



Instituto de Matemática



Universidade Federal de Alagoas

**Sobre o Problema de Cauchy para
interações não-lineares do tipo
Schrödinger**

Autor: Isnaldo Isaac Barbosa

Orientador: Adán José Corcho Fernández

Junho
2015

ISNALDO ISAAC BARBOSA

**Sobre o Problema de Cauchy para interações
não-lineares do tipo Schrödinger**

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Maceió
2015

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário Responsável: Janis Christine Angelina Cavalcante

B238s Barbosa, Isnaldo Isaac.
Sobre o problema de *Cauchy* para interações não lineares do tipo
Schrödinger / Isnaldo Isaac Barbosa. Maceió – 2015.
67 f.

Orientador: Adán José Corcho Fernández.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática, Programa de Pós Graduação em Matemática.
Maceió, 2015.

Bibliografia. f. 65-67.

1. Problema de *Cauchy*. 2. Equação de *Schrödinger*. 3. Boa colocação
Local. 4. Boa colocação global. 5. Má colocação. 6. Estimativas bilineares
I. Título.

CDU: 510.53

ISNALDO ISAAC BARBOSA

Sobre o Problema de Cauchy para interações não-lineares do tipo Schrödinger

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas com pré-requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática, aprovada aos 05 dias do mês de Junho do ano de 2015.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández, IM / UFRJ
Orientador



Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória, IM / UFAL



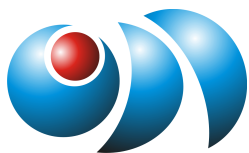
Prof. Dr. Jaime Angulo Pava, IME / USP



Prof. Dr. Jose Felipe Linares Ramirez, IMPA



Prof. Dr. Mahendra Prasad Panthee, IMECC / Unicamp



Dedicatória

*Dedico este trabalho
ao meu filho Isaac Gabriel
e a minha mãe Maria Verônica.*

**O progresso do homem não é mais
do que uma descoberta gradual de que as
suas perguntas não têm significado.**

Antoine de Saint-Exupéry

Elementary may be deep.

Tosio Kato

**O que sabemos é uma gota;
o que ignoramos é um oceano.**

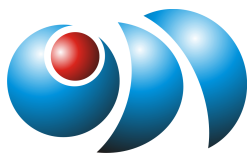
Isaac Newton

**A tarefa é, não tanto para ver
o que ninguém viu ainda, mas pensar o que
ninguém ainda pensou,
sobre o que todo mundo vê.**

Erwin Schrödinger

Até aqui nos ajudou o Senhor.

1 Samuel 7:12 b



Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter permitido mais esta conquista.

Agradeço ao meu orientador, professor Adán Corcho, por ter acreditado no meu trabalho mesmo em meio as dificuldades no decorrer do mesmo.

Aos professores Dr. Felipe Linares, Dr. Feliciano Vitória, Dr. Jaime Angulo, Dr. Mahendra Panthee por terem participado da minha banca, sinto-me honrado com a contribuição de cada um.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Ao Instituto de Matemática da UFBA pelo acolhimento no período que passei nessa instituição.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, em especial ao professor Dr. Marcelo Cavalcanti, pela oportunidade de participar do evento *Control of Dispersive Equations* em 2011.

Ao Instituto de Matemática da UFRJ pelo acolhimento nas diversas ocasiões que estive nessa instituição e aos amigos que ali tive a oportunidade de fazer.

A FAPEAL, pelo apoio financeiro para que eu apresentasse parte desta Tese no evento internacional *Mathematical Congress of the Americas 2013*, realizado em Guanajuato - México.

Ao “garotão”, Márcio Cavalcante de Melo, pelo constante apoio.

Aos amigos de turma Rodrigo Fernandes de Moura Melo e Kennerson Nascimento de Sousa Lima pelo companheirismo e apoio.

Aos amigos Abraão Mendes, Micael Dantas, Adina Rocha, Antônio Marcos Laranqueiras, Eduardo Santana, Davi Santos e Jamerson Douglas pela amizade e apoio.

A toda minha família pela compreensão do meu isolamento nos momentos de produção deste Tese.



Resumo

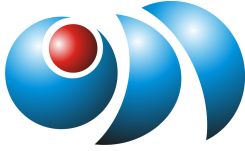
Estudamos o estudo do problema de Cauchy para um sistema acoplado de equações tipo Schrödinger que aparece na modelagem de problemas de óptica não linear, a saber:

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + p\partial_x^2 u(x, t) - \theta u(x, t) + \bar{u}(x, t)v(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ i\sigma\partial_t v(x, t) + q\partial_x^2 v(x, t) - \alpha v(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) = 0, & p, q = \pm 1, \sigma > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde os dados iniciais são considerados em espaços de Sobolev do tipo L^2 , ou seja, $(u_0, v_0) \in H^\kappa(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$.

Resultados de boa colocação local e global para este sistema, no caso periódico, foram obtidos por Angulo e Linares em [1]. Neste trabalho obtemos resultados de boa colocação local em diferentes regiões de índices de Sobolev do plano (κ, s) , as quais dependem do valor da constante $\sigma > 0$. Discutimos como diferentes valores da constante σ mudam a dinâmica do sistema quanto à regularidade das soluções locais. Além disso, obtemos resultados de boa colocação global quando $\sigma \neq 2$ e as regularidades de ambos os dados são iguais e negativas, ou seja, $\kappa = s < 0$. Por último são apresentados alguns exemplos, mostrando que a regularidade obtida em alguns dos casos da teoria local desenvolvida é a melhor possível a ser obtida usando o método do Ponto Fixo de Banach.

Palavras chaves: Problema de Cauchy, Equação de Schrödinger, Boa Colocação Local, Boa Colocação Global, Má Colocação, Estimativas Bilineares.



Abstract

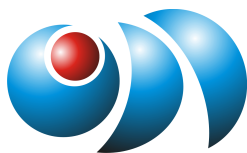
We study the Cauchy problem associated to the coupled Schrödinger equations, which appears modeling problems in nonlinear optics, namely:

$$\begin{cases} i\partial_t u(x, t) + p\partial_x^2 u(x, t) - \theta u(x, t) + \bar{u}(x, t)v(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ i\sigma\partial_t v(x, t) + q\partial_x^2 v(x, t) - \alpha v(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) = 0, & p, q = \pm 1, \sigma > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

where the initial data are considered in the classical Sobolev spaces $(u_0, v_0) \in H^\kappa(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$.

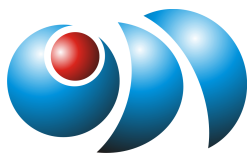
Well-posedness results for this system, in the periodic case, were obtained by Angulo and Linares in [1]. In this work we develop a local theory for the system, where the regularity (κ, s) of the initial data depends on the different situations of the parameter $\sigma > 0$. Also, we obtain global well-posedness results when $\sigma \neq 2$ and for negative indices $\kappa = s < 0$ included in the local theory developed. Finally, we show some ill-posedness results.

Key words: Cauchy Problem, Schrödinger Equation, Local Well-Posedness, Global Well-Posedness, Ill-Posedness, Bilinear Estimates.



Lista de Figuras

1	Teoria local para $\sigma > 2$	6
2	Teoria local para $0 < \sigma < 2$	6
3	Teoria local para $\sigma = 2$	6
4	Sobreposição das teorias locais	6
1.1	Região onde a estimativa (1.19) é válida no caso $0 < a < 1/2$	12
1.2	Região onde a estimativa (1.20) é válida no caso $0 < a < 1/2$	12
1.3	Região onde a estimativa (1.19) é válida no caso $a > 1/2$	12
1.4	Região onde a estimativa (1.20) é válida no caso $a > 1/2$	12
1.5	Região onde a estimativa (1.19) é válida no caso $a = 1/2$	13
1.6	Região onde a estimativa (1.20) é válida no caso $a = 1/2$	13
3.1	Região onde a Proposição 1.1 não é válida assumindo $\sigma = 1$	64



Conteúdo

Introdução	1
1 Boa Colocação Local	7
1.1 Espaço de funções e Teoria local	8
1.2 Resultados preliminares	10
1.3 Estimativas bilineares	11
1.4 Demonstração da Proposição 1.1	13
1.4.1 Prova no caso: $0 < a < 1/2 \Leftrightarrow \sigma > 2$	16
1.4.2 Prova no caso: $a > 1/2 \Leftrightarrow 0 < \sigma < 2$	18
1.4.3 Prova no caso: $a = 1/2 \Leftrightarrow \sigma = 2$	21
1.5 Demonstração da Proposição 1.2	22
1.5.1 Prova no caso: $0 < a < 1/2 \Leftrightarrow \sigma > 2$	25
1.5.2 Prova no caso: $a > 1/2 \Leftrightarrow \sigma < 2$	29
1.5.3 Prova no caso: $a = 1/2 \Leftrightarrow \sigma = 2$	35
1.6 Prova dos Teoremas de Boa colocação Local	35
1.7 Comentários finais	38
2 Resultados Globais	41
2.1 Resultados Preliminares	42
2.2 O Teorema de Boa Colocação Local Revisitado	45
2.3 Leis quase conservadas em L^2	47
2.4 Prova do Teorema de Boa Colocação Global	52
3 Resultados de Má colocação	55
3.1 Teoria Geral de Má Colocação	55
3.2 Segunda Derivada aplicada a funções elementares	58
3.3 Resultados de má-colocação	61



Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo do Problema de Cauchy para um sistema que modela problemas da óptica não-linear. De maneira mais precisa estudaremos o seguinte modelo matemático:

$$(1) \quad \begin{cases} i\partial_t u(x, t) + p\partial_x^2 u(x, t) - \theta u(x, t) + \bar{u}(x, t)v(x, t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ i\sigma\partial_t v(x, t) + q\partial_x^2 v(x, t) - \alpha v(x, t) + \frac{1}{2}u^2(x, t) = 0, & p, q = \pm 1, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde u e v são funções que assumem valores complexos, α , θ e σ são números reais que representam parâmetros físicos do sistema, sendo $\sigma > 0$.

Observamos que o modelo estabelece o acoplamento não-linear de duas equações dispersivas de tipo Schrödinger através de termos quadráticos

$$(2) \quad N_1(u, v) = \bar{u}v \quad \text{e} \quad N_2(u) = \frac{1}{2}u^2.$$

Fisicamente, de acordo com o trabalho [22], as funções complexas u e v representam pacotes de amplitudes do primeiro e segundo harmônico, respectivamente, de uma onda óptica. Os valores de p e q podem ser 1 ou -1, dependendo dos sinais fornecidos entre as relações de dispersão/difração e a constante positiva σ mede os índices de grandeza de dispersão/difração. O interesse em propriedades não-lineares de materiais ópticos têm atraído a atenção de físicos e matemáticos nos últimos anos. Diversas pesquisas sugerem que explorando a reação não-linear da matéria, a capacidade *bit-rate* de fibras ópticas pode ser aumentada substancialmente e conseqüentemente uma melhoria na velocidade e economia de transmissão e manipulação de dados. Particularmente, em materiais não centrossimétricos (aqueles que não possuem simetria de inversão ao nível molecular) os efeitos não-lineares de ordem mais baixa originam a susceptibilidade de segunda ordem, o que significa que a resposta não-linear para o campo elétrico é de ordem quadrática ver, por exemplo, os artigos [18] e [13].

Com relação as propriedades qualitativas das soluções do Problema de Cauchy (1) sabemos que no caso em que $p = q = 1$ o sistema foi estudado por F. Linares e J. Pava em [1] para dados iniciais u_0, v_0 pertencentes a um mesmo espaço de Sobolev definido no ambiente periódico ($x \in \mathbb{T}$), ou seja, nos seguintes espaços de Hilbert:

$$H_{per}^s := H^s(\mathbb{T}) = \left\{ f \in \mathcal{P}'; (1 + n^2)^{s/2} \widehat{f}(n) \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\},$$

onde $\widehat{f}(n)$ denota os coeficientes de Fourier de f . Eles obtiveram resultados de *boa colocação local* para todo $s \geq 0$, o que de modo formal significa que para cada um desses dados se verificam as seguintes afirmações:

- **Existência:** Existem um tempo $T_0 > 0$, um subespaço de Banach $\mathcal{Y} \subset H_{per}^s \times H_{per}^s$ e uma função $(u, v) \in C([0, T_0]; \mathcal{Y})$ que é solução de (1) num sentido apropriado.
- **Unicidade:** Existe no máximo uma solução com as condições do item anterior.
- **Dependência contínua:** A aplicação dado-solução $(u_0, v_0) \mapsto (u, v)$ é contínua.

No caso de dados em $L_{per}^2 \times L_{per}^2$ foi provado que as correspondentes soluções locais obtidas podem ser estendidas a todo intervalo de tempo $[0, T]$ usando a conservação da “massa” pelo fluxo do sistema, isto é, o sistema satisfaz a seguinte lei de conservação:

$$(3) \quad E(u(t), v(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (|u|^2 + 2\sigma|v|^2) dx = E(u_0, v_0).$$

Observação 0.1 *Os autores também comentam, na Observação 2.3 de [1], que podem ser obtidos resultados para dados com regularidade mais baixa quando $\sigma \neq 1$, a saber: Boa colocação em $H_{per}^s \times H_{per}^s$ para $s > -1/2$. Além disso, nesse mesmo trabalho se estabeleceram resultados de estabilidade e instabilidade para determinadas classes de pulsos periódicos. Outro trabalho dedicado ao estudo da existência e estabilidade de ondas tipo pulsos para este modelo é devido a A. Yew (ver [26]).*

A técnica usada em [1] para obter os resultados de boa colocação local seguiu de perto o trabalho [19], desenvolvido por C. Kenig, G. Ponce e L. Vega, onde foi realizado o estudo do problema de valor inicial para uma equação de Schrödinger com não-linearidades quadráticas tanto em domínio periódico como contínuo; de forma mais

precisa, eles consideraram o seguinte problema de valor inicial:

$$(4) \quad \begin{cases} iu_t + \partial_x^2 u = N_j(u, \bar{u}), & x \in \mathbb{R}(\mathbb{T}), t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

onde $N_1(u, \bar{u}) = u\bar{u}$, $N_2(u, \bar{u}) = u^2$ e $N_3(u, \bar{u}) = \bar{u}^2$. Os autores de [19] consideraram dados iniciais no espaço

$$H^s := H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}); (1 + \xi^2)^{s/2} \widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

onde $\widehat{f}(\xi)$ denota a Transformada de Fourier de f . Eles provaram boa colocação local para $s > -1/4$ no caso $j = 1$ e para $s > -3/4$ nos casos $j = 2, 3$. Também foram considerados dados iniciais no ambiente periódico, isto é, dados em H_{per}^s e resultados similares foram obtidos, ei-los: Boa colocação local para $s \geq 0$ quando $j = 1$ e para $s > -1/2$ quando $j = 2, 3$. Para provar a teoria local eles tomaram como base os espaços de restrição de Fourier, conhecidos na literatura como espaços $X^{s,b}$ e introduzidos por J. Bourgain em [3]. Dentro desse espaço funcional foram provadas estimativas bilineares finas que combinadas com o Teorema do Ponto Fixo de Banach aplicado ao operador integral associado a (4) permitiram obter as soluções locais desejadas. A carência de uma lei de conservação para (4) não permite obter resultados globais em determinado espaço como usualmente é feito.

Notamos que os resultados apresentados em [19] podem ser aplicados ao sistema (1) no caso em que $\sigma = 1$. Nessa situação não é difícil obter a boa colocação local em $H^s \times H^s$ para $s > -1/4$, no entanto uma pergunta surge naturalmente:

Qual será o cenário da boa colocação local e global do sistema (1) quando $\sigma \neq 1$ e para dados iniciais tomados em espaços de Sobolev não necessariamente com a mesma regularidade?

Com o objetivo de dar uma resposta ao questionamento anterior consideramos neste trabalho o Problema de Cauchy (1) com qualquer $\sigma > 0$ e dados iniciais (u_0, v_0) pertencentes a espaços de Sobolev da forma $H^k \times H^s$. Até onde sabemos, não conhecemos na literatura resultados de boa colocação para (1) no caso em que os dados iniciais são tomados em espaços de Sobolev definidos na reta. Em nosso estudo, além da referência [19], será de bastante utilidade o trabalho realizado por A. J. Corcho e C. Matheus em

[12], onde eles tratam o sistema de Schrödinger-Debye, modelado por

$$(5) \quad \begin{cases} iu_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 u = uv, & x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ \mu v_t + v = \pm|u|^2, & \mu > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

o qual também possui não-linearidades do tipo quadrático; e os autores desenvolvem uma teoria local e global em espaços de Sobolev com regularidades diferentes. O método empregado por eles é também baseado na obtenção de estimativas bilineares finas para os termos de acoplamento, em espaços de Bourgain adequados, bem como o uso de técnicas de ponto fixo. Os resultados globais são obtidos através de uma técnica conhecida como *método-I*, implementada pela primeira vez por J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao em [8].

A estabilidade de soluções tipo ondas viajantes para o sistema 1 foi estudado em [21], na seção 4 do mesmo. De acordo com métodos variacionais, para mostrar a estabilidade de tais ondas solitárias basta garantir que o ponto crítico é, na verdade, um minimizador local do correspondente problema variacional restrita. Para mais detalhes ver [7], [16] e [23].

Ao leitor interessado em obter mais informações a respeito de problemas relacionados com equações dispersivas recomendamos fortemente a consulta de [6], [5], [20] e [25].

O trabalho está estruturado da seguinte forma. No Capítulo 1 desenvolveremos uma teoria local em espaços de Bourgain, seguindo de perto as técnicas usadas em [19] e [12], onde para cada σ positivo obtemos resultados bastante gerais em espaços de Sobolev com regularidades não necessariamente iguais. Especificamente, provaremos resultados de boa colocação local para dados $(u_0, v_0) \in H^\kappa \times H^s$ com índices $(\kappa, s) \in \mathcal{W}_\sigma$, onde a região plana \mathcal{W}_σ é definida da seguinte forma:

Definição 0.1 *Dado $\sigma > 0$, dizemos que o par de índices de Sobolev (κ, s) verifica a hipótese H_σ se satisfaz uma das seguintes condições:*

a) $|\kappa| - 1/2 < s < \min\{\kappa + 1/2, 2\kappa + 1/2\}$ para $0 < \sigma < 2$;

b) $\kappa = s \geq 0$ para $\sigma = 2$;

c) $|\kappa| - 1 < s < \min\{\kappa + 1, 2\kappa + 1\}$ para $\sigma > 2$.

Desse modo, podemos trabalhar com um conjunto \mathcal{W}_σ , definido como

$$(6) \quad \mathcal{W}_\sigma = \left\{ (\kappa, s) \in \mathbb{R}^2; (\kappa, s) \text{ verifica a hipótese } H_\sigma \right\}.$$

O enunciado do teorema que descreve a teoria local será descrito com maior rigor no início desse capítulo.

No Capítulo 2 usaremos o *método-I*, introduzido em [8] para estender globalmente as soluções locais obtidas para dados em $H^s \times H^s$ com $s \leq 0$. Especificamente, $-1/4 \leq s \leq 0$ para $0 < \sigma < 2$ e $-1/2 \leq s \leq 0$ para $\sigma > 2$. Neste ponto será crucial o uso de estimativas do tipo Strichartz, refinadas em espaços de Bourgain, para a equação de Schrödinger, a qual pode ser vista em detalhes em [9].

Finalmente, no Capítulo 3 apresentaremos alguns resultados de *má colocação* para o sistema (1). Iniciaremos esse capítulo introduzindo a noção de má colocação a ser explorada, que será o fato de comprovar que aplicação dado-solução deixa de ser de classe C^2 com respeito a dados iniciais em algumas regiões fora de \mathcal{W}_σ . Os resultados que serão exibidos neste sentido correspondem ao caso em que $0 < \sigma < 2$ e estão baseados nas ideias desenvolvidas em [17] e [2].

Teorema 0.1 *Sejam $\sigma > 0$ e $(u_0, v_0) \in H^\kappa \times H^s$ com $(\kappa, s) \in \mathcal{W}_\sigma$, definida em (6). O problema de Cauchy (1) é localmente bem posto em $H^\kappa \times H^s$ no seguinte sentido: para cada $\rho > 0$, existem $T = T(\rho) > 0$ e $b > 1/2$ tais que para todo dado inicial com $\|u_0\|_{H^\kappa} + \|v_0\|_{H^s} < \rho$, existe uma única solução (u, v) para (1) satisfazendo as seguintes condições:*

$$(7) \quad \psi_T(t)u \in X^{\kappa, b} \quad e \quad \psi_T(t)v \in X_\sigma^{s, b},$$

$$(8) \quad u \in C([0, T]; H^\kappa) \quad e \quad v \in C([0, T]; H^s).$$

Além disso, a aplicação dado-solução é localmente Lipschitziana.

