

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA UFBA-UFAL

GIOVANE FERREIRA SILVA

FATORES DE MEDIDAS GIBBS SEQUENCIAIS

Maceió

2016

GIOVANE FERREIRA SILVA

FATORES DE MEDIDAS GIBBS SEQUENCIAIS

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira

Maceió

2016

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S586f Silva, Giovane Ferreira.
Fatores de medidas Gibbs seqüenciais / Giovane Ferreira Silva. – 2016.
48f.

Orientador: Krerley Irraciel Martins Oliveira.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática. Maceió, 2011.

Bibliografia: f. 46-48.

1. Medida Gibbs seqüencial. 2. Shift total. 3. Aplicação fator 1-bloco.
4. Decaimento exponencial esticado. 5. Decaimento polinomial. 6. Variação
Somável.I. Título.

CDU: 519.24

AUTOR: GIOVANE FERREIRA SILVA

FATORES DE MEDIDAS GIBBS SEQUENCIAIS

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, aprovada ao 09 dia do mês de agosto do ano de 2016.

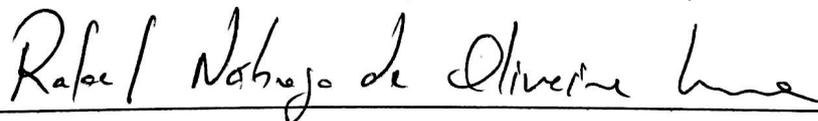


Dr. Krerley Irraciel Martins Oliveira, UFAL (Orientador)

Banca Examinadora:



Dr. Ali Tahzibi, USP(Examinador Externo)



Dr. Rafael Nóbrega Lucena, UFAL



Dr. Ali Golmakani, UFAL



Dr. Nivaldo Costa Muniz, UFMA(Examinador Externo)

À minha família

AGRADECIMENTOS

À CAPES pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Doutorado.

À minha esposa Regina, pelo companheirismo durante essa jornada. Aos meus filhotes Giovane Jr e Giovana, razões do meu viver.

À minha mãe e ao meu pai pela vida, pelos incentivos... Aos meus irmãos Júnior, Flávia e Bris. Ao meu orientador Krerley pelas motivações, encorajamentos e atenção para comigo e minha família.

Ao Renaud pelos conselhos, atenção e receptividade no tempo em que estive em Brest.

Ao professores Ali Tahzibi, Ali Golmakani, Rafael Lucena e Nivaldo Muniz pela participação em minha banca. Ao professor Yuri Lima pelas várias sugestões dadas para a melhoria da escrita desta tese.

Aos professores da UFAL e UFBA, pela atenção e motivação durante esses anos. Em especial ao Paulo Varandas por ter lido essa tese e ter dado várias sugestões.

Aos professores do DEMAT, pelo incentivo e encorajamento. Dando destaque à Vanessa e ao Nivaldo pela revisão e sugestões dadas para a melhora deste trabalho.

Aos meu colegas de doutorado que compartilharam comigo todos esses anos.

E à todos que participaram diretamente e indiretamente na para que essa etapa de concretizasse.

RESUMO

Definimos uma noção fraca de medidas de Gibbs, que chamamos de *medidas Gibbs sequenciais*. Essas medidas são apropriadas para o estudo de dinâmica não-uniformemente hiperbólica. Extendemos os resultados anteriores de Kempton e Pollicot (POLLICOTT; KEMPTON, 2011), Ugalde e Chazottes (CHAZOTTES; UGALDE, 2011). Mostramos que a imagem de uma aplicação fator 1-bloco de uma medida Gibbs sequencial é também Gibbs sequencial, com a mesma sequência de Gibbs. Obtemos algumas estimativas sobre a regularidade do potencial da medida imagem.

Palavras-chaves: Medida Gibbs Sequencial; Shift Total; Aplicação Fator 1-bloco; Decaimento Exponencial Esticado; Decaimento Polinomial; Variação Somável.

ABSTRACT

We define a weaker notion of Gibbs measures, that we call *sequential Gibbs measures*. These measures are suitable for the study of non-uniform hyperbolic dynamics. Extending previous results of Kempton and Pollicot (POLLICOTT; KEMPTON, 2011), Ugalde and Chazottes (CHAZOTTES; UGALDE, 2011), we show that the images of one block factor maps of a sequential Gibbs measure is also a sequential Gibbs measure, with the same Gibbs sequence. We obtain some estimates on the regularity of the potential of the image measure.

Keywords: Sequential Gibbs Measure; Full Shift; One Block Factor Map; Stretched Exponential Decay; Polynomial Decay; Summable Variations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	2
2	PRELIMINARES E NOTAÇÕES	8
3	RESULTADOS	12
3.1	Definição de Medida Gibbs Sequencial	12
3.2	Demonstração do Teorema A	15
3.2.1	Definição do Potencial ψ_2	16
3.2.2	O potencial ψ_2 está bem definido	20
3.3	Demonstração do Teorema B	27
3.3.1	Decaimento Exponencial Esticado Local	27
3.3.2	Decaimento Polinomial Local	28
3.3.3	Varição Somável Local	29
3.3.4	Modulo da Continuidade de ψ_2 (Prova do Teorema B)	29
4	EXEMPLOS DE MEDIDAS GIBBS SEQUENCIAIS	31
4.0.1	Medida Conforme e Medida Gibbs Sequencial	31
4.0.2	Medida Gibbs Não-lacunar e Medida Gibbs Sequencial	35
4.0.3	Medida de Gibbs Fraca e Medida Gibbs Sequencial	38
5	EXTENSÃO, APLICAÇÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS	42
	Referências	46

1 INTRODUÇÃO

Apesar de suas bases serem lançadas no século XIX, o estudo da Mecânica Estatística de Reticulados só começou no final dos anos 60 com a introdução do conceito de *medida de Gibbs* nas obras de Dobrushin, Lanford e Ruelle ((DOBRUSCHIN, 1968), (LANFORD; RUELLE, 1969)). Um pouco mais tarde, essas medidas desempenharam um papel fundamental no desenvolvimento de uma subárea da Teoria ergódica, conhecida como *Formalismo Termodinâmico*. Sinai, Ruelle, Bowen, Walters, entre outros autores, introduziram na década de 70 algumas noções emprestadas da Mecânica Estatística e produziram vários resultados interessantes e profundos para transformações hiperbólicas e expansoras.

Posteriormente, vários trabalhos aplicaram este formalismo em muitos tópicos que ainda são objetos de intensa investigação, tais como: Dimensão de Repulsores (Conformes) Invariantes, Distribuição de pontos e órbitas periódicas, Existência de medidas invariantes absolutamente contínuas com respeito à medida de Lebesgue, apenas para mencionar alguns tópicos.

Para introduzir a noção de medida de Gibbs em Teoria Ergódica, iremos considerar um shift unilateral total Σ em um alfabeto finito de símbolos, uma aplicação deslocamento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ e um potencial $\phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que μ é uma medida de Gibbs com respeito à ϕ se existem constantes $K > 0$ e P tais que para cada $\underline{x} = x_0x_1 \dots \in \Sigma$ e cada $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$K^{-1} \leq \frac{\mu([x_0x_1 \dots x_{n-1}])}{e^{\phi^n(\underline{x}) - nP}} \leq K, \quad (1.1)$$

onde $\phi^n(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{n-1} \phi(f^i(x))$ e $[x_0x_1 \dots x_{n-1}] := \{\underline{y} = y_0y_1 \dots \in \Sigma; y_i = x_i, \text{ para } i = 0, \dots, n-1\}$. Essas medidas são *estados de equilíbrio* para potenciais Hölder contínuos, isto é, elas maximizam a expressão $h_\mu(\sigma) + \int \phi d\mu$, sob todas as medidas invariantes por σ .

Observe que o potencial ϕ não é único, pois ν é também uma medida de Gibbs para cada potencial cohomólogo da forma $\phi + u \circ \sigma - u$ com $u \in L^\infty(\Sigma)$.

Um problema interessante surge quando consideramos uma aplicação sobrejetiva $\pi : \{1, \dots, k_1\} \rightarrow \{1, \dots, k_2\}$, que algumas vezes é chamada de *amalgamação* e a estendemos para uma aplicação $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$, onde $\Sigma_1 = \{1, \dots, k_1\}^{\mathbb{N}}$ e $\Sigma_2 = \{1, \dots, k_2\}^{\mathbb{N}}$, de tal forma que

$$\Pi(x_1x_2\dots) = \pi(x_1)\pi(x_2)\dots$$

Ugalde, Chazottes ((CHAZOTTES; UGALDE, 2011)) e Kempton, Pollicott ((POLLICOTT; KEMPTON, 2011)) provaram que se μ é uma medida de Gibbs para um potencial regular ψ_1 em Σ_1 , então a medida pushforward $\nu = \mu \circ \Pi^{-1}$ é uma medida de Gibbs para algum potencial regular (pode ser com menos regularidade) ψ_2 em Σ_2 . Mais precisamente, a n -ésima variação de uma função $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $var_n(\psi_1) = \sup\{|\psi_1(\underline{z}) - \psi_1(\underline{w})| :$

$d(\underline{w}, \underline{z}) \leq 2^{-n}$. A continuidade (uniforme) da função ψ_1 corresponde à $\text{var}_n(\psi_1) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ e a Hölder continuidade corresponde à existência de constantes $C > 0$ e $\theta \in (0, 1)$ tal que $\text{var}_n(\psi_1) < C\theta^n$, para $n \geq 1$. Dizemos que ψ_1 is *exponencial esticada*, se existem constantes $C > 0$, $t \in (0, 1)$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que $\text{var}_n(\psi_1) < C\theta^{n^t}$, para $n \geq 1$. Resumimos abaixo alguns dos resultados que estão em ((POLLICOTT; KEMPTON, 2011),(CHAZOTTES; UGALDE, 2011), (VERBITSKIY, 2011)):

1. (POLLICOTT; KEMPTON, 2011; CHAZOTTES; UGALDE, 2011) Se ψ_1 é contínuo, então ν é uma medida de Gibbs para algum potencial contínuo ψ_2 .
2. (VERBITSKIY, 2011) Se ψ_1 é Hölder contínuo, então ν é uma medida de Gibbs para algum potencial Hölder contínuo ψ_2 .
3. (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) Se ψ_1 é exponencial esticada (com $t = \frac{1}{2}$), então ψ_2 pode ser escolhido exponencial esticada.
4. (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) Se $\sum_{n \geq 1} n^{d+1} \text{var}_n(\psi_1) < +\infty$ para algum $d \geq 0$, então ψ_2 é tal que $\sum_{n \geq 1} n^d \text{var}_n(\psi_2) < +\infty$.

Em (KEMPTON, 2011), Kempton considera o mesmo problema para o caso de subshifts. Ele generaliza os resultados acima (1,3 e 4) e prova o resultado 2 para uma classe de potenciais. Mais detalhes são dados no Capítulo 5.

O problema que é tratado nesta tese é de maior importância para o estudo dos Processos Ocultos de Markov (POM) que tem sido o foco de intensa pesquisa por causa do grande número de aplicações em Matemática Pura e Aplicada (Teoria da Informação, Teoria de Probabilidade e Sistemas Dinâmicos, por exemplo) e em outras áreas, tais como biologia e Computação. O POM consiste de um formalismo markoviano que é frequentemente usado para modelar contextos que são governados por um processo markoviano embutido, cuja dinâmica não pode ser diretamente observada, ou seja, é usado para modelar a fonte que gera os sinais observados que está oculta a quem o observa. Os sinais observáveis são enviados pelo processo markoviano, que evolui com o tempo, através das transições de seus estados. Esse formalismo também é útil para a análise da natureza dessa fonte podendo assim prever observações futuras. Para mais detalhes sobre POM, sugerimos (JUANG, 1984), (EPHRAIM; MERHAV, 2002), (BOYLE; PETERSEN, 2011) e (VERBITSKIY, 2011).

A seguir, enunciaremos com mais detalhes os resultados que foram citados anteriormente e que se encontram nos trabalhos de Chazottes, Ugalde ((CHAZOTTES; UGALDE, 2003), (CHAZOTTES; UGALDE, 2011)), Kempton, Pollicott ((POLLICOTT; KEMPTON, 2011)) e Kempton ((KEMPTON, 2011)).

Seja $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ uma amalgamação entre dois shifts totais Σ_1 e Σ_2 sobre alfabetos finitos A e B , respectivamente. Seja μ_{ψ_1} uma medida de Gibbs σ_1 -invariante para um potencial $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, a imagem $\nu = \mu_{\psi_1} \circ \Pi^{-1}$ será uma medida σ_2 -invariante.

Abaixo, enunciamos o teorema principal de (CHAZOTTES; UGALDE, 2011).

Teorema 1.1. *Seja $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ uma aplicação amalgamação e $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ um potencial Hölder contínuo. Então, a medida $\mu_{\psi_1} \circ \Pi^{-1}$ é uma medida de Gibbs com suporte Σ_2 , para um potencial $\psi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\text{var}_n(\psi_2) \leq D e^{-c\sqrt{n}}$$

para algum $c, D > 0$ e todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, este potencial $\psi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é normalizado e é dado por

$$\psi_2(\underline{z}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\mu_{\psi_r} \circ \Pi^{-1}[z_0 \dots z_{n-1}]}{\mu_{\psi_r} \circ \Pi^{-1}[z_1 \dots z_{n-1}]} \right)$$

onde ψ_r é a $(r+1)$ -símbolo aproximação de ψ .

Se ψ é localmente constante, então para todo n

$$\text{var}_n(\psi_2) \leq C \theta^n$$

onde $\theta \in (0, 1)$, e $C > 0$.

Observação 1.1. *Um potencial contínuo $(r+1)$ -símbolos $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ significa que existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\psi_1(\underline{x}) = \psi_1(\underline{y}) \text{ sempre que } x_j = y_j, 0 \leq j \leq r.$$

Posteriormente, nos trabalhos em (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) e (KEMPTON, 2011) os resultados de (CHAZOTTES; UGALDE, 2011) são generalizados. A hipótese de Hölder continuidade é removida. Em contraste, quando ψ_1 possui variação somável, ψ_2 também possui. O caso de preservar Hölder continuidade é mais delicado. Em (VERBITSKIY, 2011), Verbitsky prova isso para o caso do shift total e em (KEMPTON, 2011), Kempton prova para uma classe de potenciais no caso do subshift de tipo finito. Para o caso geral, isto é um problema em aberto. Daremos os detalhes abaixo.

Teorema 1.2 (Corolário 3.4, (POLLICOTT; KEMPTON, 2011)). *Se μ_{ψ_1} é uma medida de Gibbs para ψ_1 , então existe um potencial $\psi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nu = \mu_{\psi_1} \circ \Pi^{-1}$ é uma medida de Gibbs para ψ_2 .*

Em adição, temos os seguintes teoremas sobre a regularidade do potencial da medida projetada.

Teorema 1.3 (Teorema 5.1, (POLLICOTT; KEMPTON, 2011)). *Seja $d \geq 0$. Se $\sum_{n=0}^{\infty} n^{d+1} \text{var}_n(\psi_1) < \infty$ então*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^d \text{var}_n(\psi_2) < \infty.$$

Teorema 1.4 (Teorema 5.3, (POLLICOTT; KEMPTON, 2011)). *Assuma que exista $c_1 > 0$ e $0 < \theta_1 < 1$ tal que $\text{var}_n(\psi_1) \leq c_1 \theta_1^{\sqrt{n}}$, para todo $n \geq 0$. Então existe $c_2 > 0$ e $0 < \theta_2 < 1$ tal que $\text{var}_n(\psi_2) \leq c_2 \theta_2^{\sqrt{n}}$, para todo $n \geq 0$.*

Em (YAYAMA, 2016), Yayama considera um caso mais geral do que o encontrado em (POLLICOTT; KEMPTON, 2011). Ela considera dois subshifts unilaterais (Σ_1, σ_1) , (Σ_2, σ_2) , onde Σ_1 satisfaz a propriedade de especificação e $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é uma aplicação fator. Seja μ a única medida de Gibbs para a sequência de potenciais contínuos quase aditivo com variação limitada $\mathcal{F} = \{\log f_n\}_{n=1}^{\infty}$ em Σ_1 . Ela mostra que $\mu \circ \Pi^{-1}$ é a única medida de Gibbs invariante para uma sequência de funções contínuas $\mathcal{G} = \{\log g_n\}_{n=1}^{\infty}$ em Σ_2 . E quando (Σ_1, σ_1) é um shift total, \mathcal{G} e μ podem ser caracterizadas usando pressão relativa. E \mathcal{G} é uma generalização da funções contínuas encontradas em (POLLICOTT; KEMPTON, 2011).

Como consequência de tudo isso, algumas questões surgem. Uma delas é a seguinte:

Pergunta:

Se μ_{ψ_1} é uma versão mais fraca de medida de Gibbs. Sob quais condições a medida $\mu_{\psi_1} \circ \Pi^{-1}$, suportada em um shift total(ou subshift) também é Gibbs ou uma versão mais fraca de medida de Gibbs? O potencial associado à medida $\mu_{\psi_1} \circ \Pi^{-1}$ “herda” a mesma regularidade do potencial ψ_1 associado à medida μ_{ψ_1} ?

Em geral, o estudo de medidas de Gibbs requer alguma forma de hiperbolicidade e quando consideramos aplicações não-uniformemente expansoras, mesmo a existência de tais medidas é em geral um problema em aberto. O que queremos aqui é exatamente abordar o contexto de transformações não-uniformemente expansoras.

