

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
UFBA-UFAL

MANUEL CEACA CRUZ

*Sobre Self-shrinkers e
Self-expanders Completos*

Maceió
2023

MANUEL CEACA CRUZ

Sobre *Self-shrinkers* e *Self-expanders* Completos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva*

Maceió
2023

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Jorge Raimundo da Silva – CRB-4 - 1528

C957s Cruz, Manuel Ceaca.
Sobre Self-shrinkers e Self-expanders Completos / Manuel Ceaca Cruz.
– 2023.
68 f.

Orientador: Hilário Alencar da Silva.
Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal
da Bahia, 2023.

Bibliografia: f. 36-38.

1. Self-shrinkers. 2. Self-expanders. 3. Fluxo de curvatura média –
espaço tangente. 4. Princípio do máximo. 5. Função suporte. 6. Campo de
vetores conforme. 7. Drifted laplacian. I. Título.

CDU: 514.12


Folha de Aprovação

Manuel Ceaca Cruz.


Sobre self-shrinkers e self-expanders completos.

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia e aprovada em 16 de Agosto de 2023.


Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
 HILARIO ALENCAR DA SILVA
Data: 18/08/2023 14:15:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Orientador: Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva.
(Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT/UFBA-UFAL)

Documento assinado digitalmente
 MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA
Data: 19/08/2023 06:37:37-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


Examinador interno: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.
(Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT/UFBA-UFAL)

Documento assinado digitalmente
 GREGORIO MANOEL DA SILVA NETO
Data: 18/08/2023 14:27:51-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador Interno: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto.
(Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT/UFBA-UFAL)

Documento assinado digitalmente
 WAGNER OLIVEIRA COSTA FILHO
Data: 18/08/2023 22:58:59-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador Externo: Prof. Dr. Wagner Oliveira Costa Filho.
(Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFAL)

Documento assinado digitalmente
 GREGÓRIO PACELLI FEITOSA BESSA
Data: 18/08/2023 17:03:48-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Examinador Externo: Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa.
(Programa de Pós-Graduação em Matemática - PPGMAT/UFC)

A minha amada família.

Agradecimentos

Ao professor Hilário Alencar, minha sincera gratidão pela orientação no doutorado e pelos inestimáveis conhecimentos compartilhados em múltiplas conversas e discussões. Serei eternamente grato pela sabedoria que generosamente dividiu comigo.

Ao professor Gregório Silva, agradeço por toda a ajuda, apoio desinteressado e pela significativa contribuição no meu desenvolvimento acadêmico. Além disso, valorizo nossas boas conversas que tanto enriqueceram minha jornada acadêmica.

Aos meus pais, Genaro Ceaca Rocha e Victoria Cruz Reyes, expresse minha profunda gratidão pela confiança e amor incondicionais. Seu apoio e compreensão diante das minhas decisões são inestimáveis. Aos meus irmãos, Ricardo Ceaca Cruz e Guadalupe Ceaca Cruz, agradeço pelo carinho, amizade e confiança inabalável.

A Abdiel Carmona, minha gratidão por sua confiança inabalável e por ser um exemplo de honestidade e fé.

Ao professor Guadalupe Reyes, agradeço pela ajuda, confiança e pelo amor que nutre pela matemática, que me incitou a uma grande aventura acadêmica.

Aos professores Feliciano Vitorio, Marcos Petrúcio e Marcio Batista, meu reconhecimento por todo o apoio acadêmico e encorajamento, inclusive antes da minha chegada à UFAL. Sua dedicação sempre foi além do dever.

Aos meus colegas de turma, Micael Dantas, Iury Domingos, Diego Alves, Rodrigo Fernandes e Ranilze da Silva, sou grato pelo ambiente respeitoso e alegre que compartilhamos durante as aulas na UFAL.

Aos amigos Anderson Lima e Gilberto de Sousa, agradeço pela preocupação e apoio que ultrapassaram os estudos de matemática.

Aos meus amigos e irmãos, Moreno Bonutti e Wagner Ribeiro, meu agradecimento especial pelo carinho sincero e apoio desinteressado, que aliviaram o peso dos desafios que enfrentei.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Minha profunda gratidão e reconhecimento CAPES pelo apoio imprescindível. Sem esse suporte, este projeto não teria sido possível.

Gostaria de agradecer a Ana Maria Santos pela revisão gramatical e ortográfica desta tese.

A Larissa Karoline Cândido, meu sincero agradecimento pela revisão crítica desta tese.

Ao criador, dono de todos os mistérios, agradeço pelos *cantos, flores y navajas de obsidiana*.