As Figuras 1, 2, 3 e 4 abaixo ilustram as regiões de boa colocação local obtidas neste trabalho.

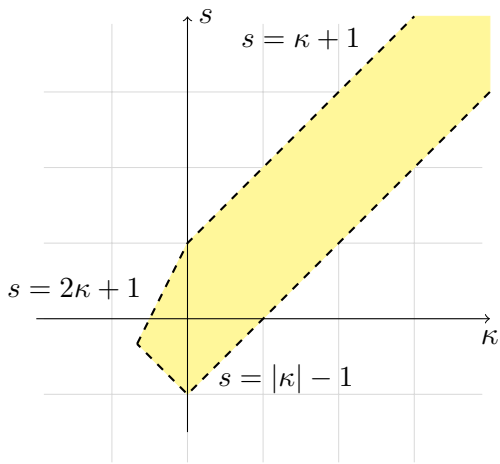


Figura 1: Teoria local para $\sigma > 2$

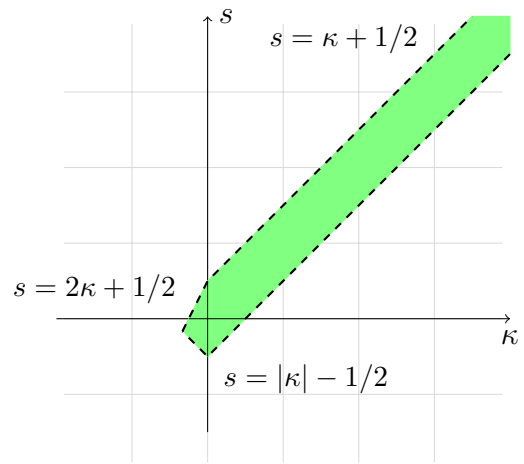


Figura 2: Teoria local para $0 < \sigma < 2$

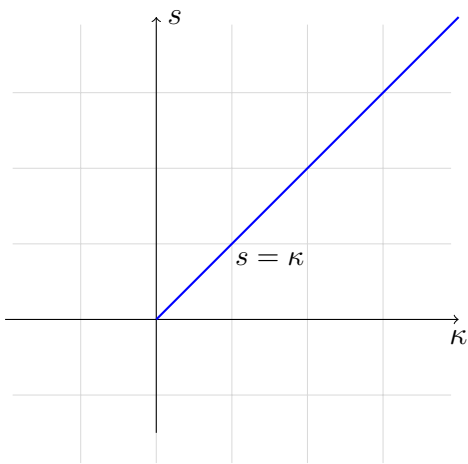


Figura 3: Teoria local para $\sigma = 2$

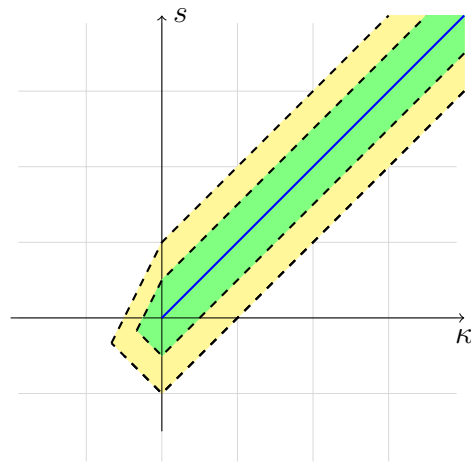


Figura 4: Sobreposição das teorias locais

1

Boa Colocação Local

Neste capítulo desenvolveremos a teoria de boa colocação local para o Problema de Cauchy (1), no caso em que $(p, q) = (1, 1)$. Com o objetivo de simplificar cálculos futuros trabalharemos com o seguinte problema equivalente:

$$(1.1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + u_{xx} = \theta u - \bar{u}v, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ i\partial_t v + av_{xx} = a\alpha v - \frac{a}{2}u^2, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{cases}$$

onde os dados iniciais (u_0, v_0) são considerados no espaço de Sobolev $H^\kappa \times H^s$ e o parâmetro a verifica a relação

$$(1.2) \quad a = \frac{1}{\sigma}, \quad \sigma > 0.$$

A técnica que será usada para mostrar a existência de soluções locais em relação ao tempo baseia-se na aplicação do Teorema do Ponto Fixo de Banach ao sistema de equações integrais:

$$(1.3) \quad \begin{cases} u(t) = U(t)u_0 - i \int_0^t U(t-t') \{\theta u - \bar{u}v\} dt', \\ v(t) = U_a(t)v_0 - i \int_0^t U_a(t-t') \left\{ a\alpha v - \frac{a}{2}u^2 \right\} dt'. \end{cases}$$

No sistema (1.3) $U(t)$ e $U_a(t)$ representam, respectivamente, os grupos de operadores unitários associados às equações lineares:

$$(1.4) \quad iu_t + u_{xx} = 0, \quad u(x, 0) = u_0,$$

e

$$(1.5) \quad iv_t + av_{xx} = 0, \quad v(x, 0) = v_0,$$

isto é, verificam as relações

$$(1.6) \quad \widehat{U(t)u_0}(\xi) = e^{it\xi^2} \widehat{u_0}(\xi) \quad \text{e} \quad \widehat{U_a(t)v_0}(\xi) = e^{iat\xi^2} \widehat{v_0}(\xi),$$

onde \hat{f} denota a transformada de Fourier de f , definida por

$$(1.7) \quad \mathcal{F}(f) := \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx.$$

Observação 1.1 *Observamos que em (1.3) os termos lineares θu e av foram contemplados na parte não homogênea das equações integrais. Isso foi feito para facilitar os cálculos nas estimativas não-lineares que serão necessárias para estabelecer a teoria local.*

1.1 Espaço de funções e Teoria local

O esquema iterativo de tipo ponto fixo será desenvolvido dentro da estrutura dos espaços de Bourgain correspondentes a cada um dos grupos definidos em (1.6). Esses espaços podem ser associados a qualquer equação dispersiva do modo descrito a seguir.

Dada uma função mensurável $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vamos considerar o problema de Cauchy linear:

$$(1.8) \quad \begin{cases} iw_t - \phi(-i\partial_x)w = 0, & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ w(\cdot, 0) = w_0 \in H^s, \end{cases}$$

onde $\phi(-i\partial_x)$ é o operador definido por $(\phi(-i\partial_x)f)^\wedge(\xi) = \phi(\xi)\hat{f}(\xi)$. Assim, a solução do problema (1.8) é dada por $w(\cdot, t) = W_\phi(t)w_0$, sendo $W_\phi(t) = e^{-it\phi(-i\partial_x)}$ o grupo de operadores unitários correspondente. Veja [20] para mais detalhes.

Definição 1.1 *Dados $s, b \in \mathbb{R}$, o espaço $X^{s,b}(\phi)$ é o complemento do espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ com respeito a norma*

$$\begin{aligned} \|f\|_{X^{s,b}(\phi)} &= \|W_\phi(-t)f\|_{H_t^b(\mathbb{R}, H_x^s)} \\ &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau \rangle^b \mathcal{F}(e^{it\phi(-i\partial_x)} f)(\xi, \tau)\|_{L_{\xi, \tau}^2} \\ &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau + \phi(\xi) \rangle^b \widehat{f}(\xi, \tau)\|_{L_{\xi, \tau}^2}, \end{aligned}$$

onde $\langle \cdot \rangle = \sqrt{1 + |\cdot|^2} \sim 1 + |\cdot|$.

Em nosso estudo usaremos os espaços de Bourgain definidos pelas funções $\phi(\xi) = \xi^2$ e $\phi_a(\xi) = a\xi^2$. Para simplificar a notação denotaremos as respectivas normas desses espaços como segue:

$$(1.9) \quad \|u\|_{X^{\kappa,b}} = \|\langle \xi \rangle^\kappa \langle \tau + \xi^2 \rangle^b \widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_{\xi,\tau}^2},$$

$$(1.10) \quad \|v\|_{X_a^{s,b}} = \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau + a\xi^2 \rangle^b \widehat{v}(\xi, \tau)\|_{L_{\xi,\tau}^2}.$$

Seja $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função corte tal que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ e que satisfaz

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } |t| \leq 1, \\ 0, & \text{se } |t| \geq 2, \end{cases}$$

com $0 \leq \psi(t) \leq 1$. Para cada $0 < T \leq 1$ definimos $\psi_T(t) := \psi(\frac{t}{T})$. Usaremos esta função diversas vezes no decorrer do texto.

Agora estamos em condições de enunciar o teorema que descreve a teoria local para o sistema (1.1).

Teorema 1.1 *Sejam $\sigma = 1/a > 0$ e $(u_0, v_0) \in H^\kappa \times H^s$ com $(\kappa, s) \in \mathcal{W}_\sigma$, onde \mathcal{W}_σ é a região plana de índices de Sobolev definida em (6). Então, existem um tempo positivo $T = T(\|u_0\|_\kappa, \|v_0\|_s)$, um parâmetro real $b = b(\kappa, s) > 1/2$ e uma única solução $(u(\cdot, t), v(\cdot, t))$ de (1.1), definida em $[0, T]$, que satisfaz as seguintes condições:*

$$(1.11) \quad \psi_T(\cdot)u \in X^{\kappa,b} \quad \text{e} \quad \psi_T(\cdot)v \in X_a^{s,b},$$

$$(1.12) \quad (u, v) \in C([0, T]; H^\kappa \times H^s).$$

Além disso, para todo $0 < T' < T$, existe uma vizinhança $U' \times V'$ de (u_0, v_0) no espaço $H^\kappa \times H^s$ tal que a aplicação $(u_0, v_0) \mapsto (u(\cdot, t), v(\cdot, t))$, definida em $U' \times V'$, é Lipschitziana substituindo T por T' .

As demais partes do capítulo estão estruturadas do seguinte modo. Primeiro apresentaremos alguns resultados preliminares e propriedades básicas dos espaços de Bourgain. Em seguida, provaremos estimativas bilineares ótimas, nesses espaços, que serão cruciais para obter a teoria local descrita no Teorema 1.1, cuja prova será exibida na Seção 1.6. Finalmente, na Seção 1.7, comentaremos alguns pontos importantes com relação aos resultados obtidos.

Observação 1.2 *No final do capítulo discutimos os resultados para os casos em que $(p, q) \in \{(-1, -1), (1, -1), (-1, 1)\}$.*

1.2 Resultados preliminares

Nesta seção apresentamos alguns elementos básicos de cálculo e algumas estimativas lineares em espaços de Bourgain que serão de utilidade na obtenção dos resultados principais.

Começamos com os cálculos elementares descritos a seguir.

Lema 1.1 *Sejam $p, q > 0$ e $r = \min\{p, q\}$. Se $p + q > 1 + r$ então existe uma constante C , dependendo de p e q , tal que*

$$(1.13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\langle x - \alpha \rangle^p \langle x - \beta \rangle^q} \leq \frac{C}{\langle \alpha - \beta \rangle^r}.$$

Além disso, se $q > \frac{1}{2}$ então existe uma constante C , dependendo de q , tal que

$$(1.14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\langle \alpha_0 + \alpha_1 x + x^2 \rangle^q} \leq C \text{ para quaisquer } \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Uma prova detalhada das estimativas (1.13)-(1.14) pode ser encontrada em [14]. □

Prosseguimos com duas propriedades básicas dos espaços de Bourgain.

Lema 1.2 *Seja $s \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes afirmações:*

$$(1.15) \quad \|f\|_{X^{s, b'}(\phi)} \leq \|f\|_{X^{s, b}(\phi)}, \quad \text{para todo } b' \leq b.$$

$$(1.16) \quad X^{s, b}(\phi) \hookrightarrow C(\mathbb{R}; H^s) \quad \text{para todo } b > 1/2.$$

Demonstração: A primeira desigualdade segue diretamente da definição do espaço de Bourgain. A segunda propriedade decorre do teorema de imersão de Sobolev na reta, com relação à variável temporal. □

Finalizamos com um importante resultado referente a estimativas lineares para o grupo $W_\phi(t)$, definido por (1.8). Esses resultados foram estabelecidos por Ginibre, Tsutsumi e Velo, no artigo [15], para obter resultados de boa colocação local no contexto do sistema de Zakharov.

Lema 1.3 *Sejam b', b e T números reais tais que $-\frac{1}{2} < b' \leq 0 \leq b \leq b' + 1$ e $0 < T \leq 1$. Então, valem as seguintes desigualdades:*

$$(1.17) \quad \|\psi_1(t)W_\phi(t)w_0\|_{X^{s,b}(\phi)} \leq c \|w_0\|_{H^s},$$

$$(1.18) \quad \left\| \psi_T(t) \int_0^t W_\phi(t-t')F(t', \cdot)dt' \right\|_{X^{s,b}(\phi)} \leq cT^{1-b+b'} \|F\|_{X^{s,b'}(\phi)}.$$

Demonstração: A prova pode ser encontrada, por exemplo, no artigo [15]. \square

1.3 Estimativas bilineares

Com o objetivo de aplicar o método de ponto fixo para obter soluções em espaços de Bourgain para o sistema de equações integrais (1.3) será necessário usar a desigualdade (1.18) no caso das não-linearidades $F_1(u, v) = \bar{u}v$ e $F_2(u, w) = uw$, com os grupos gerados por $\phi_1(\xi) = \xi^2$ e $\phi_2(\xi) = a\xi^2$, respectivamente. Com o objetivo da técnica ter sucesso será crucial deduzir estimativas bilineares para F_j ($j = 1, 2$) em espaços de Bourgain adequados, isto é, deveremos obter desigualdades do tipo:

$$(1.19) \quad \|\bar{u}v\|_{X^{\kappa,-d}} \leq c\|u\|_{X^{\kappa,b}} \cdot \|v\|_{X_a^{s,b}}$$

e

$$(1.20) \quad \|uw\|_{X_a^{s,-d}} \leq c\|u\|_{X^{\kappa,b}} \cdot \|w\|_{X^{\kappa,b}},$$

onde lembramos que $a = 1/\sigma$. De maneira mais precisa, provaremos as duas proposições a seguir, que são os resultados mais importantes desta seção.

Proposição 1.1 *Sejam $u \in X^{\kappa,b}$ e $v \in X_a^{s,b}$ com $\kappa, s \in \mathbb{R}$, verificando uma das condições:*

$$(a) \quad s > |\kappa| - 1 \text{ quando } 0 < a < 1/2 \iff \sigma > 2;$$

$$(b) \quad s > |\kappa| - 1/2 \text{ quando } a > 1/2 \iff 0 < \sigma < 2;$$

$$(c) \quad s > |k| \text{ quando } a = 1/2 \iff \sigma = 2.$$

Então, existem parâmetros $b = b(\kappa, s) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e $d = d(\kappa, s) \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ tais que a estimativa (1.19) é válida.

Proposição 1.2 *Sejam $u, w \in X^{\kappa, b}$ e $\kappa, s \in \mathbb{R}$, verificando uma das condições:*

(a) $s < \min\{\kappa + 1, 2\kappa + 1\}$ quando $0 < a < 1/2 \iff \sigma > 2$;

(b) $s < \min\{\kappa + 1/2, 2\kappa + 1/2\}$ quando $a > 1/2 \iff 0 < \sigma < 2$;

(c) $\kappa \geq 0$ e $s \leq \kappa$ quando $a = 1/2 \iff \sigma = 2$.

Então, existem parâmetros $b = b(\kappa, s) \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ e $d = d(\kappa, s) \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ tais que a estimativa (1.20) é válida.

As figuras 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 e 1.6 apresentam regiões planares de índices de Sobolev (κ, s) onde as estimativas (1.19) e (1.20) são válidas em cada um dos casos do parâmetro $a = 1/\sigma$.

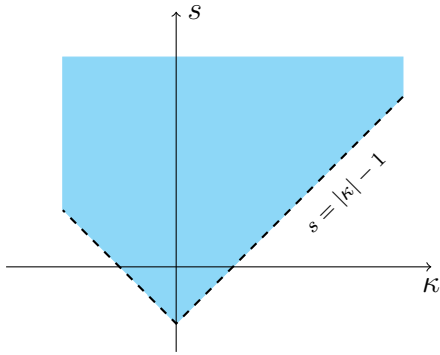


Figura 1.1: Região onde a estimativa (1.19) é válida no caso $0 < a < 1/2$.

(Caso: $\sigma > 2$)

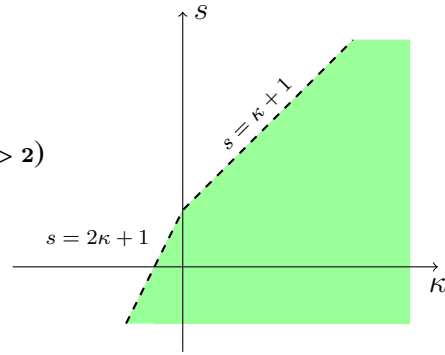


Figura 1.2: Região onde a estimativa (1.20) é válida no caso $0 < a < 1/2$.

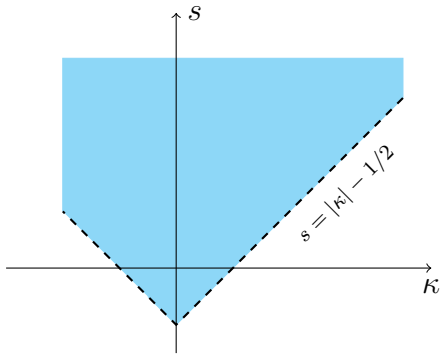


Figura 1.3: Região onde a estimativa (1.19) é válida no caso $a > 1/2$.

(Caso: $0 < \sigma < 2$)

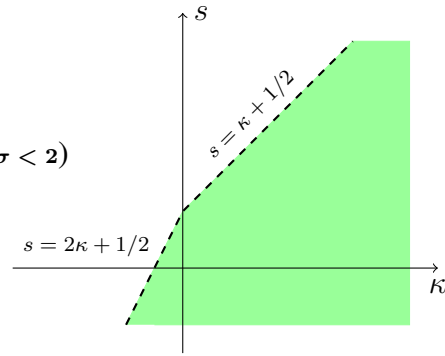


Figura 1.4: Região onde a estimativa (1.20) é válida no caso $a > 1/2$.

Observação 1.3 *Pode-se notar que, em cada caso de localização do parâmetro σ , a interseção das regiões exibidas, nas correspondentes figuras, dá lugar à respectiva região de boa colocação local encontrada para o sistema (1.1). Ou seja, as interseções dessas regiões dão lugar às figuras 1, 2 e 3, exibidas na introdução do texto.*

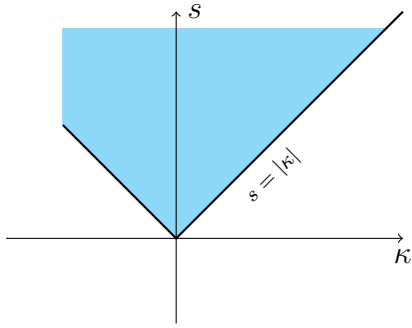


Figura 1.5: Região onde a estimativa (1.19) é válida no caso $a = 1/2$.

(Caso: $\sigma = 2$)

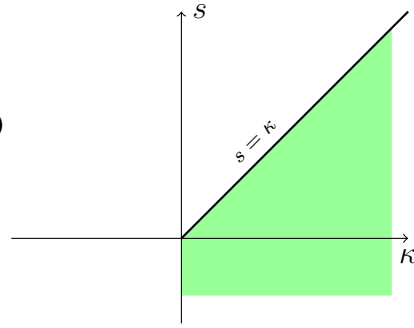


Figura 1.6: Região onde a estimativa (1.20) é válida no caso $a = 1/2$.

As próximas seções deste capítulo serão dedicadas às provas das Proposições 1.1 e 1.2.

1.4 Demonstração da Proposição 1.1

Esta seção será dedicada à demonstração da Proposição 1.1. A prova será dividida em 3 partes, cada uma delas atendendo às particularidades técnicas do problema de acordo com a localização do parâmetro de dispersão da segunda equação, isto é, estudaremos separadamente, e nessa ordem, os casos: $0 < a < 1/2$, $a > 1/2$ e $a = 1/2$. Antes de entrar nos detalhes técnicos de cada caso, provaremos um resultado auxiliar que permite substituir a demonstração da estimativa (1.19) pela análise da convergência de certas integrais em diferentes regiões de \mathbb{R}^4 .