Para tentar entender a dinâmica de um conjunto mais amplo dessas transformações, Oliveira e Viana((OLIVEIRA; VIANA, 2008)) introduziram a noção de medida de Gibbs *não-lacunar*(veja também (VARANDAS; VIANA, 2010) e (RAMOS; VIANA, 2015)). Essas medidas são tais que para quase todo ponto \underline{x} existe uma subsequência $n_i(\underline{x})$ de números naturais que satisfazem (1.1) e tal que $n_{i+1}/n_i \rightarrow 1$. Elas são relacionadas com as medidas de Gibbs fracas introduzidas por Yuri(veja (YURI, 1999)), no sentido que o quociente em (1.1) cresce subexponencialmente: existe uma constante P e uma sequência de funções positivas $K_n(\underline{x})$ tal

que para quase todo $\underline{x} = x_0 x_1 \cdots \in \Sigma$ temos que $\lim 1/n \log K_n(\underline{x}) = 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$K_n(x)^{-1} \leq \frac{\mu([x_0 x_1 \dots x_{n-1}])}{e^{\phi^n(x) - nP}} \leq K_n(x). \quad (1.2)$$

Nesta tese, introduzimos a noção de medida Gibbs *sequencial* para um potencial $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Isto significa que existem constantes $K > 0$ e $P \in \mathbb{R}$, tal que em μ -q.t.p. \underline{x} existe uma sequencia $(n_k(\underline{x}))_k$ satisfazendo

$$K^{-1} \leq \frac{\mu[x_j \dots x_{n_i-1}]}{e^{\psi^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n_i-j)P}} \leq K \quad (1.3)$$

para cada $\underline{y} \in \sigma^{-j}([x_j \dots x_{n_i-1}])$ e $0 \leq j \leq n_i - 1$.

Os resultados que obtemos aqui são uma contrapartida não-uniforme dos resultados em (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) para potenciais com muito menos regularidades e mais adequado para o estudo de sistemas dinâmicos não-uniformemente hiperbólico. Os principais resultados são os seguintes:

Teorema A. *Seja μ uma medida Gibbs sequencial para o potencial $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Se ψ_1 é contínuo em μ -q.t.p. e Π é uma aplicação fator 1-bloco regular com respeito à μ , então a medida $\nu := \mu \circ \Pi^{-1}$ em Σ_2 também é uma medida Gibbs sequencial para um potencial contínuo em ν -q.t.p. $\psi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Teorema B. *Seja μ uma medida Gibbs sequencial para um potencial $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo em μ -q.t.p. Assuma que em ν -q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$ temos $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(\underline{z})}{k} < +\infty$ e que existe uma função positiva decrescente $f_{\underline{z}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_{\underline{z}}(k)k < +\infty$ e para cada $1 \leq j \leq n_k$ temos que*

$$\text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma^{n_k-j}(\underline{z}))) < f_{\underline{z}}(j).$$

Então, dado $\gamma < 1$, existem constantes $0 < \alpha < 1$ e $C > 0$ tal que

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{z}) < C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, f_{\underline{z}}([k^\gamma])k\}.$$

A estratégia da demonstração do Teorema A consiste primeiramente em definir uma sequência de funções auxiliares $u_{k, \underline{w}}(\underline{z})$, onde $\underline{w} \in \Sigma_1$ e $\underline{z} \in \Sigma_2$, que estão inteiramente relacionadas com o potencial ψ_1 . O potencial ψ_2 estará bem definido se a sequência $u_{\underline{w}, k}(\cdot)$ convergir em ν -q.t.p. A parte crucial da demonstração do Teorema A é justamente provar essa convergência. Para isso, definimos uma sequência de intervalos $\Lambda_k(\underline{z}) = [\min_{\underline{w}} u_{\underline{w}, k}(\underline{z}), \max_{\underline{w}'} u_{\underline{w}', k}(\underline{z})]$ e provamos que ela forma uma sequência de intervalos encaixados. Posteriormente provamos que o comprimento destes intervalos converge para zero. Isso é feito mostrando que a sequência $\lambda_k(\underline{z}) = \sup \left\{ \frac{u_{\underline{w}, k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}', k}(\underline{z})} : \underline{w}, \underline{w}' \in \Sigma_1 \right\}$ (quociente dos extremos do intervalo $\Lambda_k(\underline{z})$) converge para 1.

Para a demonstração do Teorema B , usaremos o fato que módulo da continuidade de $\log \lambda_k$ dá uma estimativa para o módulo da continuidade de $\text{var}_k(\psi_2, \underline{z})$. Usaremos a regularidade de ψ_1 μ -q.t.p. para estimar o módulo da continuidade de $\log \lambda_k$.

Como exemplo e aplicação principal incluímos estados de equilíbrio para o shift construído em (HOFBAUER, 1977) e imagens de medidas Gibbs não-lacunares de difeomorfismos locais para potenciais Hölder contínuos estudados em (OLIVEIRA; VIANA, 2008).

Esta tese é organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 citaremos alguns resultados e notações que serão usadas neste trabalho. No Capítulo 3 definimos as medidas Gibbs sequenciais e demonstramos os resultados principais desta tese. Como corolários temos que decaimento polinomial local, decaimento exponencial esticado local e variação somável local são preservadas pelo potencial da medida projetada. No Capítulo 4 estudamos a relação das medidas Gibbs sequenciais com as medidas Gibbs não-lacunares ((OLIVEIRA; VIANA, 2008), (VARANDAS; VIANA, 2010)), com as medida de Gibbs fracas para um potencial, segundo Yuri ((YURI, 1999)), e com as medidas de Gibbs fracas para uma sequência de potenciais assintóticos, segundo Iommi-Yayama ((IOMMI; YAYAMA,)). Damos condições para que uma medida conforme (auto-medida do Operador de Ruelle-Perron-Frobenius) seja uma medida Gibbs sequencial. E consideramos um exemplo em que a medida Gibbs sequencial é um estado de equilíbrio para um potencial contínuo. E no Capítulo 5 discutimos uma possível aplicação dos resultados no contexto de dimensão em sistemas dinâmicos, mas especificamente, no estudo da convergência da dimensão de uma medida Gibbs sequencial para um produto torcido $T = (f, g)$ definido no toro \mathbb{T}^n , semelhante ao que foi feito em (LEPLAIDEUR; SAUSSOL, 2012). E também há um comentário sobre uma extensão dos resultados desta tese para o caso do subshift. E por fim, comentamos sobre perspectivas futuras e problemas em abertos relacionados aos resultados desta tese.

2 PRELIMINARES E NOTAÇÕES

Seja $A^{\mathbb{N}} = \Sigma_A$ um shift sob um alfabeto finito $A = \{1, 2, \dots, k_1\}$. Tais sequências são denotadas por $\underline{x} = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, ou por $\underline{x} = x_0 x_1 x_2 \dots$, onde cada $x_i \in A$. Um *bloco* ou *palavra* sob A é concatenação de símbolos de A .

Seja a matriz $M : A \times A \rightarrow \{0, 1\}$. Chamamos de subshift $\Sigma_A(M)$, o conjunto de Σ_A como sendo o conjunto de todas as palavras permitidas (admissíveis), ou seja,

$$\Sigma_A(M) = \{(x_j)_{j=0}^{\infty} : M_{x_j x_{j+1}} = 1, \text{ para } j \in \mathbb{N}\}$$

Se todas as palavras são admissíveis, dizemos que o subshift $\Sigma_A(M) = \Sigma_A$ é um shift total. E se o conjunto formado pelas palavras não admissíveis for finito, dizemos que $\Sigma_A(M)$ é um subshift do tipo finito. A dinâmica que consideraremos em $\Sigma_A(M)$ é a *aplicação deslocamento* $\sigma : \Sigma_A(M) \rightarrow \Sigma_A(M)$ que associa cada sequência \underline{x} à sequência $\underline{y} = \sigma(\underline{x})$ cuja i -ésima coordenada é $y_i = x_{i+1}$. Chamamos também de *shift de Markov topológico unilateral* $(\Sigma_A(M), \sigma)$ (ou simplesmente *shift de Markov*) ao conjunto $\Sigma_A(M)$ juntamente com a aplicação σ .

Chamamos de cilindro o conjunto $[\underline{w}] = [w_0 w_1 \dots w_{n-1}] = \{\underline{x} \in \Sigma : x_0 = w_0 \dots x_{n-1} = w_{n-1}\}$.

Dado $\theta \in (0, 1)$. A distância entre duas sequências \underline{x} e \underline{y} é dada por

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \theta^{N(\underline{x}, \underline{y})}.$$

onde $N(\underline{x}, \underline{y}) = \min_{k \geq 0} \{x_k \neq y_k\} \cup \{+\infty\}$.

A métrica d gera uma topologia em $\Sigma_A(M)$. $\Sigma_A(M)$ é compacto, pois $\#A < \infty$. A σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos coincide com a gerada pelos cilindros.

O seguinte teorema dá uma fórmula para a pressão topológica, veja (WALTERS,) e (OLIVEIRA; VIANA,) para mais detalhes.

Teorema 2.1 (Princípio Variacional). *Seja f uma transformação contínua de um espaço métrico compacto X e $g \in C(X, \mathbb{R})$. Então, a pressão topológica de g é dada por*

$$P_f(g) = \sup \{h_{\mu}(f) + \int g d\mu : \mu \in \mathcal{M}_f\}$$

onde $h_{\mu}(f)$ é a entropia de Kolmogorov-Sinai. Em particular, para $g = 0$ temos que a entropia topológica $h_{top}(f)$ é o supremo sobre todas as medidas de probabilidade da entropia de Kolmogorov-Sinai.

Em (BOWEN, 1970), Bowen mostra que a entropia topológica de um Axioma A é igual à taxa de crescimento do número de órbitas periódicas. Isto foi estendido para a pressão topológica e foi mostrado que o resultado vale para várias classes de sistemas dinâmicos, em particular para shifts de Markov.

Teorema 2.2. *Seja $(\Sigma_A(M), \sigma)$ um shift de Markov topologicamente mixing sobre um alfabeto finito e $g \in C(\Sigma_A(M), \mathbb{R})$. Então*

$$P_\sigma(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{\underline{x} \in \Sigma: \sigma^n(\underline{x}) = \underline{x}} e^{g^n(\underline{x})} \right).$$

Observação 2.1. *Denotaremos $\Sigma_A(M) = A^{\mathbb{N}}$ simplesmente por Σ , quando não houver confusão em relação ao alfabeto A.*

Abaixo damos a definição de medida de Gibbs.

Definição 2.1. *Chamamos uma medida μ em Σ de medida de Gibbs para uma função $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ se existem constantes $C > 0$ e $P(\psi)$ tal que*

$$C^{-1} \leq \frac{\mu[x_0 \dots x_{n-1}]}{e^{\psi^n(\underline{x}) - nP(\psi)}} \leq C$$

para todo $\underline{x} \in \Sigma$, onde $\psi^n(\underline{x}) := \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\sigma^k(\underline{x}))$ e $[x_0 \dots x_{n-1}] = \{\underline{y} \in \Sigma : y_0 \dots y_{n-1} = x_0 \dots x_{n-1}\}$.

Como consequência da definição acima é que cada potencial ψ associado à medida de Gibbs μ é contínuo. Ruelle prova em (RUELLE, 1968) que se A é finito e (Σ, σ) é topologicamente mixing, então existe uma única medida de Gibbs associada a cada potencial Hölder contínuo $\psi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Além disso, cada medida de Gibbs é também um estado de equilíbrio para ψ , definido como segue:

Definição 2.2. *Chamamos a medida $\mu \in \mathcal{M}_\sigma$ de um estado de equilíbrio para ψ se*

$$h_\mu(f) + \int_\Sigma \psi d\mu = \sup \{ h_\nu(\sigma) + \int_\Sigma \psi d\nu : \nu \in \mathcal{M}_\sigma, \int_\Sigma \psi d\nu > -\infty \}$$

Quando A é infinito, é bem possível que certos potenciais Hölder contínuos não tenham um estado de equilíbrio ou/e uma medida de Gibbs. Para garantir a existência de uma medida de Gibbs, hipóteses adicionais são assumidas. Um delas é a seguinte:

Definição 2.3. *Seja A um alfabeto infinito. Um potencial $\psi: \Sigma_A(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é dito somável se satisfaz a condição*

$$\sum_{a \in A} e^{\sup_{\underline{x} \in [a]} \psi(\underline{x})} < \infty$$

Denotamos por \mathcal{S}_M o conjunto de todas as funções somáveis $\psi : \Sigma_A(M) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfazem a condição adicional $\sum_{n=1}^{\infty} \text{var}_n(\psi) < \infty$.

Dizemos que a matriz M é finitamente primitiva se existe um inteiro N e um conjunto finito $C \subset A$ tal que para cada $a, b \in A$ podemos encontrar $(j_1 \dots j_n) \in C^N$ tal que o cilindro $[aj_1 \dots j_nb] \subseteq \Sigma_A(M)$ é não vazio. R. D. Mauldin e M. Urbański demonstram o seguinte teorema (veja [(MAULDIN; URBANSKI, b; MAULDIN; URBANSKI, a)]):

Teorema 2.3 ((MAULDIN; URBANSKI, b; MAULDIN; URBANSKI, a)). *Se $\psi \in \mathcal{S}_M$ e M é finitamente primitiva, então $P(\psi)$ é finita e ψ possui uma única medida de Gibbs invariante μ_ψ .*

Nota-se que, enquanto cada $\psi \in \mathcal{S}_M$ possui pressão finita e possui uma medida de Gibbs invariante, em alguns casos, esta medida pode ter entropia infinita e, portanto, não é um estado de equilíbrio. No entanto, Mauldin e Urbański foram capazes de mostrar o seguinte:

Proposição 2.1. *Seja $\psi \in \mathcal{S}_M$ e suponha que a condição adicional*

$$\sum_a \sup_{\underline{x} \in [a]} |\psi(\underline{x})| e^{\sup_{\underline{x} \in [a]} \psi(\underline{x})} < \infty$$

vale. Então a medida invariante μ_ψ satisfaz $h_{\mu_\psi} < \infty$, $\int |\psi| d\mu_\psi < \infty$ e μ_ψ é um estado de equilíbrio.

Em (BOWEN, 1975), Bowen considera subshifts do tipo finito unilaterais Σ e o conjunto $\mathcal{F}(\Sigma) \subset C(\Sigma)$ de todas funções que são Hölder contínuas com respeito a uma certa métrica. Para $\psi \in \mathcal{F}(\Sigma)$, ele prova a existência e unicidade de um estado de equilíbrio μ (Teorema 1.7) que é uma medida de Gibbs (Teorema 1.16).

Em (HOFBAUER, 1977), Hofbauer considera o mesmo problema para funções que não são Hölder contínuas. Ele dá informações acerca da unicidade e não unicidade de estados de equilíbrio e condições para que o estado de equilíbrio seja uma medida de Gibbs. Mais detalhes serão dados posteriormente na Seção 4.0.1.

Dadas duas sequências de números reais $(a_k)_{k \geq 1}$ e $(b_k)_{k \geq 1}$. Dizemos que $a_k \approx b_k$ se existe constantes $K_1, K_2 > 0$ tal que

$$K_1 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq K_2, \text{ para todo } k \geq 1.$$

A definição abaixo de variação pontual e variação em um conjunto serão úteis para dar uma estimativa para a regularidade do potencial ψ_2 no Teorema B.

Definição 2.4. *Dado um alfabeto finito A e o espaço shift associado $\Sigma = A^{\mathbb{N}}$. Definimos n -ésima variação de ψ em $\underline{x} = x_0 x_1 \dots x_n \dots$, por*

$$\text{var}_n(\psi, \underline{x}) = \sup\{|\psi(\underline{x}) - \psi(\underline{w})| : \underline{w} \in C_n(\underline{x})\}.$$

onde, $C_n(\underline{x}) = [x_0 \dots x_{n-1}] = \{\underline{w} \in \Sigma : w_0 \dots w_{n-1} = x_0 \dots x_{n-1}\}$. E a variação de $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ no conjunto $K \subset \Sigma$ por

$$\text{var}_n(\psi, K) := \sup_{\underline{x} \in K} \text{var}_n(\psi, \underline{x}).$$

Seja (Σ_A, σ_1) e (Σ_B, σ_2) dois subshifts sobre os alfabetos finitos A e B , respectivamente. Dizemos que Σ_B é um fator de Σ_A se, existe uma aplicação contínua e sobrejetiva $\Pi : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_B$ tal que $\Pi \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \Pi$. A aplicação Π é chamada de uma *aplicação fator*. Além disso Π é chamado uma aplicação fator *1-bloco* se existe uma aplicação $\pi : A \rightarrow B$ tal que

$$\Pi(\underline{x}) = (\pi(x_i))_{i=1}^{\infty} \quad \text{onde } \underline{x} = x_0 x_1 x_2 \dots \in \Sigma_A$$

3 RESULTADOS

3.1 Definição de Medida Gibbs Sequencial

Agora, daremos a definição de uma classe de medidas chamadas medidas Gibbs sequenciais que incluem como exemplos as medidas de Gibbs, segundo Bowen, e as medidas Gibbs não-lacunares.

Definição 3.1. Dizemos que uma medida μ é uma medida Gibbs sequencial para um potencial $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ se existem constantes $K > 0$ e $P \in \mathbb{R}$, e um conjunto $G \subset \Sigma$ com $\mu(G) = 1$, tal que dado $\underline{x} \in G$ existe um sequência $n_1(\underline{x}) < n_2(\underline{x}) < n_3(\underline{x}) < \dots$ tal que para cada $\underline{y} \in \sigma^{-j}([x_j \dots x_{n_i-1}])$ temos

$$K^{-1} \leq \frac{\mu[x_j \dots x_{n_i-1}]}{e^{\psi^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n_i-j)P}} \leq K \quad (3.1)$$

onde $0 \leq j \leq n_i - 1$.

