^b\widehat{\widehat{w}}_j(\xi,\tau),\ \ j=1,2,$ então

$$
\begin{aligned}
\|w_j\|_{L^6_tL^6_x} &= \left\|(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\tau+ix\xi}\ \widehat{\widehat{w}}_j(\xi,\tau)\ d\xi d\tau\right\|_{L^6_tL^6_x}\\
&= \left\|(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\tau+ix\xi}\ \frac{f_j(\xi,\tau)}{\langle\tau+\xi^2\rangle^b}\ d\xi d\tau\right\|_{L^6_tL^6_x}\\
&= \left\|(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\eta}\langle\eta\rangle^{-b}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ix\xi-it\xi^2}\ f_j(\xi,\eta-\xi^2)d\xi d\eta\right\|_{L^6_tL^6_x},\quad j=1,2,
\end{aligned}
$$

com $\eta=\tau+\xi^2$; fazendo $\hat{g}_{\eta_j}(\xi)=f_j(\xi,\eta-\xi^2),\ \ j=1,2,$ aplicando Minkowski (teorema 1.4), a estimativa de Strichartz (20) com $p=q=6$, a desigualdade de Hölder, a identidade de Plancherel (teoremas 1.1 e 2.6) e usando que $b > 1/2$, temos

$$\begin{aligned}
\|w_j\|_{L_t^6 L_x^6} &= \left\|(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta} \langle \eta \rangle^{-b} (e^{-it\xi^2} \hat{g}_{\eta_j}(\xi))^{\vee}(x)\, d\eta \right\|_{L_t^6 L_x^6} \\
&= \left\|(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\eta} \langle \eta \rangle^{-b} (S(t) g_{\eta_j})(x)\, d\eta \right\|_{L_t^6 L_x^6} \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \|e^{it\eta} \langle \eta \rangle^{-b} (S(t) g_{\eta_j})(x)\|_{L_t^6 L_x^6}\, d\eta \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta \rangle^{-b} \|S(t) g_{\eta_j}\|_{L_t^6 L_x^6}\, d\eta \\
&\leq C \int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta \rangle^{-b} \|g_{\eta_j}\|_{L_x^2}\, d\eta \\
&\leq C \left(\int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta \rangle^{-2b}\, d\eta \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g_{\eta_j}\|_{L_x^2}^2\, d\eta \right)^{1/2} \\
&= C\, \|g_{\eta_j}\|_{L_\eta^2 L_x^2} \\
&= C\, \|f_j\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\begin{aligned}
\||u_1|^2 u_2\|_{X^{s,a}} &\leq \|w_1\|_{L_t^6 L_x^6}^2 \|w_2\|_{L_t^6 L_x^6} \\
&\leq C \|f_1\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \|f_2\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\
&= C\, \|\langle \tau + \xi^2 \rangle^b \widehat{\widehat{w}}_1(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \|\langle \tau + \xi^2 \rangle^b \widehat{\widehat{w}}_2(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\
&= C\, \|\langle \tau + \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \widehat{\widehat{u}}_1(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2}^2 \|\langle \tau + \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \widehat{\widehat{u}}_2(\xi, \tau)\|_{L_\tau^2 L_\xi^2} \\
&= C\, \|u_1\|_{X^{s,b}}^2 \|u_2\|_{X^{s,b}}.
\end{aligned}$$

$\square$

4. Demonstração do teorema 4.1

Consideraremos o sistema de equações integrais equivalente a 21:

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = S(t)u_0 + i\int_0^t S(t-t')\{|u|^2u(t') + v(t')\}dt', \\ v(t) = S(t)v_0 - i\int_0^t S(t-t')\{(\mu_0 + a|v|^2)v(t') - u(t')\}dt'. \end{array}\right. \tag{39}$$

Seja $C_0 \geq \|\psi\|_{H_t^b}$. Nós consideraremos o seguinte espaço de funções onde procuraremos nossa solução. Para $s \geq 0$, $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ e $1/2 < b < 1$, seja

$$\mathfrak{X}_{MN} = \left\{(u,v) \in X^{s,b} \times X^{s,b};\ \ \|u\|_{X^{s,b}} \leq M,\ \|v\|_{X^{s,b}} \leq N\right\},$$

onde $M = 2C_0\|u_0\|_{H^s}$ e $N = 2C_0\|v_0\|_{H^s}$. Então $\mathfrak{X}_{MN}$ é um espaço métrico completo com a norma

$$|||(u,v)|||_{\mathfrak{X}_{MN}} = \|u\|_{X^{s,b}} + \|v\|_{X^{s,b}}.$$

Seja a função $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, definida por

$$\Phi_1[u,v] = \psi(t)S(t)u_0 + i\psi(t)\int_0^t S(t-t')\psi_\delta(t')\{|u(t')|^2u(t') + v(t')\}dt',$$

$$\Phi_2[u,v] = \psi(t)S(t)v_0 - i\psi(t)\int_0^t S(t-t')\psi_\delta(t')\{(\mu_0 + a|v(t')|^2)v(t') - u(t')\}dt',$$

para cada $(u,v) \in \mathfrak{X}_{MN}$. Sendo $b' \in (b,1)$, de acordo com o teorema 4.4 e as relações (27) e (37),

$$\begin{aligned} \|\Phi_1[u,v]\|_{X^{s,b}} &\leq C_0\|u_0\|_{H^s} + C\|\psi_\delta\{|u|^2u + v\}\|_{X^{s,b-1}} \\ &\leq C_0\|u_0\|_{H^s} + C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(\||u|^2u\|_{X^{s,b'-1}} + \|v\|_{X^{s,b'-1}}\right) \\ &\leq C_0\|u_0\|_{H^s} + C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(\|u\|^3_{X^{s,b}} + \|v\|_{X^{s,b}}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|\Phi_2[u,v]\|_{X^{s,b}} &\leq C_0\|v_0\|_{H^s} + C\|\psi_\delta\{(\mu_0 + a|v|^2)v - u\}\|_{X^{s,b-1}} \\ &\leq C_0\|v_0\|_{H^s} + C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(\|v\|_{X^{s,b'-1}} + \||v|^2v\|_{X^{s,b'-1}} + \|u\|_{X^{s,b'-1}}\right) \\ &\leq C_0\|v_0\|_{H^s} + C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(\|v\|_{X^{s,b}} + \|v\|^3_{X^{s,b}} + \|u\|_{X^{s,b}}\right), \end{aligned}$$