A matemática é a música da razão.

—JAMES JOSEPH SYLVESTER

Resumo

Nesta tese, apresentamos resultados de rigidez para a esfera, o plano e o cilindro, sendo eles os únicos *self-shrinkers* que satisfazem uma importante condição geométrica clássica. Essa condição é a seguinte: a união de todas as subvariedades afins e tangentes a um *self-shrinker* completo omite um conjunto não vazio no espaço Euclidiano. Essa suposição nos conduz a uma nova classe de subvariedades, distinta das que possuem crescimento polinomial do volume ou aquelas consideradas próprias.

Adicionalmente, também mostramos um resultado para *self-expanders* que envolve a mesma condição geométrica clássica.

Palavras-chave: *Self-shrinkers*, *self-expanders*, fluxo de curvatura média, espaço tangente, princípio do máximo, função suporte, campo de vetores conforme, *drifted laplacian*.

Abstract

In this thesis, we present rigidity results for the sphere, the plane, and the cylinder, as they are the only *Self-shrinkers* that satisfy an important classical geometric condition. This condition is as follows: the union of all affine and tangent submanifolds to a complete *Self-shrinker* omits a non-empty set in Euclidean space. This assumption leads us to a new class of submanifolds, distinct from those with polynomial volume growth or those considered proper.

Additionally, we also demonstrate a result for *self-expanders* that involves the same classical geometric condition.

Keywords: *Self-shrinkers, self-expanders, mean curvature flow, tangent space, maximum principle, support function, conformal vector field, drifted laplacian.*

Sumário

1	Introdução	10
2	Preliminares	19
2.1	Função suporte de um vetor conforme.	19
2.2	O operador associado a um campo de vetores conformes.	24
3	<i>Self-shrinkers e self-expanders</i> completos	27
3.1	Rigidez de <i>self-shrinkers</i> cujos planos tangentes omitem um conjunto não vazio.	27
3.2	<i>Self-expanders</i> completos cujos planos tangentes omitem um conjunto não vazio.	31
3.3	Superfícies não próprias cujos planos tangentes omitem um conjunto não vazio.	32

1. Introdução

Sejam Σ^n uma variedade conexa de dimensão n e $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}, n \geq 2, k \geq 1$, uma imersão isométrica. Identificamos o espaço tangente $T_p \Sigma^n$ com o subespaço afim $X(p) + dX_p(T_p \Sigma^n)$, tangente à $X(\Sigma)$ no ponto $X(p)$.

Denotaremos por

$$W = \mathbb{R}^{n+k} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n \quad (1.1)$$

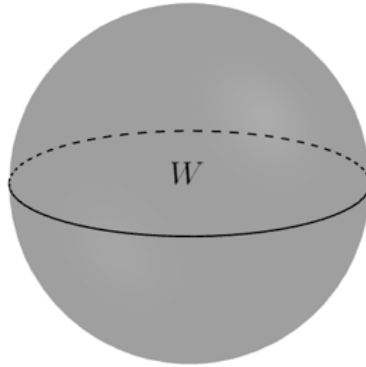
o conjunto omitido pela união dos subespaços afins tangentes à $X(\Sigma^n) \subset \mathbb{R}^{n+k}$.

Um dos primeiros trabalhos relacionados com o estudo das imersões cujo conjunto W é não vazio, foi realizado por Halpern que, entre outros fatos, mostrou, em [20], o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Halpern, [20]). *Sejam M^n uma variedade compacta e $X : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão. Então W é não vazio se, e somente se, $X(M^n)$ é difeomorfa a uma esfera.*

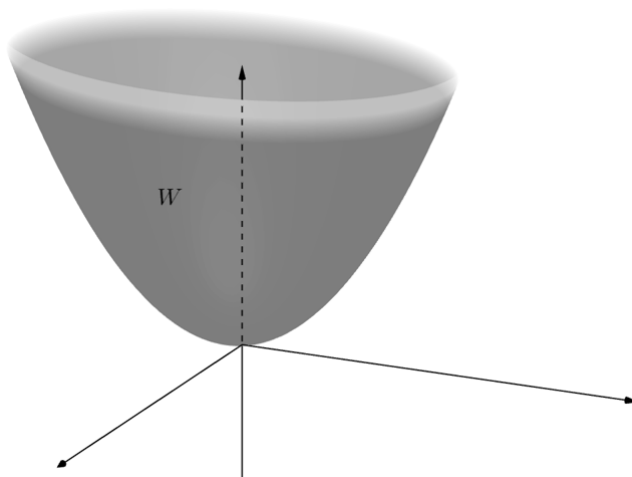
A Figura 1.1 a seguir, ilustra a o conjunto W e a variedade compacta M , mencionadas no Teorema 1.1 de Halpern.