A subsequência maximal $(n_i(\underline{x}))_i$ que satisfaz a Desigualdade (3.1) é chamada de sequência de *tempos Gibbs sequencial* de \underline{x} . Chamaremos simplesmente de tempo Gibbs de \underline{x} . Note que se $n_i(\underline{x})$ é um tempo Gibbs de \underline{x} então para $n \leq n_i(\underline{x})$, $n_i(\underline{x}) - n$ é um tempo Gibbs de $\sigma^n(\underline{x})$.

A definição de medidas Gibbs sequenciais depende das constantes K e P . Nesta tese, assumiremos que essas constantes são fixadas e, por causa da notação e clareza não mencionaremos essa dependência.

Se denotarmos por $G = \{\underline{x} \in \Sigma : \underline{x} \text{ possui infinitos tempos Gibbs}\}$, provaremos que P é unicamente determinado pela *pressão* $P_G(\psi)$ de ψ com respeito à G .

Para definir $P_G(\psi)$, denotamos por \mathcal{C}_n o conjunto de todos os cilindros de comprimento n . Consideramos a família $m_\alpha(\cdot, \psi, N)$ de medidas exteriores definidas por

$$m_\alpha(G, \psi, N) = \inf_{\mathcal{U}} \sum_{C \in \mathcal{U}} e^{-\alpha n(C) + \sup_C \psi^{n(C)}(x)},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas abertas $\mathcal{U} \subset \cup_{n \geq N} \mathcal{C}_n$ de G e $n(C)$ é o comprimento de C . Então, podemos tomar o limite

$$m_\alpha(G, \psi) = \lim_{N \rightarrow \infty} m_\alpha(G, \psi, N)$$

e definir

$$P_G(\psi) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}; m_\alpha(G, \psi) = 0\}.$$

Prova-se(Proposição 1.2 de (PESIN, 1997)) que $P_G(\psi)$ também é dada por

$$P_G(\psi) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}; m_\alpha(G, \psi) = \infty\}.$$

Para mais detalhes, veja Seção 11, Capítulo 4 de (PESIN, 1997). Agora, provaremos que

Proposição 3.1. *Se ψ admite uma medida Gibbs sequencial μ , então $P = P_G(\psi)$ é o único número P que satisfaz a Equação (3.1). Além disso, se μ é uma medida invariante e ergódica temos $P_G(\psi) = h_\mu(f) + \int \psi d\mu$.*

Demonstração. De fato, assuma que μ é uma medida Gibbs sequencial com constantes K e P satisfazendo a Equação (3.1). Para a primeira parte, denote por \mathcal{G}_n a coleção de todos os cilindros $C = [x_0 \dots x_{n-1}]$ tal que n é um tempo Gibbs para algum $\underline{x} \in C$. Fixado k , pela definição de G temos que $\mathcal{U}_k = \cup_{n>k} \mathcal{G}_n$ é uma cobertura aberta de G e

$$\mathcal{V}_k = \bigcup_{n>k} \{[x_0 \dots x_{n-1}] \in \mathcal{G}_n : [x_0 \dots x_{l-1}] \notin \mathcal{G}_l, \text{ for } k \leq l < n\}$$

é uma partição aberta de G . Para cada $\gamma > P$ temos que

$$\begin{aligned} m_\gamma(G, \psi, k) &\leq \sum_{C \in \mathcal{V}_k} e^{-\gamma n(C) + \sup_C \psi^{n(C)}(\underline{x})} = \\ &= e^{-(\gamma-P)n(C)} \sum_{C \in \mathcal{V}_k} e^{-Pn(C) + \sup_C \psi^{n(C)}(\underline{x})} \leq K e^{-(\gamma-P)k} \sum_{C \in \mathcal{V}_k} \mu(C). \end{aligned}$$

Sendo $\sum_{C \in \mathcal{V}_k} \mu(C) \leq 1$, fazendo $k \rightarrow \infty$, temos que $m_\gamma(G, \psi) = 0$ e $P \geq P_G(\psi)$.

Para a outra desigualdade temos, que para cada $\gamma < P$ e dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura de G , $\mathcal{U} \subset \cup_{n \geq k} \mathcal{G}_n$, tal que

$$m_\gamma(G, \psi, k) + \varepsilon \geq \sum_{C \in \mathcal{U}} e^{-\gamma n(C) + \sup_C \psi^{n(C)}(x)} \geq \sum_{C \in \mathcal{U}_j} e^{-\gamma n(C) + \sup_C \psi^{n(C)}(x)}$$

onde $\mathcal{U}_j = \cup_{n>j} \mathcal{G}_n \subseteq \mathcal{U}$ e $j \geq k$. Então

$$\begin{aligned} m_\gamma(G, \psi, k) + \varepsilon &\geq e^{-(\gamma-P)n(C)} \sum_{C \in \mathcal{U}_j} e^{-Pn(C) + \sup_C \psi^{n(C)}(x)} \\ &\geq K^{-1} e^{-(\gamma-P)k} \sum_{C \in \mathcal{U}_j} \mu(C) \end{aligned}$$

Sendo $0 < \beta < \sum_{C \in \mathcal{U}_j} \mu(C) \leq 1$, fazendo $k \rightarrow \infty$ (que implica $j \rightarrow \infty$), temos que $m_\gamma(G, \psi) = \infty$ e $P \leq P_G(\psi)$.

Agora, provaremos que $P_G(\psi) = h_\mu(f) + \int \psi d\mu$ para uma medida Gibbs sequencial invariante e ergódica. Observe que pela fórmula de entropia local de Brin-Katok temos que para μ -q.t.p. $\underline{x} \in G$, se $n_i(\underline{x})$ é a sequência de tempos Gibbs de \underline{x} então

$$h_\mu(f) = -\lim_{n_i} \frac{1}{n_i} \log \mu([x_0 \dots x_{n_i-1}]) = P_G(\psi) - \int \psi d\mu.$$

□

Como a constante P é unicamente definida, a chamamos de *pressão* da medida Gibbs sequencial μ .

De acordo com a Proposição 3.2 abaixo, não há perda de generalidade em assumir que $P = 0$ na Equação (3.1).

Proposição 3.2. *A medida μ é uma medida Gibbs sequencial para o potencial ψ com constante P se, e somente se, μ é uma medida Gibbs sequencial para o potencial $\psi - P$ com constante zero.*

Demonstração. Se μ é uma medida Gibbs sequencial para o potencial ψ com constante P , então

$$\mu[x_j \dots x_{n_i-1}] \approx e^{\psi^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n_i-j)P}$$

para cada $\underline{y} \in \sigma^{-j}([x_j \dots x_{n_i-1}])$ e tempo Gibbs n_i com $0 \leq j \leq n_i - 1$.

Defina o potencial $\tilde{\psi} := \psi - P$. Note que,

$$\tilde{\psi}^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) = (\psi - P)^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) = \psi^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n_i - j)P$$

Então,

$$\mu[x_j \dots x_{n_i-1}] \approx e^{\tilde{\psi}^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y}))}$$

Provando uma parte. A recíproca segue de maneira análoga. □

Sejam $\Sigma_1 = \Sigma_A$ e $\Sigma_2 = \Sigma_B$ dois shifts totais em alfabetos finitos A e B , respectivamente. Sejam σ_1 e σ_2 suas aplicações deslocamentos, respectivamente.

Definição 3.2. *Dizemos que uma aplicação fator 1-bloco $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é regular com respeito à medida Gibbs sequencial μ em Σ_1 , se existe um conjunto de medida total $C \subset G \subset \Sigma_1$ tal que dado $\underline{x} \in C$ então $\Pi^{-1}(\Pi(\underline{x})) \subset G$ e $n_1(\underline{x}) = n_1(\underline{y})$, se $\underline{y} \in \Pi^{-1}(\Pi(\underline{x}))$.*

Suponha que μ é uma medida tal que $\mu(F) = 1 \Rightarrow \mu(\sigma^{-1}(F)) = 1$ para todo $F \subseteq \Sigma_1$. A Proposição 3.3 abaixo nos diz que em μ -q.t.p. se $\Pi(\underline{x}) = \Pi(\underline{y})$ então temos que a sequência de tempos Gibbs de \underline{x} e \underline{y} é a mesma.

Proposição 3.3. *Existe um conjunto $\hat{C} \subset C$, $\mu(\hat{C}) = 1$, tal que dado $\underline{x}, \underline{y} \in \hat{C}$, com $\Pi(\underline{x}) = \Pi(\underline{y})$, então $n_k(\underline{x}) = n_k(\underline{y})$, para cada $k \geq 1$.*

Demonstração. Sendo $n_k(\underline{x}) = n_1(\sigma_1^{n_k-1}(\underline{x}))$ e Π regular com respeito à μ então podemos definir $D = \Pi(\cap_{k \geq 0} \sigma_1^{-k}(C)) \subseteq \Sigma_2$ satisfazendo

$$\nu(D) = \nu(\Pi(\cap_{k \geq 0} \sigma_1^{-k}(C))) = \mu(\cap_{k \geq 0} \sigma_1^{-k}(C)) = 1$$

isto é, $D \subset \Sigma_2$ é um conjunto de medida total em relação à medida $\nu = \mu \circ \Pi^{-1}$ tal que $\hat{C} := \Pi^{-1}(D) \subset C$ e dado $\underline{x}, \underline{y} \in \hat{C}$, com $\Pi(\underline{x}) = \Pi(\underline{y})$ então $n_k(\underline{x}) = n_k(\underline{y})$, para cada $k \geq 1$. \square

Observação 3.1. *Se Π é regular, não há perda de generalidade em assumir que $\hat{C} = G$. Então $\Pi(G) = D$.*

3.2 Demonstração do Teorema A

Nesta seção iremos enunciar e demonstrar o Teorema A.

Teorema A. *Seja μ uma medida Gibbs sequencial para o potencial $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$. Se ψ_1 é contínuo em μ -q.t.p. e Π é uma aplicação fator 1-bloco regular com respeito à μ , então a medida $\nu := \mu \circ \Pi^{-1}$ em Σ_2 também é uma medida Gibbs sequencial para um potencial contínuo em ν -q.t.p. $\psi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$.*

Abaixo, discutiremos uma forma natural para produzir medidas Gibbs sequenciais. A função de *primeiro tempo Gibbs* $n_1 : G \rightarrow \mathbb{R}$ possui alguma informação à cerca do crescimento da função n_k . De fato, a proposição abaixo retrata isso.

Proposição 3.4. *Se μ é uma medida Gibbs sequencial ergódica tal que $\int n_1 d\mu < \infty$, então para μ -q.t.p. $\underline{x} \in \Sigma_1$, existe $b(\underline{x})$ tal que para cada $k \geq 0$ temos que $n_k(\underline{x}) \leq bk$.*

Demonstração. Seja G o conjunto dos pontos que possuem infinitos tempos Gibbs. Podemos definir $g : G \rightarrow G$ por

$$g : G \rightarrow G, \quad g(\underline{x}) = \sigma^{n_1(\underline{x})}(\underline{x}),$$

Sendo $\int n_1 d\mu < \infty$, usando o Teorema 1.1 de (ZWEIMÜLLER, 2005) temos que existe uma medida g -invariante ergódica μ_g absolutamente contínua com respeito à μ . Além disso, se G_k é o subconjunto de pontos $x \in G$ tal que $n_1(x) = k$ então podemos caracterizar esta medida definindo

$$\mu(B) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k>n} \mu_g(\sigma^{-n}(B) \cap G_k), \quad (3.2)$$

para cada conjunto mensurável $B \subset \Sigma_1$. Então, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff aplicado ao sistema (g, μ_g) , temos que para μ_g -q.t.p. \underline{x}

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} n_1(g^j(\underline{x})) = \int n_1 d\mu_g.$$

Observe que $n_k(\underline{x}) = \sum_{j=0}^{k-1} n_1(g^j(\underline{x}))$. Conseqüentemente, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(\underline{x})}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} n_1(g^j(\underline{x})) = \int n_1 d\mu_g, \quad (3.3)$$

e isto finaliza a prova. □

3.2.1 Definição do Potencial ψ_2

Nesta seção, construiremos o potencial ψ_2 do Teorema A, obtido como o limite de uma sequência de funções. As explicações abaixo nos darão uma motivação de como será essa construção.

Sendo μ uma medida Gibbs sequencial para o potencial ψ_1 , então existe uma constante $K > 0$ tal que

$$K^{-1} \leq \frac{\mu[x_j \dots x_{n_i-1}]}{e^{\psi_1^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y}))}} \leq K$$

para $0 \leq j \leq n_i - 1$.

Fixado $j = 0$, então

$$K^{-1} \leq \frac{\mu[x_0 \dots x_{n_i-1}]}{e^{\psi_1^{n_i}(\underline{y})}} \leq K$$

Seja $\underline{z} \in \Pi(G) = D \subset \Sigma_2$, onde Π é a aplicação fator 1-bloco regular da Definição 3.2. Tomando a soma sobre todos $x_0 \dots x_{n_i-1}$ que são projetados em \underline{z} , temos

$$\begin{aligned} K^{-1} \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x})} &\leq \sum_{x_0 \dots x_{n_i-1}} \mu[x_0 \dots x_{n_i-1}] = \nu[z_0 \dots z_{n_i-1}] \\ &\leq K \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x})} \end{aligned}$$

Se pudermos encontrar uma constante positiva C e uma função ψ_2 tal que em ν -q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$ tenhamos

$$C^{-1} \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x})} \leq e^{\psi_2^{n_i}(\underline{z})} \leq C \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x})} \quad (3.4)$$

Então, combinado as duas desigualdades anteriores, teríamos

$$\frac{K^{-1}}{C} \leq \frac{\nu[z_0 \dots z_{n_i-1}]}{e^{\psi_2^{n_i}(\underline{z})}} \leq \frac{K}{C^{-1}}$$

Isto faria de ψ_2 um potencial para ν .

Pode-se aplicar as mesmas ideias para $x_1 \dots x_{n_i-1}$ pois $n_i - 1$ é tempo Gibbs de $\sigma_1(\underline{x})$, então teríamos

$$C^{-1} \sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i-1}(\sigma_1(\underline{x}))} \leq e^{\psi_2^{n_i-1}(\sigma_2(\underline{z}))} \leq C \sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i-1}(\sigma_1(\underline{x}))}$$

Então, dividindo por $e^{\psi_2^{n_i-1}(\sigma_2(\underline{z}))}$ na Equação 3.4 temos

$$\frac{C^{-1} \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x})}}{C \sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i-1}(\underline{x}')}} \leq e^{\psi_2(\underline{z})} \leq \frac{C \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x})}}{C^{-1} \sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_i-1}} e^{\psi_1^{n_i-1}(\underline{x}')}}$$

Nosso objetivo é usar essas equações, fazendo $i \rightarrow \infty$, para definir um potencial ψ_2 em ν -q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$. Para isso definimos a sequência de funções abaixo e investigaremos sua convergência.

Definição 3.3. Dado $k \in \mathbb{N}$ e $\underline{w} \in \Sigma_1$, definimos $u_{\underline{w},k} : D \subseteq \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$u_{\underline{w},k}(\underline{z}) = \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k+1}(\underline{x}\underline{w})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\underline{w})}},$$

onde $\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}}$ representa a soma sobre todas palavras finitas $\underline{x} = x_0 x_1 \dots x_{n_k}$ tal que $\pi(x_i) = z_i$, para $i = 0, \dots, n_k$ e $\underline{x}\underline{w} = x_0 \dots x_{n_k} w_0 w_1 \dots$

Mostraremos que a sequência $u_{\underline{w},k}(\cdot)$ converge em ν -q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$ e o limite não depende da escolha de \underline{w} .

Proposição 3.5. O limite $u(\underline{z}) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_{\underline{w},k}(\underline{z})$ está bem definido e não depende de \underline{w} .

A Proposição 3.5 é o ponto central da prova do Teorema A. Iremos deixar a demonstração para a Subseção 3.2.2. Por enquanto assumiremos a veracidade da Proposição, e iremos provar que $\nu = \mu \circ \Pi^{-1}$ é uma medida Gibbs sequencial para $\psi_2 = \log u$. Mas primeiramente, provaremos o seguinte lema.

Lema 3.1. Existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de ψ_1 , tal que para cada $\underline{w}, \underline{w}'$, para a sequência de tempos Gibbs $(n_i(\underline{x}))_{i \geq 1}$ e $0 \leq l \leq n_i$, temos

$$\frac{e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{x}\underline{w}))}}{e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{x}\underline{w}'))}} \leq C$$

Demonstração. Note que na definição de medida Gibbs sequencial, temos para cada escolha \underline{w} , \underline{w}' e $\underline{x} = x_0 \dots x_{n_i}$ (com $0 \leq l \leq n_i$),

$$K_1 e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{xw}))} \leq \mu[x_l \dots x_{n_i}] \leq K_2 e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{xw}'))}$$

Assim,

$$\frac{e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{xw}))}}{e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{xw}'))}} \leq \frac{K_2}{K_1} = C$$

□

Corolário 3.1. *Com as mesmas hipóteses do Lema 3.1, temos que existe uma constante $C > 0$, dependendo somente de ψ_1 , tal que para cada n_i e $0 \leq l \leq n_i$, temos*

$$\frac{\sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{xw}')}} \leq C$$

Demonstração. A demonstração segue trivialmente do fato elementar de que se $\frac{a_i}{b_i} \leq C$, com $a_i, b_i \in \mathbb{R}^+$ e $i = 1, \dots, k$, então $\frac{\sum_{j=1}^k a_j}{\sum_{j=1}^k b_j} \leq C$. □

Podemos agora definir o potencial para ν .