seguindo que

$$\begin{aligned}\|\Phi_1[u,v]\|_{X^{s,b}} &\leq \frac{M}{2} + C_1\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}(M^3+N),\\ \|\Phi_2[u,v]\|_{X^{s,b}} &\leq \frac{N}{2} + C_2\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}(N+N^3+M),\end{aligned}$$

pois $(u,v)\in\mathcal{X}_{MN}$. Se fizermos com que

$$\delta^{\frac{b'-b}{4b'}} \leq \min\left\{\frac{M}{2C_1(M^3+N)}, \frac{N}{2C_2(N+N^3+M)}\right\}, \tag{40}$$

então $\|\Phi_1[u,v]\|_{X^{s,b}} \leq M$, $\|\Phi_2[u,v]\|_{X^{s,b}} \leq N$ e por isso

$$\Phi[u,v]\in\mathcal{X}_{MN}.$$

Similarmente, pela estimativa (38) do lema 4.3, sendo $(u,v),(\widetilde{u},\widetilde{v})\in\mathcal{X}_{MN}$, temos que

$$\begin{aligned}\|\Phi_1[u,v]-\Phi_1[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{X^{s,b}} &\leq C\|\psi_\delta\{|u|^2u+v-|\widetilde{u}|^2\widetilde{u}-\widetilde{v}\}\|_{X^{s,b-1}}\\ &\leq C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(\||u|^2u-|\widetilde{u}|^2\widetilde{u}\|_{X^{s,b'-1}}+\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b'-1}}\right)\\ &\leq C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left[\left(\|u\|^2_{X^{s,b}}+\|\widetilde{u}\|^2_{X^{s,b}}\right)\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b}}+\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}\right]\\ &\leq C_3\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(M^2\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b}}+\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}\right)\\ &\leq \tfrac{1}{4}\left(\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b}}+\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}\right)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\Phi_2[u,v]-\Phi_2[\widetilde{u},\widetilde{v}]\|_{X^{s,b}} &\leq C\|\psi_\delta\{(\mu_0+a|v|^2)v-u-(\mu_0+a|\widetilde{v}|^2)\widetilde{v}+\widetilde{u}\}\|_{X^{s,b-1}}\\ &\leq C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b'-1}}+\||v|^2v-|\widetilde{v}|^2\widetilde{v}\|_{X^{s,b'-1}}+\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b'-1}}\right)\\ &\leq C\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left[\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}+\left(\|v\|^2_{X^{s,b}}+\|\widetilde{v}\|^2_{X^{s,b}}\right)\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}+\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b}}\right]\\ &\leq C_4\delta^{\frac{b'-b}{4b'}}\left(N^2\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}+\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b}}\right)\\ &\leq \tfrac{1}{4}\left(\|u-\widetilde{u}\|_{X^{s,b}}+\|v-\widetilde{v}\|_{X^{s,b}}\right)\end{aligned}$$

quando

$$\delta^{\frac{b'-b}{4b'}} \leq \min\left\{\frac{1}{4\,C_3\;M^2}, \frac{1}{4\,C_4\;N^2}\right\}. \tag{41}$$

Portanto, a função $\Phi : \mathcal{X}_{MN} \longrightarrow \mathcal{X}_{MN}$ é uma contração, possuindo, assim, pelo teorema do ponto fixo de Banach, um único ponto fixo, o qual resolve (21) no intervalo de tempo $[0, \delta]$ para qualquer δ satisfazendo (40) e (41).

Agora passaremos a provar a unicidade das soluções na classe de funções definidas pelas condições (1) e (2) no enunciado do teorema 4.1. Começamos introduzindo, para cada $T > 0$, a norma auxiliar

$$\|f\|_{X_T} = \inf_w \left\{ \|w\|_{X^{s,b}};\ w \in X^{s,b} \text{ tal que } f(\cdot,t) = w(\cdot,t),\ t \in [0,T],\ \text{em } H^s \right\}.$$

Claramente, se $\|u_1 - u_2\|_{X_T} = 0$ e $\|v_1 - v_2\|_{X_T} = 0$, então $u_1(\cdot,t) = u_2(\cdot,t)$ e $v_1(\cdot,t) = v_2(\cdot,t)$ em H^s, para $t \in [0,T]$.

Sejam (u_1, v_1) a solução acima e (u_2, v_2) uma outra solução do sistema de equações integral (39) com dado inicial (u_0, v_0). Consideremos que $M, N > 0$ sejam tais que

$$\|u_1\|_{X^{s,b}}, \|\psi u_2\|_{X^{s,b}} \leq M$$

e

$$\|v_1\|_{X^{s,b}}, \|\psi v_2\|_{X^{s,b}} \leq N.$$

Assumiremos que T satisfaz as condições (40) e (41). Para $T^* \leq T$, o qual fixaremos posteriormente, nos temos

$$\psi u_2(t) = \psi(t) S(t) u_0 + i\psi(t) \int_0^t S(t-t')\psi_{T^*}(t')\{|\psi u_2(t')|^2 \psi u_2(t') + \psi v_2(t')\} dt',$$

$$\psi v_2(t) = \psi(t) S(t) v_0 - i\psi(t) \int_0^t S(t-t')\psi_{T^*}(t')\{(\mu_0 + a|\psi v_2(t')|^2)\psi v_2(t') - \psi u_2(t')\} dt'$$

para $t \in [0, T^*]$, pois $\psi_{T^*}(t) = \psi(\frac{t}{T^*}) = 1$, quando $t \leq T^*$.