Figura 1.1: W não vazio se, e somente se, $X(M^n)$ é difeomorfa a uma esfera.



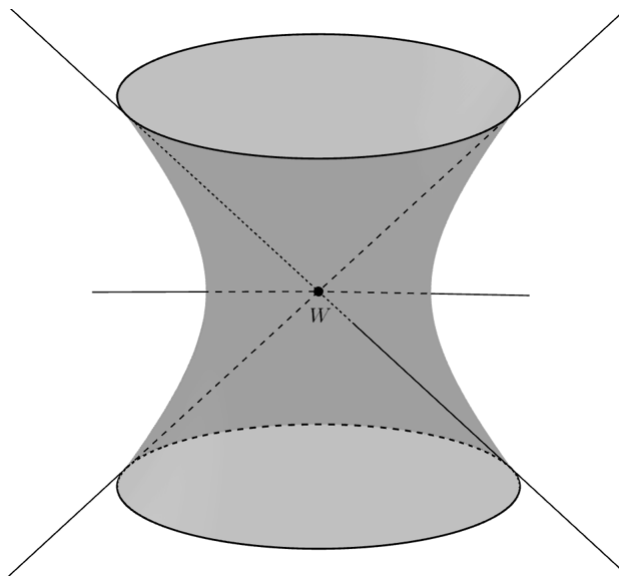
Observação 1.0.1. No caso em que Σ é não compacto, existem vários exemplos de hipersuperfícies cujo W é não vazio. De fato, cilindros e paraboloides, ver Figura 1.2, têm W aberto e não vazio.

Figura 1.2: W aberto e não vazio do parabolóide.



Outro exemplo de superfície não compacta cujo conjunto W associado é não vazio, é o hiperbolóide de uma folha, ver Figura 1.3, que tem $W = \{0\}$. Isto mostra que tão complexo pode ser determinar as superfícies cujo conjunto W é condicionado apenas a ser um conjunto não vazio.

Figura 1.3: O conjunto $W = \{0\}$, associado ao hiperbolóide de uma folha.



A próxima contribuição relevante que iremos citar foi dada por Hasanis e Koutroufotis, ver [21]. Seja $X : \Sigma^n \rightarrow M^{n+k}$, $n \geq 2$, $k \geq 1$, uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas de dimensões n e $n+k$, respectivamente. Decompondo X nas suas partes tangente e normal a Σ , temos

$$X = X^\top + X^\perp,$$

onde $X^\top \in T\Sigma^n$, $X^\perp \in (T\Sigma^n)^\perp$ e $(T\Sigma^n)^\perp$ é o fibrado normal da imersão tal que $T\Sigma^n \oplus (T\Sigma^n)^\perp = TM^{n+k}$. Assumindo que $X^\perp \neq 0$, podemos escrever

$$X = X^\top + f\eta,$$

onde $f = \|X^\perp\|$ é a *função suporte canônica* e $\eta = X^\perp/\|X^\perp\|$ é o *campo normal canônico* ou *campo normal principal*. Dizemos que η é uma *seção mínima* se η é paralelo no fibrado normal, i.e., $\nabla^\perp \eta = 0$, e o operador de forma A associado a η tem traço nulo. Observe que, quando a codimensão é um, existe apenas um campo normal unitário, que é automaticamente paralelo no fibrado normal e, portanto a, definição de seção mínima equivale à definição clássica de hipersuperfície mínima.

Para imersões de variedades Riemannianas de dimensão dois no espaço euclidiano, Hasanis e Koutrofiotis provaram o seguinte resultado:

Teorema 1.2 (Hasanis e Koutrofiotis, [21]). *Sejam Σ^2 uma variedade Riemanniana bidimensional e $X : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2+k}$ uma imersão isométrica. Assuma que W é não vazio e escolha um ponto de W como sendo a origem. Se o campo normal canônico correspondente à imersão X é uma seção mínima, então X é um mergulho e $X(\Sigma^2) = \mathbb{R}^2$.*

Em particular, uma superfície mínima completa de \mathbb{R}^3 que não é um plano tem a seguinte propriedade: a união de seus planos tangentes cobre todo o \mathbb{R}^3 .