Lema 1.4 *Sejam $b > 1/2$, $d > 1/4$ e $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3$ subconjuntos do espaço \mathbb{R}^4 tais que $\mathbb{R}^4 = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \cup \mathcal{R}_3$. A fim de provar a validade da desigualdade (1.19) é suficiente mostrar que as 3 expressões a seguir são limitadas:*

$$J_1(\xi, \tau) = \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_1}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2;$$

$$J_2(\xi_2, \tau_2) = \frac{1}{\langle \tau_2 + a\xi_2^2 \rangle^{2b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_2}}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi;$$

$$J_3(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_3}}{\langle \tau_1 - a\xi_2^2 + \xi^2 \rangle^{2d}} d\xi_2.$$

Demonstração: Primeiramente fazemos as mudanças

$$(1.21) \quad f(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^\kappa \widehat{u}(\xi, \tau) \quad \text{e} \quad g(\xi, \tau) = \langle \tau + a\xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \widehat{v}(\xi, \tau),$$

de modo que as normas em espaços de Bourgain podem ser trocadas pela norma do espaço $L^2(\mathbb{R}^2)$, ou seja

$$(1.22) \quad \|u\|_{X^{\kappa,b}} = \|f\|_{L_{\xi,\tau}^2} \quad \text{e} \quad \|v\|_{X_a^{s,b}} = \|g\|_{L_{\xi,\tau}^2}.$$

De modo a simplificar expressões muito extensas, vamos adotar a seguinte notação:

$$(1.23) \quad \begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2, & \xi = \xi_1 + \xi_2, \\ \rho = \tau + \xi^2, & \rho_1 = \tau_1 - \xi_1^2, \quad \rho_2 = \tau_2 + a\xi_2^2. \end{cases}$$

Assim, usando argumento de dualidade combinado com (1.21), (1.22) e (1.23) tem-se

$$\begin{aligned} \|\widehat{uv}\|_{X^{\kappa,-d}} &= \left\| \langle \tau + \xi^2 \rangle^{-d} \langle \xi \rangle^\kappa \widehat{uv}(\xi, \tau) \right\|_{L_{\xi,\tau}^2} \\ &= \left\| \langle \tau + \xi^2 \rangle^{-d} \langle \xi \rangle^\kappa (\widehat{u} * \widehat{v})(\xi, \tau) \right\|_{L_{\xi,\tau}^2} \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^\kappa}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^d} \widehat{u} * \widehat{v}(\xi, \tau) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^\kappa}{\langle \rho \rangle^d} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi_1, \tau_1)}{\langle \xi_1 \rangle^\kappa \langle \rho_1 \rangle^b} \cdot \frac{g(\xi_2, \tau_2)}{\langle \xi_2 \rangle^\kappa \langle \rho_2 \rangle^b} d\xi_2 d\tau_2 \right) \varphi(\xi, \tau) d\xi d\tau \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^\kappa \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle \rho \rangle^d \langle \rho_1 \rangle^b \langle \rho_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau \right| \\ &= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} |W(f, g, \varphi)|, \end{aligned}$$

onde $W(f, g, \varphi)$ é o funcional

$$(1.24) \quad W(f, g, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^\kappa \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle \rho \rangle^d \langle \rho_1 \rangle^b \langle \rho_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau.$$

Assim, para obter a estimativa (1.19) é suficiente provar que o funcional W é limitado, ou seja, que existe uma constante c , dependendo apenas de b e d , tal que

$$(1.25) \quad |W(f, g, \varphi)| \leq c \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}$$

para toda função φ com $\|\varphi\|_{L^2} \leq 1$.

A restrição da integração do funcional W a cada uma das regiões \mathcal{R}_i será denotada por

$$W_i(f, g, \varphi) = \int_{\mathcal{R}_i} \frac{\langle \xi \rangle^\kappa \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle \rho \rangle^d \langle \rho_1 \rangle^b \langle \rho_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau,$$

de onde segue-se que $|W| \leq |W_1| + |W_2| + |W_3|$. Assim, vamos estimar separadamente cada W_i .

Começamos estimando o funcional W_1 . Para tal estimativa usaremos a notação $d\vec{v} = d\xi d\tau$ e $d\vec{v}_2 = d\xi_2 d\tau_2$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz com relação às variáveis (ξ, τ) , tem-se

$$\begin{aligned} |W_1|^2 &= \left| \int_{\mathcal{R}_1} \frac{\langle \xi \rangle^\kappa \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle \rho \rangle^d \langle \rho_1 \rangle^b \langle \rho_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\vec{v}_2 d\vec{v} \right|^2 \\ (1.26) \quad &\leq \left\| \frac{\langle \xi \rangle^\kappa}{\langle \rho \rangle^d} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle \rho_1 \rangle^b \langle \rho_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2 \right\|_{L_{\xi, \tau}^2}^2 \cdot \|\varphi\|_{L_{\xi, \tau}^2}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \rho \rangle^{2d}} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-s}}{\langle \rho_1 \rangle^b \langle \rho_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2 \right|^2 d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Na última expressão de (1.26) podemos aplicar a desigualdade de Cauchy-Schwarz com relação às variáveis $\vec{v}_2 = (\xi_2, \tau_2)$, e depois o Teorema de Fubini, para obtermos

$$\begin{aligned} |W_1|^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \rho \rangle^{2d}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \rho_1 \rangle^{2b} \langle \rho_2 \rangle^{2b}} \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2)|^2 d\vec{v}_2 \right) d\vec{v} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |g(\xi_2, \tau_2)|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \rho \rangle^{2d}} |f(\xi_1, \tau_1)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \rho_1 \rangle^{2b} \langle \rho_2 \rangle^{2b}} \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2 d\vec{v} \right) d\vec{v}_2 \\ &\leq \sup_{\xi, \tau \in \mathbb{R}} |\widetilde{W}_1(\xi, \tau)| \int_{\mathbb{R}^2} |g(\xi_2, \tau_2)|^2 d\vec{v}_2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\xi - \xi_2, \tau - \tau_2)|^2 d\vec{v}, \end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{W}_1(\xi, \tau) = \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \rho_1 \rangle^{2b} \langle \rho_2 \rangle^{2b}} \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2.$$

Portanto,

$$(1.27) \quad |W_1|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 \left\| \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \rho \rangle^{2d}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \rho_1 \rangle^{2b} \langle \rho_2 \rangle^{2b}} \right) \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2 \right\|_{L_{\xi, \tau}^\infty}.$$

Procedendo de forma análoga, concluímos que

$$(1.28) \quad |W_2|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 \left\| \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \rho_2 \rangle^{2b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \rho_1 \rangle^{2b} \langle \rho \rangle^{2d}} \chi_{\mathcal{R}_2} d\vec{v} \right) \right\|_{L_{\xi_2, \tau_2}^\infty},$$

e

$$(1.29) \quad |W_3|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2 \|g\|_{L^2}^2 \left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \rho_1 \rangle^{2b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \rho \rangle^{2d} \langle \rho_2 \rangle^{2b}} \chi_{\mathcal{R}_3} d\vec{v}_2 \right) \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty}.$$

O Lema 1.14 e a desigualdade $\langle \xi \rangle^{2\kappa} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi_2 \rangle^{2|\kappa|}$ nos permitem chegar às seguintes estimativas:

$$(1.30) \quad \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau_2 + a\xi_2^2 \rangle^{2b}} \chi_{\mathcal{R}_1} d\vec{v}_2 \leq J_1(\xi, \tau),$$

$$(1.31) \quad \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s}}{\langle \tau_2 + a\xi_2^2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi \rangle^{2\kappa}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d}} \chi_{\mathcal{R}_2} d\vec{v} \leq J_2(\xi_2, \tau_2),$$

e

$$(1.32) \quad \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2s} \chi_{\mathcal{R}_3}}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d} \langle \tau_2 + a\xi_2^2 \rangle^{2b}} d\vec{v}_2 \leq J_3(\xi_1, \tau_1),$$

onde

$$J_1(\xi, \tau) = \frac{1}{\langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_1}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2,$$

$$J_2(\xi_2, \tau_2) = \frac{1}{\langle \tau_2 + a\xi_2^2 \rangle^{2b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_2}}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi,$$

$$J_3(\xi_1, \tau_1) = \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_3}}{\langle \tau_1 - a\xi_2^2 + \xi^2 \rangle^{2d}} d\xi_2.$$

Portanto, combinando (1.27), (1.28) e (1.29) com (1.30), (1.31) e (1.32), respectivamente, a prova da estimativa bilinear (1.19) segue da limitação de J_1 , J_2 e J_3 , conforme anunciado. \square

As próximas subseções serão dedicadas a estimar as expressões J_i , $i = 1, 2, 3$, nas diferentes situações do parâmetro a .

1.4.1 Prova no caso: $0 < a < 1/2 \Leftrightarrow \sigma > 2$

Uma análise cuidadosa da relação de dispersão, dada por

$$(1.33) \quad \rho - \rho_1 - \rho_2 = \xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2,$$

será crucial para fazer a escolha das regiões \mathcal{R}_i , $i = 1, 2, 3$. Segue de (1.33) que

$$\begin{aligned}
|\rho - \rho_1 - \rho_2| &= |(1-a)(\xi^2 + \xi_1^2) - 2a\xi\xi_1| \\
&\geq |1-a|(\xi^2 + \xi_1^2) - 2a|\xi\xi_1|, \\
(1.34) \quad &\geq (1-a)(\xi^2 + \xi_1^2) - a(\xi^2 + \xi_1^2) \\
&= (1-2a)(\xi^2 + \xi_1^2),
\end{aligned}$$

onde $1 - 2a > 0$ na última igualdade.

A relação $\xi_2 = \xi - \xi_1$ nos dá que $|\xi_2| \leq |\xi| + |\xi_1| \leq 2 \max\{|\xi|, |\xi_1|\}$. Assim, usando (1.34) obtemos a desigualdade

$$3 \max\{|\rho|, |\rho_1|, |\rho_2|\} \geq (1-2a) \max\{\xi^2, \xi_1^2\} \geq \frac{1-2a}{4} \xi_2^2.$$

Portanto, assumindo que $|\xi_2| \geq 1$ teremos

$$(1.35) \quad \frac{1}{\max\{|\rho|, |\rho_1|, |\rho_2|\}} \leq \frac{c_a}{\xi_2^2}.$$

Denotamos por $\rho_{max} = \max\{|\rho|, |\rho_1|, |\rho_2|\}$ e fazemos a escolha das regiões \mathcal{R}_i do modo seguinte:

$$(1.36) \quad \mathcal{R}_1 = \left\{ (\xi, \tau, \xi_2, \tau_2) \in \mathbb{R}^4; |\xi_2| \leq 1 \text{ ou } (|\xi_2| \geq 1 \text{ e } \rho_{max} = |\rho|) \right\};$$

$$(1.37) \quad \mathcal{R}_2 = \left\{ (\xi, \tau, \xi_2, \tau_2) \in \mathbb{R}^4; |\xi_2| \geq 1 \text{ e } \rho_{max} = |\rho_1| \right\};$$

$$(1.38) \quad \mathcal{R}_3 = \left\{ (\xi, \tau, \xi_2, \tau_2) \in \mathbb{R}^4; |\xi_2| \geq 1 \text{ e } \rho_{max} = |\rho_2| \right\}.$$

Mostraremos a seguir que J_1 , definido em (1.30), é limitado. Com efeito,

$$\begin{aligned}
J_1 &\leq \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \leq 1} \frac{d\xi_2}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} \\
&\quad + \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-4d} \chi_{\mathcal{R}_1}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \\
&= J_{1,1} + J_{2,2}.
\end{aligned}$$

A primeira integral verifica

$$J_{1,1} \leq \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi_2}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} \leq c,$$

pois $b > 1/2$. Por outro lado,

$$J_{1,2} = \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-4d} \chi_{\mathcal{R}_1}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2.$$

Assim, tomando d tal que $\frac{|\kappa| - s}{2} \leq d < \frac{1}{2}$ (o que é possível se $s > |\kappa| - 1$) temos que $J_{1,2} \leq c$, logo

$$J_1 = J_{1,1} + J_{1,2} \leq c.$$

Para mostrar que J_2 é limitado observamos que

$$J_2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-4b} \chi_{\mathcal{R}_2}}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi.$$

Então, escolhendo b tal que $b > \frac{1}{2} \geq \frac{|\kappa| - s}{2}$ (o que é possível se $s \geq |\kappa| - 1$) temos

$$J_2 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} \leq c.$$

desde que $d > 1/4$.

A estimacão para J_3 segue de forma análoga ao procedimento usado para estimar J_2 e assim encerramos a demonstracão desta Proposicão no caso $0 < a < 1/2$.

Observacão 1.4 *É importante notar que a restrição $d > 1/4$ no enunciado da Proposicão 1.1 apareceu naturalmente no processo de estimacão. As restriçoes $b > 1/2$ e $d < 1/2$ são impostas para futura utilidade na aplicacão do Teorema do Ponto Fixo e em particular, $b > 1/2$, para garantir o mergulho dos espaços de Bourgain na classe das funçoes contnuas. Por último, como faremos uso do Lema 1.3 com $b' = -d$ deveremos ter $b \leq 1 - d < 1 - 1/4 = 3/4$, de onde segue a restrição $b < 3/4$. Estas ponderaçoes se aplicam aos próximos casos.*

1.4.2 Prova no caso: $a > 1/2 \Leftrightarrow 0 < \sigma < 2$

De forma análoga ao que fizemos na subseçao anterior, vamos começar analisando a relaçao de dispersão.

É fácil ver que

$$\begin{aligned}
|\rho - \rho_1 - \rho_2| &= |\xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2| \\
&\geq |2\xi^2 - 2\xi\xi_2 + (1-a)\xi_2^2|, \quad \text{usando } a \geq \frac{1}{2} \text{ temos} \\
&= 2|\xi - \mu_a\xi_2| \cdot |\xi - (1-\mu_a)\xi_2|, \quad \text{onde } \mu_a = \frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2}.
\end{aligned}$$

Observe que a relação de dispersão acima tem duas regiões de singularidade, a saber, as retas $\xi = \mu_a\xi_2$ e $\xi = (1-\mu_a)\xi_2$ o que dificulta o aproveitamento da mesma. Observe que se $a = \frac{1}{2}$ então $\mu_a = 1 - \mu_a = \frac{1}{2}$ e se $a = 1$ então $\mu_a = 0$ (o caso $a = \frac{1}{2}$ será tratado separadamente, já o caso $a = 1$, não necessita de tamanha atenção apesar de ser o caso sem modificação).

Agora, vamos definir as regiões \mathcal{R}_i . Antes, considere

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= \{|\xi_2| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^4, \\
\mathcal{A}_2 &= \left\{ |\xi_2| \geq 1, |(1-a)\xi_2 - \xi| > \frac{2a-1}{4}|\xi_2| \right\} \subset \mathbb{R}^4, \\
\mathcal{A}_3 &= \left\{ |\xi_2| \geq 1, \left| \xi - \frac{1}{2}\xi_2 \right| > \frac{2a-1}{4}|\xi_2| \right\} \subset \mathbb{R}^4.
\end{aligned}$$

Note que se $\left| \xi - \frac{1}{2}\xi_2 \right| \leq \frac{2a-1}{4}|\xi_2|$ e $|(1-a)\xi_2 - \xi| \leq \frac{2a-1}{4}|\xi_2|$ e ainda $|\xi_2| \geq 1$ então

$$\begin{aligned}
\left(a - \frac{1}{2}\right)|\xi_2| &= \left| \left(\xi - \frac{1}{2}\xi_2\right) + ((1-a)\xi_2 - \xi) \right| \\
&\leq \frac{2a-1}{4}|\xi_2| + \frac{2a-1}{4}|\xi_2| = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2}\right) |\xi_2|.
\end{aligned}$$

Daí, se tomarmos elementos que estão nos complementares dos conjuntos \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 e \mathcal{A}_3 chegaremos a conclusão que $1 \leq 1/2$ o que nos leva a um absurdo, ou seja, $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3$.

Considere agora

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{3,1} &= \mathcal{A}_3 \cap \{|\rho| \geq \max\{|\rho_1|, |\rho_2|\}\}, \\
\mathcal{A}_{3,2} &= \mathcal{A}_3 \cap \{|\rho_2| \geq \max\{|\rho_1|, |\rho|\}\}, \\
\mathcal{A}_{3,3} &= \mathcal{A}_3 \cap \{|\rho_1| \geq \max\{|\rho|, |\rho_2|\}\}.
\end{aligned}$$

Lembre que $|2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2| \leq 3 \max\{|\rho|, |\rho_1|, |\rho_2|\}$.

Sejam $\mathcal{R}_1 = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_{3,1}$, $\mathcal{R}_2 = \mathcal{A}_{3,2}$ e $\mathcal{R}_3 = \mathcal{A}_{3,3}$

Mostremos que J_1 é limitado. De fato, se $|\xi_2| \leq 1$ então J_1 é equivalente a

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \leq 1} \frac{1}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq c.$$

Se $|\xi_2| \geq 1$ então J_1 é limitado por

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{A}_2}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2.$$

Fazendo a mudança de variável $\eta = \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2$, temos que

$$d\eta = -2((1-a)\xi_2 - \xi) d\xi_2$$

e, usando o fato de que $|\kappa| - s \leq 1/2$ vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{A}_2}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 &\leq c \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-1} \chi_{\mathcal{A}_2}}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\eta \\ &\leq c \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\eta \leq c. \end{aligned}$$

Observe agora que em $\mathcal{A}_{3,1}$ temos:

$$|(1-a)\xi_2 - \xi| = \left| \frac{1}{2}\xi_2 - \xi + \left(\frac{1}{2} - a\right)\xi_2 \right| \geq \left(a - \frac{1}{2}\right) |\xi_2| - \frac{2a-1}{4} |\xi_2| \geq c|\xi_2|.$$

Para concluir a limitação de J_1 basta estimar

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{A}_{3,1}}}{\langle \tau - (a-1)\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 &\leq c \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \geq 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-1} \chi_{\mathcal{A}_{3,1}}}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\eta \\ &\leq c \frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\eta \leq c. \end{aligned}$$

Para mostrar que J_2 é limitado basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \tau + a\xi^2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_2}}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi &= \frac{1}{\langle \rho_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{A}_{3,2}}}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \\ &\leq \frac{1}{\langle \rho_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq 4\langle \rho_2 \rangle} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \rho_2 \rangle^{2b-2d}}. \end{aligned}$$

Na primeira desigualdade acima fizemos a mudança de variável $\eta = \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2$ e usamos o fato seguinte

$$|\eta| = |\rho_2 + (\rho - \rho_1 - \rho_2)| \leq 4|\rho_2|.$$

Resta-nos mostrar J_3 . Fazendo uso do argumento apresentado acima obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \tau - \xi_1^2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{R}_3}}{\langle \tau_1 - a\xi_2^2 + \xi^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 &= \frac{1}{\langle \rho_1 \rangle^{2b}} \int_{|\xi_2| > 1} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|} \chi_{\mathcal{A}_{3,3}}}{\langle \tau_1 - a\xi_2^2 + \xi^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 \\ &\leq \frac{1}{\langle \rho_1 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq 4\langle \rho_1 \rangle} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2s+2|\kappa|-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \rho_1 \rangle^{2b-2d}}. \end{aligned}$$

Observe que usamos o fato que $\tau_1 - a\xi_2^2 + \xi^2 = \rho_1 + (\rho - \rho_1 - \rho_2)$.

Isso encerra a demonstração da Proposição no caso $a > \frac{1}{2}$.

□

1.4.3 Prova no caso: $a = 1/2 \Leftrightarrow \sigma = 2$

Como nos outros casos, iniciamos observando que

$$\begin{aligned} |\rho - \rho_1 - \rho_2| &= \left| \xi^2 + \xi_1^2 - \frac{1}{2}\xi_2^2 \right| \\ &= \left| 2\xi^2 + 2\xi\xi_2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 \right| \\ &= 2 \left| \xi + \frac{1}{2}\xi_2 \right|^2. \end{aligned}$$

Neste caso, não temos como aproveitar a relação de dispersão, veremos que os resultados obtidos de má - colocação justificam este fato.

Sendo assim, consideremos $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}^4$ e $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \emptyset$. Assim, resta mostrar que J_1 é limitado.

Se $|\kappa| \leq s$ então J_1 (1.30) é equivalente a

$$\frac{1}{\langle \rho \rangle^{2d}} \int_{|\xi_2| \leq 1} \frac{1}{\langle \tau - \frac{1}{2}\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq c,$$

pois $b > 1/2$ e $d > 0$. Com isso, encerramos a demonstração da proposição.