Para cada $0 < \varepsilon < 1$, existe $(\omega, \phi) \in X^{s,b} \times X^{s,b}$ tais que, para todo $t \in [0, T^*]$,

$$\begin{aligned} \omega(t) &= u_1(t) - \psi(t) u_2(t) \\ \phi(t) &= v_1(t) - \psi(t) v_2(t) \end{aligned} \tag{42}$$

e

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{X^{s,b}} &\leq \|u_1 - \psi u_2\|_{X_{T^*}} + \frac{\varepsilon}{2} \\ \|\phi\|_{X^{s,b}} &\leq \|v_1 - \psi v_2\|_{X_{T^*}} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{43}$$

Seja $(\widetilde{\omega}, \widetilde{\phi})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \widetilde{\omega}(t) = i\psi(t)\int_0^t S(t-t')\psi_{T^*}(t')\{|u_1(t')|^2u_1(t') + v_1(t') - \psi(\,|\psi u_2|^2 u_2 + v_2)(t')\}\ dt' \\ \widetilde{\phi}(t) = -i\psi(t)\int_0^t S(t-\cdot)\psi_{T^*}\{(\mu_0 + a|v_1|^2)v_1 - u_1 - \psi[(\mu_0 + a|\psi v_2|^2)v_2 - u_2]\}(t')\ dt'. \end{cases}$$

Como (u_1, v_1) e (u_2, v_2) são soluções de (39) e vale (42), temos que

$$\widetilde{\omega}(t) = \omega(t) = u_1(t) - \psi(t)u_2(t) \ \text{ e } \ \widetilde{\phi}(t) = \phi(t) = v_1(t) - \psi(t)v_2(t), \quad \forall\, t \in [0, T^*].$$

De acordo com a estimativa (36) do teorema 4.4, (27) do lema 4.1 e o lema 4.3,

$$\begin{aligned}
\|u_1 - \psi u_2\|_{X_{T^*}} &\leq \|\widetilde{\omega}\|_{X^{s,b}} \\
&= \left\|\psi \int_0^t S(t-t')\psi_{T^*}\{|u_1|^2\omega + \phi + \psi u_2(|u_1|^2 - |\psi u_2|^2)\}(t')\ dt'\right\|_{X^{s,b}} \\
&\leq C\ \left\|\psi_{T^*}\{|u_1|^2\omega + \phi + (\psi u_2 - u_1)|u_1|^2 + u_1|u_1|^2 - \psi u_2|\psi u_2|^2)\}\right\|_{X^{s,b-1}} \\
&\leq C\ {T^*}^{\frac{b'-b}{4b'}}\ \left\||u_1|^2\omega + \phi - \omega|u_1|^2 + u_1|u_1|^2 - \psi u_2|\psi u_2|^2\right\|_{X^{s,b'-1}} \\
&\leq C\ {T^*}^{\frac{b'-b}{4b'}}\ \left[\|\phi\|_{X^{s,b}} + \left(\|u_1\|_{X^{s,b}}^2 + \|\psi u_2\|_{X^{s,b}}^2\right)\|\omega\|_{X^{s,b}}\right] \\
&\leq C_5\ {T^*}^{\frac{b'-b}{4b'}}\ M^2\left(\|\phi\|_{X^{s,b}} + \|\omega\|_{X^{s,b}}\right) \\
&\leq \tfrac{1}{4}\left(\|\omega\|_{X^{s,b}} + \|\phi\|_{X^{s,b}}\right),
\end{aligned}$$

quando $(T^*)^{\frac{b'-b}{4b'}} \leq \dfrac{1}{4C_5\, M^2}$, e

$$
\begin{aligned}
\|v_1 - \psi v_2\|_{X_{T^*}} &\leq \|\widetilde{\phi}\|_{X^{s,b}} \\
&= \left\| \psi \int_0^t S(t-t')\psi_{T^*}\{\mu_0\,\phi - \omega + a(|v_1|^2 v_1 - |\psi v_2|^2 \psi v_2)\}(t')\; dt' \right\|_{X^{s,b}} \\
&\leq C\ \left\|\psi_{T^*}\{\mu_0\,\phi - \omega + a(|v_1|^2 v_1 - |\psi v_2|^2 \psi v_2)\}\right\|_{X^{s,b-1}} \\
&\leq CT^{*\frac{b'-b}{4b'}} \left(\|\phi\|_{X^{s,b'-1}} + \|\omega\|_{X^{s,b'-1}} + \||v_1|^2 v_1 - |\psi v_2|^2 \psi v_2\|_{X^{s,b'-1}}\right) \\
&\leq C\ T^{*\frac{b'-b}{4b'}} \left(\|\phi\|_{X^{s,b}} + \|\omega\|_{X^{s,b}} + \left(\|v_1\|^2_{X^{s,b}} + \|\psi v_2\|^2_{X^{s,b}}\right) \|\phi\|_{X^{s,b}}\right) \\
&\leq C_6\ T^{*\frac{b'-b}{4b'}}\ N^2 \left(\|\phi\|_{X^{s,b}} + \|\omega\|_{X^{s,b}}\right) \\
&\leq \tfrac{1}{4}\ \left(\|\phi\|_{X^{s,b}} + \|\omega\|_{X^{s,b}}\right),
\end{aligned}
$$

quando $(T^*)^{\frac{b'-b}{4b'}} \leq \dfrac{1}{4C_6\, N^2}$. Logo, se $(T^*)^{\frac{b'-b}{4b'}} \leq \frac{1}{4}\min\left\{\dfrac{1}{C_5\, M^2}, \dfrac{1}{C_6\, N^2}\right\}$, então

$$
\|u_1 - \psi u_2\|_{X_{T^*}} + \|v_1 - \psi\ v_2\|_{X_{T^*}} \leq \tfrac{1}{2}\ \left(\|\omega\|_{X^{s,b}} + \|\phi\|_{X^{s,b}}\right),
$$

e daí, por (43),

$$
\|u_1 - \psi u_2\|_{X_{T^*}} + \|v_1 - \psi\ v_2\|_{X_{T^*}} \leq \varepsilon.
$$

Isto prova que $u_1 = u_2$ e $v_1 = v_2$ em $[0, T^*]$. Repetindo, assim, esse procedimento um número finito de vezes, obteremos a unicidade em todo intervalo de tempo $[0, T]$.

A regularidade adicional

$$
u, v \in C([0,T]; H^s)
$$

segue da observação 4.1. Assim, completamos a demonstração da boa colocação local do problema de Cauchy para o sistema de Gross-Pitaevskii.