Definição 3.4. *Definimos o potencial $\psi_2 : D \subseteq \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$ por $\psi_2(\underline{z}) := \log u(\underline{z})$.*

O obstáculo principal é mostrar que o potencial ψ_2 está bem definido. Seguiremos as mesmas linhas de (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) para provarmos o Teorema A. Suponha, por um momento, que a Proposição 3.5 seja verdadeira. Temos o seguinte lema:

Lema 3.2. *A medida $\nu = \mu \circ \Pi^{-1}$ é uma medida Gibbs sequencial para o potencial $\psi_2(\underline{z}) = \log u(\underline{z})$.*

Demonstração. Fixemos $n \geq 1$. Podemos escrever

$$\psi_2^{n+1}(\underline{z}) = \sum_{i=0}^n \log u(\sigma^i(\underline{z})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \log u_{\underline{w},k}(\underline{z}) + \dots + \lim_{k \rightarrow \infty} \log u_{\underline{w},k}(\sigma^n(\underline{z}))$$

Sendo $n_k(\underline{z}) - l$ um tempo Gibbs de $\sigma^l(\underline{z})$, para $1 \leq l \leq n_k$, podemos escolher uma seqüência $(i_k^l)_{k \geq 1}$, tal que $n_{i_k^l}(\sigma^l(\underline{z})) = n_k(\underline{z}) - l$. Consequentemente, dado n

$$\begin{aligned}
 \psi_2^{n+1}(\underline{z}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(u_{\underline{w}, i_k^0}(\underline{z}) \cdot \dots \cdot u_{\underline{w}, i_k^n}(\sigma^n(\underline{z})) (\sigma^n(\underline{z})) \right) = \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'w)}} \cdot \frac{\sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_2 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'w)}} \cdot \dots \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{\sum_{\underline{x}=x_n \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-n+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_{n+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-n}(\underline{x}'w)}} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}=x_{n+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-n}(\underline{xw})}} \right)
 \end{aligned}$$

Note que da mesma forma, para $1 \leq l \leq n$, temos

$$\psi_2^{n-l+1}(\sigma^l(\underline{z})) = \lim_{k \rightarrow \infty} \log \left(\frac{\sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-l+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}=x_{n+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-n}(\underline{xw})}} \right) \quad (3.5)$$

Além disso, para $n_k > n_i$ e $0 \leq l \leq n_i$ podemos escrever

$$\sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-l+1}(\underline{xw})} = \sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_i}} \sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x\bar{x}w})} e^{\psi_1^{n_k-n_i}(\bar{xw})}$$

Pelo Corolário 3.1, para $0 \leq l \leq n_i$ temos

$$\sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-l+1}(\underline{xw})} \leq C \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)} \sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-n_i}(\bar{xw})},$$

e também segue do Corolário 3.1 que

$$C^{-1} \cdot \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)} \leq \frac{\sum_{\underline{x}=x_l \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-l+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k-n_i}(\bar{xw})}} \leq C \cdot \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)}$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ e usando a Equação 3.5, temos

$$C^{-1} \cdot \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)} \leq e^{\psi_2^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{z}))} \leq C \cdot \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)}$$

E então

$$e^{\psi_2^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{z}))} \approx \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)}$$

Sendo μ uma medida Gibbs sequencial para ψ_1 , existe uma constante $K > 0$, tal que para cada $\underline{x} \in \Pi^{-1}(\underline{z}) \cap G$ e uma seqüência $(n_i(\underline{x}))_{i \geq 1}$,

$$K^{-1} e^{\psi_1^{n_i+1-l}(\sigma^l(\underline{x}))} \leq \mu_1([x_l \dots x_{n_i}]) \leq K e^{\psi_1^{n_i+1-l}(\sigma^l(\underline{x}))}.$$

para $0 \leq l \leq n_i$. Adicionando sobre todas as palavras $\underline{x} \in G$ que são projetadas em \underline{z} , temos

$$\begin{aligned} K_1 \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)} &\leq \sum_{x_l \dots x_{n_i}} \mu([x_l \dots x_{n_i}]) \\ &\leq K_2 \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)} \end{aligned}$$

então,

$$\sum_{x_l \dots x_{n_i}} \mu([x_l \dots x_{n_i}]) \approx \sum_{\underline{x}'=x_l \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i-l+1}(\underline{x}'w)}$$

Portanto,

$$v([z_l \dots z_{n_i}]) = \sum_{x_l \dots x_{n_i}} \mu([x_l \dots x_{n_i}]) \approx e^{\psi_2^{n_i-l+1}(\sigma^l(\underline{z}))}$$

para cada $0 \leq l \leq n_i$, provando que v é uma medida Gibbs sequencial de $\sigma_2 : D \subseteq \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ para o potencial $\psi_2 : D \subseteq \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$. \square

3.2.2 O potencial ψ_2 está bem definido

Nesta seção, provaremos que ψ_2 está bem definido. Daremos algumas definições que nos ajudarão nesse propósito.

Definição 3.5. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $\underline{z} \in D$. Definimos o intervalo fechado*

$$\Lambda_k(\underline{z}) := \left[\min_{\underline{w}} u_{\underline{w},k}(\underline{z}), \max_{\underline{w}'} u_{\underline{w}',k}(\underline{z}) \right].$$

Dado $k \in \mathbb{N}$ e $\underline{z} \in D$. Definimos

$$\lambda_k(\underline{z}) := \sup \left\{ \frac{u_{\underline{w},k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}',k}(\underline{z})} : \underline{w}, \underline{w}' \in \Sigma_1 \right\}.$$

Dizemos que a sequência de intervalos I_n é monotonicamente encaixada se temos

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq \dots$$

No próximo lema, mostraremos que a sequência $(\Lambda_k(\underline{z}))_{k \geq 1}$ é monotonicamente encaixada. Então, a existência de ψ_2 em v-q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$ corresponde à convergência para zero do comprimento de $(\Lambda_k(\underline{z}))$. Isso é feito mostrando a convergência para 1 (em v-q.t.p.) da sequência $\lambda_k(\underline{z})$.

Lema 3.3. A sequência de intervalos $(\Lambda_k(\underline{z}))_{k \geq 1}$ é monotonicamente encaixada.

Demonstração. Dado $\underline{z} \in D$, observe que

$$\begin{aligned}
 u_{\underline{w},k+1}(\underline{z}) &= \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_{k+1}+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_{k+1}}(\underline{x}'w)}} \\
 &= \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} \sum_{\bar{x}=x_{n_k}+1 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_{k+1}}(\underline{x}\bar{xw})} e^{\psi_1^{n_{k+1}-n_k}(\bar{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} \sum_{\bar{x}=x_{n_k}+1 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{xw})} e^{\psi_1^{n_{k+1}-n_k}(\bar{xw})}} \\
 &\leq \max_{\bar{x}} \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_{k+1}}(\underline{x}\bar{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\bar{xw})}} \\
 &\leq \max_{\bar{x}} u_{\bar{x}\underline{w},k}(\underline{z}) \\
 &\leq \max_{\underline{w}'} u_{\underline{w}',k}(\underline{z})
 \end{aligned}$$

Por outro lado, para um dado \bar{x}

$$\begin{aligned}
 \min_{\underline{w}'} u_{\underline{w}',k}(\underline{z}) &\leq \min_{\bar{x}\underline{w}} u_{\bar{x}\underline{w},k}(\underline{z}) \\
 &= \min_{\bar{x}\underline{w}} \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_{k+1}}(\underline{x}\bar{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\bar{xw})}} \\
 &\leq \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} \sum_{\bar{x}=x_{n_k}+1 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_{k+1}}(\underline{x}\bar{xw})} e^{\psi_1^{n_{k+1}-n_k}(\bar{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} \sum_{\bar{x}=x_{n_k}+1 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{xw})} e^{\psi_1^{n_{k+1}-n_k}(\bar{xw})}} \\
 &= \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_{k+1}+1}(\underline{xw})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_{k+1}}} e^{\psi_1^{n_{k+1}}(\underline{x}'w)}} \\
 &= u_{\underline{w},k+1}(\underline{z})
 \end{aligned}$$

□

Lema 3.4. Para v - q - t - p . $\underline{z} \in \Sigma_2$ temos que $\lambda_0(\underline{z}) \geq \lambda_1(\underline{z}) \geq \dots \geq \lambda_n(\underline{z}) \geq \lambda_{n+1}(\underline{z}) \geq \dots \geq 1$.

Demonstração. Das desigualdades do Lema 3.3, para $\underline{w}, \underline{w}' \in \Sigma_1$, temos

$$\frac{u_{\underline{w},k+1}(\underline{z})}{u_{\underline{w}',k+1}(\underline{z})} \leq \sup_{\underline{v}, \underline{v}' \in \Sigma_1} \left\{ \frac{u_{\underline{v},k}(\underline{z})}{u_{\underline{v}',k}(\underline{z})} \right\} = \lambda_k(\underline{z})$$

Tomando o supremo sobre $\underline{w}, \underline{w}' \in \Sigma_1$, temos $\lambda_{k+1}(\underline{z}) \leq \lambda_k(\underline{z})$.

□

Agora, mostraremos que $\lambda_k(\underline{z}) \rightarrow 1$ para v-q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$. Essa parte é bastante técnica. Para facilitar as notações, iremos definir um vetor de probabilidade de coordenadas (para cada escolha \bar{x}) $P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w})$. Seja $n_i < n_k$ um tempo Gibbs de \underline{z} e palavras $x_0 \dots x_{n_i}$ que se projetam em \underline{z} . Dado $\bar{x} = x_{n_i+1} \dots x_{n_k}$, definimos

$$P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}) = \frac{\sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\underline{w})}}$$

O vetor de probabilidade ($P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w})$) nos permite expressar a função $u_{\underline{w},k}$ em termos da função $u_{\bar{x},i}$, para $i < k$. De fato, temos que

Lema 3.5. *Seja $n_i < n_k$ tempos Gibbs de $\underline{z} \in D$. Então, temos que*

$$u_{\underline{w},k}(\underline{z}) = \sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} u_{\bar{x},i}(\underline{z}) P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}).$$

onde a soma é sob todas as palavras x_0, \dots, x_{n_k} que se projetam em z_0, \dots, z_{n_k} .

Demonstração. Pela definição, o numerador de $u_{\underline{w},k}(\underline{z})$ é

$$\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k+1}(\underline{x}\underline{w})} = \sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i}} \sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_i+1}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})} e^{\psi_1^{n_k-n_i}(\bar{x}\underline{w})} \quad (3.6)$$

Além disso, podemos reescrever o lado direito da Equação (3.6) como

$$= \sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} \underbrace{\left(\frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i+1}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x}'\bar{x}\underline{w})}} \right)}_{u_{\bar{x},i}(\underline{z})} \underbrace{\left(\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i}(\underline{x}'\bar{x}\underline{w})} \right)}_{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\bar{x}\underline{w})}} e^{\psi_1^{n_k-n_i}(\bar{x}\underline{w})} \quad (3.7)$$

Então, dividindo ambos os membros da Equação (3.7) por $\sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\underline{w})}$, temos

$$u_{\underline{w},k}(\underline{z}) = \sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} u_{\bar{x},i}(\underline{z}) \cdot P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w})$$

□

Corolário 3.2.

$$\frac{u_{\underline{w},k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}',k}(\underline{z})} = \frac{\sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} u_{\bar{x},i}(\underline{z}) P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w})}{\sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} u_{\bar{x},i}(\underline{z}) P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}')}$$

Demonstração. Segue diretamente do Lema 3.5. □

Lema 3.6. *Existe $c > 0$ tal que para cada $n_i < n_k$ tempo Gibbs de \underline{z} , $\bar{x} = x_{n_i+1} \dots x_{n_k}$ que se projetam em $\bar{z} = z_{n_i+1} \dots z_{n_k}$ e $\underline{w}, \underline{w}'$ temos*

$$\frac{P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w})}{P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}')} \geq c$$

Demonstração. Sendo que $\underline{x}\bar{x}\underline{w}$ e $\underline{x}\bar{x}\underline{w}'$ coincide em n_k locais e pela propriedade Gibbs em (3.1) temos

$$\frac{e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})}}{e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{x}\underline{w}')}} \leq K_2 \cdot K_1^{-1}$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w})}{P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}')} &= \frac{\sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})}}{\sum_{\underline{x}=x_1 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}\bar{x}\underline{w}')}} \cdot \frac{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\underline{w})}}{\sum_{\underline{x}'=x_1 \dots x_{n_k}} e^{\psi_1^{n_k}(\underline{x}'\underline{w}')}} \\ &\leq (K_2 \cdot K_1^{-1})^2 \end{aligned}$$

Para finalizar a prova do Lema 3.6, basta tomar

$$c = \frac{1}{(K_2 \cdot K_1^{-1})^2}.$$

□

Lema 3.7. *Com as mesmas notações do Lema 3.6 temos*

$$\frac{u_{\bar{x}\underline{w},i}(\underline{z})}{u_{\bar{x}\underline{w}',i}(\underline{z})} \leq e^{2 \sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))}$$

Demonstração. Considerando primeiramente o numerador, temos

$$\frac{\text{numerador}(u_{\bar{x}\underline{w},i}(\underline{z}))}{\text{numerador}(u_{\bar{x}\underline{w}',i}(\underline{z}))} = \frac{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i+1}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})}}{\sum_{\underline{x}=x_0 \dots x_{n_i}} e^{\psi_1^{n_i+1}(\underline{x}\bar{x}\underline{w}')}}$$

e comparando termo a termo, vemos que $\sigma^j(\underline{x}\bar{x}\underline{w})$ e $\sigma^j(\underline{x}\bar{x}\underline{w}')$ coincide em $n_k - n_i + (n_i - j)$ locais, e então para cada escolha de \bar{x} ,

$$\frac{e^{\psi_1^{n_i+1}(\underline{x}\bar{x}\underline{w})}}{e^{\psi_1^{n_i+1}(\underline{x}\bar{x}\underline{w}')}} \leq e^{\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \sigma_1^{n_k-n}(\underline{x}))} \leq e^{\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))}$$

Somando sobre todas escolhas de \bar{x} e fazendo um calculo idêntico para o denominador o lema estará demonstrado. \square

Corolário 3.3.

$$\frac{u_{\bar{x}\underline{w}^{max},i}(\underline{z})}{u_{\bar{x}\underline{w}^{min},i}(\underline{z})} \leq e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))}$$

onde \underline{w}^{max} e \underline{w}^{min} são concatenações $\bar{x}\underline{w}$ que maximizam e minimizam, respectivamente, $u_{\bar{x}\underline{w},i}(\underline{z})$.

Lema 3.8 (Lema chave). *Seja $(n_i)_{i \geq 1}$ a sequência de tempos Gibbs de \underline{z} . Para $k \geq i$, temos*

$$\lambda_k(\underline{z}) \leq c \cdot e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} + (1-c)\lambda_i(\underline{z}) \quad (3.8)$$

Demonstração. Suponha que para $k \geq i$

$$\lambda_i(\underline{z}) = \max_{\bar{x}} \left(\frac{u_{\bar{x}\underline{w}^{max},i}(\underline{z})}{u_{\bar{x}\underline{w}^{min},i}(\underline{z})} \right) \leq e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))}.$$

Então, pelo Lema 3.4, $(\lambda_k(\underline{z}))_k$ é decrescente e temos que

$$\begin{aligned} \lambda_k(\underline{z}) &\leq \lambda_i(\underline{z}) = c\lambda_i(\underline{z}) + (1-c)\lambda_i(\underline{z}) \\ &\leq c \cdot e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} + (1-c)\lambda_i(\underline{z}). \end{aligned}$$

Agora se assumimos que

$$\lambda_i(\underline{z}) = \max_{\bar{x}} \left(\frac{u_{\bar{x}\underline{w}^{max},i}(\underline{z})}{u_{\bar{x}\underline{w}^{min},i}(\underline{z})} \right) > e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))}.$$

Pelo Corolário 3.2, temos

$$\frac{u_{\underline{w}^{max},k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}^{min},k}(\underline{z})} = \frac{\sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} u_{\bar{x}\underline{w}^{max},i}(\underline{z}) P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}^{max})}{\sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}} u_{\bar{x}\underline{w}^{min},i}(\underline{z}) P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}^{min})}$$

Para simplificar a notação, iremos fixar \underline{z} e enumerar o conjunto \mathcal{I} de todas as possíveis escolhas $\bar{x} \in \Pi^{-1}(\underline{z})$. Então, a soma $\sum_{\bar{x}=x_{n_i+1} \dots x_{n_k}}$ pode ser denotada pela soma $\sum_{l \in \mathcal{I}}$.

Seja P_1 o vetor de probabilidade $P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}^{max})$ e P_2 o vetor $P^{k,i}(\bar{x}, \underline{w}^{min})$. Também denote por V_1 o vetor $(u_{\bar{x}\underline{w}^{max},i}(\underline{z}))$ e V_2 o vetor $(u_{\bar{x}\underline{w}^{min},i}(\underline{z}))$, onde \bar{x} é escolhido sobre \mathcal{I} . Se a_l e b_l representa o l -ésimo termo de V_1 e V_2 , respectivamente, e I é o vetor de $|\mathcal{I}|$ coordenadas e com 1 em todas as suas coordenadas. Então, podemos resumir a igualdade acima como

$$\frac{u_{\underline{w}}^{max,k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}}^{min,k}(\underline{z})} = \frac{P_1 \cdot V_1}{P_2 \cdot V_2} = \frac{cP_1 \cdot V_1 + (1-c)P_1 \cdot V_1}{cP_1 \cdot V_2 + (P_2 - cP_1) \cdot V_2} \quad (3.9)$$

onde o sinal \cdot é representa o produto interno em $\mathbb{R}^{|\mathcal{I}|}$.