A clareza na construção do conjunto W , assim como a consequente caracterização das imersões e do próprio conjunto W , derivadas do trabalho de Halpern em [20], levaram a generalizações do problema, envolvendo por exemplo, a modificação do espaço ambiente, assim como a inclusão de restrições topológicas da variedade a ser imersa ou a inclusão de hipóteses relativas a minimalidade ou estabilidade da imersão. Por exemplo, ainda em [21], Hasanis e Koutrofiotis definiram o conjunto W para imersões na esfera como sendo

$$W = \mathbb{S}^{n+k} - \bigcup_{p \in \Sigma^n} \mathbb{S}_p^n,$$

onde \mathbb{S}_p^n são as esferas totalmente geodésicas n dimensionais tangentes a $X(\Sigma^n)$ em $X(p)$ e provaram o seguinte resultado:

Teorema 1.3 (Hasanis e Koutrofiotis, [21]). *Sejam Σ^2 uma variedade Riemanniana bidimensional e $X : \Sigma^2 \rightarrow \mathbb{S}^{2+k}$ uma imersão isométrica. Se existe um ponto em W no qual o campo normal canônico correspondente à imersão X é uma seção mínima, então $X(\Sigma^2)$ é uma esfera totalmente geodésica de \mathbb{S}^{2+k} .*

Em particular, se $k = 1$, e X é uma imersão isométrica mínima, com a propriedade que a união de todos as \mathbb{S}^2 totalmente geodésicas tangentes a $X(\Sigma^2)$ não cobre todo o \mathbb{S}^3 , então X é um mergulho de Σ^2 sobre uma esfera totalmente geodésica \mathbb{S}^2 .

Seguindo essa mesma linha de raciocínio, Alencar e Frensel, em [4], consideraram \mathcal{Q}_c^{n+1} , uma variedade Riemanniana de dimensão $n + 1$, simplesmente conexa, completa e com curvatura seccional constante c , Σ^n uma variedade conexa de dimensão n e $X : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão, para definir

$$W = \mathcal{Q}_c^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma^n} (\mathcal{Q}_c^n)_p,$$

onde $(\mathcal{Q}_c^n)_p$ é a hipersuperfície totalmente geodésica de \mathcal{Q}_c^{n+1} tangente a $X(\Sigma^n)$ em $X(p)$. Dentre outros resultados, eles provaram, para variedades Riemannianas de dimensão n qualquer, mas para imersões com codimensão um, que vale o seguinte resultado:

Teorema 1.4 (Alencar e Frensel, [4]). *Sejam Σ^n uma variedade Riemanniana completa e $X : \Sigma^n \rightarrow \mathcal{Q}_c^{n+1}$ uma imersão isométrica mínima. Se o conjunto W for aberto e não vazio, então X é totalmente geodésica.*

Mais resultados sobre rigidez envolvendo ao conjunto W , e outras condições geométricas, podem ser vistos, por exemplo, em [3], [6], [25] e [26]. São de particular interesse para os fins dessa tese, pelo tipo de hipóteses e técnicas utilizadas nas demonstrações, os artigos [20] de Halpern, [21] de Hassanis e Koutroufiotis, e [4] de Alencar e Frensel.

Nesta tese trataremos de imersões no espaço Euclidiano e, portanto, iremos utilizar a definição do conjunto W dada em (1.1).

Dizemos que uma família a um parâmetro de subvariedades n -dimensionais $X_t = X(\cdot, t) : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $n \geq 2$, $k \geq 1$, evolui pelo fluxo de curvatura média, caso X_t seja solução a equação diferencial parcial parabólica

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}(p, t) \right)^\perp = \mathbf{H}(p, t), \quad t \geq 0, \quad (1.2)$$

onde $\mathbf{H} \in (T\Sigma^n)^\perp \subset T\overline{M}^{n+p}$ é o vetor curvatura média.

Note que as subvariedades mínimas (i.e., aquelas para as quais $\mathbf{H} = 0$) são soluções triviais estáticas do fluxo curvatura média. Dentre as soluções não triviais mais simples e mais importantes do fluxo de curvatura média, estão aquelas que evoluem por meio de isometrias do espaço euclidiano, em particular, por meio homotetias. Uma solução do fluxo de curvatura média se move por meio de homotetias, caso a família a um parâmetro

$$X_t = \phi(t)X_0,$$

seja solução de (1.2), onde $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função de classe C^1 em $(0, T)$ tal que $\phi(0) = 1$. Cálculos simples mostram que, nesse caso, $\phi(t) = \sqrt{1 + 2ct}$ e

$$\mathbf{H} = cX^\perp.$$

Notemos que X_t contrai homoteticamente se $c < 0$ e que X_t expande homoteticamente se $c > 0$. Notemos ainda que, visto que tais superfícies variam apenas por uma homotetia, podemos escolher valores para c por motivos de normalização. Isto nos motiva a introduzir a seguinte