5. Demonstração do teorema 4.2

Nesta seção provaremos o teorema 4.2 de boa colocação global para o sistema (21). Para provar este resultado, primeiramente obteremos uma lei de conservação em $L^2 \times L^2$

que será a nossa ferramenta fundamental. Do sistema (21) temos que

$$\begin{cases} i\overline{u}\,\partial_t u + \overline{u}\,\partial_x^2 u + |u|^4 + \overline{u}v = 0, \\ i\overline{v}\,\partial_t v + \overline{v}\,\partial_x^2 v - (\mu_0 + a|v|^2)|v|^2 + \overline{v}u = 0, \end{cases}$$

e, somando estas duas equações,

$$i(\overline{u}\,\partial_t u + \overline{v}\,\partial_t v) + (\overline{u}\,\partial_x^2 u + \overline{v}\,\partial_x^2 v) + |u|^4 - (\mu_0 + a|v|^2)|v|^2 + 2\mathrm{Re}(v\overline{u}) = 0.$$

Integrando ambos os lados na variável x e tomando a parte imaginária, obtemos

$$\mathrm{Im}\, i\int_{-\infty}^{\infty}(\overline{u}\,\partial_t u+\overline{v}\,\partial_t v)dx+\underbrace{\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{(\overline{u}\,\partial_x^2 u + \overline{v}\,\partial_x^2 v) + |u|^4 - (\mu_0 + a|v|^2)|v|^2 + 2\mathrm{Re}(v\overline{u})\right\}dx}_{A(t)} = 0.$$

Agora, observamos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x^2 u\,\overline{u} + \partial_x^2 v\,\overline{v})dx &= (\partial_x u\;\overline{u} + \partial_x v\;\overline{v})\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}(\partial_x u\partial_x\overline{u} + \partial_x v\partial_x\overline{v})dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}(|\partial_x u|^2 + |\partial_x v|^2)dx \;\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Logo $A(t)$ é real e conseqüentemente $\mathrm{Im}\; i\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t u\overline{u} + \partial_t v\overline{v})\;dx = 0$, donde segue-se que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\partial_t\left(\|u(\cdot,t)\|_{L_x^2}^2 + \|v(\cdot,t)\|_{L_x^2}^2\right) &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_t\,(u\overline{u} + v\overline{v})\quad dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\partial_t u\overline{u} + \partial_t v\overline{v} + \overline{\partial_t u\overline{u} + \partial_t v\overline{v}}\;\right)\;dx \\ &= \mathrm{Re}\;\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t u\overline{u} + \partial_t v\overline{v})\;dx \\ &= \mathrm{Im}\;i\int_{-\infty}^{\infty}(\partial_t u\overline{u} + \partial_t v\overline{v})\;dx = 0. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_x^2} + \|v(\cdot,t)\|_{L_x^2} = \|u_0\|_{L_x^2}^2 + \|v_0\|_{L_x^2}^2,\quad \forall\; t\in[0,T]. \tag{44}$$

A lei do conservação (44) permite que apliquemos o teorema 4.1 tantas vezes desejarmos, preservando o comprimento do intervalo do tempo, construindo, assim, uma solução global.

CAPíTULO 5

Má Colocação para o Problema de Cauchy Associado ao Sistema de Gross-Pitaevskii

Estudaremos neste capítulo a instabilidade do fluxo associado ao sistema de Gross-Pitaevskii

$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u + |u|^2 u + v = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ i\partial_t v + \partial_x^2 v - (\mu_0 + a|v|^2)v + u = 0, \\ u(x,0) = f(x),\ v(x,0) = g(x), \end{cases} \tag{45}$$

quando um dos dados iniciais encontra-se num espaço de Sobolev com pouca regularidade. Precisamente, provaremos o seguinte resultado de má colocação:

Teorema 5.1. *O sistema (45) é localmente mal posto quando*

$$-1/2 < k < 0 \quad e \quad -1/2 < \ell,$$

ou

$$-1/2 < \ell < 0 \quad e \quad -1/2 < k,$$

no sentido que a aplicação dado-solução $(u_0, v_0) \longmapsto (u(t), v(t))$ *não é localmente uniformemente contínua de* $H^k(\mathbb{R}) \times H^\ell(\mathbb{R})$ *em* $C([0,T]; H^k(\mathbb{R}) \times H^\ell(\mathbb{R}))$.

A prova deste teorema será realizada usando técnicas similares as empregadas por Kening, Ponce e Vega em [**15**] e por Corcho em [**5**], para obter resultados de má-colocação para a equação cúbica de Schrödinger no caso focusing e para o sistema de Benney, respectivamente.

1. Ondas Solitárias

Nesta seção obteremos soluções de tipo ondas solitárias para o Problema de Cauchy associado ao sistema de Gross-Pitaevskii (45).

Trabalharemos com as soluções na forma:

$$u(x,t) = e^{iwt} f(x - ct) \quad e \quad v(x,t) = e^{iwt} g(x - ct), \tag{46}$$

onde $w > 0$, $c > 0$ e f e g são funções que decrescem rapidamente para zero no infinito; sendo mais preciso,

$$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Substituindo (46) em (45) obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} f'' - icf' - wf + |f|^2 f + g = 0, \\ g'' - icg' - (\mu_o + w)g - a|g|^2 g + f = 0. \end{cases} \tag{47}$$

Vamos supor que $g = \lambda f$, com $\lambda \neq 1$. Então segue de (47) que

$$f'' - icf' + \frac{\lambda(1 + \mu_o + w) - (w + 1)}{1 - \lambda} f + \frac{a\lambda^3 + 1}{1 - \lambda} |f|^2 f = 0.$$

Daí, fazendo $f(x) = e^{\frac{icx}{2}} h(x)$, onde h é uma função real, chegamos à seguinte expressão:

$$h'' + \frac{c^2(1 - \lambda) + 4\lambda(1 + \mu_o + w) - 4(w + 1)}{4(1 - \lambda)} h + \frac{a\lambda^3 + 1}{1 - \lambda} h^3 = 0. \tag{48}$$

A equação (48) tem soluções positivas, pares , suaves e exponencialmente decrescente se

$$\frac{c^2(1 - \lambda) + 4\lambda(1 + \mu_o + w) - 4(w + 1)}{4(1 - \lambda)} < 0 \quad e \quad \frac{a\lambda^3 + 1}{1 - \lambda} > 0. \tag{49}$$