Observação 1.5 Neste caso não foi possível aproveitar a relação de dispersão para ganhar regularidade. Pensando na relação de dispersão como um polinômio do segundo grau na variável ξ tendo seus coeficientes dependendo de ξ_2 , isto é,

$$p(\xi) = 2\xi^2 - 2\xi\xi_2 + (1 - a)\xi_2^2,$$

observamos que o fato da constante positiva a está entre zero e meio implica que p não admite raízes reais e com isso podemos aproveitar o grau de p para ganhar regularidade. Já no caso que $a > \frac{1}{2}$, onde p admite duas raízes reais diferentes, foi possível, separando as raízes, aproveitar o grau de cada fator do polinômio p fatorado. Por fim, no caso $a = \frac{1}{2}$ temos uma raiz com multiplicidade dois e neste caso não foi possível aproveitar a relação de dispersão.

1.5 Demonstração da Proposição 1.2

Dedicamos esta seção à demonstração da Proposição 1.2. Seguindo o raciocínio da seção anterior, a prova será dividida em três partes, cada uma delas analisando um intervalo de definição para a constante a definida em (1.2). Antes de entrar nos detalhes técnicos de cada caso, provaremos um resultado auxiliar que permiti substituir a demonstração da estimativa (1.20) pela prova da convergência de certas integrais em diferentes regiões de \mathbb{R}^4 .

Lema 1.5 *Sejam $b > 1/2$, $d > 1/4$ e $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ subconjuntos do \mathbb{R}^4 tais que $\mathbb{R}^4 = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$. Afim de provar a validade da desigualdade (1.20) é suficiente mostrar que as três expressões a seguir são limitadas:*

$$J_4 = \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2;$$

$$J_5 = \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_2}}{\langle \tau_2 + (a - 1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi;$$

$$J_6 = \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2.$$

Demonstração: As regiões $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ e \mathcal{S}_3 serão definidas posteriormente, pois dependem do valor de a .

Vamos definir $f(\xi, \tau) = \langle \tau + \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^\kappa \widehat{u}(\xi, \tau)$ e $g(\xi, \tau) = \langle \tau + \xi^2 \rangle^b \langle \xi \rangle^s \widehat{w}(\xi, \tau)$.

Note que $\|f\|_{L_{\xi,\tau}^2} = \|u\|_{X^{\kappa,b}}$ e $\|g\|_{L_{\xi,\tau}^2} = \|w\|_{X^{s,b}}$.

Afim de simplificar a notação adotaremos, no que segue, $d\vec{v} = d\xi d\tau$ e $d\vec{v}_2 = d\xi_2 d\tau_2$.

$$\begin{aligned}
\|u \cdot w\|_{X_a^{s,-d}} &= \left\| \langle \tau + a\xi^2 \rangle^{-d} \langle \xi \rangle^s \widehat{u \cdot w}(\xi, \tau) \right\|_{L_{\xi,\tau}^2} \\
&= \left\| \langle \tau + a\xi^2 \rangle^{-d} \langle \xi \rangle^s \widehat{u} * \widehat{w}(\xi, \tau) \right\|_{L_{\xi,\tau}^2} \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + a\xi^2 \rangle^d} \widehat{u} * \widehat{w}(\xi, \tau) \cdot \varphi(\xi, \tau) d\vec{v} \right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^s}{\langle \tau + a\xi^2 \rangle^d} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) d\vec{v}_2}{\langle \xi_1 \rangle^\kappa \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b \langle \xi_1 \rangle^s \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^b} \right) \cdot \varphi(\xi, \tau) d\vec{v} \right| \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{L_{\xi,\tau}^2} \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-\kappa}}{\langle \tau + a\xi^2 \rangle^d \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\vec{v}_2 d\vec{v} \right|.
\end{aligned}$$

Repetindo as ideias do lema 1.4 vemos que estimar $\|u \cdot w\|_{X_a^{s,-d}}$ equivale a provar que (1.39)

$$|W(f, g, \varphi)| = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\langle \xi \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-\kappa}}{\langle \tau + a\xi^2 \rangle^d \langle \tau_1 + \xi_1^2 \rangle^b \langle \tau_2 + \xi_2^2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\vec{v}_2 d\vec{v}$$

é limitado por uma constante vezes o produto das normas L^2 de f , g e φ .

Para simplificar, vamos adotar a seguinte notação:

$$(1.40) \quad \begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2, & \xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \lambda = \tau + a\xi^2, & \lambda_1 = \tau_1 + \xi_1^2, \quad \lambda_2 = \tau_2 + \xi_2^2. \end{cases}$$

Procedendo de forma análoga temos que $R^4 \subset \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$.

Assim, $|W| \leq |W_1| + |W_2| + |W_3|$, onde

$$W_i(f, g, \varphi) = \int_{\mathcal{S}_i} \frac{\langle \xi \rangle^s \langle \xi_1 \rangle^{-\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-\kappa}}{\langle \lambda \rangle^d \langle \lambda_1 \rangle^b \langle \lambda_2 \rangle^b} f(\xi_1, \tau_1) g(\xi_2, \tau_2) \varphi(\xi, \tau) d\xi_2 d\tau_2 d\xi d\tau. \text{ Daí,}$$

$$(1.41) \quad |W_1|^2 \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \left\| \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_1}}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b} \langle \lambda_2 \rangle^{2b}} d\xi_2 d\tau_2 \right) \right\|_{L_{\xi,\tau}^\infty},$$

$$(1.42) \quad |W_2|^2 \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \left\| \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_2}}{\langle \lambda \rangle^{2d} \langle \lambda_1 \rangle^{2b}} d\xi d\tau \right) \right\|_{L_{\xi_2, \tau_2}^\infty}$$

e

$$(1.43) \quad |W_3|^2 \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \left\| \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_3}}{\langle \lambda \rangle^{2d} \langle \lambda_2 \rangle^{2b}} d\xi_2 d\tau_2 \right) \right\|_{L_{\xi_1, \tau_1}^\infty}.$$

Mais uma vez, fazendo uso das desigualdades de Hölder e de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$(1.44) \quad \frac{\langle \xi \rangle^{2s}}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_1}}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b} \langle \lambda_2 \rangle^{2b}} d\xi_2 d\tau_2 \leq J_4,$$

$$(1.45) \quad \frac{\langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_2}}{\langle \lambda \rangle^{2d} \langle \lambda_1 \rangle^{2b}} d\xi d\tau \leq J_5,$$

$$(1.46) \quad \frac{\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_3}}{\langle \lambda \rangle^{2d} \langle \lambda_2 \rangle^{2b}} d\xi_2 d\tau_2 \leq J_6.$$

onde

$$J_4 = \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2,$$

$$J_5 = \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \text{ e}$$

$$J_6 = \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{S_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2.$$

Por fim, combinando (1.41), (1.42) e (1.43) com (1.44), (1.45) e (1.46), respectivamente, a prova da estimativa (1.20) segue das limitação de J_4 , J_5 e J_6 . Encerrando assim a prova do lema. □

Seguiremos esta seção separando os casos $0 < a < 1/2$, $a > 1/2$ e $a = 1/2$.

1.5.1 Prova no caso: $0 < a < 1/2 \Leftrightarrow \sigma > 2$

Analisando cuidadosamente a relação de dispersão, dada por

$$(1.47) \quad \lambda - \lambda_1 - \lambda_2 = a\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2,$$

obtemos informações de grande valia para a escolha de \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 e \mathcal{S}_3 .

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_1 - \lambda_2| &= |a\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2| \\ &= |(1-a)(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2a\xi_1\xi_2| \\ &\geq |1-a|(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2a|\xi_1\xi_2|, \quad \text{assumindo } 0 < a < \frac{1}{2} \\ &\geq (1-a)(\xi_1^2 + \xi_2^2) - a(\xi_1^2 + \xi_2^2) = (1-2a)(\xi_1^2 + \xi_2^2). \end{aligned}$$

Como $\xi = \xi_1 + \xi_2$, temos que $|\xi| \leq |\xi_1| + |\xi_2| \leq 2 \max\{\xi_1, \xi_2\}$.

Daí,

$$3 \max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\} \geq (1-2a) \max\{\xi_1^2, \xi_2^2\} \geq \frac{1-2a}{4} \xi^2.$$

Assim, assumindo que $|\xi| \geq 1$, teremos

$$\frac{1}{\max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\}} \leq \frac{c}{|\xi|^2}.$$

Agora, vamos definir as regiões \mathcal{S}_i .

$$(1.48) \quad \mathcal{S}_1 = \left\{ |\xi| \geq 1, |\lambda| = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\} \right\} \cup \left\{ |\xi| \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}_{\xi, \tau, \xi_2, \tau_2}^4,$$

$$(1.49) \quad \mathcal{S}_2 = \left\{ |\xi| \geq 1, |\lambda_1| = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\} \right\} \subset \mathbb{R}_{\xi, \tau, \xi_2, \tau_2}^4,$$

$$(1.50) \quad \mathcal{S}_3 = \left\{ |\xi| \geq 1, |\tau_2 + \xi^2| = \max\{|\lambda|, |\lambda_1|, |\lambda_2|\} \right\} \subset \mathbb{R}_{\xi, \tau, \xi_2, \tau_2}^4.$$

Para $k \geq 0$ temos $\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{-2\kappa}$ e neste caso teremos

$$(1.51) \quad J_4 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa+4d} \chi_{\mathcal{S}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2.$$

Com isso J_4 é limitado pois $s - \kappa + 2d < 0$, para $s - \kappa < 2d$.

Note que J_5 e J_6 são equivalentes pois,

$$(1.52) \quad J_5 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa-4b} \chi_{\mathcal{S}_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi$$

e

$$(1.53) \quad J_6 \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa-4b} \chi_{\mathcal{S}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2,$$

que são limitados desde que $\frac{s - \kappa}{2} < b$ e $d > \frac{1}{4}$, isto é, $b < \frac{3}{4}$.

No caso $k < 0$ precisamos separar em subcasos como segue:

(a) Suponha $|\xi_1| \leq \frac{2}{3}|\xi_2|$: Então, $\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi_2 \rangle^{-4\kappa}$. Além disso, $|\xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi| \leq \frac{2|\xi_2|}{3} + |\xi|$, logo $|\xi_2| \leq 3|\xi|$. Portanto,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(b) Supondo $|\xi_2| \leq \frac{2}{3}|\xi_1|$ temos o mesmo resultado, ou seja,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(c) Resta o caso, $\frac{2}{3}|\xi_2| < |\xi_1| < \frac{3}{2}|\xi_2|$.

(c.i) Se $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ então $\frac{2}{3}\xi_2 < \xi_1 < \frac{3}{2}\xi_2 \implies \frac{5}{3}\xi_2 < \xi < \frac{5}{2}\xi_2$. Daí,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(c.ii) Se $\xi_1, \xi_2 \leq 0$ então $-\frac{2}{3}\xi_2 < -\xi_1 < -\frac{3}{2}\xi_2 \implies -\frac{5}{3}\xi_2 < -\xi < -\frac{5}{2}\xi_2$, com isso $|\xi_2| < \frac{3}{5}|\xi|$. Logo,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(c.iii) Se $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 < 0$ então $-\frac{2}{3}\xi_2 < \xi_1 < \frac{3}{2}\xi_2 \implies \frac{1}{3}\xi_2 < \xi < \frac{1}{2}\xi_2$, o que nos dá $|\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2|$.

(c.iv) Se $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$ então $\frac{2}{3}\xi_2 < -\xi_1 < \frac{3}{2}\xi_2 \implies \frac{-1}{3}\xi_2 < -\xi < \frac{1}{2}\xi_2$, com isso $|\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2|$.

Os casos (a), (b), (c.i) e (c.ii) são válidos para $\kappa < 0$ e $s < 2\kappa + 1$.

Com efeito, seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^4$ o conjunto dos elementos do \mathbb{R}^4 que satisfazem uma das condições (a), (b), (c.i) ou (c.ii), seja $\mathcal{B} = \mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{A}$.

Considere agora $\mathcal{A}_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{A}$ e $\mathcal{B}_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{B}$.

Analisando as restrições a \mathcal{A}_i , obtemos:

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{B}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k-4d} \chi_{\mathcal{A}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2. \end{aligned}$$

Então J_4 é limitado para $s \leq 2\kappa + 2d$ e $b < 3/4$.

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{A}_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k-4b} \chi_{\mathcal{A}_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \quad \text{e} \end{aligned}$$

J_5 é limitado para $s \leq 2\kappa + 2b$ e $1/2 < b$.

$$\begin{aligned} J_6 &= \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{A}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k-4b} \chi_{\mathcal{A}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2. \end{aligned}$$

Então J_6 também é limitado para $s \leq 2\kappa + 2b$ e $1/2 < b$.

Para analisar os casos restantes, (c.iii) e (c.iv), que se resumem a assumir $|\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2|$ e $|\xi_1| \sim |\xi_2|$, vamos considerar as regiões \mathcal{B}_i :

Iniciamos por estimar J_4 .

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{B}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4d} \langle \xi_1 \rangle^{-4k} \chi_{\mathcal{B}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4d} \langle \xi_1 \rangle^{-4k} \chi_{\mathcal{B}_1}}{2|\xi_2 - \xi| \langle \eta \rangle^{2b}} d\eta \end{aligned}$$

Ora, $|\xi_2 - \xi| \geq |\xi_2| - |\xi| \geq \frac{1}{2}|\xi_2| \sim \frac{1}{2}|\xi_1|$.

Daí, $J_4 \leq \langle \xi \rangle^{2s-4d} \langle \xi_1 \rangle^{-4k-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{2b}}$, que é limitado pois $2b > 1$ e $2s \leq 4k + 2$.

$$\langle \xi \rangle^{2s-4d} \langle \xi_1 \rangle^{-4k-1} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k-4d-1}.$$

Seguimos para estimar J_5 :

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{B}_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-4k} \chi_{\mathcal{B}_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2$, temos que $d\eta = 2(\xi_2 + (a-1)\xi)d\xi$. Ora, como $0 < a < \frac{1}{2}$ segue $|a-1| < 1$ e assim $|\xi_2 + (a-1)\xi| \geq \frac{1}{2}|\xi_2|$.

Observe ainda que

$$\begin{aligned} |\eta| &= |\tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2| \\ &= |\lambda_2 + ((a-1)\xi^2 - 2\xi_2^2 + 2\xi\xi_2)| \\ &\leq |\lambda_2| + |(a-1)\xi^2 - 2\xi_2^2 + 2\xi\xi_2| \leq |\tau_2 + \xi_2| + 4|\xi_2|^2 \\ &\leq c|\lambda_2|. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} J_5 &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq c\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq c\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta, \text{ pois } |\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2| \\ &\leq \langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1} \frac{\langle \lambda_2 \rangle^{2d}}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \\ &\leq \langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1} \langle \lambda_2 \rangle^{-2b+2d} \leq \langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1-2b+2d}. \end{aligned}$$

Resta analisar J_6 . Lembre que

$$\begin{aligned} J_6 &= \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{B}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-4k} \chi_{\mathcal{B}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2. \end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2$, temos que $d\eta = 2\xi_2 d\xi_2$. Ora,

$$\begin{aligned} |\eta| &= |\tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2| \\ &= |(\lambda_1) + (a\xi^2 + \xi_2^2 - \xi_1^2)| \\ &\leq c|\lambda_1|. \end{aligned}$$

Usamos acima o fato de que $|\xi_1| \sim |\xi_2|$ donde obtemos:

$$\begin{aligned} J_6 &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq c\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-4k}}{|\xi_1| \langle \eta \rangle^{2d}} d\xi_2 \\ &\leq \langle \xi_1 \rangle^{\max\{0, 2s\} - 4k - 1} \frac{\langle \lambda_1 \rangle^{2d}}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \\ &\leq \langle \xi_1 \rangle^{\max\{0, 2s\} - 4k - 1 - 2b + 2d}. \end{aligned}$$

Como $1/2 < b < 3/4$ e $1/4 < d < 1/2$ temos que $-1 < -2b + 2d < 0$ e daí podemos tomar b e d de forma que $2s - 4k - 1 - 2b + 2d < 0$ se $s < 2k + 1$.

Com isso finalizamos a demonstração deste caso.

□

1.5.2 Prova no caso: $a > 1/2 \Leftrightarrow \sigma < 2$

Este caso é um pouco mais delicado. Além de observar a relação de dispersão será necessário um procedimento adicional, como veremos a seguir.

Como nas vezes anteriores, começamos analisando a relação de dispersão.

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda_1 - \lambda_2| &= |a\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2| \\ &\geq |2\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + (1-a)\xi^2| \quad (\text{usando } a > \frac{1}{2} \text{ temos}) \\ &= 2|\xi_2 - \mu_a \xi| \cdot |\xi_2 - (1 - \mu_a)\xi|, \text{ onde } \mu_a = \frac{1 - \sqrt{2a - 1}}{2}. \end{aligned}$$

A relação de dispersão acima é nula em duas retas.

Agora, vamos definir as regiões \mathcal{S}_i .

De maneira análoga a escolha das regiões \mathcal{R}_i na demonstração da Proposição (1.19), no caso $a > 1/2$, iremos proceder fixando conjuntos que servirão de base para definir os conjuntos \mathcal{S}_i .

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1 &= \{|\xi| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^4, \\ \mathcal{B}_2 &= \left\{ |\xi| \geq 1, \left| \xi_2 - \frac{1}{2}\xi \right| > \frac{2a-1}{4}|\xi| \right\} \subset \mathbb{R}^4, \\ \mathcal{B}_3 &= \left\{ |\xi| \geq 1, |(1-a)\xi - \xi_2| > \frac{2a-1}{4}|\xi| \right\} \subset \mathbb{R}^4.\end{aligned}$$

Note que se $\left| \xi_2 - \frac{1}{2}\xi \right| \leq \frac{2a-1}{4}|\xi|$ e $\left| (1-a)\xi - \xi_2 \right| \leq \frac{2a-1}{4}|\xi|$ e ainda $|\xi| > 1$ então

$$\begin{aligned}\left(a - \frac{1}{2} \right) |\xi| &= \left| \left(\xi_2 - \frac{1}{2}\xi \right) + ((1-a)\xi - \xi_2) \right| \\ &\leq \frac{2a-1}{4}|\xi| + \frac{2a-1}{4}|\xi| = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2} \right) |\xi|.\end{aligned}$$

A desigualdade acima é suficiente para concluir que a interseção dos conjuntos complementares a \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 e \mathcal{B}_3 é vazia, ou seja, $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$.

Considere agora

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{3,1} &= \mathcal{B}_3 \cap \{|\lambda| \geq \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}\}, \\ \mathcal{B}_{3,2} &= \mathcal{B}_3 \cap \{|\lambda_2| \geq \max\{|\lambda_1|, |\lambda|\}\}, \\ \mathcal{B}_{3,3} &= \mathcal{B}_3 \cap \{|\lambda_1| \geq \max\{|\lambda|, |\lambda_2|\}\}.\end{aligned}$$

Sejam $\mathcal{S}_1 = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_{3,1}$, $\mathcal{S}_2 = \mathcal{B}_{3,2}$ e $\mathcal{S}_3 = \mathcal{B}_{3,3}$.

Para $k \geq 0$ temos $\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{-2\kappa}$ logo:

$$(1.54) \quad J_4 \leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2,$$

$$(1.55) \quad J_5 \leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi,$$

$$(1.56) \quad J_6 \leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2.$$

Para concluir que J_4 é limitado basta observar que a expressão definida em J_4 é limitada, como vemos abaixo

$$\frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{B_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq c;$$

$$\frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{B_2}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa-1}}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq c$$

e

$$\frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{B_{3,1}}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa-1}}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\xi_2 \leq c.$$

Para obter as estimativas acima usamos fortemente o fato de $b > 1/2$ e na última inequação usamos o fato de que

$$\begin{aligned} \left| \xi_2 - \frac{1}{2}\xi \right| &= \left| (1-a)\xi - \xi_2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)\xi \right| \\ &\geq \left(a - \frac{1}{2}\right) |\xi| - |(1-a)\xi - \xi_2| \\ &\geq \left(a - \frac{1}{2}\right) |\xi| - \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{2}\right) |\xi| = \frac{2a-1}{4} |\xi|. \end{aligned}$$

Vamos agora estimar J_5 tendo em vista que

$$\eta = \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 = \lambda_2 + (\lambda - \lambda_1 - \lambda_2)$$

e $d\eta = 2((1-a)\xi - \xi_2)d\xi$, donde vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{B_{3,2}}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq 4\langle \lambda \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b-2d}} \leq c. \end{aligned}$$

Resta agora estimar (1.56), faremos isso de forma análoga a apresentada acima

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{S_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq 4\langle \lambda_1 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b-2d}} \leq c. \end{aligned}$$

Isso encerra o caso $\kappa \geq 0$.