Pelo Lema 3.7, $a_l \leq b_l e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))}$ para cada l . Assim,

$$P_1 \cdot V_1 \leq e^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot V_2.$$

Portanto, na Equação (3.9) temos

$$\begin{aligned} \frac{u_{\underline{w}}^{max,k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}}^{min,k}(\underline{z})} &\leq \frac{ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot V_2 + (1-c)P_1 \cdot V_1}{cP_1 \cdot V_2 + (P_2 - cP_1) \cdot V_2} \\ &\leq \frac{ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot V_2 + (1-c)P_1 \cdot I \max_l a_l}{cP_1 \cdot V_2 + (P_2 - cP_1) \cdot I \min_l b_l} \end{aligned}$$

Provaremos o seguinte lema:

Lema 3.9. *Pondo $\alpha_1 = ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot V_2$, $\beta_1 = cP_1 \cdot V_2$, $\alpha_2 = (1-c)P_1 \cdot I \max_l a_l$ e $\beta_2 = (P_2 - cP_1) \cdot I \min_l b_l$. Então $\frac{\alpha_1}{\beta_1} < \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \alpha_2 \beta_1 &= cP_1 \cdot V_2 (1-c)P_1 \cdot I \max_l a_l \\ &\geq ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot V_2 (1-c)P_1 \cdot I \min_l b_l \\ &\geq ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot V_2 (P_2 - cP_1) \cdot I \min_l b_l = \alpha_1 \beta_2 \end{aligned}$$

□

É um fato elementar que $\frac{x_1}{y_1} < \frac{x_2}{y_2}$ implica $\frac{cx_1 + x_2}{cy_1 + y_2} > \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$, para todo $c \in (0, 1)$ e números reais positivos x_1, x_2, y_1 e y_2 . Usando o Lema 3.9, temos que

$$\begin{aligned} \frac{u_{\underline{w}}^{max,k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}}^{min,k}(\underline{z})} &\leq \frac{ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} var_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} P_1 \cdot I \min_l b_l}{cP_1 \cdot I \min_l b_l + (P_2 - cP_1) \cdot I \min_l b_l} + \\ &+ \frac{(1-c)P_1 \cdot I \max_l a_l}{cP_1 \cdot I \min_l b_l + (P_2 - cP_1) \cdot I \min_l b_l} \end{aligned}$$

Como P_1 e P_2 são vetores de probabilidade, então $1 = P_1 \cdot I = P_2 \cdot I$. Dividindo por $\min_l b_l$, temos

$$\begin{aligned} \frac{u_{\underline{w}^{max},k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}^{min},k}(\underline{z})} &\leq \frac{ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} + (1-c) \frac{\max_i(a_i)}{\min_i(b_i)}}{c + (1-c)} \\ &= ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} + (1-c) \frac{\max_i(a_i)}{\min_i(b_i)} \end{aligned}$$

resultando que $\lambda_k(\underline{z}) \leq ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} + (1-c)\lambda_i(\underline{z})$, como desejávamos. □

Corolário 3.4. *Em v-q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$, a sequência $(\lambda_k(\underline{z}))_k$ converge para 1.*

Demonstração. Para $k > i$, temos $n_k - n_i = (n_k - n_{k-1}) + (n_{k-1} - n_{k-2}) + \dots + (n_{i+1} - n_i) \geq k - i$. Em particular, $n_{2k} - n_k \geq k$. Pelo Lema 3.8, temos

$$\begin{aligned} \lambda_{2k}(\underline{z}) &\leq ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} + (1-c)\lambda_k(\underline{z}) \\ \lambda_{2k}(\underline{z}) - \lambda_k(\underline{z}) &\leq ce^{2\sum_{n=n_k-n_i}^{n_k} \text{var}_n(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_k-n}(\underline{z})))} - c\lambda_k(\underline{z}) \end{aligned}$$

Sendo que ψ_1 é contínua, segue que

$$e^{\sum_{n=0}^{n_k} \text{var}_{n_{2k}-n}(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^n(\underline{z})))} \leq e^{\sum_{n=n_{2k}-n_k}^{n_{2k}} \text{var}_n(\psi_1)} \rightarrow 1, \text{ quando } k \rightarrow \infty.$$

Como a sequência $(\lambda_k(\underline{z}))_k$ é decrescente,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(\underline{z}) \leq 1.$$

Pelo Lema 3.4, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(\underline{z}) \geq 1$ e, portanto, $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k(\underline{z}) = 1$. □

Para finalizar a prova do resultado principal desta seção, provaremos o seguinte lema:

Lema 3.10. *Para v-a.e. $\underline{z} \in \Sigma_2$ o limite $u(\underline{z}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{\underline{w},k}(\underline{z})$ existe e $\psi_2(\underline{z}) := \log(u(\underline{z}))$ é contínua.*

Demonstração. Para a existência do limite é suficiente usar o fato que $\lambda_k(\underline{z}) \rightarrow 1$ em v-q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$.

Agora, provaremos a continuidade. Seja $(n_i)_{i \geq 1}$ a sequência de tempos Gibbs de \underline{z} e n tal que $n \geq n_k$ (note que $k \leq n$). Seja $\underline{z}' \in [z_0 \dots z_n]$. Pela definição de medida Gibbs sequencial, temos que $\Lambda_k(\underline{z}) = \Lambda_k(\underline{z}')$. E o fato da sequência $(\Lambda_n(\underline{z}))_n$ ser monotonicamente encaixada, ambos $u(\underline{z})$ e $u(\underline{z}')$ estão no intervalo $\Lambda_k(\underline{z})$. Portanto,

$$\frac{u(\underline{z})}{u(\underline{z}')} \leq \sup_{\underline{w}, \underline{w}' \in \Sigma_1} \left\{ \frac{u_{\underline{w},k}(\underline{z})}{u_{\underline{w}',k}(\underline{z}')} \right\} = \sup_{\underline{w}, \underline{w}' \in \Sigma_1} \left\{ \frac{u_{\underline{w},k}(\underline{z})}{u_{\underline{w},k}(\underline{z})} \right\} = \lambda_k(\underline{z})$$

Então

$$|\log(u(\underline{z})) - \log(u(\underline{z}'))| \leq \log \lambda_k(\underline{z})$$

isso implica que $\psi_2 = \log u$ é contínuo em $\underline{z} \in \Sigma_2$. Portanto, como $\lambda_k(\underline{z}) \rightarrow 1$ é v-q.t.p. então ψ_2 é contínuo em v- q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$. \square

3.3 Demonstração do Teorema B

Nesta seção iremos enunciar e demonstrar o Teorema B.

Seja μ uma medida Gibbs sequencial para um potencial ψ_1 contínuo em μ -q.t.p., Π uma aplicação fator 1-bloco regular e $\nu = \mu \circ \Pi^{-1}$ a medida Gibbs sequencial do potencial ψ_2 construído no Teorema A e $n_k(\underline{z})$ a sequência de tempos Gibbs de $\underline{z} \in \Sigma_2$. Estudamos o módulo da continuidade de ψ_2 em um ponto \underline{z} com respeito ao módulo da continuidade de ψ_1 em $\Pi^{-1}(\underline{z})$ para uma classe de medidas Gibbs sequenciais.

Teorema B. *Seja μ uma medida Gibbs sequencial para um potencial $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ contínuo em μ -q.t.p. Suponha que para v-q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$ temos que $\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(\underline{z})}{k} < +\infty$ e que existe uma função positiva decrescente $f_{\underline{z}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\limsup_{k \rightarrow \infty} f_{\underline{z}}(k)k < +\infty$ e que para cada $1 \leq j \leq n_k$ temos*

$$\text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma^{n_k-j}(\underline{w}))) < f_{\underline{z}}(j).$$

Então, dado $\gamma < 1$, existem constantes $\alpha \in (0, 1)$ e $C > 0$ tal que

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, f_{\underline{z}}([k^\gamma])k\},$$

.

Nas próximas subseções demonstraremos alguns corolários dos Teoremas A e B.

3.3.1 Decaimento Exponencial Esticado Local

Corolário A. *(Decaimento exponencial esticado local): Suponha que existam constantes $\Gamma_1, 0 < \beta_1 < 1$ e $\theta_1 \in (0, 1)$ tal que para cada $\underline{w} \in D = \Pi(G)$, se $n_k(\underline{w})$ é a sequência de tempos Gibbs de \underline{w} e para $1 \leq j \leq n_k$ tivermos para k suficientemente grande*

$$\text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma^{n_k-j}(\underline{w}))) < \Gamma_1 \theta_1^{j^{\beta_1}}.$$

Então, podemos escolher ψ_2 de tal forma que ν é uma medida Gibbs sequencial para ψ_2 e que existam constantes $\theta_2 \in (0, 1)$, $\Gamma_2 > 0$ e $0 < \beta_2 < 1$ tais que para v-q.t.p. $\underline{w} \in \Sigma_2$ temos

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < \Gamma_2 \theta_2^{k\beta_2}.$$

Demonstração. No Teorema B, pomos $f_{\underline{w}}(j) = \Gamma_1 \cdot \theta_1^{j\beta_1}$. Então, para $\gamma < 1$, temos

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, \Gamma_1 \theta_1^{[k^\gamma]^{\beta_1}} k\}$$

Seja k_0 tal que $\theta := \theta_1 k_0^{\frac{1}{[k_0^\gamma]^{\beta_1}}} < 1$ e $\beta < 1$ tal que $[k^\gamma]^{\beta_1} \geq k^\beta$. Então, para $k \geq k_0$, temos

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, \Gamma_1 \theta^\beta\} < \Gamma_2 \theta_2^{k\beta_2}$$

onde $\theta_2 = \max\{\alpha, \theta\}$ e $\beta_2 = \max\{1 - \gamma, \beta\}$. □

3.3.2 Decaimento Polinomial Local

Corolário B. (*Decaimento Polinomial Local*): Suponha que existam constantes $\Gamma_1 > 0$ e $r > 2$ tal que para cada $\underline{w} \in D$, cada tempo Gibbs $n_k(\underline{w})$ de \underline{w} e para cada $1 \leq j \leq n_k$ temos

$$\text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma^{n_k-j}(\underline{w}))) < \Gamma_1 j^{-r}.$$

Então, podemos escolher ψ_2 de tal forma que ν é uma medida Gibbs sequencial para ψ_2 e que existe uma constante $\Gamma_2 > 0$ tal que para cada $s < r - 1$ e para ν -q.t.p. $\underline{w} \in \Sigma_2$ temos

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < \Gamma_2 k^{-s}.$$

Demonstração. No Teorema B, pomos $f_{\underline{w}}(k) = \Gamma_1 k^{-r}$. Então,

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, \Gamma_1 [k^\gamma]^{-r} k\} \leq C \Gamma_1 [k^\gamma]^{-r} k$$

Podemos escolher $\lambda < 1$ tal que $[k^\gamma] > k^\lambda$ para cada k . De fato,

$$k^{\gamma\lambda} - 1 \leq \frac{k^\gamma - 1}{k^\lambda} \leq \frac{[k^\gamma]}{k^\lambda}$$

Então

$$\text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < C \Gamma_1 k^{1-\lambda r} < C \Gamma_1 k^{-s}$$

Para finalizar a prova, basta por $\Gamma_2 = C \Gamma_1$. □

3.3.3 Variação Somável Local

Corolário C. (*Variação Somável Local*) *Suponha que exista $d > 0$ tal que para cada $\underline{w} \in D$ e cada tempo Gibbs n_k de \underline{w} , temos*

$$\sum_{k \geq 1} k^{d+1} \text{var}_k(\psi_1, \Pi^{-1}(\underline{w})) < \infty$$

Então, podemos escolher ψ_2 de tal forma que ν é uma medida Gibbs sequencial para ψ_2 satisfazendo $\sum_{n \geq 1} k^d \text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < \infty$ para ν -q.t.p. $\underline{w} \in \Sigma_2$.

Demonstração. Seja $\gamma = 1 - \beta$, como na prova do Teorema B. Definimos $f_{\underline{w}}(k) = \text{var}_{\lfloor k^{\frac{1}{\gamma}} \rfloor + 1}(\psi_1, \Pi^{-1}(\underline{w}))$. Então, pelo Teorema B, temos

$$\begin{aligned} \text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) &< C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, k \text{var}_{\lfloor k^{\frac{1}{\gamma}} \rfloor + 1}(\psi_1, \Pi^{-1}(\underline{w}))\} \\ &\leq C \max\{\alpha^{k^{1-\gamma}}, k \text{var}_k(\psi_1, \Pi^{-1}(\underline{w}))\} \end{aligned}$$

Obviamente, $\sum_{k \geq 1} k^d \alpha^{k^{1-\gamma}} < \infty$. Então, juntamente com a hipótese, temos

$$\sum_{k \geq 1} k^d \text{var}_k(\psi_2, \underline{w}) < \infty.$$

□

3.3.4 Módulo da Continuidade de ψ_2 (Prova do Teorema B)

Aqui daremos a prova do Teorema B. A estratégia é dar uma estimativa para $\log \lambda_k$.

Demonstração do Teorema B:

Tomando $k_0(\underline{x})$ tal que $k \geq k_0(\underline{x})$ implica $n_k(\underline{x}) \leq bk$. Assim, temos que

$$\text{var}_{\lfloor bk \rfloor}(\psi_2, \underline{z}) \leq \text{var}_{n_k}(\psi_2, \underline{z}) \leq \log \lambda_k, \quad (3.10)$$

onde $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a x . Daí, segue diretamente que o módulo da continuidade de $\log \lambda_k$ dá uma estimativa para o módulo da continuidade de $\text{var}_k(\psi_2, \underline{z})$.

Para estimar $\log \lambda_k$, observamos que dado $k > k_0$ e $l \geq 2$, para cada $2 \leq i \leq l$ temos que $n_{ik} - n_{(i-1)k} \geq k$ e que $n_{ik} \leq bik \leq blk$. Logo, pelo teste da integral para séries, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_{ik}-n_{(i-1)k}}^{n_{ik}} \text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_{ik}-j}(\underline{z}))) &\leq \sum_{j=k}^{n_{ik}} \text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_{ik}-j}(\underline{z}))) \\ &\leq f_{\underline{z}}(k)n_{ik} \leq f_{\underline{z}}(k)blk. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pelo Lema 3.8, para v-q.t.p. $\underline{z} \in \Sigma_2$, para cada $k > k_0(\underline{z})$ e $i = 2, \dots, l$:

$$\lambda_{ik}(\underline{z}) \leq ce^{2\sum_{j=n_{ik}-n_{(i-1)k}}^{n_{ik}} \text{var}_j(\psi_1, \Pi^{-1}(\sigma_2^{n_{ik}-j}(\underline{z})))} + \alpha\lambda_{(i-1)k}(\underline{z}).$$

Assim, usando a Equação (3.11):

$$\lambda_{ik}(\underline{z}) \leq ce^{2f_{\underline{z}}(k)blk} + \alpha\lambda_{(i-1)k}(\underline{z}).$$

Multiplicando por α^{l-i} em ambos os lados, temos

$$\alpha^{l-i}\lambda_{ik}(\underline{z}) \leq c\alpha^{l-i}e^{2f_{\underline{z}}(k)blk} + \alpha^{l-i+1}\lambda_{(i-1)k}(\underline{z})$$

Adicionando todas as equações acima e cancelando respectivamente os termos, temos que:

$$\lambda_{lk}(\underline{z}) \leq c \sum_{i=2}^l \alpha^{l-i} e^{2f_{\underline{z}}(k)blk} + \alpha^{l-1}\lambda_k(\underline{z}) \leq e^{2f_{\underline{z}}(k)bkl} + \alpha^{l-1}\lambda_k(\underline{z}). \quad (3.12)$$

Tome $l = \omega_k$ acima, para $k \geq k_0$. Dividindo por $e^{2f_{\underline{z}}(k)bk\omega_k}$ e usando que $\lambda_k \rightarrow 1$, $\log(1+x) \approx x$ para x suficientemente pequeno, temos que para k suficientemente grande que

$$\log \lambda_{\omega_k k} \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{e^{2bf_{\underline{z}}(k)k}} \right)^{\omega_k} \lambda_k + 2bf_{\underline{z}}(k)\omega_k k \leq \frac{2}{\alpha} \alpha^{\omega_k} + 2bf_{\underline{z}}(k)\omega_k k. \quad (3.13)$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande e $0 < \gamma < 1$, definimos $\beta = 1 - \gamma$ e consideramos $k_n = [n^\gamma]$ e $\omega_n = [n^\beta]$. Assim, para cada n maior do que algum n_0 , temos que $w_n k_n \leq n$ e $\log \lambda_{\omega_n k_n} \geq \log \lambda_n$. Pela Equação (3.13) e (3.10) temos que para \underline{z} existe $n_0(\underline{z})$ tal que para cada $n > n_0(\underline{z})$:

$$\log \lambda_n \leq \log \lambda_{\omega_n k_n} \leq \frac{2}{\alpha} \alpha^{n^\beta - 1} + 2bf_{\underline{z}}([n^\gamma])n \leq \frac{2}{\alpha^2} \cdot \alpha^{n^{1-\gamma}} + 2bf_{\underline{z}}([n^\gamma])n, \quad (3.14)$$

como queríamos demonstrar.