Em [**4**] e [**21**] podemos encontrar a demonstração desta afirmativa, assim como que a solução neste caso é dada por

$$h(x) = \frac{2\mu\sigma}{e^{-\sigma x} + e^{\sigma x}} = \mu\, \sigma \operatorname{sech}(\sigma x), \tag{50}$$

onde

$$\mu = \sqrt{\frac{2(1 - \lambda)}{a\lambda^3 + 1}} \qquad \text{e} \qquad \sigma = \sqrt{\frac{c^2(1 - \lambda) + 4\lambda(1 + \mu_o + w) - 4(w + 1)}{4(\lambda - 1)}} \tag{51}$$

e que se as condições (49) não são satisfeitas, então não existe solução não trivial em $H^1(\mathbb{R})$ para (48). Temos, então, as seguintes expressões para a ondas solitárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{c,w}(x,t) = e^{i(t(w-\frac{c^2}{2})+\frac{cx}{2})}\mu\,\sigma\,\mathrm{sech}(\sigma(x-ct)), \\ v_{c,w}(x,t) = \lambda u_{c,w}(x,t). \end{array} \right. \tag{52}$$

2. Demonstração do Teorema 5.1

A idéia da prova é a seguinte: tomaremos duas ondas solitárias com os dados iniciais e veremos que, com certas hipóteses sobre os parâmetros destas, teremos que elas permanecem próximas no instante inicial. Então, em seguida, estudaremos a evolução no tempo destas ondas para obter o resultado procurado.

Dados $c, w \in \mathbb{R}$, com $\varphi \equiv sech$, as transformadas de Fourier na variável espacial de $u_{c,w}$ e $v_{c,w}$ são representadas por

$$\begin{aligned} \hat{u}_{c,w}(\xi,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_{c,w}(x,t)e^{-ix\xi}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t(w-\frac{c^2}{2})+\frac{cx}{2})}\mu\sigma\varphi(\sigma(x-ct))e^{-ix\xi}dx \\ &= e^{it(w-\frac{c^2}{2})}\mu\sigma\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(\xi-\frac{c}{2})}\varphi(\sigma(x-ct))dx \\ &= \mu e^{it(w-\frac{c^2}{2})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\frac{y}{\sigma}+ct)(\xi-\frac{c}{2})}\varphi(y)dy \\ &= \mu e^{it(w-c\xi)}\widehat{\varphi}\Big(\frac{\xi-\frac{c}{2}}{\sigma}\Big), \quad \forall\ (\xi,t)\in\mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{53}$$

e $\widehat{v}_{c,w}(\xi,t) = \lambda\hat{u}_{c,w}(\xi,t), \quad \forall\ (\xi,t)\in\mathbb{R}^2$.

Daqui em diante, para $N \gg 1$, faremos

$$c = 2N. \tag{54}$$

Sejam $N_j \gg 1, \quad j = 1,2$, com $N_1 < N_2$ e $N_j \approx N$, isto é, existem constantes positivas $\alpha_j, \beta_j, \quad j = 1,2$, tais que

$$\alpha_j N < N_j < \beta_j N, \quad j = 1,2. \tag{55}$$

Para que as condições em (49) sejam satisfeitas, quando $a \leq 0$, escolheremos $\lambda = -1$, para que $\dfrac{a\lambda^3+1}{1-\lambda} = \dfrac{-a+1}{2} \geq \dfrac{1}{2} > 0$ e $w > \dfrac{c^2}{4} - \dfrac{\mu_0}{2} - 1$, ou seja, por (54),

$$w > N^2 - \Big(\frac{\mu_0}{2} + 1\Big). \tag{56}$$

Segue-se de (51) que

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{N^2(1-\lambda) + \lambda(1+\mu_0+w) - w - 1}{\lambda - 1} \\
&= \frac{2N^2 - (1+\mu_0+w) - w - 1}{-2} \\
&= w + 1 + \frac{\mu_0}{2} - N^2.
\end{aligned}$$

Para $w_j = N_j^2 + \sigma^2 - (1+\mu_0/2)$, $\;j = 1,2$, temos que w_j satisfaz (56) e

$$\sigma_j = \sqrt{w_j + 1 - N_j^2 + \mu_0/2} = \sigma, \quad j = 1,2.$$

No caso em que $a > 0$, faremos $\lambda = 1/2$, onde $\dfrac{a\lambda^3+1}{1-\lambda} > 2 > 0$, e daí para que valha (49), escolheremos

$$w > N^2 + \mu_0 - 1. \tag{57}$$

Daí, segue que $\sigma^2 = w + 1 - \mu_0 - N^2$. Para que, neste caso, $\sigma_j = \sigma$, $\;j = 1,2$, e que a condição (57) seja satisfeita, tomaremos $w_j = N_j^2 + \sigma^2 + \mu_0 - 1$, $\;j = 1,2$.

Usando (52), sendo

$$u_j = u_{2N_j, w_j}, \quad j = 1,2,$$

isto é,

$$u_j(x,t) = e^{i(t(w_j - 2N_j^2) + N_j x)} \mu\sigma\varphi(\sigma(x - 2N_j t)), \quad \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad j = 1,2, \tag{58}$$

por (53) e pelo teorema do valor intermediário, temos que

$$\begin{aligned}
|\hat{u}_1(\xi,0) - \hat{u}_2(\xi,0)|^2 &= |\mu|^2 \Big| \widehat{\varphi}\Big(\frac{\xi - N_1}{\sigma}\Big) - \widehat{\varphi}\Big(\frac{\xi - N_2}{\sigma}\Big)\Big|^2 \\
&= |\mu|^2 \Big| \int_0^1 \widehat{\varphi}'\Big(\frac{\xi - N_2 + t(N_2 - N_1)}{\sigma}\Big)\Big(\frac{N_2 - N_1}{\sigma}\Big) dt\Big|^2 \\
&\leq |\mu|^2 \Big|\frac{N_1 - N_2}{\sigma}\Big|^2 \int_0^1 \Big|\widehat{\varphi}'\Big(\frac{\xi - N_2 + t(N_2 - N_1)}{\sigma}\Big)\Big|^2 dt.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\|u_1(\cdot,0)-u_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} = \int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^k|\hat{u}_1(\xi,0)-\hat{u}_2(\xi,0)|^2 d\xi$$

$$\leq \ |\mu|^2\Big|\frac{N_1-N_2}{\sigma}\Big|^2\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^k\int_0^1\Big|\widehat{\varphi}'\Big(\frac{\xi-N_2+t(N_2-N_1)}{\sigma}\Big)\Big|^2 dt d\xi$$

$$\leq \ |\mu|^2\Big|\frac{N_1-N_2}{\sigma}\Big|^2\int_0^1\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^2)^k\Big|\widehat{\varphi}'\Big(\frac{\xi-N_2+t(N_2-N_1)}{\sigma}\Big)\Big|^2 d\xi dt, \quad k\in\mathbb{R}.$$