Definição 1.0.2. Sejam Σ^n uma variedade e $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $k \geq 1$, uma imersão. Diremos que Σ^n é um *self-shrinker* do fluxo de curvatura média se a imersão X satisfaz

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{2}X^\perp, \quad (1.3)$$

onde $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i)$ é o vetor de curvatura média de Σ^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortornormal de $T\Sigma^n$, $X^\perp \in (T\Sigma^n)^\perp$ é a parte normal de X e $(T\Sigma^n)^\perp$ é o fibrado normal da imersão tal que $T\Sigma^n \oplus (T\Sigma^n)^\perp = T\mathbb{R}^{n+k}$.

Self-shrinkers têm particular relevância no estudo do fluxo de curvatura média, visto que representam tipos de singularidades que não podem ser evitadas ou removidas, também chamadas singularidades de tipo I (ver, por exemplo, [13]). Os exemplos mais simples de *self-shrinkers* de \mathbb{R}^{n+1} são, o hiperplano passando pela origem, \mathbb{R}^n , a esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$ e os cilindros generalizados $\mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para $1 \leq k \leq n$. Existem diferentes resultados que apresentam esses exemplos, como os únicos *self-shrinkers* a satisfazerem alguma restrição geométrica, tais como crescimento de volume polinomial:

Definição 1.0.3. Seja Σ^n uma subvariedade de dimensão n de \mathbb{R}^{n+k} , $k \geq 1$. Dizemos que Σ tem crescimento polinomial do volume se existem constantes positivas $C > 0$ e $d > 0$, tais que para todo $r \geq 1$ é satisfeito que

$$\text{Vol}(B_r(0) \cap \Sigma) \leq Cr^d. \quad (1.4)$$

Quando $d = n$, na expressão (1.4), diremos que Σ tem crescimento euclidiano do volume.

No caso em que a codimensão é um, podemos escrever o vetor curvatura média da forma $\mathbf{H} = HN$, onde H é a curvatura média e N é o vetor normal unitário. Nesse contexto, Colding e Minicozzi provaram em [13] o seguinte resultado:

Teorema 1.5 (Colding e Minicozzi, [13]). *Os únicos self-shrinkers do fluxo de curvatura média, completos, sem fronteira, mergulhados em \mathbb{R}^{n+1} , com crescimento polinomial do volume e $H \geq 0$ são $\mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para $0 \leq k \leq n$.*

Outro resultado é obtido por Cao e Li, em [7], onde foi provado o seguinte resultado

Teorema 1.6 (Cao e Li, [7]). *Se $\Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ é um self-shrinker de dimensão n , sem fronteira, com crescimento polinomial do volume e satisfaz*

$$\|A\|^2 \leq \frac{1}{2}$$

então Σ é uma das seguintes hipersuperfícies:

- (i) uma esfera $\mathbb{S}^n(\sqrt{2n})$ em \mathbb{R}^{n+1} ;
- (ii) um cilindro $\mathbb{S}^k(\sqrt{2k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ para $1 \leq k \leq n-1$, em \mathbb{R}^{n+1} ;
- (iii) um hiperplano em \mathbb{R}^{n+1} .

Onde $\|A\|^2$ é o quadrado da norma do operador de forma associado à segunda forma fundamental de Σ .

Observação 1.0.4. De fato, o resultado de Cao-Li está escrito para $\|A\|^2 \leq 1$, mas a diferença é apenas na escolha da constante na normalização da equação dos self-shrinkers. Em [7] os autores escolhem $\mathbf{H} = -X^\perp$ como equação para os self-shrinkers.

Mais exemplos de resultados nessa direção foram obtidos por Ding e Xin, ver [15], que concatenamos no seguinte

Teorema 1.7 (Ding e Xin, [15]). *Seja Σ^n um self-shrinker propriamente imerso e completo de \mathbb{R}^{n+k} , $k \geq 1$.*

(i) *Existe uma constante $\kappa > 0$ tal que, se*

$$\left(\int_{\Sigma} \|A\|^n d\Sigma \right)^{1/n} \leq \sqrt{\frac{4}{3n\kappa}},$$

então Σ^n é um hiperplano;

(ii) *Se $n = 2$, $k = 1$, e $\|A\|^2$ é constante, então $\|A\|^2 = 0$ ou $\|A\|^2 = \frac{1}{2}$;*

(iii) *Se $k = 1$, então existe uma constante $\delta \approx 0.011$ tal que, se $\frac{1}{2} \leq \|A\|^2 \leq \frac{1}{2} + \delta$, então $\|A\|^2 = \frac{1}{2}$.*

Nesta tese, provamos resultados de rigidez da esfera, dos cilindros e dos subespaços afins passando pela origem, como sendo os únicos *self-shrinkers* tais que, entre outras condições, o conjunto W , a eles associado, é não vazio. Parte substancial dos resultados dessa tese está publicado em [2].