O caso $\kappa < 0$, será feito separando em subcasos:

(a) Suponha $|\xi_1| \leq \frac{2}{3}|\xi_2|$: Então, $\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi_2 \rangle^{-4\kappa}$. Além disso, $|\xi_2| \leq |\xi_1| + |\xi| \leq \frac{2|\xi_2|}{3} + |\xi|$, daí $|\xi_2| \leq 3|\xi|$. Portanto,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(b) Supondo $|\xi_2| \leq \frac{2}{3}|\xi_1|$ temos o mesmo resultado, ou seja,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(c) Resta o caso, $\frac{2}{3}|\xi_2| < |\xi_1| < \frac{3}{2}|\xi_2|$.

(c.i) Se $\xi_1, \xi_2 \geq 0$ então $\frac{2}{3}\xi_2 < \xi_1 < \frac{3}{2}\xi_2 \implies \frac{5}{3}\xi_2 < \xi < \frac{5}{2}\xi_2$. Daí,

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(c.ii) Se $\xi_1, \xi_2 \leq 0$ então $-\frac{2}{3}\xi_2 < -\xi_1 < -\frac{3}{2}\xi_2 \implies -\frac{5}{3}\xi_2 < -\xi < -\frac{5}{2}\xi_2$, com isso $|\xi_2| < \frac{3}{5}|\xi|$. Donde obtemos

$$\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k}.$$

(c.iii) Se $\xi_1 > 0$ e $\xi_2 < 0$ então $-\frac{2}{3}\xi_2 < \xi_1 < \frac{-3}{2}\xi_2 \implies \frac{1}{3}\xi_2 < \xi < \frac{-1}{2}\xi_2$, assim $|\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2|$.

(c.iv) Se $\xi_1 < 0$ e $\xi_2 > 0$ então $\frac{2}{3}\xi_2 < -\xi_1 < \frac{3}{2}\xi_2 \implies \frac{-1}{3}\xi_2 < -\xi < \frac{1}{2}\xi_2$, logo $|\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2|$.

Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$ o conjunto dos elemento do \mathbb{R}^4 que satisfazem uma das condições (a), (b), (c.i) ou (c.ii), seja $\mathcal{D} = \mathbb{R}^4 \setminus \mathcal{C}$. Considere agora $\mathcal{C}_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{C}$ e $\mathcal{D}_i = \mathcal{S}_i \cap \mathcal{D}$.

Analisando as restrições a \mathcal{C}_i , obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{C}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 &\leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k} \chi_{\mathcal{C}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\xi_2 \\ &\leq c, \text{ pois } 1/2 < b < 1 \text{ e } s < 2\kappa + 1/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{C_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq 4\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b-2d}} \leq c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{C_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq 4\langle \lambda_1 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b-2d}} \leq c. \end{aligned}$$

Para analisar os casos restantes (que se resumem a assumir $|\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2|$ e $|\xi_1| \sim |\xi_2|$) vamos considerar então as regiões \mathcal{D}_i :

Iniciamos por estimar J_4 .

$$\begin{aligned} \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{D}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 &\leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-4k} \chi_{\mathcal{D}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2 \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa}}{\langle \eta \rangle^{2b}} d\eta. \end{aligned}$$

Ora, $|\xi_2 - \xi| \geq |\xi_2| - |\xi| \geq \frac{1}{2}|\xi_2| \sim \frac{1}{2}|\xi_1|$.

Daí, $J_4 \leq \langle \xi \rangle^{2s-4d} \langle \xi_1 \rangle^{-4k-1} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\eta}{\langle \eta \rangle^{2b}}$, que é limitado pois $2b > 1$ e $2s \leq 4k + 2$.

$$\langle \xi \rangle^{2s-4d} \langle \xi_1 \rangle^{-4k-1} \leq \langle \xi \rangle^{2s-4k-1-4d} \leq \langle \xi \rangle^{1-4d}.$$

A vez de J_5 .

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{B_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi \\ &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-4k} \chi_{B_2}}{\langle \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2$, temos que $d\eta = 2(\xi_2 + (a-1)\xi)d\xi$. Ora, como $0 < a < \frac{1}{2}$, segue $|a-1| \leq 1$ e assim $|\xi_2 + (a-1)\xi| \geq \frac{1}{2}|\xi_2|$. Observe ainda

que

$$\begin{aligned}
|\eta| &= |\tau_2 + (a-1)\xi^2 - \xi_2^2 + 2\xi\xi_2| \\
&= |(\lambda_2) + ((a-1)\xi^2 - 2\xi_2^2 + 2\xi\xi_2)| \\
&\leq |\lambda_2| + |(a-1)\xi^2 - 2\xi_2^2 + 2\xi\xi_2| \leq |\tau_2 + \xi_2| + 4|\xi_2|^2 \\
&\leq c|\lambda_2|.
\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
J_5 &\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq c\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_2 \rangle^{-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta \\
&\leq \frac{1}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq c\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1}}{\langle \eta \rangle^{2d}} d\eta, \text{ pois } |\xi| < \frac{1}{2}|\xi_2| \\
&\leq \langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1} \frac{\langle \lambda_2 \rangle^{1-2d}}{\langle \lambda_2 \rangle^{2b}} \\
&\leq \langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1} \langle \lambda_2 \rangle^{1-2d-2b} \leq \langle \xi_2 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-2},
\end{aligned}$$

pois $1 - 2b - 2d < -1/2$.

Por fim, J_6 . Lembre que

$$\begin{aligned}
J_6 &= \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \chi_{\mathcal{B}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2 \\
&\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-4k} \chi_{\mathcal{B}_3}}{\langle \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2 \rangle^{2d}} d\xi_2.
\end{aligned}$$

Fazendo $\eta = \tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2$, temos que $d\eta = 2\xi_2 d\xi_2$. Ora,

$$\begin{aligned}
|\eta| &= |\tau_1 + a\xi^2 + \xi_2^2| \\
&= |(\lambda_1) + (a\xi^2 + \xi_2^2 - \xi_1^2)| \\
&\leq c|\lambda_1|.
\end{aligned}$$

Usaremos abaixo o fato que $|\xi_1| \sim |\xi_2|$, para obter que

$$\begin{aligned}
J_6 &\leq \frac{1}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \int_{\langle \eta \rangle \leq c\langle \lambda_2 \rangle} \frac{\langle \xi \rangle^{2s} \langle \xi_1 \rangle^{-4k}}{|\xi_1| \langle \eta \rangle^{2d}} d\xi_2 \\
&\leq \langle \xi_1 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-1} \frac{\langle \lambda_1 \rangle^{1-2d}}{\langle \lambda_1 \rangle^{2b}} \\
&\leq \langle \xi_1 \rangle^{\max\{0,2s\}-4k-2}.
\end{aligned}$$

Com isso finalizamos a demonstração deste caso.

□

1.5.3 Prova no caso: $a = 1/2 \Leftrightarrow \sigma = 2$

Finalizaremos esta seção apresentando resultados para $\sigma = 2$. Como nas seções anteriores, temos que não é possível aproveitar a relação de dispersão. Então tomemos $\mathcal{S}_1 = \mathbb{R}^4$ e $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_3 = \emptyset$.

Resta estimar J_4 . Para tanto, assumimos inicialmente que $\kappa \geq 0$ e assim $\langle \xi_1 \rangle^{-2\kappa} \langle \xi_2 \rangle^{-2\kappa} \leq \langle \xi \rangle^{-2\kappa}$ logo:

$$J_4 \leq \frac{1}{\langle \lambda \rangle^{2d}} \int_{\mathbb{R}} \frac{\langle \xi \rangle^{2s-2\kappa} \chi_{\mathcal{S}_1}}{\langle \tau + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + \xi^2 \rangle^{2b}} d\xi_2.$$

Assumindo que $s \leq \kappa$ e que $b > 1/2$ e $d > 0$ segue a limitação de J_4 .

□

Observação 1.6 *Encerramos a seção com um comentário equivalente ao da seção anterior. Neste caso, observamos que a relação de dispersão gera um polinômio equivalente ao polinômio da seção anterior, isto é, obtemos um polinômio de grau dois na variável ξ_2 com coeficientes dependendo da variável ξ , ou seja,*

$$\tilde{p}(\xi_2) = 2\xi_2^2 - 2\xi\xi_2 + (1 - a)\xi^2,$$

observamos que o fato da constante positiva a está entre zero e meio implica que \tilde{p} não admite raízes reais e com isso podemos aproveitar o grau de p para ganhar regularidade. Já no caso que $a > \frac{1}{2}$, onde \tilde{p} admite duas raízes reais diferentes foi possível, separando as raízes, aproveitar o grau de cada fator do polinômio \tilde{p} fatorado. Por fim, no caso $a = \frac{1}{2}$ temos uma raiz com multiplicidade dois e neste caso não foi possível aproveitar a relação de dispersão.

1.6 Prova dos Teoremas de Boa colocação Local

Nesta seção vamos provar, através do Teorema do Ponto Fixo de Banach, o resultado de Boa colocação local. As condições de Boa colocação apresentadas no início da

Introdução deste trabalho, a saber: **Existência, Unicidade e Dependência Contínua**, seguem da aplicação deste resultado bem como do fato de provarmos, ao longo da demonstração abaixo, que a aplicação que associa os dados iniciais a solução é localmente Lipschitziana.

Passemos agora a demonstração deste resultado.

Vamos considerar o seguinte espaço de funções onde vamos buscar nossa solução:

$$(1.57) \quad \Sigma_\mu := \left\{ (u, v) \in X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu} \times X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}; \|u\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} \leq M_1, \|v\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} \leq M_2 \right\},$$

onde $0 < \mu \ll 1$ e $M_1, M_2 > 0$ serão escolhidos abaixo.

Observamos inicialmente que Σ_μ é um espaço métrico completo com a norma:

$$\|(u, v)\|_{\Sigma_\mu} := \|u\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} + \|v\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}}.$$

Para $(u, v) \in \Sigma_\mu$ vamos definir as aplicações

$$(1.58) \quad \Phi_1(u, v) = \psi_1(t)U(t)u_0 - i\psi_T(t) \int_0^t U(t-t') \{ \theta u(t') - (\bar{u} \cdot v)(t') \} dt',$$

e

$$(1.59) \quad \Phi_2(u, v) = \psi_1(t)U_a(t)v_0 - i\psi_T(t) \int_0^t U_a(t-t') \left\{ \alpha v(t') - \frac{a}{2} (u^2)(t') \right\} dt'.$$

Vamos agora escolher $\mu < \mu(\kappa, s, a)$ onde $d = \frac{1}{2} - 2\mu(\kappa, s, a)$ e $b = \frac{1}{2} + \mu(\kappa, s, a)$ satisfazem as condições das Proposições 1.1 e 1.2.

De acordo com o Lema 1.3, com $b' = -d$ e as Proposições 1.1 e 1.2 temos

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u, v)\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} &\leq c_0 \|u_0\|_{H^k} + c_1 T^\mu \left(\theta \|u\|_{X^{\kappa, -\frac{1}{2}+2\mu}} + \|\bar{u}v\|_{X^{\kappa, -\frac{1}{2}+2\mu}} \right) \\ &\leq c_0 \|u_0\|_{H^k} + c_1 T^\mu \left(\theta \|u\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} + \|u\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} \|v\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} \right) \\ &\leq c_0 \|u_0\|_{H^k} + c_1 T^\mu \left(\theta M_1 + M_1 M_2 \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\Phi_2(u, v)\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} &\leq c_0 \|v_0\|_{H^s} + c_2 T^\mu \left(\alpha \|v\|_{X_a^{s, -\frac{1}{2}+2\mu}} + \frac{a}{2} \|u^2\|_{X_a^{s, -\frac{1}{2}+2\mu}} \right) \\ &\leq c_0 \|v_0\|_{H^s} + c_2 T^\mu \left(\alpha \|v\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} + \frac{a}{2} \|u\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}}^2 \right) \\ &\leq c_0 \|v_0\|_{H^s} + c_2 T^\mu \left(\alpha M_2 + \frac{a}{2} M_1^2 \right). \end{aligned}$$

Definindo $M_1 = 2c_0 \|u_0\|_{H^k}$ e $M_2 = 2c_0 \|v_0\|_{H^s}$ teremos que

$$\|\Phi_1(u, v)\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} \leq \frac{M_1}{2} + c_1 T^\mu \left(\theta M_1 + M_1 M_2 \right)$$

e

$$\|\Phi_2(u, v)\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} \leq \frac{M_2}{2} + c_2 T^\mu \left(\alpha M_2 + \frac{a}{2} M_1^2 \right).$$

Então $(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v)) \in \Sigma_\mu$ para

$$(1.60) \quad T^\mu \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{c_1(\theta + M_2)}, \frac{M_2}{c_2(\alpha M_2 + \frac{a}{2} M_1^2)} \right\}.$$

Similarmente teremos que

$$\|\Phi_1(u, v) - \Phi_1(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} \leq c_3(M_1, M_2) T^\mu \left(\|u - \tilde{u}\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} + \|v - \tilde{v}\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} \right),$$

e

$$\|\Phi_2(u, v) - \Phi_2(\tilde{u}, \tilde{v})\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} \leq c_4(M_1, M_2) T^\mu \left(\|u - \tilde{u}\|_{X^{\kappa, \frac{1}{2}+\mu}} + \|v - \tilde{v}\|_{X_a^{s, \frac{1}{2}+\mu}} \right).$$

Posto isto, segue que

$$(1.61) \quad \left\| \left(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v) \right) - \left(\Phi_1(\tilde{u}, \tilde{v}), \Phi_2(\tilde{u}, \tilde{v}) \right) \right\|_{\Sigma_\mu} \leq \frac{1}{2} \|(u, v) - (\tilde{u}, \tilde{v})\|_{\Sigma_\mu}.$$

Para

$$T^\mu \leq \frac{1}{4} \min \left\{ \frac{1}{c_3(M_1, M_2)}, \frac{1}{c_4(M_1, M_2)} \right\}.$$

Portanto, a aplicação $\Phi_1 \times \Phi_2 : \Sigma_\mu \rightarrow \Sigma_\mu$ é uma contração, e via o Teorema do Ponto Fixo existe uma única solução para o problema de Cauchy para T satisfazendo (1.60) e (1.61).

Por (1.61) temos que a aplicação dado solução é localmente Lipschitz.

□

A demonstração acima para o resultado de boa colocação local foi exposta apenas para o caso $p = q = 1$. Vamos discutir o que ocorre nos demais casos na seção 1.7.

1.7 Comentários finais

Finalizamos este capítulo discutindo sobre os casos restantes para os sinais de p e q , ou seja:

Caso $p = q = -1$. Quando mudamos os sinais de p e q estamos modificando os grupos associados as equações dos sistemas o que vai interferir diretamente nas relações de dispersões. Tais relações foram essenciais para a definição das regiões que permitem o uso dos Lemas 1.4 e 1.5. Trocando os sinais de p e q temos que (1.23) escreve-se

$$(1.62) \quad \begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2 & \xi = \xi_1 + \xi_2 \\ \rho = \tau - \xi^2, & \rho_1 = \tau_1 + \xi_1^2, \quad \rho_2 = \tau_2 - a\xi_2^2. \end{cases}$$

Daí, segue que (1.33) adota a mesma forma

$$|\rho - \rho_1 - \rho_2| = |-\xi^2 - \xi_1^2 + a\xi_2^2| = |\xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2|,$$

ou seja, não interfere nos resultados obtidos. O mesmo ocorre modificando (1.47). Concluimos assim que para $p = q = -1$ vale de forma similar a teoria local desenvolvida para o caso $p = q = 1$.

Casos $(p, q) = (1, -1)$ ou $(p, q) = (-1, 1)$. Se fixarmos $p = 1$ e $q = -1$ temos que (1.23) transforma-se em

$$(1.63) \quad \begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2, & \xi = \xi_1 + \xi_2, \\ \rho = \tau + \xi^2, & \rho_1 = \tau_1 - \xi_1^2, \quad \rho_2 = \tau_2 - a\xi_2^2. \end{cases}$$

Com isso, a relação de dispersão (1.33) satisfaz

$$|\rho - \rho_1 - \rho_2| = \xi^2 + \xi_1^2 + a\xi_2^2 > \xi^2 + \xi_1^2,$$

para qualquer valor positivo de a . Isso nos diz que a Proposição 1.1 sempre vale para $|\kappa| - 1 < s$.

Por outro lado, as relações (1.40) adotam, neste caso, a forma

$$(1.64) \quad \begin{cases} \tau = \tau_1 + \tau_2, & \xi = \xi_1 + \xi_2, \\ \rho = \tau - a\xi^2, & \lambda_1 = \tau_1 + \xi_1^2, \quad \lambda_2 = \tau_2 + \xi_2^2 \end{cases}$$

e a nova forma de (1.47) é dada por

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda = \xi_1^2 + \xi_2^2 + a\xi^2 > \xi_1^2 + \xi_2^2$$

para todo $a > 0$, o que nos garante a validade da Proposição 1.2 nos casos em que $s < \min \{ \kappa + 1, 2\kappa + 1 \}$.

Resumindo, no caso $(p, q) = (1, -1)$ a teoria local vale sempre que

$$|\kappa| - 1 < s < \min \{ \kappa + 1, 2\kappa + 1 \}.$$

O mesmo vale para o caso $(p, q) = (-1, 1)$. As observações aqui feitas completam o estudo do sistema (1) para quaisquer sinais de p e q .

Observação 1.7 *Notamos também que nos casos $p = q = \pm 1$ e $p = -q = \pm 1$ a lei de conservação em $L^2 \times L^2$ não muda, isto é,*

$$E[u, v](t) = \int_{\mathbb{R}} |u(x, t)|^2 + 2\sigma |v(x, t)|^2 dx = E[u, v](0).$$

Portanto, os resultados globais não mudam com a mudança de sinais de p e q .

2

Resultados Globais

Este capítulo é dedicado ao estudo da teoria da boa colocação global para o Problema de Cauchy (1), logo estamos interessados em soluções definidas em em todo tempo tempo positivo, ou seja, estudaremos o modelo:

$$(2.1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + p\partial_x^2 u - \theta u + \bar{u}v = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \\ i\sigma\partial_t v + q\partial_x^2 v - \alpha v + \frac{u^2}{2} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x). \end{cases}$$

Consideraremos os dados iniciais em espaços de Sobolev com a mesma regularidade e com índices negativos, isto é, $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ com $s < 0$.

Um objetivo importante no estudo das equações de evolução da Física-Matemática é a obtenção da estabilidade de certos tipos de soluções especiais. Nesse caso, é essencial ter resultados de boa colocação global, ou seja, a extensão da boa colocação local a todo intervalo de tempo positivo.

Lembramos que para qualquer dado inicial $(u_0, v_0) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ a lei de conservação

$$(2.2) \quad E(u, v)(t) = \|u\|_{L^2}^2 + 2\sigma \|v\|_{L^2}^2$$

nos permite estender os resultados locais obtidos no Capítulo 1 a todo intervalo de tempo $[0, T]$. Usaremos este fato como ponto de partida para poder estender as soluções locais obtidas com índices negativos a tempo positivo e obter o principal resultado deste capítulo, o qual estabelecemos a seguir.

Teorema 2.1 *Seja $(u_0, v_0) \in H^s(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$. As soluções locais obtidas no Teorema 1.1 para o Problema de Cauchy (2.1) podem ser estendidas a todo intervalo de tempo*

positivo $0 \leq t \leq T$, preservando todas as propriedades da teoria local, em cada uma das seguintes situações:

(a) $-1/2 \leq s \leq 0$ quando $\sigma > 2$,

(b) $-1/4 \leq s \leq 0$ quando $0 < \sigma < 2$.

Para obter o resultado acima vamos seguir as ideias apresentadas em [8], [11], [12] e [24]. Nas próximas seções deste capítulo vamos apresentar alguns resultados preliminares e antes de provar o resultado principal vamos revisitar a boa colocação local num novo ambiente funcional.

2.1 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos alguns resultados clássicos referentes ao *método-I* que utilizamos neste capítulo.

Sejam $s \leq 0$ e $N > 1$ fixado. Vamos definir o operador multiplicador de Fourier

$$(2.3) \quad \widehat{I_N^{-s}u}(\xi) = m(\xi)\widehat{u}(\xi), \quad m(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < N, \\ N^{-s}|\xi|^s, & |\xi| \geq 2N \end{cases}$$

onde m é uma função suave e monótona.

Afim de simplificar a notação usaremos, a menos que seja mencionado o contrário, a notação $I = I_N^{-s}$ para o operador multiplicador de Fourier.

Passemos agora a apresentar resultados relacionados com este operador.