Sendo $w = N^{-4k}+N^2-(1+\mu_0/2)$ para que valha (56) quando $a\leq 0$, e $w = N^{-4k}+N^2-1+\mu_0$ quando $a>0$, para que valha (57), temos nos dois casos que

$$\sigma = N^{-2k}. \tag{59}$$

Faremos a restrição

$$k > -1/2, \tag{60}$$

objetivando que

$$\sigma = N^{-2k} < N. \tag{61}$$

Como $N_1 < N_2$, para $t\in[0,1]$ e $\xi\in B_\sigma(tN_1+(1-t)N_2)$, segue-se que

$$N_1-\sigma < tN_1+(1-t)N_2-\sigma < \xi < tN_1+(1-t)N_2+\sigma < N_2+\sigma,$$

$$(\alpha_1-1)N < N_1-N < \xi < N_2+N < (\beta_2+1)N.$$

Podemos considerar que $\alpha_1-1>0$. Então $\xi\simeq N$ e

$$(\alpha_1-1)^2N^2 < 1+|\xi|^2 < N^2+(\beta_2+1)^2N^2.$$

Usaremos repetidas vezes nesta demonstração que a funções $\varphi = \operatorname{sech}$ e $(1+|\cdot|^2)^k\widehat{\varphi}'$ estão em $S(\mathbb{R})$, assim como $\widehat{\varphi}$ está concentrada em $(-1,1)$.

Sendo $\beta>0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|y|^2)^k|\widehat{\varphi}(y)|^2 dy \leq \beta\int_{-1}^{1}(1+|y|^2)^k|\widehat{\varphi}'(y)|^2 dy,$$

então

$$\|u_1(\cdot,0)-u_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} \leq$$

$$\leq |\mu|^2|N_1-N_2|^2N^{4k}\beta\int_0^1\int_{tN_1+(1-t)N_2-\sigma}^{tN_1+(1-t)N_2+\sigma}(1+|\xi|^2)^k\Big|\widehat{\varphi}'\Big(\tfrac{\xi-N_2+t(N_2-N_1)}{\sigma}\Big)\Big|^2 d\xi dt.$$

Portanto, quando $-1/2 < k < 0$, temos que

$$\begin{aligned}
&\|u_1(\cdot,0) - u_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} \leq \\
\leq\ & |\mu|^2|N_1 - N_2|^2 N^{4k}\beta(\alpha_1 - 1)^{2k}N^{2k}\int_0^1\int_{tN_1+(1-t)N_2-\sigma}^{tN_1+(1-t)N_2+\sigma}\left|\widehat{\varphi}'\left(\tfrac{\xi-N_2+t(N_2-N_1)}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi dt \\
=\ & |\mu|^2|N_1 - N_2|^2 N^{4k}\beta(\alpha_1 - 1)^{2k}N^{2k}\sigma\int_0^1\int_{-1}^1 |\widehat{\varphi}'(y)|^2 dy dt \\
\leq\ & \beta(\alpha_1 - 1)^{2k}|\mu|^2|N_1 - N_2|^2 N^{4k}\|\widehat{\varphi}'\|^2_{L_2},
\end{aligned}$$

Analogamente, chegamos, para $k \geq 0$, que

$$\|u_1(\cdot,0) - u_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} \leq \beta[1 + (\beta_2 + 1)^2]^k|\mu|^2|N_1 - N_2|^2 N^{4k}\|\widehat{\varphi}'\|^2_{L_2},$$

inferindo que

$$\|u_1(\cdot,0) - u_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} \lesssim |N_1 - N_2|^2 N^{4k}, \quad s > -1/2. \tag{62}$$

Sendo $\zeta_j, \eta_j > 0,\ \ j = 1, 2$, tais que

$$\zeta_j\int_{-1}^1 (1 + |y|^{2s})|\widehat{\varphi}(y)|^2 dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |y|^{2s})\,|\widehat{\varphi}(y)|^2\,dy$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1 + |y|^2)^s\,|\widehat{\varphi}\,(y)|^2\,dy \leq \eta_j\int_{-1}^1 (1 + |y|^2)^s|\widehat{\varphi}(y)|^2 dy,$$

consideremos as soluções $u_j(x,t)$, $j = 1, 2$, no tempo $t = T$, onde

$$\begin{aligned}
\|u_j(\cdot,T)\|^2_s = \|u_j(\cdot,0)\|^2_s &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi|^2)^s|\mu|^2\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi - N_j}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi \\
&\leq |\mu|^2\eta_j\int_{N_j-\sigma}^{N_j+\sigma} (1 + |\xi|^2)^s\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi - N_j}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Observemos que, usando (55), (61) e o teorema de mudanças de variáveis (ver [**16**]), para $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\|u_j(\cdot,T)\|^2_s = \|u_j(\cdot,0)\|^2_s &\leq |\mu|^2\eta_j(2 + 2\beta_j + \beta_j^2)^s N^{2s}\int_{N_j-\sigma}^{N_j+\sigma}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi - N_j}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi \\
&= |\mu|^2\eta_j(2 + 2\beta_j + \beta_j^2)^s N^{2s}\sigma\int_{-1}^1 |\widehat{\varphi}(y)|^2 dy \\
&\leq |\mu|^2\eta_j(2 + 2\beta_j + \beta_j^2)^s N^{2s}\sigma\|\widehat{\varphi}\|^2_{L^2}, \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

assim como

$$\|u_j(\cdot,T)\|_s^2 = \|u_j(\cdot,0)\|_s^2 \le |\mu|^2\eta_j(\alpha_j^2-\alpha_j)^s N^{2s}\sigma\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2, \quad s<0, \quad j=1,2.$$