Apresentamos, inicialmente, dois resultados para *self-shrinkers* de \mathbb{R}^{n+1} , completos, com dimensão n e cujo W é um conjunto aberto e não vazio.

Teorema 1.8. *Seja Σ^n self-shrinker completo de \mathbb{R}^{n+1} . Se o conjunto W é aberto, não vazio e o quadrado da norma da matriz da segunda forma fundamental, A , de Σ^n satisfaz*

$$\|A\|^2 \leq \frac{1}{2},$$

então $\Sigma^n = \mathbb{S}^p(\sqrt{2p}) \times \mathbb{R}^{n-p}$, $0 \leq p \leq n$.

Se $\|A\|^2 \geq 1/2$ e, complementarmente, supormos para a curvatura média $H \geq 0$, obtemos

Teorema 1.9. *Seja Σ^n self-shrinker completo de \mathbb{R}^{n+1} . Se o conjunto W é aberto, $0 \in W$, e o quadrado da norma da matriz da segunda forma fundamental, A , de Σ^n satisfaz*

$$\|A\|^2 \geq \frac{1}{2},$$

então $\Sigma^n = \mathbb{S}^p(\sqrt{2p}) \times \mathbb{R}^{n-p}$, $1 \leq p \leq n$.

Observação 1.0.5. Analisando geometricamente, é possível verificar que *self-shrinkers* da forma $\Sigma^n = \Gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde Γ é uma curva fechada de Abresch-Langer (ver [1] e [19]) satisfazem W aberto e $0 \in W$. Porém, em tais exemplos, é observado que

$$\min \|A\|^2 < \frac{1}{2} < \max \|A\|^2,$$

após normalização.

Observação 1.0.6. É importante mencionar que a limitação $1/2$ parece natural para *self-shrinkers*. Além dos resultados de Cao e Li e de Ding e Xin que citamos no início dessa seção, podemos citar os resultados de Cheng e Peng, ver [8], e Rimoldi, ver [28], que, no intuito de remover a hipótese do crescimento polinomial do volume, provaram que o único *self-shrinker* de \mathbb{R}^{n+1} com $\sup_{\Sigma^n} \|A\|^2 = 1/2$ (mas com $\|A\|^2 < 1/2$) é o hiperplano. Outros resultados sobre rigidez, onde a limitação $\|A\|^2 \geq 1/2$ é utilizada, podem ser consultados em [24], [15], [9], e [32]. Mencionamos novamente que, essas quatro referências, têm como fator comum considerar crescimento polinomial do volume ou que imersão é própria.

Observação 1.0.7. Halpern mostrou em [20] que toda hipersuperfície compacta imersa no espaço Euclidiano tem W não vazio se, e somente se, é difeomorfa à esfera e for a fronteira de um domínio estrelado de \mathbb{R}^{n+1} . Consequentemente, visto que os únicos *self-shrinker* com tais características são as esferas de raio $\sqrt{2n}$ (ver [22]), o caso de *self-shrinkers* compactos de codimensão um, com W não vazio, está totalmente determinado.

Fixamos agora que Σ^2 tenha dimensão dois para considerar codimensão arbitrária. Suponhamos também que $\mathbf{H} \neq 0$ e $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$ paralelo ao fibrado normal. Apresentamos então o próximo resultado desta tese:

Teorema 1.10. *Seja Σ^2 um self-shrinker de dimensão dois e completo do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{2+k} , $k \geq 2$, cujo vetor de curvatura média satisfaz $\mathbf{H} \neq 0$ e tal que $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$ é paralelo ao fibrado normal. Se o conjunto W for aberto e não vazio, e o quadrado da norma da matriz da segunda forma fundamental, A , de Σ^2 , associada ao vetor $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$, satisfaz alguma das seguintes condições*

- i) $\|A\|^2 \leq 1/2$;
- ii) $\|A\|^2 \geq 1/2$ e $0 \in W$,

então $\Sigma^2 = \mathbb{S}^p(\sqrt{2p}) \times \mathbb{R}^{2-p}$, $1 \leq p \leq 2$.