Lema 2.1 *O operador I aplica $H^s(\mathbb{R}) \mapsto L^2$. Além disso, o operador I comuta com operadores diferenciais e $\overline{Iu} = I\bar{u}$. Ou seja,*

(a) $\|I(u)\|_{L^2} \leq cN^{-s} \|u\|_{H^s},$

(b) $P(D)I(u) = I(P(D)u),$

onde P é um polinômio e $D = \frac{d}{i dx}$ é o operador diferencial.

Demonstração: Note que podemos decompor $u \in H^s$ da seguinte forma

$$u = (\chi_{|\xi| < N} \widehat{u} + \chi_{|\xi| > N} \widehat{u})^\vee = u_1 + u_2,$$

onde $u_1 = (\chi_{|\xi| < N} \widehat{u})^\vee$ e $u_2 = (\chi_{|\xi| > N} \widehat{u})^\vee$. Note também que para $Iu_1 = u_1$ e da desigualdade de Plancherel

$$\begin{aligned} \|Iu_1\|_{L^2} &= \left\| \widehat{Iu_1} \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \widehat{u_1} \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \langle \xi \rangle^{-s} \chi_{|\xi| \leq N}(\xi) \langle \xi \rangle^s \widehat{u}(\xi) \right\|_{L^2} \\ &\leq N^s \|u\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Resta estimar Iu_2 .

$$\begin{aligned} \|Iu_2\|_{L^2} &= \left\| \widehat{Iu_2} \right\|_{L^2} \\ &\leq c \left\| \left(\frac{|\xi|}{N} \right)^s \widehat{u_2} \right\|_{L^2} \\ &\leq cN^{-s} \left\| \langle \xi \rangle^s \widehat{u_2} \right\|_{L^2} \\ &\leq c'N^{-s} \|u_2\|_{H^s} \\ &\leq c'N^{-s} \|u\|_{H^s}. \end{aligned}$$

Provamos assim que I aplica H^s em L^2 como também o primeiro item do lema.

A demonstração do segundo item do lema segue aplicando a transformada de Fourier e observando que $[(P(D)I(u))^\wedge]^\vee = [P(\xi)\widehat{I(u)}]^\vee = [m(\xi)P(\xi)\widehat{u}]^\vee = [I(\widehat{P(D)u})]^\vee = I(P(D)u)$. \square

O método- I consiste em baixar a regularidade do resultado de boa colocação local modificando a energia associada ao sistema em questão. Para fazer isto não é necessário efetuar os cálculos em cada par de índices de Sobolev no espaço $H^s \times H^s$, isto decorre do seguinte

Lema 2.2 *Sejam $\alpha_0 > 0$ e $n \geq 1$. Suponha que Z, X_1, \dots, X_n são espaços de Banach invariantes por translação e T um operador n -linear invariante por translação tal que*

$$\|I_1^{-\alpha} T(u_1, \dots, u_n)\|_Z \leq c \prod_{j=1}^n \|I_1^{-\alpha} u_j\|_{X_j},$$

para todo u_1, \dots, u_n , $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$. Então,

$$\|I_N^{-\alpha} T(u_1, \dots, u_n)\|_Z \leq c \prod_{j=1}^n \|I_N^{-\alpha} u_j\|_{X_j},$$

para todo u_1, \dots, u_n , $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ e $N \geq 1$. As constantes não dependem de N .

Para ver uma prova do resultado acima o leitor pode consultar o Lema 12.1 de [10].

Observamos que o operador dado solução desempenha o papel do operador n -linear.

Lema 2.3 *Sejam f e g pertencentes a $X^{0,1/2}$. A desigualdade*

$$\|(D_x^{1/2} f) \cdot g\|_{L_{x,t}^2} \leq c \|f\|_{X^{0,1/2}} \|g\|_{X^{0,1/2}},$$

é verdadeira se $|\xi_2| \ll |\xi_1|$ para cada $|\xi_1| \in \text{supp}(\widehat{f})$ e $|\xi_2| \in \text{supp}(\widehat{g})$. Além disso, esta estimativa é válida se f e/ou g são trocadas por suas conjugadas no lado esquerdo da desigualdade.

Demonstração: Esta é uma estimativa Strichartz refinada do tipo considerado em [4].

É o suficiente para mostrar que se f e g são soluções da equação de Schrödinger livre, que é $f = e^{it\partial_x^2} \phi$ e $g = e^{it\partial_x^2} \psi$, então

$$(2.4) \quad \|(D_x^{1/2} f) \cdot g\|_{L_{x,t}^2} \leq c \|\phi\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2},$$

onde D_x é o operador satisfazendo $\widehat{D_x f}(\xi) = \langle \xi \rangle \widehat{f}(\xi)$. Se usarmos agora a dualidade e a mudança de variável $\xi_1 + \xi_2 = z$ e $|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 = r$, assumindo que $R \geq \max\{\max\{\text{supp}(\widehat{f})\}, \max\{\text{supp}(\widehat{g})\}\}$, então o lado esquerda da desigualdade (2.4) é limitado por

$$\begin{aligned} & \sup_{\|F\|_{L^2} \leq 1} \int R^{1/2} F(\xi_1 + \xi_2, |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \widehat{\phi}(\xi_1) \widehat{\psi}(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \\ & \leq \sup_{\|F\|_{L^2} \leq 1} \int R^{1/2} F(z, r) \frac{H(z, r)}{R} dz dr, \end{aligned}$$

onde $H(z, r)$ denota o produto de $\widehat{\phi}$ e $\widehat{\psi}$ nas novas variáveis. Note que a mudança de variável introduzida acima gera um Jacobiano da ordem de R . Agora, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e alterando novamente as variáveis para ξ_1 e ξ_2 obtemos a desigualdade (2.4). □

A demonstração acima esta baseada na demonstração do Lema 7.1 de [9].

Observação 2.1 *O Lema 2.3 ainda é válido substituindo $X^{0,1/2}$ por $X_a^{0,1/2}$ em uma ou em ambas as funções efetuando ligeiras modificações na demonstração acima.*

2.2 O Teorema de Boa Colocação Local Revisitado

Nesta seção vamos analisar o sistema modificado.

Temos que o sistema (2.1) aplicado ao operador I é dado por

$$(2.5) \quad \begin{cases} i\partial_t Iu + p\partial_x^2 Iu - \theta Iu + I(\bar{u}v) & = 0 \\ i\sigma\partial_t Iv + q\partial_x^2 Iv - \alpha Iv + \frac{1}{2}I(u^2) & = 0 \end{cases} .$$

Vamos citar aqui um Lema que será utilizado na demonstração do teorema de boa colocação local e, em seguida refazer as estimativas bilineares.

Lema 2.4 *Sejam $-1/2 < b' \leq b < 1/2$, $s \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $0 < T < 1$ temos que*

$$(2.6) \quad \|\psi_T(t)u\|_{X_a^{s,b'}} \leq cT^{b-b'} \|u\|_{X_a^{s,b}} .$$

Demonstração: Uma demonstração deste resultado pode ser vista em [15]. \square

Lema 2.5 *Considere $1/4 < d$. Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(b_1, b_2) = \left(0, \frac{1}{2}+\right)$ ou $(b_1, b_2) = \left(\frac{1}{2}+, 0\right)$. Então*

$$(2.7) \quad \|\bar{u} \cdot v\|_{X^{0,-d}} \leq c\|u\|_{X^{0,b_1}} \cdot \|v\|_{X_a^{0,b_2}} .$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, vamos provar apenas o caso $b_2 = 0$ e $b_1 = \frac{1}{2} +$. Seguindo as ideias da Proposição 1.1 temos que

$$\|\bar{u}v\|_{X^{0,-d}} \leq \|u\|_{X^{0,b_1}} \|v\|_{X^{0,b_1}} \left\| \frac{1}{\langle \tau_2 + a\xi_2^2 \rangle^{2b_2}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b_1} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d}} d\xi d\tau \right\|_{L_{\xi_2, \tau_2}^\infty} .$$

Resta a limitação do último fator do lado direito da desigualdade acima. Usando o Lema 1.13 e o Lema 1.14 temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^2 \rangle^{2b_1} \langle \tau + \xi^2 \rangle^{2d}} d\xi d\tau \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \tau_2 + 2\xi^2 + \xi_2^2 - 2\xi\xi_2 \rangle^{2d}} d\xi d\tau \leq c .$$

\square

De maneira análoga provamos o Lema 2.6.

Lema 2.6 Considere $1/4 < d$. Sejam $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ tais que $(b_1, b_2) = \left(0, \frac{1}{2}+\right)$ ou $(b_1, b_2) = \left(\frac{1}{2}+, 0\right)$. Então

$$(2.8) \quad \|uw\|_{X_a^{0,-d}} \leq c \|u\|_{X^{0,b_1}} \cdot \|w\|_{X^{0,b_2}}.$$

Observação 2.2 Os resultados acima independem do valor de a .

Agora, vamos revisitar o teorema de ponto fixo para encontrar o melhor expoente para δ o que será bastante útil para o argumento final que consiste em estender a solução para qualquer intervalo de tempo.

Proposição 2.1 O Problema de Cauchy (2.5) é localmente bem posto em $L^2 \times L^2$ com uma única solução no intervalo de tempo $[0, \delta]$ para algum $\delta \leq 1$ satisfazendo

$$(2.9) \quad \delta \sim \left(\|Iu_0\|_{L_x^2} + \|Iv_0\|_{L_x^2} \right)^{-\frac{4}{3}+}.$$

Demonstração: Vamos considerar o seguinte espaço de funções onde vamos buscar nossa solução:

$$(2.10) \quad \Sigma_\mu := \left\{ (Iu, Iv) \in X^{0, \frac{1}{2}+\mu} \times X_a^{0, \frac{1}{2}+\mu}; \|u\|_{X^{0, \frac{1}{2}+\mu}} \leq M_1, \|v\|_{X_a^{0, \frac{1}{2}+\mu}} \leq M_2 \right\},$$

onde $0 < \mu \ll 1$ e $M_1, M_2 > 0$ serão escolhidos abaixo.

Observamos inicialmente que Σ_μ é um espaço métrico completo com a norma:

$$\|(Iu, Iv)\|_{\Sigma_\mu} := \|u\|_{X^{0, \frac{1}{2}+\mu}} + \|v\|_{X_a^{0, \frac{1}{2}+\mu}}.$$

Vamos agora escolher μ onde $d = -\frac{1}{4} + \epsilon$ e $b = \frac{1}{2} +$ satisfazem as condições dos Lemas 2.7 e 2.6.

De acordo com o Lema 1.3, com $b' = -d$ e os Lemas 2.7 e 2.6 temos

$$\begin{aligned} \|\Phi_1(u, v)\|_{X^{0,b}} &\leq c_0 \|u_0\|_{L_x^2} + c_1 T^{1-b-d} (\theta \|u\|_{X^{0,-d}} + \|\bar{u}v\|_{X^{0,-d}}) \\ &\leq c_0 \|u_0\|_{L_x^2} + c_1 T^{1-b-d} \left(\theta T^{b+d} \|u\|_{X^{0,b}} + \|u\|_{X^{0,0}} \|v\|_{X_a^{0,b}} \right) \\ &\leq c_0 \|u_0\|_{L_x^2} + c_1 T^{1-b-d} \left(\theta T^{b+d} \|u\|_{X^{0,b}} + T^b \|u\|_{X^{0,b}} \|v\|_{X_a^{0,b}} \right) \\ &\leq c_0 \|u_0\|_{L_x^2} + c_1 T^{1-d} \left(\theta \|u\|_{X^{0,b}} + \|u\|_{X^{0,b}} \|v\|_{X_a^{0,b}} \right). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\|\Phi_2(u, v)\|_{X_a^{0,b}} \leq c_0 \|v_0\|_{L_x^2} + c_2 T^{1-d} \left(\alpha \|v\|_{X_a^{0,b}} + \frac{a}{2} \|u\|_{X^{0,b}}^2 \right).$$

Seguindo os mesmos argumentos da prova do teorema de Boa colocação concluímos que vale o Teorema do Ponto Fixo para

$$T^{1-d} \leq \frac{1}{4} \min \left\{ \frac{1}{\|Iu_0\|_{L_x^2}}, \frac{1}{\|Iv_0\|_{L_x^2}} \right\},$$

isto é,

$$T^{\frac{3}{4}-} \sim \left(\|Iu_0\|_{L_x^2} + \|Iv_0\|_{L_x^2} \right)^{-1}.$$

Portanto o tempo de existência deve satisfazer a desigualdade acima, ou seja,

$$T \sim \left(\|Iu_0\|_{L_x^2} + \|Iv_0\|_{L_x^2} \right)^{-\frac{4}{3}+}.$$

□

Sabemos, agora, que o tempo de existência é $\delta = (\|Iu\|_{L^2} + \|Iv\|_{L^2})^{-4/3}$.

2.3 Leis quase conservadas em L^2

Vamos considerar a energia E associada ao sistema (2.5)

$$(2.11) \quad E(Iu, Iv) = \|Iu\|_{L^2}^2 + 2\sigma \|Iv\|_{L^2}^2.$$

Teorema 2.2 *O funcional energia (2.11) tem derivada com respeito ao tempo dada por:*

$$\frac{d}{dt} E(Iu, Iv) = 2\text{Im} \left\{ \int (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv) I\bar{u}dx \right\} + 2\text{Im} \left\{ \int (I(u^2) - (Iu)^2) I\bar{v}dx \right\}.$$

Demonstração: Usaremos as identidades acima para calcular a derivada da energia.

Usando também o seguinte fato $\int \bar{f} \cdot \partial_x^2 f = \int |\partial_x f|^2$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(Iu, Iv) &= \int \partial_t Iu \cdot I\bar{u} + \int Iu \cdot \partial_t I\bar{u} + 2\sigma \int \partial_t Iv \cdot I\bar{v} + 2\sigma \int Iv \cdot \partial_t I\bar{v} \\
&= i \int (I(\bar{u}v) - \theta Iu + r\partial_x^2 Iu) \cdot I\bar{u} - i \int Iu \cdot (I(u\bar{v}) - \theta I\bar{u} + r\partial_x^2 I\bar{u}) \\
&\quad + i \int (I(u^2) - \alpha Iv + s\partial_x^2 Iv) \cdot I\bar{v} - i \int Iv \cdot (I(\bar{u}^2) - \alpha I\bar{v} + s\partial_x^2 I\bar{v}) \\
&= i \int I(\bar{u}v) \cdot I\bar{u} + ir \int |\partial_x Iu|^2 - i \int Iu \cdot I(u\bar{v}) - ir \int |\partial_x Iu|^2 \\
&\quad + i \int I(u^2) \cdot I\bar{v} + is \int |\partial_x Iv|^2 - i \int Iv \cdot I(\bar{u}^2) - is \int |\partial_x Iv|^2 \\
&= i \int I(\bar{u}v) \cdot I\bar{u} - i \int Iu \cdot I(u\bar{v}) \\
&\quad + i \int I(u^2) \cdot I\bar{v} - i \int Iv \cdot I(\bar{u}^2) \\
&= -2\text{Im} \left\{ \int I(\bar{u}v) \cdot I\bar{u} \right\} + 2\text{Im} \left\{ \int Iv \cdot I(\bar{u}^2) \right\} \\
&= -2\text{Im} \left\{ \int (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv) \cdot I\bar{u} \right\} - 2\text{Im} \left\{ \int I\bar{u}Iv \cdot I\bar{u} \right\} \\
&\quad + 2\text{Im} \left\{ \int Iv \cdot I(\bar{u}^2) \right\} \\
&= -2\text{Im} \left\{ \int (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv) \cdot I\bar{u} \right\} + 2\text{Im} \left\{ \int (I(\bar{u}^2) - (I\bar{u})^2) \cdot Iv \right\}.
\end{aligned}$$

□

Agora estimaremos a diferença entre a energia modificada final no tempo δ e a energia modificada inicial no tempo zero. Tal estimativa afirma o quanto tem crescido a energia ao longo do tempo. Como a energia modificada está associada aos dados iniciais do Problema de Cauchy, se esta energia modificada tiver um crescimento controlado de alguma forma pelos dados iniciais será possível aplicar novamente o argumento de ponto fixo tomando como dados iniciais o ponto final da solução obtido anteriormente. Vemos como este controle ocorre nas Proposições que encerram esta seção.

Usando o teorema fundamental do cálculo temos que

$$\begin{aligned}
E(Iu, Iv)(\delta) - E(Iu, Iv)(0) &= 2\text{Im} \int_0^\delta \left(\int (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv) I\bar{u}dx \right) dt \\
&\quad + 2\text{Im} \int_0^\delta \left(\int (I(u^2) - (Iu)^2) I\bar{v}dx \right) dt \\
&= 2\text{Im} \int_0^\delta \left\langle (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv); Iu \right\rangle_{L^2} dt \\
&\quad + 2\text{Im} \int_0^\delta \left\langle (I(u^2) - (Iu)^2); Iv \right\rangle_{L^2} dt \\
&= 2\text{Im} \int_0^\delta \left\langle (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv)^\wedge; \widehat{Iu} \right\rangle_{L^2} dt \\
&\quad + 2\text{Im} \int_0^\delta \left\langle (I(u^2) - (Iu)^2)^\wedge; \widehat{Iv} \right\rangle_{L^2} dt.
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
(I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv)^\wedge &= m(\xi)\widehat{\bar{u}} \cdot \widehat{v} - \widehat{I\bar{u}} * \widehat{Iv} \\
&= m(\xi)\widehat{\bar{u}} * \widehat{v} - (m(\cdot)\widehat{\bar{u}}) * (m(\cdot)\widehat{v}) \\
&= \int \left(m(\xi)\widehat{\bar{u}}(\xi_1)\widehat{v}(\xi_2) - m(\xi_1)\widehat{\bar{u}}(\xi_1) m(\xi_2)\widehat{v}(\xi_2) \right) d\xi_1 \\
&= \int \left(\frac{m(\xi) m(\xi_1)\widehat{\bar{u}}(\xi_1) m(\xi_2)\widehat{v}(\xi_2)}{m(\xi_1)m(\xi_2)} - m(\xi_1)\widehat{\bar{u}}(\xi_1) m(\xi_2)\widehat{v}(\xi_2) \right) d\xi_1 \\
&= \int m(\xi_1)\widehat{\bar{u}}(\xi_1) m(\xi_2)\widehat{v}(\xi_2) \left(\frac{m(\xi)}{m(\xi_1)m(\xi_2)} - 1 \right) d\xi_1 \\
&= \int \widehat{I\bar{u}}(\xi_1) \widehat{Iv}(\xi_2) \left(\frac{m(\xi) - m(\xi_1)m(\xi_2)}{m(\xi_1)m(\xi_2)} \right) d\xi_1.
\end{aligned}$$

Facilmente, temos

$$\begin{aligned}
(I(u^2) - (Iu)^2)^\wedge &= m(\xi)\widehat{u^2} - \widehat{Iu} * \widehat{Iu} \\
&= m(\xi)\widehat{u} * \widehat{u} - (m(\cdot)\widehat{u}) * (m(\cdot)\widehat{u}) \\
&= \int \left(m(\xi)\widehat{u}(\xi_1)\widehat{u}(\xi_2) - m(\xi_1)\widehat{u}(\xi_1) m(\xi_2)\widehat{u}(\xi_2) \right) d\xi_1 \\
&= \int \widehat{Iu}(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \left(\frac{m(\xi) - m(\xi_1)m(\xi_2)}{m(\xi_1)m(\xi_2)} \right) d\xi_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^\delta \left\langle (I(\bar{u}v) - I\bar{u}Iv)^\wedge; \widehat{Iu} \right\rangle_{L^2} dt = \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{\mathbb{R}_{\xi_1}} \widehat{I\bar{u}}(\xi_1) \widehat{Iv}(\xi_2) \widehat{I\bar{u}}(\xi) M(\xi, \xi_1) d\xi_1 d\xi dt,$$

de forma análoga obtemos que

$$\int_0^\delta \left\langle (I(u^2) - (Iu)^2)^\wedge; \widehat{Iv} \right\rangle_{L^2} dt = \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{\mathbb{R}_{\xi_1}} \widehat{Iu}(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \widehat{I\bar{v}}(\xi) M(\xi, \xi_1) d\xi_1 d\xi dt.$$

$$\text{onde } M(\xi, \xi_1) = \left(\frac{m(\xi) - m(\xi_1)m(\xi_2)}{m(\xi_1)m(\xi_2)} \right).$$

Observamos que fixados $N > 1$, $|\xi_1| \sim N_1$ e $|\xi_2| \sim N_2$ temos que:

- (i) Se $2|\xi_1| \leq |\xi_2|$ e $2|\xi_1| \leq N$ então $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \frac{N_1}{N_2}$;
- (ii) Se $2|\xi_2| \leq |\xi_1|$ e $2|\xi_2| \leq N$ então $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \frac{N_2}{N_1}$;
- (iii) Se $2|\xi_1| \leq |\xi_2|$ e $|\xi_1| \geq 2N$ então $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \frac{N_1}{N}$;
- (iv) Se $2|\xi_2| \leq |\xi_1|$ e $|\xi_2| \geq 2N$ então $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \frac{N_2}{N}$ e
- (v) Se $|\xi_1| \sim |\xi_2| \gtrsim N$ então $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \left(\frac{N_1}{N} \right)^2$.