Para cada $s\in\mathbb{R}$, seja $\zeta(s)$ um número positivo tal que $\zeta(s)(1+|\xi|^{2s}) \le (1+|\xi|^2)^s, \quad \forall \xi\in\mathbb{R}$. Novamente por (55), (61) e o teorema de mudanças de variáveis, temos, para $s<0$, que

$$\begin{aligned}
\|u_j(\cdot,T)\|_s^2 = \|u_j(\cdot,0)\|_s^2 &\ge |\mu|^2\zeta(s)\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\xi|^{2s})\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi-N_j}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi\\
&\ge \zeta_j|\mu|^2\zeta(s)\int_{N_j-\sigma}^{N_j+\sigma}(1+|\xi|^{2s})\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi-N_j}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi\\
&\ge \zeta_j|\mu|^2\zeta(s)(\beta_j^2+2\beta_j+1)^s N^{2s}\int_{N_j-\sigma}^{N_j+\sigma}\left|\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi-N_j}{\sigma}\right)\right|^2 d\xi\\
&= \zeta_j|\mu|^2\zeta(s)(\beta_j^2+2\beta_j+1)^s N^{2s}\sigma\int_{-1}^{1}|\widehat{\varphi}(y)|^2dy\\
&\ge \zeta_j|\mu|^2\zeta(s)(\beta_j^2+2\beta_j+1)^s N^{2s}\sigma\vartheta\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2, \quad j=1,2,
\end{aligned}$$

onde $\vartheta \le \frac{\int_{-1}^{1}|\widehat{\varphi}(y)|^2dy}{\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2}$, e, para $s\ge 0$, que

$$\|u_j(\cdot,T)\|_s^2 = \|u_j(\cdot,0)\|_s^2 \ge \zeta_j|\mu|^2\zeta(s)(\alpha_j^2+2\alpha_j)^s N^{2s}\sigma\vartheta\|\widehat{\varphi}\|_{L^2}^2, \quad j=1,2.$$

Logo, usando a igualdade de Plancherel (2.6), segue-se que

$$\|u_j(\cdot,T)\|_s^2 = \|u_j(\cdot,0)\|_s^2 \simeq N^{2s}\sigma\|\varphi\|_{L^2}^2, \quad s\in\mathbb{R}. \tag{63}$$

Se $s=k$, então (63) nos dá a expressão seguinte:

$$\|u_j(\cdot,0)\|_s^2 = \|u_j(\cdot,T)\|_{H^k}^2 \simeq \|\varphi\|_{L^2}^2. \tag{64}$$

A relação (53) nos informa que $\hat{u}_1$ e $\hat{u}_2$ estão concentrados em $B_\sigma(N_1)\cup B_\sigma(N_2)$, portanto existem $\zeta,\eta>0$ tais que, para todos N_1 e N_2,

$$\zeta\int_{N_1-\sigma}^{N_2+\sigma}(1+|\xi|^2)^k|\hat{u}_1(\cdot,T)-\hat{u}_2(\cdot,T)|^2d\xi \le \|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|_{H^k}^2$$

e

$$\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|_{H^k}^2 \le \eta\int_{N_1-\sigma}^{N_2+\sigma}(1+|\xi|^2)^k|\hat{u}_1(\cdot,T)-\hat{u}_2(\cdot,T)|^2d\xi.$$

Daí, quando $-1/2<k<0$ (lembremos que estamos trabalhando com $k>-1/2$),

$$\zeta(2(\beta_2+1)+\beta_2^2)^k N^{2k}\int_{N_1-\sigma}^{N_2+\sigma}|\hat{u}_1(\cdot,T)-\hat{u}_2(\cdot,T)|^2d\xi \le \|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|_{H^k}^2,$$

$$\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{H^k} \leq \eta(\alpha_1^2-\alpha_1)^k N^{2k}\int_{N_1-\sigma}^{N_2+\sigma}|\hat{u}_1(\cdot,T)-\hat{u}_2(\cdot,T)|^2 d\xi,$$

e para $k \geq 0$ temos que

$$\zeta(\alpha_1^2-\alpha_1)^k N^{2k}\int_{N_1-\sigma}^{N_2+\sigma}|\hat{u}_1(\cdot,T)-\hat{u}_2(\cdot,T)|^2 d\xi \leq \|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{H^k},$$

$$\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{H^k} \leq \eta(2(\beta_2+1)+\beta_2^2)^k N^{2k}\int_{N_1-\sigma}^{N_2+\sigma}|\hat{u}_1(\cdot,T)-\hat{u}_2(\cdot,T)|^2 d\xi,$$

Portanto, usando novamente (2.6),

$$\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{H^k} \simeq N^{2k}\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{L^2}. \tag{65}$$

Examinemos (58) para concluir que, para cada $T>0$, $u_j(\cdot,T)$ está concentrada em $B_{\sigma^{-1}}(2TN_j)$, e que

$$|\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x,T)u_2(x,T)dx| \lesssim \sigma^2\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\sigma(x-2N_1T))\varphi(\sigma(x-2TN_2)).$$

Dado uma constante C, para que

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u_1(x,T)u_2(x,T)dx\right| \leq C,$$

basta que encontremos N_1 e N_2 tais que

$$(2TN_2-\sigma^{-1})-(2TN_1+\sigma^{-1}) \gg 0,$$

ou seja, que

$$T|N_1-N_2| \gg \sigma^{-1} = N^{2k}; \tag{66}$$

portanto usando (63) com $s=0$,

$$\begin{aligned} \|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{L^2} &= \|u_1(\cdot,T)\|^2_{L^2}+\|u_2(\cdot,T)\|^2_{L^2}-2\int_{-\infty}^{\infty}u_1(x,T)u_2(x,T)dx \\ &\simeq \|u_1(\cdot,T)\|^2_{L^2}+\|u_2(\cdot,T)\|^2_{L^2} \simeq \sigma. \end{aligned} \tag{67}$$

Combinando (65) com (67), obtemos

$$\|u_1(\cdot,T)-u_2(\cdot,T)\|^2_{H^k} \geq \varepsilon N^{2k}\sigma = \varepsilon, \tag{68}$$

para uma certa constante $\varepsilon > 0$. Fazendo

$$N_1 = N \quad e \quad N_2 = N+\delta N^{-2k}, \quad \text{com } \delta > 0, \tag{69}$$

obtemos de (62)

$$\|u_1(\cdot,0) - u_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} \lesssim \delta^2. \tag{70}$$

Da nossa escolha feita em (69), desde que

$$k < 0, \tag{71}$$

dados $\delta, T > 0$, nos podemos tomar N tão grande que

$$T|N_1 - N_2| = T\delta N^{-2k} \gg N^{2k} \Leftrightarrow N^{-4k} \gg \frac{1}{T\delta},$$

valendo (66),(67) e (68).