4 EXEMPLOS DE MEDIDAS GIBBS SEQUENCIAIS

4.0.1 Medida Conforme e Medida Gibbs Sequencial

Podemos nos perguntar sobre a existência de medidas Gibbs sequenciais. Veremos que uma candidata natural para medida Gibbs sequencial é a automedida do operador de Ruelle-Perrón-Frobenius (operador RPF). De fato, denotando por $\mathcal{C}(\Sigma)$ o conjunto das funções reais contínuas em Σ . O operador de Ruelle-Perrón-Frobenius $\mathcal{L}_\psi : \mathcal{C}(\Sigma) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma)$ associado à $\psi \in \mathcal{C}(\Sigma)$ é definido por

$$\mathcal{L}_\psi \phi(\underline{z}) := \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-1}(\underline{z})} e^{\psi(\underline{y})} \phi(\underline{y}).$$

Observe que para $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\mathcal{L}_\psi^n \phi(\underline{z}) = \sum_{\underline{y} \in \sigma^{-n}(\underline{z})} e^{\psi^n(\underline{y})} \phi(\underline{y})$$

Este operador preserva o cone de funções positivas $C(\Sigma)^+$. Além disso, podemos restringir o operador dual \mathcal{L}_ψ^* ao cone $(C(\Sigma)^+)^*$. Se identificarmos o cone $(C(\Sigma)^+)^*$ com o espaço das medidas finitas e positivas $\mathcal{M}(\Sigma)$, pelo Teorema de Riesz o operador \mathcal{L}_ψ^* é definido por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\psi^* : \mathcal{M}(\Sigma) &\rightarrow \mathcal{M}(\Sigma) \\ \nu &\mapsto \mathcal{L}_\psi^*(\nu) : \mathcal{C}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R} \\ \phi &\mapsto \mathcal{L}_\psi^*(\nu)(\phi) = \int_\Sigma \mathcal{L}_\psi(\phi) d\nu \end{aligned}$$

Como o cone $C(\Sigma)^+$ é normal e $\lambda = r(\mathcal{L}_\psi) = r(\mathcal{L}_\psi^*) > 0$ (raio espectral de \mathcal{L}_ψ^*), a versão para operadores não-compactos do Teorema de Krein-Rutman ((EDMUNDS A. J. B. POTTER, 1972, Teorema 1)) garante que $r(\mathcal{L}_\psi^*)$ é um autovalor de \mathcal{L}_ψ^* com autovetor $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma)$. Consequentemente,

$$\mathcal{L}_\psi^* \nu = r(\mathcal{L}_\psi^*) \cdot \nu$$

Essas medidas são chamadas de *medidas conformes* para ψ .

Proposição 4.1. *Seja $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma)$ uma medida conforme para $\psi \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Então para $n \in \mathbb{N}$ e $\underline{y} \in \sigma^{-j}([x_j, \dots, x_{n-1}])$, com $0 \leq j < n$, temos que se $\log r(\mathcal{L}_\psi) = P$*

$$e^{-\text{var}_{n-j}(\psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{x}))} \leq \frac{\nu([x_j, \dots, x_{n-1}])}{e^{\psi^{n-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n-j)P}} \leq e^{\text{var}_{n-j}(\psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{x}))} \quad (4.1)$$

Demonstração. Para todo $[x_j, \dots, x_{n-1}]$ e $\underline{y} \in \sigma^{-j}([x_j, \dots, x_{n-1}])$, com $0 \leq j < n$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}([x_j, \dots, x_{n-1}]) &= \int 1_{[x_j, \dots, x_{n-1}]} d\mathbf{v} \\ &= \lambda^{-(n-j)} \int \mathcal{L}_\Psi^{n-j} 1_{[x_j, \dots, x_{n-1}]} d\mathbf{v} \\ &= \lambda^{-(n-j)} \int \sum_{\sigma^j(\underline{y}) \in \sigma^{-(n-j)}(\underline{x})} 1_{[x_j, \dots, x_{n-1}]}(\sigma^j(\underline{y})) e^{\Psi^{n-j}(\sigma^j(\underline{y}))} d\mathbf{v}(\underline{x}) \\ &\leq \lambda^{-(n-j)} e^{\text{var}_{n-j}(\Psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{y}))} e^{\Psi^{n-j}(\sigma^j(\underline{y}))} \end{aligned}$$

onde $\log r(\mathcal{L}_\Psi) = \lambda$. Similarmente,

$$\lambda^{-(n-j)} e^{-\text{var}_{n-j}(\Psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{y}))} e^{\Psi^{n-j}(\sigma^j(\underline{y}))} \leq \mathbf{v}([x_j, \dots, x_{n-1}])$$

Então,

$$e^{-\text{var}_{n-j}(\Psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{y}))} \leq \frac{\mathbf{v}([x_j, \dots, x_{n-1}])}{e^{\Psi^{n-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n-j)P}} \leq e^{\text{var}_{n-j}(\Psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{y}))}$$

onde podemos tomar $P = \log \lambda$. □

Para nos auxiliar à demonstração de como as medidas conformes e as medidas Gibbs sequenciais se relacionam, definiremos a seguinte sequência de funções:

$$\xi_n(\underline{x}) = \sup_{\underline{y} \in C_n(\underline{x})} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} |\Psi(\sigma^i(\underline{x})) - \Psi(\sigma^i(\underline{y}))| \right\} \quad (4.2)$$

A Proposição abaixo nos dá uma condição para que uma medida conforme \mathbf{v} seja uma medida Gibbs sequencial.

Proposição 4.2. *Dada uma medida conforme \mathbf{v} tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\underline{x}) \leq C$ em \mathbf{v} -q.t.p. $\underline{x} \in \Sigma$, para alguma constante $C > 0$, então \mathbf{v} é uma medida Gibbs sequencial.*

Demonstração. Observe que $\text{var}_n(\Psi^n, \underline{x}) \leq \xi_n(\underline{x})$ e $\xi_{n-j}(\sigma^j(\underline{x})) \leq \xi_n(\underline{x})$, para cada $0 \leq j \leq n$. Então,

$$\text{var}_{n-j}(\Psi^{n-j}, \sigma^j(\underline{x})) \leq \xi_{n-j}(\sigma^j(\underline{x})) \leq \xi_n(\underline{x})$$

Pela hipótese, em \mathbf{v} -q.t.p. $\underline{x} \in \Sigma$ existe uma sequência $n_i(\underline{x})$ tal que $\xi_{n_i}(\underline{x}) \leq C$. Então, pela Equação (4.1), temos que para cada $n_i(\underline{x})$

$$e^{-C} \leq e^{-\text{var}_{n_i-j}(\Psi^{n_i-j}, \sigma^j(\underline{x}))} \leq \frac{\mathbf{v}([x_j \dots x_{n_i-1}])}{e^{\Psi^{n_i-j}(\sigma^j(\underline{y})) - (n_i-j)P}} \leq e^{\text{var}_{n_i-j}(\Psi^{n_i-j}, \sigma^j(\underline{x}))} \leq e^C.$$

E isto finaliza a demonstração da proposição. □

Um caso especial do operador RPF é quando $\psi = \log g$, onde $g \in \mathcal{G} = \{g \in \mathcal{C}(\Sigma) : g > 0 \text{ e } \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} g(y) = 1, \forall x\}$. Então, $\mathcal{L}_{\log g} \phi(x) = \sum_{y \in \sigma^{-1}(x)} g(y) \phi(y)$.

Teorema 4.1 (Ledrappier, (LEDRAPPIER, 1974)). *Seja $g \in \mathcal{C}(\Sigma)$ e $\nu \in \mathcal{M}(\Sigma)$. São equivalentes:*

1. $\mathcal{L}_{\log g}^* \nu = \nu$;
2. $\nu \in \mathcal{M}_\sigma(\Sigma)$ e ν é um estado de equilíbrio para $\log g$.

A medida ν que satisfaz as condições do Teorema 4.1 são chamadas de g -medidas. Para mais detalhes, veja (KEANE, 1972). Note que para uma g -medida ν , temos $h_\nu(\sigma) + \int \log g d\nu = 0$

Corolário 4.1. *Se ν é uma g -medida e $\liminf_{n \rightarrow \infty} \xi_n(x) \leq C$ em ν -q.t.p. $x \in \Sigma$, para alguma constante $C > 0$, então ν é uma medida Gibbs sequencial invariante e é um estado de equilíbrio para o potencial $\log g$.*

Demonstração. Para a demonstração, basta combinar a Proposição 4.2 e o Teorema 4.1. □

Em (BOWEN, 1975), Bowen trata da condição de Ruelle-Perron-Fobenius(condição RPF) dada na definição abaixo.

Definição 4.1. *Dizemos que o operador de Ruelle-Perrón-Frobenius $\mathcal{L}_\phi : \mathcal{C}(\Sigma_A) \rightarrow \mathcal{C}(\Sigma_A)$ associado à $\phi \in \mathcal{C}(\Sigma_A)$ satisfaz a condição de RPF se existem $\lambda > 0$, $h \in C(\Sigma_A)$ com h positivo e $\nu \in M(\Sigma_A)$ tal que $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$, $\mathcal{L}_\phi^* \nu = \lambda \nu$, $\nu(h) = 1$ e para cada $\psi \in C(\Sigma_A)$ a sequência $\lambda^{-m} \mathcal{L}_\phi^m \psi$ converge uniformemente para $\nu(f)h$.*

Bowen(veja (BOWEN, 1975)) mostra que se ϕ é Hölder contínuo com relação a uma certa métrica em Σ_A então \mathcal{L}_ϕ satisfaz a condição RPF. Como consequência, $\lambda = e^{P(\phi)}$, ν e h são únicos e a medida $\mu := \mu(f) = \nu(hf)$ é uma medida de Gibbs e invariante pela aplicação deslocamento. Ele também mostra que μ é o único estado de equilíbrio para ϕ .

Em (HOFBAUER, 1977), Hofbauer considera o mesmo problema de existência e unicidade de estados de equilíbrio mas agora para uma classe de funções que não são Hölder contínuas. Ele caracteriza as funções dessa classe que satisfazem a condição RPF, que admitem medidas de Gibbs e que possuem unicidade de seus estados de equilíbrio. Ele também dá condições para que não haja unicidade dos estados de equilíbrio. Daremos os detalhes agora.

O Teorema 4.2 abaixo relaciona a condição RPF com a unicidade de estados de equilíbrio.

Teorema 4.2 ((HOFBAUER, 1977), pág. 225). *Seja ϕ satisfazendo a condição RPF. Então $\mu = \nu h$ é o único estado de equilíbrio para ϕ .*

Retratamos aqui um exemplo em que as medidas Gibbs sequenciais são estados de equilíbrio para potenciais que são apenas contínuos. O exemplo se encontra em (HOFBAUER, 1977) e o descreveremos agora.

Exemplo 4.1. *Seja $A = \{1, \dots, n\}$, o shift $\Sigma_A = \prod_{n=0}^{\infty} \{1, 2, \dots, n\}$, $M_0 = \Sigma_A \setminus [1]_0$, onde $[1]_0 = \{\underline{x} \in \Sigma_A : x_0 = 1\}$ e $M_k = \{\underline{x} \in \Sigma_A : x_i = 1 \text{ for } 0 \leq i \leq k-1, x_k \neq 1\}$ para $k = 1, 2, \dots$. Então os conjuntos M_k juntamente com ponto $1111\dots$ formam uma partição de Σ_A . Seja (a_k) uma seqüência de números reais com $\lim a_k = 0$. Seja $s_k = a_0 + \dots + a_k$. Definimos $g \in C(\Sigma_A)$ por*

$$g(\underline{x}) = a_k \text{ for } \underline{x} \in M_k \text{ e } g(11\dots) = 0.$$

Note que g é contínua por que

$$\text{var}_n(g) = a_k \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow \infty$$

Abaixo, enunciamos alguns dos teoremas em (HOFBAUER, 1977).

Teorema 4.3 ((HOFBAUER, 1977), página 226). *Se $\sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k} > \frac{1}{n-1}$, então g satisfaz a condição RPF.*

Teorema 4.4 ((HOFBAUER, 1977), página 230). *A função g possui uma medida de Gibbs se, e somente se, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ é convergente.*

O teorema abaixo dá um exemplo da não-unicidade de estados de equilíbrio para uma classe de funções g .

Teorema 4.5 ((HOFBAUER, 1977), página 236). *Se g satisfaz*

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k} = 1 \text{ e } \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)e^{s_k} < \infty.$$

Então g possui dois estados de equilíbrio.

Reproduzimos abaixo uma tabela, semelhante à encontrada na página 239 em (HOFBAUER, 1977), que resume os resultados do artigo.

		<i>g</i> satisfaz a condição RPF	<i>g</i> admite uma medida de Gibbs	<i>g</i> possui um único estado de equilíbrio
$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k} > \frac{1}{n-1}$	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$	sim	sim	sim
	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$	sim	não	sim
$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k} = \frac{1}{n-1}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)e^{s_k} < \infty$	não	não	não
	$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)e^{s_k} = \infty$	não	não	sim
$\sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k} < \frac{1}{n-1}$		não	não	sim

Neste mesmo contexto, iremos examinar um caso quando a função *g* possui uma medida Gibbs sequencial.

Pelo Teorema 4.3 e 4.4, se $\sum_{k=0}^{\infty} e^{s_k} > 1$ e $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ então a medida μ não é uma medida de Gibbs para *g*. Mas a Proposição 4.3 abaixo diz que μ é uma medida Gibbs sequencial.

Proposição 4.3. μ é uma medida Gibbs sequencial com a função de primeiro tempo Gibbs n_1 integrável

Demonstração. Seja a sequência $(\xi_n(\cdot))_n$ como na Equação 4.2. Na demons-tração do Teorema 4.3 em (HOFBAUER, 1977) Hofbauer prova que $\mu(\{\underline{1}\}) = 0$, isto é, que $\mu \neq \delta_{111\dots}$. E como existe uma constante $L > 0$ tal que

$$L^{-1} \cdot \nu(\{\underline{1}\}) \leq \int_{\{\underline{1}\}} h d\nu = \mu(\{\underline{1}\}) \leq L \cdot \nu(\{\underline{1}\}) \tag{4.3}$$

então $\nu(\{\underline{1}\}) = 0$. Logo, em ν -q.t.p. \underline{x} , existe uma sequência $(n_k(\underline{x}))_k$ tal que $\sigma^{n_k}(\underline{x}) \in M_0$ e então $\xi_{n_k+1}(\underline{x}) = 0$. Logo, $\liminf_{k \rightarrow \infty} \xi_k(\underline{x}) = 0$ e pela Proposição 4.2 ν é uma medida Gibbs sequencial e pela Equação 4.3 μ também é uma medida Gibbs sequencial.

Note agora que a função primeiro tempo Gibbs n_1 de μ é menor ou igual ao tempo de primeiro retorno à M_0 . Logo, pelo Lema de Káč, temos que a função n_1 é integrável com respeito à μ . □

4.0.2 Medida Gibbs Não-lacunar e Medida Gibbs Sequencial

Nesta subseção, iremos dar um exemplo que mostra que as medidas Gibbs não-lacunares são exemplos particulares de medidas Gibbs sequenciais. As medidas Gibbs não-lacunares são estados de equilíbrio para potenciais Hölder contínuos[(OLIVEIRA; VIANA, 2008),(VARANDAS; VIANA, 2010), (RAMOS; VIANA, 2015)] de difeomorfismos locais C^1 . Discutiremos o cenário de (OLIVEIRA; VIANA, 2008).

Seja $f : M \rightarrow M$ um difeomorfismo local C^1 , M uma variedade riemanniana compacta d -dimensional, satisfazendo as condições (H1) e (H2) listadas abaixo.

(H1) Existem naturais $p \geq 1$ e $q \geq 0$, uma família $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_q, R_{q+1}, \dots, R_{q+p}\}$ de conjuntos abertos dois a dois disjuntos cujo fecho possui diâmetro finito e que cobre toda a variedade M , tal que

- $f|_{(\overline{R_i} \cup \overline{R_j})}$ é injetivo sempre que $\overline{R_i} \cap \overline{R_j} \neq \emptyset$;
- se $f(R_i) \cap R_j \neq \emptyset$, então $f(R_i) \supset R_j$ e portanto $f(\overline{R_i}) \supset \overline{R_j}$;
- existe um natural $N > 1$ tal que $f^N(R_i) = M$ para cada i .

(H2) Existe $\lambda_1, \lambda_2 > 1$, com λ_2 suficientemente próximo de 1, tal que

- $\|Df(x)^{-1}\|^{-1} \geq \lambda_1$ para cada $x \in R_{q+1} \cup \dots \cup R_{q+p}$
- $\|Df(x)^{-1}\|^{-1} \geq \lambda_2^{-1}$ para cada $x \in R_1 \cup \dots \cup R_q$

(H3) ϕ é Hölder contínuo e $\sup \phi - \inf \phi < \log \deg(f) - \log q$.

Para cada natural $n \geq 1$, chamamos de cilindro de comprimento n a cada conjunto não-vazio da forma

$$R^n = R^n[i_0, \dots, i_{n-1}] = \{y \in R_{i_0} \cap f^{-1}(R_{i_1}) \cap \dots \cap f^{-n+1}(R_{i_{n-1}})\}$$

Seja \mathcal{R}_n a família de todos os cilindros de comprimento n .

A noção de tempos hiperbólicos é importante para o estudo das medidas Gibbs não-lacunares. Essa noção foi introduzida por Alves ((ALVES, 2000)) e posteriormente desenvolvida em (ALVES *et al.*, 2000).