Observação 1.0.8. Se supormos que Σ^2 seja compacta e sem fronteira no Teorema 1.10, então a hipótese de que W seja aberto pode ser desconsiderada. É importante mencionar que Smoczyk, ver [29], provou que os únicos *self-shrinkers* compactos, sem fronteira de \mathbb{R}^{n+p} com $\mathbf{H} \neq 0$ e $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$ paralelo ao fibrado normal, são superfícies mínimas da esfera $\mathbb{S}^{n+p-1}(\sqrt{2n})$.

Observação 1.0.9. Drugan e Kleene em [17] provaram a existência de uma quantidade infinita de *self-shrinkers* para cada um dos seguintes tipos topológicos \mathbb{S}^n , $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, \mathbb{R}^n e $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Analisando geometricamente a imagem das curvas de perfil que apresentaram, é observado que os *self-shrinkers* rotacionais, obtidos pela rotação das curvas de perfil mencionadas, têm W vazio. Queremos lembrar também que todos esses exemplos não são mergulhados, visto que Kleene e Møller, ver [23], mostraram que a esfera de raio $\sqrt{2n}$, o plano, e o cilindro reto de raio $\sqrt{2(n-1)}$ são os únicos *self-shrinkers* rotacionais mergulhados tendo o seu respectivo tipo topológico.

O próximo resultado dessa tese é referente a não existência de *self-expanders* do fluxo de curvatura média sob determinadas condições geométricas. De forma análoga à definição que demos para *self-shrinkers*, temos a seguinte

Definição 1.0.10. Sejam Σ^n uma variedade e $X : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, $k \geq 1$, uma imersão. Diremos que Σ^n é um *self-expander* do fluxo de curvatura média se a imersão X satisfaz

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}X^\perp, \quad (1.5)$$

onde $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i)$ é o vetor de curvatura média de Σ^n , $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de $T\Sigma^n$, $X^\perp \in (T\Sigma^n)^\perp$ é a parte normal de X e $(T\Sigma^n)^\perp$ é o fibrado normal da imersão X tal que $T\Sigma^n \oplus (T\Sigma^n)^\perp = T\mathbb{R}^{n+k}$.

Os *self-expanders* têm também muita relevância no estudo do fluxo de curvatura média, pois eles descrevem tanto o comportamento ao longo prazo do fluxo como a estrutura local, do fluxo de curvatura média, depois de singularidades, em um período muito curto de tempo. Veja por exemplo, os trabalhos de Hecker e Huisken [18] e Stavrou [31]. Muitos dos resultados sobre *self-expanders* na literatura mostram que a geometria dos *self-expanders* está fortemente determinada pela sua característica estrutura assintótica no infinito. Por exemplo, foi apontado por Ecker e Huisken, ver [18], e por Stavrou, ver [31], que os *self-expanders* surgem como soluções do fluxo de curvatura média quando a subvariedade inicial for um cone. Outros trabalhos relacionados com *self-expanders* são [11], [30] e as referências neles citadas.

O próximo resultado que provamos nesta tese é o seguinte

Teorema 1.11. Não existem *self-expanders* de \mathbb{R}^{n+k} , $k \geq 1$, de dimensão n , completos, não compactos, cujo vetor de curvatura média satisfaça $\mathbf{H} \neq 0$, $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$ paralelo no fibrado normal, e com conjunto W aberto e tal que $0 \in W$.

Observação 1.0.11. Se a codimensão for $k = 1$, a hipótese de que $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$ seja paralelo no fibrado normal é satisfeita automaticamente e pode ser omitida na afirmação do Teorema 1.11.

Observação 1.0.12. Analisando geometricamente, é possível observar que *self-expanders* da forma $\Sigma^n = \Gamma \times \mathbb{R}^{n-1}$, onde Γ é uma das curvas *self-expanding* classificadas por Hall-dorsson, ver [19], satisfazem $H > 0$ e W aberto e não vazio, porém $0 \notin W$, o que implica que a hipótese $0 \in W$ é indispensável para a validade do Teorema 1.11.

Observação 1.0.13. Visto que não existem *self-expanders* compactos em \mathbb{R}^{n+k} , ver [7]. O Teorema 1.11 não faz sentido caso Σ^n seja compacto.