Vendo a solução (52) do sistema de Gross-Pitaevskii (45), temos que

$$u_j(\cdot,0) \in B_C(0) \Rightarrow v_j(\cdot,0) \in B_C(0), \quad v_j = \lambda u_j, \;\; j = 1,2, \tag{72}$$

onde $\lambda = 1/2$ quando o parâmetro a de (45) for maior do que zero, e $\lambda = -1$ quando $a \leq 0$. As escolhas em (69) também implicam

$$\|v_1(\cdot,0) - v_2(\cdot,0)\|^2_{H^k} \lesssim \delta^2. \tag{73}$$

Neste momento, de (60),(64),(68),(70),(71), (72) e (73), concluímos que, para

$$(k,\ell) \in (-\tfrac{1}{2}, 0) \times (-\tfrac{1}{2}, \infty), \tag{74}$$

dados $T > 0$ e uma bola $B \subset H^k \times H^\ell$, existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existem $(u_1(\cdot,0), v_1(\cdot,0)), (u_2(\cdot,0), v_2(\cdot,0)) \in B$ tais que

$$\|(u_1(\cdot,0), v_1(\cdot,0)) - (u_2(\cdot,0), v_2(\cdot,0))\|_{H^k\times H^\ell} = \|(u_1(\cdot,0) - u_2(\cdot,0), v_1(\cdot,0) - v_2(\cdot,0))\|_{H^k\times H^\ell} < \delta$$

e

$$\sup_{t\in[0,T]} \|(u_1(\cdot,t), v_1(\cdot,t)) - (u_2(\cdot,t), v_2(\cdot,t))\|_{H^k\times H^\ell} \geq \varepsilon,$$

ou seja, concluímos que aplicação dado solução $(f,g) \longmapsto (u(t), v(t))$ associado ao problema de Cauchy (45) não é localmente Lipschitz em $H^k \times H^\ell$ quando $-1/2 < k < 0$ e $\ell > -1/2$. A inversão dos papéis de u_j e v_j, $j = 1,2$, em nossas contas a partir de (52) nos mostra a má colocação de (45) também em $H^k \times H^\ell$ quando $k > -1/2$ e $-1/2 < \ell < 0$, terminando assim esta demonstração.

Bibliografia

[1] ARBOGAST, T. e BONA, J. Methods of Applied Mathematics. Department of Mathematics, The University of Texas at Austin, 2001.

[2] BOURGAIN, J. Fourier Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to Nonlinear Evolution Equations I Schrödinger Equations. Geometric and Funct. Anal. 3*ibid.*, 107-156, 1993.

[3] BEKIRANOV, D., OGAWA, T. e PONCE, G. Interaction Equations for Short and Long Dispersive Waves. Journal of Functional Analysis 158, 357-388, article n° FU983257 , 1998.

[4] BERESTYCKI, H. E LIONS, P.L. Nolinear Scalar Field Equations. Arch. Rational Mech. Anal., 82 , 313-345, 1983.

[5] CORCHO, A. J. On Some Nonlinear Dispersive Systems. Informes de Matemática (Teses de Doutorado). Instituto de Matemática Pura e Aplicada(IMPA). Série C-18-Maio/2003. http://www.preprint.impa.br

[6] CORCHO, A. J. Ill-Posedness for the Benney System. Preprint

[7] CRIST, M., COLLIANDER, J. e TAO, T. Asymptotics, Frequency Modulation, and Low Regularity Ill-Posedness for Canonical Defocusing Equations. Amer. J. Math., 125, no. 6, 1235-1293, 2003.

[8] CRIST, M., COLLIANDER, J. e TAO, T. Ill-Posedness for Nonlinear Schrödinger and Wave Equations. Preprint.

[9] CAZENAVE, T., WEISSLER, F. The Cauchy-Problem for the Critical Nonlinear Schrödinger Equation in H^s. Nonlinear Analysis 14, 807-836, 1990.

[10] FIGUEIREDO, D. G. Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[11] IÓRIO JR, R.J. e IÓRIO, V.M. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[12] KENING, C.E., PONCE, G. e VEGA, L. The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation in Sobolev Spaces of Negative Indices. Duke Math. J. 71, 1-21, 1993.

[13] KENING, C.E., PONCE, G. e VEGA, L. Well-Posedness end Scattering Results for the Generalized Korteweg-de Vries Equation Via Contraction Principle. Comm. Pure Appl. Math. 46, 527-620, 1993.

[14] KENING, C.E., PONCE, G. e VEGA, L. A Bilinear Estimate with Applications to the KdV Equation J. Amer. Math. Soc. 348, 3323-3353, 1996.

[15] KENING, C.E., PONCE, G. e VEGA, L. On Ill-Posedness of Some Canonical Dispersive Equations. Duke Math. J., 106, 617-633, 2001.

[16] LIMA, E.L. Curso de Análise. Volume 2. Projeto Euclides IMPA, Rio de Janeiro, 2000.

[17] LINARES, F. e PONCE, G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[18] RUDIN, W. Real and Complex Analysis. Higher Mathematics Series. 3rd Edition. McGraw-Hill Companies, 1986.

[19] SHCHESNOVICH, V. S., MALOMED, B. A. e KRAENKEL, R. A. Solitons in Bose-Einstein Condensates Trapped In a Double-Well Pontential. http://www.elsevier.com/locate/physd

[20] SOTOMAYOR, J. Lições de Equações Diferenciais Ordinárias. Projeto Euclides. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1979.

[21] STRAUSS, W.A. Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions. Math. Phys., 55, 149-162, 1977.

[22] TSUTSUMI, Y. L^2-Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations and Nonlinear Groups. Funkcialaj Ekvacioj 30, 115-125, 1987.

[23] ZUAZO, J.D. Fourier Analysis. Graduate Studies in Mathematics, 29. American Mathematical Society, E.U.A., 2001.