Definição 4.2. *Seja $\lambda > 0$ fixado. Dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um tempo hiperbólico para $x \in M$ se*

$$\prod_{j=k}^{n-1} \|Df(f^j(x))^{-1}\|^{-1} \leq e^{2\sigma(n-k)}$$

para cada $0 \leq k \leq n-1$.

Dizemos que $R^n \subset \mathcal{R}_n$ é um cilindro hiperbólico se n é um tempo hiperbólico para cada ponto $x \in R^n$.

Seja H o conjunto de pontos $x \in M$ que pertence ao fecho de algum cilindro hiperbólico R^n para infinitos valores $n_1(x) < \dots < n_k(x) < \dots$ de n . Em (OLIVEIRA; VIANA, 2008), temos os seguintes resultados.

Teorema 4.6 (Teorema A, (OLIVEIRA; VIANA, 2008)). *Existe alguma medida de probabilidade ν tal que $\mathcal{L}_\phi^* \nu = \lambda \nu$. Além disso, $\nu(H) = 1$ e $\text{supp}(\nu) = \bar{H}$.*

Dizemos que uma função $h : M \rightarrow (0, 1)$ é Hölder contínua por partes se existe uma partição finita de M tal que h é Hölder contínua em cada um de seus átomos.

Teorema 4.7 (Teorema B, (OLIVEIRA; VIANA, 2008)). *Existe uma função Hölder contínua por partes $h : M \rightarrow (0, 1)$, afastada de zero e infinito, tal que $\mathcal{L}_\phi h = \lambda h$ e $\mu = h\nu$ é uma medida não-lacunar para ϕ , invariante e ergódica por f .*

Teorema 4.8 (Teorema C, (OLIVEIRA; VIANA, 2008)). *A aplicação f possui um único estado de equilíbrio para o potencial ϕ e o estado de equilíbrio é uma medida Gibbs não-lacunar.*

Note que a partição de Markov \mathcal{R}_n da condição (H1) não é uma partição geradora. Porém, os autores em (OLIVEIRA; VIANA, 2008) mostram que a partição de Markov \mathcal{R}_n é geradora para H .

Seja $\Sigma = \{1, \dots, q, q+1, \dots, q+p\}^{\mathbb{N}}$. Podemos definir a aplicação invertível $\pi : H \rightarrow \Sigma$, satisfazendo $\pi \circ f|_H = \sigma|_G \circ \pi$, onde $\pi(x)$ é o itinerário de x com respeito à partição $\bar{\mathcal{R}}$ definida por $\bar{R}_i = R_i \cap H$ e $\sigma|_G$ é o deslocamento em G . Seja $\bar{R}_i(x)$ o elemento da partição que contem o ponto x . Considere a medida push-forward $\eta = \mu \circ \pi^{-1}$ em Σ . Então, $\eta(G) = 1$, onde $G = \pi(H)$ e η é uma medida Gibbs sequencial para o potencial $\bar{\phi} := \phi \circ \pi^{-1}$. De fato, pelo Teorema 4.8, μ é uma medida Gibbs não-lacunar para ϕ . Então, existem constantes $P(\phi) \in \mathbb{R}$ e $K > 0$ tal que para cada $x \in H$

$$K^{-1} \leq \frac{\mu(\bar{R}^{n_k}(x))}{e^{\phi^{n_k}(x) - n_k P(\phi)}} \leq K$$

onde $(n_k(x))_k = (n_k)_k$ é a sequência de tempos hiperbólicos de x .

Então, para $\pi(x) = \underline{x} = x_0 x_1 \dots \in G \subseteq \Sigma$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\eta([x_0 \dots x_{n_k-1}])}{e^{\bar{\phi}^{n_k}(\underline{x}) - n_k P(\phi)}} &= \frac{\mu(\pi^{-1}([x_0 \dots x_{n_k-1}]))}{e^{(\phi \circ \pi^{-1})^{n_k}(\underline{x}) - n_k P(\phi)}} = \frac{\mu(R^{n_k}(x))}{e^{\phi^{n_k}(x) - n_k P(\phi)}} \\ &\leq K \end{aligned}$$

Usando o fato que se n_k é tempo hiperbólico de x então $n_k - j$ também é tempo hiperbólico de $f^j(x)$ para cada $0 \leq j < n_k$, temos

$$\frac{\eta([x_j \dots x_{n_k-1}])}{e^{\bar{\phi}^{n_k-j}(\sigma^j(\underline{x})) - (n_k-j)P(\phi)}} \leq K$$

Similarmente, para $0 \leq j < n_k$, temos

$$\frac{\eta([x_j \dots x_{n_k-1}])}{e^{\bar{\phi}^{n_k-j}(\sigma^j(\underline{x})) - (n_k-j)P(\phi)}} \geq K^{-1}$$

provando assim que η é uma medida Gibbs sequencial para $\bar{\phi}$.

4.0.3 Medida de Gibbs Fraca e Medida Gibbs Sequencial

Uma seqüência de funções contínuas $\Phi := (\phi_n)_n$ é assintoticamente aditiva em Σ se para cada $\varepsilon > 0$ existe uma função contínua ψ_ε tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|\phi_n - \psi_\varepsilon^n\| < \varepsilon$$

onde $\|\cdot\|$ é a norma do supremo.

A noção clássica de medidas de Gibbs foi generalizada por Yuri ((YURI, 1999)) para potenciais no cenário não-uniformemente expansor. Essas medidas são mais adequadas para o estudo de potenciais com menos regularidades e para uma classe mais ampla de sistemas dinâmicos. Tecnicamente, a principal diferença entre os dois conceitos é que, para medidas de Gibbs temos um controle uniforme sobre a medida dos cilindros enquanto que para medidas de Gibbs fracas esse controle não é uniforme. Em (IOMMI; YAYAMA,), Iommi e Yayama generalizaram a noção dada por Yuri para uma seqüência de potenciais assintoticamente aditivos. Daremos os detalhes abaixo.

Definição 4.3. *Uma medida de probabilidade μ é chamada de medida de Gibbs fraca para o potencial $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ se existe uma constante $P \in \mathbb{R}$ e uma seqüência de números reais positivos K_n satisfazendo*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log K_n}{n} = 0,$$

tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, cada cilindro $[x_0 \dots x_{n-1}]$ e cada $\underline{y} \in [x_0 \dots x_{n-1}]$ temos

$$\frac{1}{K_n} \leq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n-1}])}{e^{\psi^n(\underline{y}) - nP}} \leq K_n \quad (4.4)$$

E a medida μ é chamada de medida de Gibbs fraca para uma seqüência assintoticamente aditiva $\Phi := (\phi_n)_n$ em Σ se para cada $n \in \mathbb{N}$, cada cilindro $[x_0 \dots x_{n-1}]$ e cada $\underline{y} \in [x_0 \dots x_{n-1}]$ temos

$$(K_n)^{-1} \leq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n-1}])}{e^{\phi_n(\underline{y}) - nP}} \leq K_n \quad (4.5)$$

Proposição 4.4. *Seja $(\xi(\cdot))_n$ a seqüência da Equação (4.2). Se $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n)\xi_n(\underline{x}) = 0$ em todo ponto, então cada medida conforme é uma medida de Gibbs fraca, no sentido de Yuri.*

Demonstração. Seguindo os mesmos passos da demonstração da Proposição 4.2, temos que

$$\begin{aligned} e^{-\sup_{\underline{x}} \xi_n(\underline{x})} &\leq e^{-\xi_n(\underline{x})} \leq e^{-\text{var}_n(\Psi^n, \underline{y})} \leq \frac{V([x_0, \dots, x_{n-1}])}{e^{\Psi^n(\underline{y}) - nP}} \\ &\leq e^{\text{var}_n(\Psi^n, \underline{y})} \leq e^{\xi_n(\underline{x})} \leq e^{\sup_{\underline{x}} \xi_n(\underline{x})} \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração da proposição, basta tomar $K_n := e^{\sup_{\underline{x}} \xi_n(\underline{x})}$. \square

Observação 4.1. Observe que ξ_n é uma sequência subaditiva de funções não negativas, ou seja, $\xi_{n+m}(\underline{x}) \leq \xi_n(\underline{x}) + \xi_m(\sigma^n(\underline{x}))$ para todo \underline{x} e $n, m \in \mathbb{N}$, então pelo Teorema Subaditivo Ergódico de Kingman (veja (OLIVEIRA; VIANA,), Teorema 3.3.3), temos que a sequência $(1/n)\xi_n$ converge em q.t.p. para uma função $\xi \geq 0$ e

$$\int \xi d\mu = \inf_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int \xi_n d\mu.$$

Se $\inf_{n \geq 1} (1/n) \int \xi_n d\mu = 0$, temos que $\xi = 0$ q.t.p. Então, se definimos a sequência $K_n(\underline{x}) := e^{\xi_n(\underline{x})}$, a Equação (4.4) é satisfeita e a sequência $(1/n) \log K_n(\underline{x}) \rightarrow 0$ em q.t.p.

A próxima Proposição, relaciona as medidas Gibbs sequenciais com as medidas de Gibbs fracas segundo Iommi-Yayama.

Seja G o conjunto de pontos que possuem infinitos tempos Gibbs.

Proposição 4.5. Se μ é uma medida Gibbs sequencial e a função n_1 é integrável, então existe uma sequência assintoticamente aditiva $\Phi = (\phi_n)_n$ em um conjunto de medida total G'' tal que para todo $\underline{x} \in G''$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$K_n^{-1}(\underline{x}) \leq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n-1}])}{e^{\phi_n(\underline{x}) - nP}} \leq K_n(\underline{x}) \quad (4.6)$$

onde a sequência $K_n(\underline{x})$ satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log K_n(\underline{x})}{n} = 0$.

Demonstração. Como μ é Gibbs sequencial, então existem constantes $K > 0$ e P , e um conjunto $G \subset \Sigma$ com $\mu(G) = 1$, tal que dado $\underline{x} \in G$ então existe alguma sequência $n_1(\underline{x}) < n_2(\underline{x}) < n_3(\underline{x}) < \dots$ tal que

$$K^{-1} \leq \frac{\mu[x_j \dots x_{n_k-1}]}{e^{\Psi^{n_k-j}(\sigma^j(\underline{x})) - (n_k-j)P}} \leq K$$

para $0 \leq j \leq n_k - 1$.

Se $n_k(\underline{x}) \leq n \leq n_{k+1}(\underline{x})$, definimos uma sequência de funções em G

$$\tilde{\phi}_n(\underline{x}) := (n_{k+1}(\underline{x}) - n_k(\underline{x}))(\max |\Psi|)$$

Note que

$$\mu([x_0 \dots x_{n_{k+1}-1}]) \leq \mu([x_0 \dots x_{n-1}]) \leq \mu([x_0 \dots x_{n_k-1}])$$

Note ainda que

$$\begin{aligned} |\psi^n(\underline{x}) - \psi^{n_k}(\underline{x}) + \tilde{\phi}_n(\underline{x})| &\leq (n - n_k) \max |\psi| + (n_{k+1} - n_k) \max |\psi| \\ &\leq \alpha_k n \max |\psi| \end{aligned}$$

onde $\alpha_k(\underline{x}) = \left(\frac{n_{k+1}(\underline{x}) - n_k(\underline{x})}{n_k(\underline{x})} \right)$.

Então,

$$\psi^{n_k}(\underline{x}) - \alpha_k n \max |\psi| \leq \psi^n(\underline{x}) + \tilde{\phi}_n(\underline{x}) \leq \alpha_k n \max |\psi| + \psi^{n_k}(\underline{x})$$

Analogamente,

$$|\psi^n(\underline{x}) - \psi^{n_{k+1}}(\underline{x}) + \tilde{\phi}_n(\underline{x})| \leq \alpha_k n \max |\psi| \Rightarrow$$

$$\psi^{n_{k+1}}(\underline{x}) - \alpha_k n \max |\psi| \leq \psi^n(\underline{x}) + \tilde{\phi}_n(\underline{x}) \leq \alpha_k n \max |\psi| + \psi^{n_{k+1}}(\underline{x})$$

Então, para $\underline{x} \in [x_0 \dots x_{n-1}]$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\mu([x_0 \dots x_{n-1}])}{e^{\psi^n(\underline{x}) + \tilde{\phi}_n(\underline{x}) - nP}} &\leq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n_k-1}])}{e^{\psi^{n_k}(\underline{x}) - \alpha_k n \max |\psi| - nP}} \\ &= \frac{\mu([x_0 \dots x_{n_k-1}])}{e^{\psi^{n_k}(\underline{x}) - n_k P}} \cdot e^{n \alpha_k \max |\psi| + (n - n_k) P} \\ &\leq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n_k-1}])}{e^{\psi^{n_k}(\underline{x}) - n_k P}} \cdot e^{n \alpha_k (\max |\psi| + |P|)} \\ &\leq K e^{n \alpha_k (\max |\psi| + |P|)} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\mu([x_0 \dots x_{n-1}])}{e^{\psi^n(\underline{x}) + \tilde{\phi}_n(\underline{x}) - nP}} &\geq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n_{k+1}-1}])}{e^{\psi^{n_{k+1}}(\underline{x}) + \alpha_k n \max |\psi| - nP}} \\ &= \frac{\mu([x_0 \dots x_{n_k-1}])}{e^{\psi^{n_{k+1}}(\underline{x}) - n_{k+1} P}} \cdot \frac{1}{e^{n \alpha_k \max |\psi| + (n_{k+1} - n) P}} \\ &\geq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n_{k+1}-1}])}{e^{\psi^{n_{k+1}}(\underline{x}) - n_{k+1} P}} \cdot \frac{1}{e^{n \alpha_k (\max |\psi| + |P|)}} \\ &\geq K^{-1} e^{-n \alpha_k (\max |\psi| + |P|)} \end{aligned}$$

Pondo $K_n(\underline{x}) := K \cdot e^{n \alpha_k(\underline{x}) (\max |\psi| + |P|)}$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log K_n(\underline{x})}{n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log K}{n} + (\max |\psi| + |P|) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(\underline{x})$$

Como a função n_1 é integrável então $\alpha_k(\underline{x}) \rightarrow 0$ para todo $\underline{x} \in G'$, onde $\mu(G') = 1$ (veja Lema 4.6 (OLIVEIRA; VIANA, 2008)). E como $n \rightarrow \infty$ implica que $k \rightarrow \infty$, temos que $K_n(\underline{x})$ possui crescimento subexponencial, ou seja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log K_n(\underline{x})}{n} = 0$$

em μ -q.t.p. \underline{x} .

Definimos a sequência $\phi_n(\underline{x}) := \tilde{\phi}_n(\underline{x}) + \psi^n(\underline{x})$ em $G'' = G \cap G'$. Provaremos que $(\phi_n)_n$ é uma sequência assintoticamente aditiva em G'' .

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\phi_n(\underline{x}) - \psi^n(\underline{x})| &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\tilde{\phi}_n(\underline{x})| \\ &\leq \max |\psi| \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_k(\underline{x}) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando a norma do supremo no conjunto G'' , temos que $(\phi_n)_n$ é assintoticamente aditiva.

Logo, para cada $\underline{x} \in G''$, temos

$$K_n^{-1}(\underline{x}) \leq \frac{\mu([x_0 \dots x_{n-1}])}{e^{\phi_n(\underline{x}) - nP}} \leq K_n(\underline{x}) \quad (4.7)$$

Finalizando a prova da Proposição.

□

5 EXTENSÃO, APLICAÇÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

É possível com as mesmas ideias usadas no caso do shift total, estender os resultados para o caso do subshift de tipo finito semelhante ao que aparece em (KEMPTON, 2011). Iremos escrever o contexto no qual, possivelmente, isso poderá ser feito.

Sejam os alfabetos $A = \{1, \dots, k_1\}$ e $B = \{1, \dots, k_2\}$. Seja $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ uma aplicação fator 1-bloco, onde Σ_1 é um subshift de tipo finito e Σ_2 é um subshift.

Definição 5.1. Dizemos que uma aplicação fator 1-bloco $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é regular com respeito a uma medida Gibbs sequencial μ em Σ_1 , se existe um conjunto de medida total $C \subset G \subset \Sigma_1$, com respeito à μ , tal que dado $\underline{x} \in C$ então $\Pi^{-1}(\Pi(\underline{x})) \subset G$ e $n_1(\underline{x}) = n_1(\underline{y})$, se $\underline{y} \in \Pi^{-1}(\Pi(\underline{x}))$.

Denotamos por $\mathcal{A}_n(E)$ o conjunto de valores x_n das sequências \underline{x} em $E \subset \Sigma_1$.

Hipótese. Seja $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ uma aplicação fator 1-bloco e μ uma medida em Σ_1 . Assumimos que existe um número natural N e um conjunto de medida total $F \subset \Sigma_2$, em relação à $\nu := \mu \circ \Pi^{-1}$, tal que para cada $\underline{z} \in F$, temos que as seguintes condições que são satisfeitas em Σ_1 :

1. Se $\mathcal{A}_n\{\underline{x} \in \Sigma_1 : x_{n+m} = j, \Pi(\underline{x}) = \underline{z}\}$ é não-vazio para cada $m > N$, então $\mathcal{A}_n\{\underline{x} \in \Sigma_1 : x_{n+m} = j, \Pi(\underline{x}) = \underline{z}\} = \mathcal{A}_n\{\underline{x} \in \Sigma_1 : \Pi(\underline{x}) = \underline{z}\}$;
2. $\mathcal{A}_n\{\underline{x} \in \Sigma_1 : \pi(x_{n-N}) \dots \pi(x_{n+N}) = z_{n-N} \dots z_{n+N}\} = \mathcal{A}_n\{\underline{x} \in \Sigma_1 : \Pi(\underline{x}) = \underline{z}\}$.