Pela simetria das variáveis é suficiente verificarmos apenas as afirmações (i), (iii) e (v).

Usaremos o fato que $m'(\xi) = -N|\xi|^{-2}$.

No primeiro caso, como $|\xi_1| \ll N$ temos que $m(\xi_1) = 1$, daí,

$$|M(\xi, \xi_1)| = \left| \frac{m(\xi_1 + \xi_2) - m(\xi_2)}{m(\xi_2)} \right| \sim \left| \frac{m'(\xi_2)|\xi_1|}{m(\xi_2)} \right| \lesssim \frac{N_1}{N_2}.$$

Já para verificarmos o item (iii) precisamos observar antes que $\frac{1}{2}|\xi_2| \leq |\xi_1 + \xi_2| \leq 2|\xi_2|$ e com isso,

$$\begin{aligned} \frac{m(\xi_1 + \xi_2) - m(\xi_1)m(\xi_2)}{m(\xi_2)} &= \frac{N|\xi_1 + \xi_2|^{-1} - N|\xi_2|^{-1}N|\xi_1|^{-1}}{N|\xi_2|^{-1}} \\ &= \frac{|\xi_2|}{|\xi_1 + \xi_2|} - \frac{N}{|\xi_1|} \\ &\leq 2 - \frac{N}{|\xi_1|} \sim 1. \end{aligned}$$

Logo, (iii) segue facilmente da observação que $M(\xi, \xi_1) \sim \frac{1}{m(\xi_1)} = \frac{N_1}{N}$.

O último caso, (v), segue do fato que

$$\begin{aligned} m(\xi_1 + \xi_2) - m(\xi_1)m(\xi_2) &= N|\xi_1 + \xi_2|^{-1} - N^2|\xi_1|^{-1}|\xi_2|^{-1} \\ &\sim N \left(\frac{1}{2|\xi_1|} - \frac{N}{|\xi_1|^2} \right) \\ &= \frac{N}{2|\xi_1|} \frac{|\xi_1| - 2N}{|\xi_1|} \sim 1. \end{aligned}$$

Portanto, $M(\xi, \xi_1) \sim \frac{1}{m(\xi_1)m(\xi_2)} \sim \left(\frac{N_1}{N} \right)^2$.

Considerando

$$(2.12) \quad L_1 = 2\text{Im} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{\mathbb{R}_{\xi_1}} \widehat{I\bar{u}}(\xi_1) \widehat{Iv}(\xi_2) \widehat{I\bar{u}}(\xi) M(\xi, \xi_1) d\xi_1 d\xi dt$$

e

$$(2.13) \quad L_2 = 2\text{Im} \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}_\xi} \int_{\mathbb{R}_{\xi_1}} \widehat{Iu}(\xi_1) \widehat{Iu}(\xi_2) \widehat{I\bar{v}}(\xi) M(\xi, \xi_1) d\xi_1 d\xi dt,$$

obtemos,

$$|E(Iu, Iv)(\delta) - E(Iu, Iv)(0)| = |L_1 + L_2|.$$

Proposição 2.2 Para $\sigma > 2$ e $s \geq -1/2$ temos

$$(2.14) \quad |E(Iu, Iv)(\delta) - E(Iu, Iv)(0)| \leq N^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} \|I(u)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}^2 \|I(v)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}.$$

Demonstração: É suficiente estimar L_1 e L_2 . Observamos ainda que L_1 e L_2 são equivalentes. Neste caso, nos restringiremos a estimar L_1 . Para $2|\xi_1| \leq |\xi_2|$ e $2|\xi_1| \leq N$ temos que $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \frac{N_1}{N_2}$. Segue-se então, pelos Lemas 2.3 e 2.4, que

$$\begin{aligned} |L_1| &\leq \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \left\| D_x^{1/2} \widehat{I\bar{u}}(\xi_1) \cdot \widehat{Iv}(\xi_2) \right\|_{L^2} \left\| \widehat{I\bar{u}} \right\|_{L^2} \\ &\leq \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} N_3^{-1/2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{X^{0, 1/2+}} \left\| \widehat{Iv} \right\|_{X^{0, 1/2+}} \delta^{1/2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{X^{0, 1/2+}} \\ &\leq N^{-1/2} \delta^{1/2} \|I(u)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}^2 \|I(v)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}. \end{aligned}$$

O caso (ii), isto é, $2|\xi_2| \leq |\xi_1|$ e $2|\xi_2| \leq N$, segue pela simetria das variáveis.

Na demonstração dos casos (iii) e (iv) quando $s = -1/2$, temos que $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \left(\frac{N_1}{N}\right)^{1/2}$

$$\begin{aligned} |L_1| &\leq \left(\frac{N_1}{N}\right)^{1/2} \left\| D_x^{1/2} \widehat{Iu}(\xi_1) \cdot \widehat{Iv}(\xi_2) \right\|_{L^2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{L^2} \\ &\leq \left(\frac{N_1}{N}\right)^{1/2} N_3^{-1/2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{X^{0,1/2+}} \left\| \widehat{Iv} \right\|_{X^{0,1/2+}} \delta^{1/2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{X^{0,1/2+}} \\ &\leq N^{-1/2} \delta^{1/2} \|I(u)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}^2 \|I(v)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}. \end{aligned}$$

Para o último caso, temos $|M(\xi, \xi_1)| \lesssim \frac{N_1}{N}$ quando $|\xi_1| \sim |\xi_2| \gtrsim N$ assim, segue que $|\xi_1| \leq 2|\xi|$ e, com isso

$$\begin{aligned} |L_1| &\leq \frac{N_1}{N} \left\| D_x^{1/2} \widehat{Iu}(\xi_1) \cdot \widehat{Iv}(\xi_2) \right\|_{L^2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{L^2} \\ &\leq \frac{N_1}{N} N_1^{-1/2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{X^{0,1/2+}} \left\| \widehat{Iv} \right\|_{X^{0,1/2+}} \delta^{1/2} \left\| \widehat{Iu} \right\|_{X^{0,1/2+}} \\ &\leq N^{-1} \delta^{1/2} \|I(u)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}^2 \|I(v)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}. \end{aligned}$$

O que encerra a demonstração. □

Seguindo os mesmos argumentos apresentados acima prova-se a seguinte

Proposição 2.3 Para $0 < \sigma < 2$ e $s \geq -1/4$ temos

$$(2.15) \quad |E(Iu, Iv)(\delta) - E(Iu, Iv)(0)| \leq N^{-\frac{1}{4}} \delta^{\frac{1}{2}} \|I(u)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}^2 \|I(v)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}}.$$

Demonstração: Análoga a anterior. □

2.4 Prova do Teorema de Boa Colocação Global

Nesta seção demonstraremos o Teorema 2.1. Dadas as condições iniciais do problema de Cauchy (2.1) $(u_0, v_0) \in H^s \times H^s$ temos que

$$\|I(u_0)\|_{L^2} \leq cN^{-s} \|u_0\|_{H^s} \quad \text{e} \quad \|I(v_0)\|_{L^2} \leq cN^{-s} \|v_0\|_{H^s}.$$

Aplicando o resultado de boa colocação local da Proposição 2.1, vemos que existe solução única no intervalo de tempo $[0, \delta]$, onde $\delta \sim N^{-4s/3}$ e verifica-se também que

$$\|I(u)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}} + \|I(v)\|_{X^{0, \frac{1}{2}+}} \leq cN^{-s}.$$

Para $\sigma > 2$ e $s \geq -\frac{1}{2}$, usando a Proposição 2.2, temos

$$|E(Iu, Iv)(\delta) - E(Iu, Iv)(0)| \leq N^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} N^{-3s}.$$

Devemos provar agora que para cada $T > 0$ podemos estender nossa solução para o intervalo $[0, T]$, para isso é suficiente aplicarmos o Teorema de boa colocação local 2.1 até atingirmos este intervalo, ou seja, T/δ vezes. Se a energia modificada não crescer mais do que a inicial para este número de interações podemos concluir que o resultado é estendido até o intervalo $[0, T]$, isto é, devemos ter:

$$(2.16) \quad |E(Iu, Iv)(\delta) - E(Iu, Iv)(0)| \frac{T}{\delta} \ll E(Iu_0, Iv_0).$$

Portanto, é suficiente que

$$(2.17) \quad N^{-\frac{1}{2}} \delta^{\frac{1}{2}} N^{-3s} \frac{T}{\delta} \ll N^{-2s} \quad \text{ou} \quad N^{-\frac{1}{2}} \delta^{-\frac{1}{2}} N^{-3s} T \ll N^{-2s}.$$

Daí concluímos que $-\frac{1}{2} - 3s + \frac{2s}{3} \leq -2s$, pois $\delta^{-1/2} \sim N^{2s/3}$. Verifica-se que para qualquer $s \geq -1/2$ podemos estender a solução a qualquer intervalo de tempo tomando N suficientemente grande.

A demonstração do outro caso segue de forma similar.

□

O Teorema demonstrado nesta seção nos diz que a solução do problema de Cauchy estende-se globalmente no tempo nos segmentos que ligam os pontos $(0, 0)$ e $(-1/2, -1/2)$ no caso $\sigma > 2$ e $(0, 0)$ e $(-1/4, -1/4)$ no caso $0 < \sigma < 2$.

3

Resultados de Má colocação

Neste capítulo vamos estabelecer alguns resultados de má colocação para o problema de Cauchy (3.1) abaixo, com ênfase no caso $\sigma = 1$.

$$(3.1) \quad \begin{cases} i\partial_t u + p\partial_x^2 u - \theta u + \bar{u}v = 0 \\ i\sigma\partial_t v + q\partial_x^2 v - \alpha v + \frac{1}{2}u^2 = 0, & t \in [-T, T], x \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & (u_0, v_0) \in H^\kappa(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R}), \end{cases}$$

onde u e v são funções que assumem valores complexos.

Na primeira seção deste capítulo apresentamos a noção de má colocação explorada neste trabalho. Encerraremos o capítulo apresentando os resultados obtidos neste trabalho e na penúltima seção discutimos sobre os tipos de contraexemplos a serem explorados.

3.1 Teoria Geral de Má Colocação

Um Problema de Cauchy é dito **bem colocado**, no sentido dado por Jacques Hadamard, se ele tem as seguintes propriedades:

- (a) Existe uma solução;
- (b) A solução é única;
- (c) Dependência contínua do dado inicial (O comportamento da solução dificilmente muda quando há uma ligeira mudança na condição inicial).

O resultado apresentado neste trabalho inicia-se observando o Teorema de Cauchy-Kowalevsky do qual segue que a aplicação dado-solução do Problema de Cauchy em

questão deve ser analítica vista como aplicação entre espaços de Banach, usaremos este fato para provar que a aplicação dado-solução não é C^2 na origem.

Dada uma equação dispersiva em sua forma geral

$$(3.2) \quad i\partial_t u = \phi(-i\partial_x)u + f(u),$$

onde ϕ é uma função que assume valores reais e f é alguma função não linear. O Problema de Cauchy (3.2) com dado inicial $u(0) = \varphi$ é reescrito, pelo Principio de Duhamel, na forma integral como a seguinte equação integral

$$(3.3) \quad u(t) = U(t)\varphi - i \int_0^t U(t-s)f(u(s))ds,$$

onde $U(t) = \exp(-it\phi(-i\partial_x))$ é o grupo unitário que resolve a equação linear associada.

Assim, assumindo a existência de uma solução local para a equação integral (3.3), dado uma condição inicial $\varphi \in H^s(\mathbb{R})$, podemos associar uma única solução $u(t, x) \in C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$ dada pela expressão (3.3) que satisfaz a equação diferencial (3.2) no sentido forte. Posto isto, dado qualquer elemento de $H^s(\mathbb{R})$ associamos uma única solução da equação (3.2) que no instante $t = 0$ coincide com o elemento de $H^s(\mathbb{R})$ fixado. Em geral, temos definido uma aplicação entre dois espaços de Banach, a saber

$$\Phi : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow C([-T, T]; H^s(\mathbb{R})), \quad \Phi(\varphi) = U(t)\varphi - i \int_0^t U(t-s)f(u(s))ds.$$

No nosso caso estamos interessados em um sistema de equações e assim se denotarmos por $X = H^k(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$ e por $Y = C([-T, T]; H^k(\mathbb{R})) \times C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$ teremos como aplicação solução $\Phi : X \longrightarrow Y$, $\Phi(\varphi, \psi) = (u(t), v(t))$.

Fixados $(\varphi, \psi) \in X$. Seja $G : \mathbb{R} \longrightarrow X$ dada por $G(\gamma) = (\gamma\varphi, \gamma\psi)$. Agora, considere $H : \mathbb{R} \longrightarrow Y$ definido como $H = \varphi \circ G$. Então,

$$\underbrace{DH(\gamma)}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}; Y)} = \underbrace{D\Phi(G(\gamma))}_{\mathcal{L}(X; Y)} \circ \underbrace{DG(\gamma)}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}; X)}.$$

Temos ainda que

$$\underbrace{D^2H(\gamma)}_{\mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; Y)} = \underbrace{D^2\Phi(G(\gamma))}_{\mathcal{B}(X \times X; Y)} \circ \underbrace{(DG(\gamma), DG(\gamma))}_{\mathcal{L}(\mathbb{R}; X) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}; X)} + \underbrace{D\Phi(G(\gamma)) \circ D^2G(\gamma)}_{\mathcal{L}(X; Y) \circ \mathcal{B}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; X)}.$$

Ora, $D^2G(\gamma) \equiv 0$ e assim

$$\begin{aligned} D^2H(\gamma)(\alpha, \beta) &= D^2\Phi(G(\gamma))(DG(\gamma)(\alpha), DG(\gamma)(\beta)) \\ &= D^2\Phi(G(\gamma))(G(\alpha), G(\beta)). \end{aligned}$$

Daí, $D^2\Phi(0)((\varphi, \psi), (\varphi, \psi)) = D^2H(0)(1, 1)$.

Neste trabalho vamos mostrar que a aplicação solução não é C^2 na origem, ou seja, vamos mostrar que $D^2\Phi(0)$ é não limitado como aplicação bilinear. Para demonstrar este fato exibiremos sequências $(\varphi_n, v_n) \in X$ tais que

$$(3.4) \quad \|(\varphi_n, v_n)\|_X \leq c \quad \text{e} \quad \|D^2\Phi(0)((\varphi_n, v_n), (\varphi_n, v_n))\|_Y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Como $\|(f, g)\|_Y = \sup_t \|f\|_{H^\kappa(\mathbb{R})} + \sup_t \|g\|_{H^s(\mathbb{R})}$, é suficiente mostrarmos que $\|f\|_{H^\kappa(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq c(t)n^\theta$, onde $\theta > 0$.

Para $\gamma = 0$ obtemos a segunda derivada de Frechét da aplicação dado solução:

$$\begin{aligned} \partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} &= -2i \int_0^t U(t-s) (\overline{U(s)\varphi(x)} \cdot U_a(s)\psi(x)) ds \quad \text{e} \\ \partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} &= -2i \int_0^t U_a(t-s) (U(s)\varphi(x))^2 ds. \end{aligned}$$

Obtemos assim que

$$(3.5) \quad D^2\Phi(t)((\varphi, \psi), (\varphi, \psi)) = \left(\partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0}, \partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} \right).$$

No que se segue será de grande valia o seguinte:

Lema 3.1 *Seja $g(t, z) = \frac{e^{itz} - 1}{iz}$, com $0 < t < 1$. Neste caso, se $|z| \leq 3$ então $g(t, z) \cong t$.*

Uma variação importante deste lema é o fato de podermos supor que $|ta| \leq 3$ e com isso teremos como resultado que $g(t, z) \cong t$.

Demonstração: Iniciamos por observar que $g(t, a) = \frac{\cos(ta) - 1 + i \sin(ta)}{ia} = t \frac{\sin(ta)}{ta} - i \frac{\cos(ta) - 1}{a}$.

Quando $|a|$ tende a zero teremos que $\frac{\sin(ta)}{ta}$ tende a 1 enquanto que $\frac{\cos(ta) - 1}{a}$ tende a zero, isso implica que $g(t, a)$ tende a t quando $|a|$ tende a zero.

Quando $|a| = 3$ teremos que $0,04 < \frac{\sin(3)}{3} \leq \frac{\sin(3t)}{3t} \leq 1$ e que $0 \leq \frac{1 - \cos(3t)}{3} \leq \frac{1 - \cos(3)}{3} < 0,7$. Isso nos permite dizer, por continuidade, que $g(t, a)$ sempre estará próximo a t , na verdade estará próximo a ct , onde $0 < c \leq 1$ com c dependendo de a .
□

3.2 Segunda Derivada aplicada a funções elementares

De um modo geral, tomaremos como dados iniciais do Sistema (3.1) funções elementares da forma

$$\varphi_n(x) = n^\alpha \int_{A_n} e^{ix\xi} d\xi.$$

É fácil ver que $\widehat{\varphi_n}(\xi) = n^\alpha \chi_{A_n}(\xi)$, e para verificar que $\varphi_n \in H^\kappa(\mathbb{R})$ basta observar que

$$\begin{aligned} \|\varphi_n\|_{H^\kappa(\mathbb{R})}^2 &= \|(1 + |\xi|^2)^{\kappa/2} \widehat{\varphi_n}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|^2)^\kappa n^{2\alpha} \chi_{A_n}(\xi) d\xi \\ &\leq cn^{2\alpha} \int_{A_n} (1 + |\xi|^{2\kappa}) d\xi \\ &\leq cn^{2\alpha} (1 + \sup\{A_n\}^{2\kappa}) |A_n|, \end{aligned}$$

onde, $|A_n|$ representa a medida de A_n .

Por exemplo, para obtermos um sequência de funções limitadas em $H^\kappa(\mathbb{R})$ basta tomarmos $A_n = [n, n + \frac{1}{n}]$. Neste caso, o $\sup\{A_n\} \leq 2n$ e $|A_n| = n^{-1}$. Assim,

$$\|\varphi_n\|_{H^\kappa(\mathbb{R})} \leq n^{\alpha+\kappa-1/2}.$$

Se, $A_n = [cn - d, cn + d]$ então $\sup\{A_n\} \leq 2cn$ e $|A_n| = 2d$. Donde obtemos,

$$\|\varphi_n\|_{H^\kappa(\mathbb{R})} \leq n^{\alpha+\kappa}.$$

De um modo geral, se tomarmos como ponto de partida as funções elementares podemos encontrar uma expressão geral e, nesta perceberemos como a relação de dispersão interfere na obtenção de resultados para mostrar que a forma bilinear associada ao fluxo não é C^2 na origem.

$$\text{Considere } \varphi_n(x) = n^\alpha \int_{A_n} e^{ix\xi} d\xi \text{ e } \psi_n(x) = n^\beta \int_{B_n} e^{ix\xi} d\xi.$$

Desse modo, temos

$$\partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0}(\varphi_n, \psi_n) = -2i \int_0^t U(t-s) (\overline{U(s)\varphi(x)} \cdot U_a(s)\psi_n(x)) ds.$$

Ora, como sabemos que $\widehat{U(s)\varphi_n}(\xi) = e^{-is\xi^2} n^\alpha \chi_{A_n}(\xi)$ e de forma análoga, temos uma $\widehat{U_a(s)\psi_n}(\xi) = e^{-isa\xi^2} n^\beta \chi_{B_n}(\xi)$, então, segue que

$$\begin{aligned} \left[U(t-s) (\overline{U(s)\varphi(x)} \cdot U_a(s)\psi_n(x)) \right]^{\wedge x}(\xi) &= e^{-i(t-s)\xi^2} \overline{\widehat{U(s)\varphi_n}} * \widehat{U_a(s)\psi_n}(\xi) \\ &= n^{\alpha+\beta} e^{-i(t-s)\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{is(\xi-z)^2} e^{-iasz^2} \chi_{A_n}(\xi-z) \chi_{B_n}(z) dz \\ &= n^{\alpha+\beta} e^{-it\xi^2} \int_{B_n} e^{is(\xi^2+(\xi-z)^2-az^2)} \chi_{A_n}(\xi-z) dz \\ &= n^{\alpha+\beta} e^{-it\xi^2} \int_{B_n} e^{is(\xi^2+\xi_1^2-a\xi_2^2)} \chi_{A_n}(\xi_1) d\xi_2. \end{aligned}$$

Note que $\xi = \xi_1 + \xi_2$.