Note que a condição 1, é uma condição de mixing nas fibras $\Pi^{-1}(\underline{z})$, isto significa que se existe uma sequência $\underline{x}, \underline{x}' \in \Pi^{-1}(\underline{z})$ então para cada n e $m > N$ existe uma sequência $\underline{y} \in \Pi^{-1}(\underline{z})$ com $y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n$ e $y_{n+m} = x'_{n+m}, \dots, y_j = x'_j, \dots$ para todo $j > n + m$.

Proposição 5.1. Seja uma aplicação fator 1-bloco $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ regular com respeito a uma medida Gibbs sequencial μ em Σ_1 . Então existe um conjunto de medida total E , em relação à μ , tal que dado $\underline{x}, \underline{y} \in E \subset \Sigma_1$ com $\Pi(\underline{x}) = \Pi(\underline{y})$, então $n_k(\underline{x}) = n_k(\underline{y})$ para cada $k \geq 1$ e as Condições 1 e 2 são satisfeitas em E .

Demonstração. A demonstração é semelhante à da Proposição 3.3. Com efeito,

Sendo $n_k(x) = n_1(\sigma^{n_{k-1}(x)}(x))$, μ uma medida invariante e Π regular com respeito à μ então podemos definir $D = \Pi(\bigcap_{k \geq 0} \sigma^{-k}(A)) \subseteq \Sigma_2$ satisfazendo

$$\nu(D) = \nu(\Pi(\bigcap_{k \geq 0} \sigma^{-k}(A))) = \mu(\bigcap_{k \geq 0} \sigma^{-k}(A)) = 1$$

isto é, $D \subset \Sigma_2$ é um conjunto de medida total em relação à ν . Então, $D \cap F$ tem medida total em Σ_2 , em relação ν tal que $E := \Pi^{-1}(D \cap F) \subset A$ e dado $\underline{x}, \underline{y} \in E$, com $\Pi(\underline{x}) = \Pi(\underline{y})$ então $n_k(\underline{x}) = n_k(\underline{y})$, para cada $k \geq 1$ e a Condição 1 e 2 são satisfeitas em E . \square

Em (KEMPTON, 2011), temos o seguinte exemplo:

Exemplo 5.1. Considere o espaço shift $\sigma : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ associado à matriz de transição

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e projeção π dos símbolos de Σ_1 em um shift total de dois símbolos dado por

$$\pi(1) = a, \quad \pi(2) = \pi(3) = \pi(4) = b.$$

Então, $\{2\} = \mathcal{A}_1\{\underline{x} : \pi(x_1 x_2) = ba\} \neq \mathcal{A}_1\{\underline{x} : \pi(x_1) = b\} = \{2, 3, 4\}$. Também vemos que $x_1 = 3$ torna impossível que $x_2 = 3$, mas nenhuma restrição há nos possíveis valores de x_3, x_4, \dots . Assim, a Hipótese falha para $N = 0$. Pondo $N = 1$, temos que é satisfeita.

Iremos dar um exemplo inspirado em (KEMPTON, 2011) que mostra que as condições da Hipótese são necessárias.

Exemplo 5.2. Considere a aplicação deslocamento $\sigma : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$ associado à matriz de transição

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $\psi_1 : \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada tal que $P(\psi_1) = 0$. Considere a aplicação fator 1-bloco regular $\Pi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ para uma medida Gibbs sequencial μ com $\pi(1) = 1, \pi(2) = 2$ e $\pi(3) = \pi(4) = 3$. Suponhamos que $\mu \circ \Pi^{-1} = \nu$ é uma medida Gibbs sequencial para um potencial $\psi_2 : \Sigma_2 \rightarrow \mathbb{R}$. Assuma adicionalmente que $n_i + 1$ é tempo Gibbs de $\underline{x} = 2 \underbrace{3 \dots 3}_{n_i} x_{n_i+1} x_{n_i+2} \dots$ e de $\underline{x}' = 1 \underbrace{3 \dots 3}_{n_i} x'_{n_i+1} x'_{n_i+2} \dots$. Então, para $\underline{w} \in \Sigma_2$, temos

$$\begin{aligned} Ke^{\psi_2^{n_i+1}(23\dots 3\underline{w})} &\geq \nu[23\dots 3] = \mu[24\dots 4] \Rightarrow \\ e^{\psi_2^{n_i}(3\dots 3\underline{w})} &\geq \frac{\mu[24\dots 4]}{Ke^{\psi_2(23\dots 3\underline{w})}} \geq \frac{\mu[24\dots 4]}{Ke^{\sup_{\underline{z}} \{\psi_2(\underline{z})\}}} \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$K^{-1}e^{\Psi_2^{n_i+1}(13\dots 3\underline{w})} \leq v[13\dots 3] = \mu[13\dots 3] \Rightarrow$$

$$e^{\Psi_2^{n_i}(3\dots 3\underline{w})} \leq \frac{\mu[13\dots 3]}{K^{-1}e^{\Psi_2(13\dots 3\underline{w})}} \leq \frac{\mu[13\dots 3]}{K^{-1}e^{\inf_{\underline{z}}\{\Psi_2(\underline{z})\}}}$$

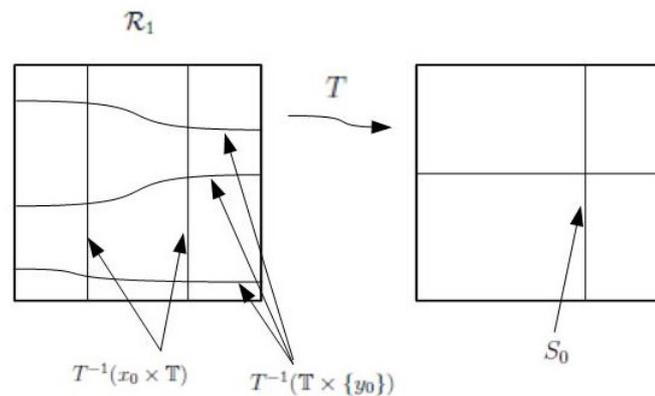
Se μ é tal que $K^2 e^{\text{var}_0(\Psi_2)} < \frac{\mu[24\dots 4]}{\mu[13\dots 3]}$, por exemplo se μ é uma medida de Bernoulli com $\mu[3] < \mu[4]$ e n_i for suficientemente grande, então

$$\Psi_2^{n_i}(3\dots 3\underline{w}) < \Psi_2^{n_i}(3\dots 3\underline{w})$$

para cada \underline{w} . Assim $\Psi_2^{n_i}$ não está definido em $[3\dots 3]$ que é um conjunto de medida positiva. Logo, existe um conjunto de medida positiva tal que v não satisfaz a Desigualdade 3.1, e então v não é uma medida Gibbs sequencial para Ψ_2 .

Em (LEPLAIDEUR; SAUSSOL, 2012) os autores tratam de um análogo do Teorema Central do Limite para a flutuação do logaritmo da medida da bola de raio indo para zero, onde a medida μ_{Ψ_1} em questão é o único estado de equilíbrio para um potencial Hölder contínuo $\Psi_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de um difeomorfismo $C^{1+\alpha}$ ou um produto-torcido expansor $T : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, dado por $T(x, y) = (f(x), g(x, y))$. Eles discutem o caso não-conforme, isto é, quando há expoentes de Lyapunov diferentes.

Neste contexto é bem conhecido a existência de uma partição de Markov. E eles usam a conjugação com um shift total e usam os resultados em (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) ou (CHAZOTTES; UGALDE, 2011). Mais precisamente, eles consideram uma partição, que não é de Markov, \mathcal{R}_n formado pela coleção das componentes conexas de $T^{-n}(\mathbb{T}^2 \setminus S_0)$, onde $S_0 = \{(x_0 \times \mathbb{T}) \cup (\mathbb{T} \times \{y_0\})\}$. A partição \mathcal{R}_n induz uma partição \mathcal{P}_n em \mathbb{T} formada pela coleção das componentes conexas de $f^{-n}(\mathbb{T} \setminus \{x_0\})$. Veja a figura abaixo .



A estratégia da prova do teorema principal é trocar a bola $B((x, y), \varepsilon)$ por um cilindro “dinâmico” $C_{n(\varepsilon)}((x, y), \varepsilon)$. Usando o fato que T preserva as fibras, medir o cilindro $C_{n(\varepsilon)}((x, y), \varepsilon)$

com μ_{ψ_1} (que é uma medida de Gibbs) de ψ_1 para um $n(\varepsilon)$ suficientemente grande, é equivalente à medir com a medida invariante $\nu_{\psi_2} = \mu_{\psi_1} \circ \Pi^{-1}$ que é também uma medida de Gibbs de f para um potencial ψ_2 , pelos resultados em (POLLICOTT; KEMPTON, 2011) ou (CHAZOTTES; UGALDE, 2011). Trocando a expressão $\log \mu(C_{n(\varepsilon)}((x, y), \varepsilon))$ pela soma $S_{n(\varepsilon)}(\psi_1 - \psi_2 \circ \Pi)(x, y) + S_{n(\varepsilon)}(\psi_2 \circ \Pi)(x, y)$ onde S_n é a soma de Birkhoff usa-se argumentos de probabilidades para concluir o teorema principal.

Aqui, surgem algumas questões:

Questão 1: O mesmo resultado é verdade no cenário não-uniformemente expansor? Em algumas situações, a medida μ_{ψ} em questão não é uma medida de Gibbs e sim uma medida Gibbs não-lacunar (medida Gibbs sequencial). É bem possível que o mesmo método usado em (LEPLAIDEUR; SAUSSOL, 2012) juntamente com os resultados desta tese possam ser usados para responder essa questão, mas somente se T possui uma partição de Markov geradora, como no caso em (OLIVEIRA; VIANA, 2008). Outra questão que surge é se o mesmo resultado é verdade para o caso em que T não possui uma partição de Markov.

Questão 2: Na Subseção 4.0.1, temos um exemplo de uma medida Gibbs sequencial que é o único estado de equilíbrio para um potencial que não é Hölder contínuo. Em que contexto do cenário não-uniformemente expansor, temos unicidade do estado de equilíbrio para potenciais que não são Hölder contínuos?

REFERÊNCIAS

- ALVES, J. $\{SRB\}$ measures for non-hyperbolic systems with multidimensional expansion. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, v. 33, n. 1, p. 1–32, 2000. ISSN 0012-9593. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012959300001014>>. Citado na página 36.
- ALVES, J.; BONATTI, C.; VIANA, M. Srb measures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly expanding. *Inventiones mathematicae*, v. 140, n. 2, p. 351–398, 2000. ISSN 1432-1297. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s002220000057>>. Citado na página 36.
- BOWEN, R. Topological entropy and axioma a. In *Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968)*, , PAGES = 23-41, 1970. Citado na página 9.
- BOWEN, R. Equilibrium states and the ergodic theory of anosov diffeomorphisms. *Lecture Notes in Math, Springer-Verlag, Berlin and New York*, v. 270, n. 2, p. 197–224, 1975. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 33.
- BOYLE, M.; PETERSEN, K. Hidden markov processes in the context of symbolic dynamics. In: MARCUS, B.; PETERSEN, K.; WEISSMAN, T. (Ed.). *Entropy of Hidden Markov Processes and Connections to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2011. p. 5–71. ISBN 9780511819407. Cambridge Books Online. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511819407.002>>. Citado na página 3.
- CHAZOTTES, J.; UGALDE, E. On the preservation of gibbsianness under symbol amalgamation. In: MARCUS, B.; PETERSEN, K.; WEISSMAN, T. (Ed.). *Entropy of Hidden Markov Processes and Connections to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2011. p. 72–97. ISBN 9780511819407. Cambridge Books Online. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511819407.003>>. Citado 7 vezes nas páginas 8, 9, 2, 3, 4, 44 e 45.
- CHAZOTTES, J.-R.; UGALDE, E. Projection of markov measures may be gibbsian. *Journal of Statistical Physics*, Kluwer Academic Publishers-Plenum Publishers, v. 111, n. 5-6, p. 1245–1272, 2003. ISSN 0022-4715. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1023/A%3A1023056317067>>. Citado na página 3.
- DOBRUSCHIN, P. L. The description of a random field by means of conditional probabilities and conditions of its regularity. *Theory of Probability & Its Applications*, v. 13, n. 2, p. 197–224, 1968. Citado na página 2.
- EDMUNDS A. J. B. POTTER, C. A. S. D. E. Non-compact positive operators. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society, v. 328, n. 1572, p. 67–81, 1972. ISSN 00804630. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/78083>>. Citado na página 31.
- EPHRAIM, Y.; MERHAV, N. Hidden markov processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, v. 48, n. 6, p. 1518–1569, Jun 2002. ISSN 0018-9448. Citado na página 3.

HOFBAUER, F. Examples for the nonuniqueness of the equilibrium state. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 228, n. 2, p. 223–241, 1977. Citado 5 vezes nas páginas 7, 10, 33, 34 e 35.

IOMMI, G.; YAYAMA, Y. Weak gibbs measures as gibbs measures for asymptotically additive sequences. *preprint*. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 38.

JUANG, B. H. On the hidden markov model and dynamic time warping for speech recognition x2014; a unified view. *AT T Bell Laboratories Technical Journal*, v. 63, n. 7, p. 1213–1243, Sept 1984. ISSN 0748-612X. Citado na página 3.

KEANE, M. Strongly mixingg-measures. *Inventiones mathematicae*, v. 16, n. 4, p. 309–324, 1972. ISSN 1432-1297. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01425715>>. Citado na página 33.

KEMPTON, T. Factors of gibbs measures for subshifts of finite type. *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 43, n. 4, p. 751–764, 2011. Disponível em: <<http://blms.oxfordjournals.org/content/43/4/751.abstract>>. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 42 e 43.

LANFORD, O.; RUELLE, D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, Springer-Verlag, v. 13, n. 3, p. 194–215, 1969. ISSN 0010-3616. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01645487>>. Citado na página 2.

LEDRAPPIER, F. Principe variationnel et systèmes dynamiques symboliques. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, v. 30, n. 3, p. 185–202, 1974. ISSN 1432-2064. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF00533471>>. Citado na página 33.

LEPLAIDEUR, R.; SAUSSOL, B. Central limit theorem for dimension de gibbs measures em hyperbolic dynamics. *Stochastics and Dynamics*, v. 12, n. 02, p. 1150019, 2012. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219493712003675>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 44 e 45.

MAULDIN, R. D.; URBANSKI, M. Gibbs states on the symbolic space over an infinite alphabet. *Israel J. Math*, v. 125. Citado na página 10.

MAULDIN, R. D.; URBANSKI, M. Graph directes markov systems: geometria and dynamics of limit sets. *Cambridge University Press*, v. 148. Citado na página 10.

OLIVEIRA, K.; VIANA, M. Foundations of ergodic theory. *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, v. 151. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 39.

OLIVEIRA, K.; VIANA, M. Thermodynamical formalism for robust classes of potentials and non-uniformly hyperbolic maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 28, p. 501–533, 2008. Citado 7 vezes nas páginas 5, 7, 35, 36, 37, 41 e 45.

PESIN, Y. Dimension theory in dynamical systems: Contemporary views and applications. *University Of Chicago Press*, v. 311, 1997. Citado na página 13.

POLLICOTT, M.; KEMPTON, T. Factors of gibbs measures for full shifts. In: MARCUS, B.; PETERSEN, K.; WEISSMAN, T. (Ed.). *Entropy of Hidden Markov Processes and Connections to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2011. p. 246–257. ISBN 9780511819407.

Cambridge Books Online. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511819407.009>>. Citado 10 vezes nas páginas 8, 9, 2, 3, 4, 5, 6, 18, 44 e 45.

RAMOS, V.; VIANA, M. Equilibrium states for hyperbolic potentials. *preprint*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 35.

RUELLE, D. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas. *Comm. Math. Phys.*, Springer, v. 9, n. 4, p. 267–278, 1968. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103840801>>. Citado na página 9.

VARANDAS, P.; VIANA, M. Existence, uniqueness and stability of equilibrium states for non-uniformly expanding maps. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis*, v. 27, n. 2, p. 555 – 593, 2010. ISSN 0294-1449. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S029414490900095X>>. Citado 3 vezes nas páginas 5, 7 e 35.

VERBITSKIY, E. Thermodynamics of hidden markov processes. In: MARCUS, B.; PETERSEN, K.; WEISSMAN, T. (Ed.). *Entropy of Hidden Markov Processes and Connections to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 2011. p. 258–272. ISBN 9780511819407. Cambridge Books Online. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511819407.010>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 4.

WALTERS, P. An introduction to ergodic theory. *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, v. 79. Citado na página 8.

YAYAMA, Y. On factors of gibbs measures for almost additive potentials. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 36, p. 276–309, 2016. ISSN 1469-4417. Disponível em: <http://journals.cambridge.org/article_S0143385714000509>. Citado na página 5.

YURI, M. Thermodynamic formalism for certain nonhyperbolic maps. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, v. 19, p. 1365–1378, 1999. ISSN 1469-4417. Disponível em: <http://journals.cambridge.org/article_S0143385799141695>. Citado 3 vezes nas páginas 5, 7 e 38.

ZWEIMÜLLER, R. Invariant measures for general(ized) induced transformations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, American Mathematical Society, v. 133, n. 8, p. pp. 2283–2295, 2005. ISSN 00029939. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/4097869>>. Citado na página 15.