De maneira análoga concluímos que:

$$\begin{aligned} [U_a(t-s) (U(s)\varphi(x) \cdot U(s)\varphi(x))]^{\wedge x}(\xi) &= e^{-ia(t-s)\xi^2} \widehat{U(s)\varphi_n} * \widehat{U(s)\varphi}(\xi) \\ &= n^{2\alpha} e^{-ia(t-s)\xi^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-is(\xi-z)^2} e^{-isz^2} \chi_{A_n}(\xi-z) \chi_{A_n}(z) dz \\ &= n^{2\alpha} e^{-iat\xi^2} \int_{A_n} e^{is(a\xi^2-(\xi-z)^2-z^2)} \chi_{A_n}(\xi-z) dz \\ &= n^{2\alpha} e^{-iat\xi^2} \int_{A_n} e^{is(a\xi^2-\xi_1^2-\xi_2^2)} \chi_{A_n}(\xi_1) d\xi_2. \end{aligned}$$

O nosso interesse consiste em calcular

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^\kappa} &= \left\| \langle \xi \rangle^\kappa \left(\partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right)^{\wedge_x} \right\|_{L_\xi^2} \\
&= \left\| \langle \xi \rangle^\kappa \left(\int_0^t U(t-s) (\overline{U(s)\varphi(x)} \cdot U_a(s)\psi(x)) ds \right)^{\wedge_x} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \langle \xi \rangle^\kappa \int_0^t \left(U(t-s) (\overline{U(s)\varphi(x)} \cdot U_a(s)\psi(x)) \right)^{\wedge_x} ds \right\|_{L^2} \\
&= n^{\alpha+\beta} \left\| \langle \xi \rangle^\kappa \int_0^t e^{-it\xi^2} \int_{B_n} e^{is(\xi^2+\xi_1^2-a\xi_2^2)} \chi_{A_n}(\xi_1) d\xi_2 ds \right\|_{L^2} \\
&= n^{\alpha+\beta} \left\| \langle \xi \rangle^\kappa e^{-it\xi^2} \int_{B_n} \underbrace{\int_0^t e^{is(\xi^2+\xi_1^2-a\xi_2^2)} ds}_{g_a(t, \xi, \xi_2)} \chi_{A_n}(\xi_1) d\xi_2 \right\|_{L^2} \\
&= n^{\alpha+\beta} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| e^{-it\xi^2} \int_{B_n} g_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= n^{\alpha+\beta} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} g_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Agora para a outra segunda derivada obtemos:

$$\begin{aligned}
\left\| \partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^s} &= \left\| \langle \xi \rangle^s \left(\partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right)^{\wedge_x} \right\|_{L_\xi^2} \\
&= \left\| \langle \xi \rangle^s \left(\int_0^t U_a(t-s) (U(s)\varphi(x))^2 ds \right)^{\wedge_x} \right\|_{L^2} \\
&= \left\| \langle \xi \rangle^s \int_0^t (U_a(t-s) (U(s)\varphi(x) \cdot U(s)\varphi(x)))^{\wedge_x} ds \right\|_{L^2} \\
&= n^{2\alpha} \left\| \langle \xi \rangle^s \int_0^t e^{-iat\xi^2} \int_{A_n} e^{is(a\xi^2-\xi_1^2-\xi_2^2)} \chi_{A_n}(\xi_1) d\xi_2 ds \right\|_{L^2} \\
&= n^{2\alpha} \left\| \langle \xi \rangle^s e^{-iat\xi^2} \int_{A_n} \underbrace{\int_0^t e^{is(a\xi^2-\xi_1^2-\xi_2^2)} ds}_{h_a(t, \xi, \xi_2)} \chi_{A_n}(\xi_1) d\xi_2 \right\|_{L^2} \\
&= n^{2\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \left| e^{-iat\xi^2} \int_{A_n} h_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= n^{2\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_{A_n} h_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Em resumo, temos:

(3.6)

$$\left\| \partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0}(\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^\kappa} = n^{\alpha+\beta} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} g_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

e

(3.7)

$$\left\| \partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0}(\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^s} = n^{2\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_{A_n} h_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2},$$

onde

$$(3.8) \quad g_a(t, \xi, \xi_2) = \int_0^t e^{is(\xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2)} ds = \frac{e^{it(\xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2)} - 1}{i(\xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2)}$$

e

$$(3.9) \quad h_a(t, \xi, \xi_2) = \int_0^t e^{is(a\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)} ds = \frac{e^{it(a\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)} - 1}{i(a\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)}.$$

Os resultados obtidos aqui afirmam que fixado $t > 0$ a aplicação dado-solução não é Frechét duas vezes diferenciável.

3.3 Resultados de má-colocação

Fixados os resultados básicos para a Teoria de má-colocação passemos a apresentar os nossos resultados.

Proposição 3.1 *No caso $0 < \sigma < 1/2$, com $\sigma \neq 1$. O operador dado-solução não é C^2 na origem se $s < -\frac{1}{2}$.*

Demonstração: Afim de facilitar a notação adotamos $a = 1/\sigma$.

Como $a \geq \frac{1}{2}$, temos que $g_a(t, \xi, \xi_2) = 2(\xi - \xi_2 \frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2})(\xi - \xi_2 \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2})$.

Seja $\mu = \frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2}$, logo $1 - \mu = \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$ (Como $a \neq 1$ temos que $\mu \neq 1$).

Considere agora $A_n = \left[n, n + \frac{1}{2n} \right]$ e $B_n = \left[-\frac{n}{\mu} - \frac{1}{2\mu n}, -\frac{n}{\mu} \right]$, nesse caso $\alpha = 1/2 - \kappa$ e $\beta = 1/2 - s$ então se $(\xi - \xi_2) \in A_n$ e $\xi_2 \in B_n$ o que nos dá

$$-\frac{1}{4n} \leq \xi - (1 - \mu)\xi_2 \leq \frac{1}{4n} \text{ e}$$

$$n \left(2 - \frac{1}{\mu} \right) - \frac{1}{4\mu n} \leq \xi - \mu\xi_2 \leq n \left(2 - \frac{1}{\mu} \right) + \frac{1}{2n}.$$

Portanto $|\xi^2 + \xi_1^2 - a\xi_2^2| \leq 3$ e segue do Lema 3.1 temos que $g_a(t, \xi, \xi_2) \cong t$.

Daí,

$$\begin{aligned} \|D^2\Phi(0)((\varphi_n, \psi_n), (\varphi_n, \psi_n))\|_{H^\kappa \times H^s} &\geq \left\| \partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^\kappa} \\ &= n^{1-\kappa-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} g_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= n^{1-\kappa-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} t \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\cong tn^{1-\kappa-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\cong tn^{1-\kappa-s} \left(\int_{n(1-\frac{1}{\mu})-\frac{1}{\mu n}}^{n(1-\frac{1}{\mu})+\frac{1}{n}} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} 1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\cong tn^{1-\kappa-s} n^{-1} \left(\int_{n(1-\frac{1}{\mu})-\frac{1}{\mu n}}^{n(1-\frac{1}{\mu})+\frac{1}{n}} \langle \xi \rangle^{2\kappa} d\xi \right)^{1/2} \\ &\geq tn^{-\kappa-s} n^{\kappa-1/2} = n^{-1/2-s}. \end{aligned}$$

Note que $1 - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu} \neq 0, \forall \mu \geq \frac{1}{2}$.

Isto encerra a demonstração desta Proposição. \square

O resultado afirma que para $0 < \sigma < 2$ a regularidade do segundo dado inicial deve ser maior que meio para se obter boa colocação local.

O nosso foco será agora o caso $\sigma = 1$ onde foi possível obter resultados melhores provando que os resultados obtidos neste caso são *Sharp*.

Proposição 3.2 *No caso $\sigma = 1$. O operador dado-solução não é C^2 na origem se $s < -\frac{1}{2} - k$.*

Demonstração: Tome $a = 1/\sigma$. Como $a = 1$, temos que $g_a(t, \xi, \xi_2) = 2\xi(\xi - \xi_2)$. Considere agora $A_n = [n, n + \frac{1}{n}]$, e $B_n = -A_n$, nesse caso $\alpha = 1/2 - k$ e $\beta = 1/2 - s$ então se $(\xi - \xi_2) \in A_n$ e $\xi_2 \in B_n$ então

$$-\frac{1}{n} \leq \xi \leq \frac{1}{n} \text{ e } |\xi^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2| \leq 3.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|D^2\Phi(0)((\varphi_n, \psi_n), (\varphi_n, \psi_n))\|_{H^k \times H^s} &= \left\| \partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^k} \\ &= n^{1-k-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2k} \left| \int_{B_n} g_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &= n^{1-k-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2k} \left| \int_{B_n} t \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\cong tn^{1-k-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2k} \left| \int_{B_n} \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\cong tn^{1-k-s} \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \langle \xi \rangle^{2k} \left| \int_{-n-\frac{1}{n}}^{-n} 1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\cong tn^{1-k-s} n^{-1} \left(\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \langle \xi \rangle^{2k} d\xi \right)^{1/2} \\ &\geq tn^{-\kappa-s} n^{-1/2} = n^{-1/2-s-\kappa}. \end{aligned}$$

Para $s < -\kappa - \frac{1}{2}$ o fluxo não é C^2 . □

Proposição 3.3 *No caso $a = 1$. O operador dado-solução não é C^2 na origem se $s < -\frac{1}{2} + \kappa$.*

Demonstração: Como $a = 1$, temos que $g_a(t, \xi, \xi_2) = 2\xi(\xi - \xi_2)$. Considere agora $A_n = [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, e $B_n = [n, n + \frac{1}{n}]$. Assim $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/2 - s$ então se $(\xi - \xi_2) \in A_n$ e $\xi_2 \in B_n$ obtemos

$$n - \frac{1}{n} \leq \xi \leq n + \frac{2}{n} \text{ e } |\xi^2 + \xi_1^2 - \xi_2^2| \leq 3.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|D^2\Phi(0)((\varphi_n, \psi_n), (\varphi_n, \psi_n))\|_{H^\kappa \times H^s} &= \left\| \partial_\gamma^2 u(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^\kappa} \\
&= n^{1-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} g_a(t, \xi, \xi_2) \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&= n^{1-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} t \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\cong tn^{1-s} \left(\int_{\mathbb{R}_\xi} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{B_n} \chi_{A_n}(\xi - \xi_2) d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\cong tn^{1-s} \left(\int_{n-\frac{1}{n}}^{n+\frac{2}{n}} \langle \xi \rangle^{2\kappa} \left| \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} 1 d\xi_2 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\cong tn^{1-s} n^{-1} \left(\int_{n-\frac{1}{n}}^{n+\frac{2}{n}} \langle \xi \rangle^{2\kappa} d\xi \right)^{1/2} \\
&\geq tn^{-s} n^{-1/2+\kappa} = n^{-1/2-s+\kappa}.
\end{aligned}$$

Para $s < \kappa - \frac{1}{2}$ o fluxo não é C^2 . □

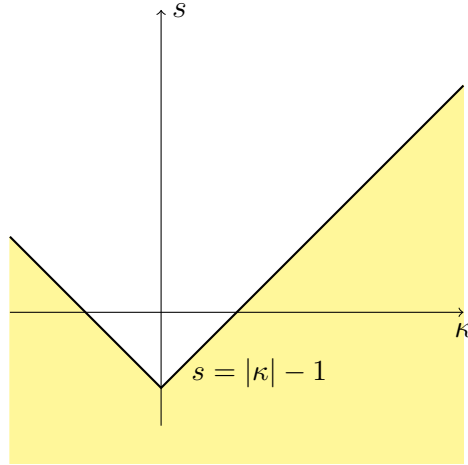


Figura 3.1: Região onde a Proposição 1.1 não é válida assumindo $\sigma = 1$

Proposição 3.4 *No caso $\sigma = 1$. O operador dado-solução não é C^2 na origem se $s > 2\kappa + \frac{1}{2}$.*

Demonstração: Tome como dados iniciais do Sistema (3.1) $(\varphi_n, \psi_n) \in H^\kappa(\mathbb{R}) \times H^s(\mathbb{R})$, onde $\psi_n(x) \equiv 0$ e

$$\varphi_n(x) = n^{1/2-\kappa} \left(\int_{-n-1/n}^{-n} e^{ix\xi} d\xi + \int_0^{+1/n} e^{ix\xi} d\xi \right)$$

É fácil ver que $\widehat{\varphi}_n(\xi) = n^{1/2-\kappa} (\chi_{[-n-1/n, -n]}(\xi) + \chi_{[0, +1/n]}(\xi))$.

Vamos mostrar agora que

$$\left\| \partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} \right\|_{H^s(\mathbb{R})} \geq c(t) n^{s-(2\kappa+1/2)}$$

Iniciamos por escrever $\varphi_n(x) = \varphi_{n,1}(x) + \varphi_{n,2}(x)$, onde

$$\varphi_{n,1}(x) = n^{1/2-\kappa} \int_{-n-1/n}^{-n} e^{ix\xi} d\xi$$

e

$$\varphi_{n,2}(x) = n^{1/2-\kappa} \int_0^{1/n} e^{ix\xi} d\xi,$$

Desta forma, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_0^t U(t-t') (U(t') \varphi_n(x))^2 dt' &= \int_0^t U(t-t') (U(t') [\varphi_{n,1}(x) + \varphi_{n,2}(x)])^2 dt' \\ &= \underbrace{\int_0^t U(t-t') (U(t') \varphi_{n,1}(x))^2 dt' + \int_0^t U(t-t') (U(t') \varphi_{n,2}(x))^2 dt'}_{A(t,x)} \\ &\quad + 2 \underbrace{\int_0^t U(t-t') (U(t') \varphi_{n,1}(x) U(t') \varphi_{n,2}(x)) dt'}_{B(t,x)}. \end{aligned}$$

Assim, é suficiente provar que

$$\begin{aligned} \left\| \partial_\gamma^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} \right\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \left\| \langle \xi \rangle^s \left(\int_0^t U(t-t') (U(t') \varphi_n(x))^2 dt' \right)^{\wedge_x} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \left\| \langle \xi \rangle^s (A(t, x) + B(t, x))^{\wedge_x} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \widehat{A}(t, \xi) + \widehat{B}(t, \xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \widehat{A}(t, \xi) \right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \widehat{B}(t, \xi) \right|^2 d\xi \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \widehat{A}(t, \xi) \overline{\widehat{B}(t, \xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Observando isto, é nos basta provar que

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \widehat{B}(t, \xi) \right|^2 d\xi \right]^{1/2} \geq c(t)n^{s-(2\kappa-1/2)},$$

ou seja,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_0^t \left(U(t-t')U(t')\varphi_{n,1}(x) \cdot U(t')\varphi_{n,2}(x) dt' \right)^{\wedge_x} \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \geq c(t)n^{s-(2\kappa-1/2)},$$

Seja agora $A_n = [-n - 1/n, -n]$ e $B_n = [0, 1/n]$. Logo, $\widehat{\phi_{n,1}} = \chi_{A_n}$ e $\widehat{\phi_{n,2}} = \chi_{B_n}$.

Agora vamos calcular a Transformada de Fourier com respeito a variável espacial x ,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t U(t-t') \left(U(t)\varphi_{n,1}(x) \right) \left(U(t)\varphi_{n,2}(x) \right) dt' \right)^{\wedge_x}(\xi) \\ & \cong n^{1-2\kappa} \int_0^t e^{-it\xi^2} \int_{A_n} e^{it'(\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)} \chi_{B_n}(\xi_2) d\xi_1 dt' \end{aligned}$$

Como, $\xi = \xi_1 + \xi_2$ temos que $\xi^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 = 2\xi_1\xi_2$. Agora usando o fato que $\xi_1 \in A_n$ e $\xi_2 \in B_n$ temos que $2\xi_1\xi_2 \leq 2$ e com isso,

$$\begin{aligned} \left\| \partial_{\gamma}^2 v(\gamma; t, x) \Big|_{\gamma=0} (\varphi_n, \psi_n) \right\|_{H^s} &= tn^{1-2\kappa} \left(\int_{\mathbb{R}_{\xi}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_{A_n} \chi_{B_n}(\xi_2) d\xi_1 \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq tn^{-2\kappa} \left(\int_{-n-1/n}^{-n+1/n} \langle \xi \rangle^{2s} d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq tn^{-2\kappa+s+1/2}. \end{aligned}$$

□



Bibliografia

- [1] J. Angulo and F. Linares. Periodic pulses of coupled nonlinear Schrödinger equations in optics. *Indiana University Mathematics Journal*, 56(2):847–878, 2007.
- [2] I. Bejenaru and T. Tao. Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrödinger equation. *Journal of Functional Analysis*, 233(1):228–259, 2006.
- [3] J. Bourgain. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations I, II. *Geometric and Functional Analysis*, 3(3):209–262, 1993.
- [4] J. Bourgain. Refinements of strichartz’ inequality and applications to 2d-nls with critical nonlinearity. *International Mathematics Research Notices*, 1998(5):253–283, 1998.
- [5] T. Cazenave. *An introduction to nonlinear Schrödinger equations*. Number 26. Instituto de Matemática, UFRJ, 1993.
- [6] T. Cazenave. *Semilinear Schrödinger equations*, volume 10. American Mathematical Soc., 2003.
- [7] T. Cazenave and P.-L. Lions. Orbital stability of standing waves for some nonlinear schrödinger equations. *Communications in Mathematical Physics*, 85(4):549–561, 1982.
- [8] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global well-posedness for KdV in Sobolev spaces of negative index. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001(26):1–7, 2001.

- [9] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Global well-posedness for Schrödinger equations with derivative. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(3):649–669, 2001.
- [10] J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka, and T. Tao. Multilinear estimates for periodic KdV equations, and applications. *Journal of Functional Analysis*, 211(1):173–218, 2004.
- [11] A. Corcho and F. Linares. Well-posedness for the Schrödinger-Korteweg-de Vries system. *Transactions of the American Mathematical Society*, 359(9):4089–4106, 2007.
- [12] A. J. Corcho and C. Matheus. Sharp bilinear estimates and well-posedness for the 1-d Schrödinger-Debye system. *Differential and Integral Equations*, 22(3/4):357–391, 2009.
- [13] R. DeSalvo, H. Vanherzeele, D. Hagan, M. Sheik-Bahae, G. Stegeman, and E. Van Stryland. Self-focusing and self-defocusing by cascaded second-order effects in KTP. *Optics letters*, 17(1):28–30, 1992.
- [14] L. Domingues. O problema de Cauchy para um sistema Schrödinger-Benjamin-Ono. *Tese de Doutorado em Matemática, UFRJ*, 2015.
- [15] J. Ginibre, Y. Tsutsumi, and G. Velo. On the Cauchy problem for the Zakharov system. *Journal of Functional Analysis*, 151(2):384–436, 1997.
- [16] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, i. *Journal of Functional Analysis*, 74(1):160–197, 1987.
- [17] J. Holmer. Local ill-posedness of the 1d Zakharov system. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2007(24):1–22, 2007.
- [18] Y. N. Karamzin and A. Sukhorukov. Nonlinear interaction of diffracted light beams in a medium with quadratic nonlinearity: mutual focusing of beams and limitation on the efficiency of optical frequency converters. *JETP Lett*, 20(11):339–343, 1974.

- [19] C. Kenig, G. Ponce, and L. Vega. Quadratic forms for the 1-d semilinear Schrödinger equation. *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(8):3323–3353, 1996.
- [20] F. Linares and G. Ponce. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer, 2014.
- [21] O. Lopes. Stability of solitary waves of some coupled systems. *Nonlinearity*, 19(1):95, 2006.
- [22] C. Menyuk, R. Schiek, and L. Torner. Solitary waves due to $\chi(2)$: $\chi(2)$ cascading. *JOSA B*, 11(12):2434–2443, 1994.
- [23] J. A. Pava. *Nonlinear dispersive equations: existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions*. Number 156. American Mathematical Soc., 2009.
- [24] H. Pecher. The Cauchy problem for a Schrödinger-Korteweg-de Vries system with rough data. *Differential and Integral Equations*, 18(10):1147–1174, 2005.
- [25] T. Tao. *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, volume 106. American Mathematical Soc., 2006.
- [26] A. Yew. Stability analysis of multipulses in nonlinearly-coupled Schrödinger equations. *Indiana University Mathematics Journal*, 49(3):1079–1124, 2000.