Observação 1.0.14. As subvariedades com $W \neq \emptyset$ são uma classe diferente da classe das subvariedades com crescimento polinomial do volume ou daquelas que são subvariedades próprias. De fato, cilindros sobre curvas Γ em \mathbb{R}^2 parametrizadas mediante $\Gamma(t) = b(t)(\cos t, \sin t)$, onde $b(t) = 1 + e^{-t}$, ou a família

$$b(t) = d + \frac{m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(at) \right), \quad d > 0, \quad m > 0, \quad 0 < a \leq 1, \quad (1.6)$$

são exemplos de superfícies, que não são propriamente imersas, cujo $W = \mathbb{D}^2(d) \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{D}^2(d)$ é o disco centrado na origem e raio d . Os detalhes dos cálculos desses exemplos serão realizados na seção 3.3.

Vale mencionar que, em certos contextos, uma subvariedade ter crescimento de volume polinomial é equivalente ela ser própria. De fato, em [10], Cheng e Zhou provaram que um *self-shrinker* tem crescimento polinomial do volume se, e somente se, é uma subvariedade própria. Mais especificamente, eles demonstraram o resultado seguinte:

Teorema 1.12 (Cheng e Zhou, [10]). *Para qualquer self-shrinker Σ^n de dimensão n , completo, imerso em \mathbb{R}^{n+1} , as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) Σ é uma subvariedade própria;
- (ii) Σ tem crescimento Euclidiano do volume;
- (iii) Σ tem crescimento polinomial do volume;
- (iv) O volume com peso, de Σ , é finito, isto é, $\int_{\Sigma} e^{-\frac{\|X\|^2}{4}} dv < \infty$.

Onde X denota o vetor de posição e dv é o elemento de volume de Σ induzido pela imersão.

Recentemente, Cheng, Zhoue Vieira, generalizaram o Teorema 1.12 acima, , ver [12], para subvariedades com curvatura média com peso limitada, em uma classe de *shrinking solitons* do gradiente de Ricci mais ampla, que inclui o *soliton* Gaussiano. Em particular, o resultado de Cheng-Vieira-Zhou garante que, para uma superfície com $\mathbf{H} + \frac{1}{2}X^\perp$ limitado, o crescimento polinomial do volume é equivalente à subvariedade ser própria (ver Teorema 1.3 e Teorema 1.4 de [12]).

Este trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos os pré-requisitos necessários para uma boa compreensão dos capítulos subsequentes, assim, serão introduzidas algumas notações, conceitos relevantes e proposições auxiliares às demonstrações dos resultados principais. O Capítulo 3 será dividido em três seções dedicadas: a primeira às demonstrações dos Teoremas 1.8, 1.9, e 1.10, a segunda à demonstração do Teorema 1.11 e a terceira seção dedicada à apresentação de exemplos concernentes à diferença, mencionada na Observação 1.0.14, entre a classe de variedades com W aberto e não vazio e aquelas com crescimento polinomial do volume.

2. Preliminares

Neste capítulo apresentamos, de forma concisa, conceitos e ideias fundamentais para o desenvolvimento do nosso estudo. Primeiro enunciaremos o princípio do máximo de Hopf, princípio que será usado fortemente nas demonstrações dos resultados principais. Depois, na Seção 2.1, serão discutidas as noções de vetor conforme, em uma variedade Riemanniana, e função suporte associada a um vetor conforme. Em seguida mostraremos o cálculo do Laplaciano da função suporte associada a um vetor conforme. Posteriormente, na Seção 2.2, será definido um operador diferencial \mathcal{L} , relativo a uma imersão que admite um vetor conforme. Mostraremos também sua relação com o Laplaciano de um vetor conforme.

Enunciamos, sem demonstração, o princípio do máximo de Hopf para operadores elípticos, que terá um papel fundamental na prova dos resultados principais.

Lema 2.0.1 (Princípio do máximo de Hopf, ver [27]). *Seja*

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$$

um operador diferencial estritamente elíptico definido em um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

- (i) Se $c = 0$, $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) e existe $\max_{\Omega} u$ (resp. $\min_{\Omega} u$), então u é constante;
- (ii) Se $c \leq 0$, $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) e existe $\max_{\Omega} u \geq 0$ (resp. $\min_{\Omega} u \leq 0$), então u é constante;
- (iii) Independentemente do sinal de c , se $Lu \geq 0$ (resp. $Lu \leq 0$) e $\max_{\Omega} u = 0$ (resp. $\min_{\Omega} u = 0$), então u é constante.

2.1. Função suporte de um vetor conforme.

Começamos a seção estabelecendo a definição de vetor conforme, admitido por uma imersão isométrica, para depois introduzir o conceito de função suporte ao qual faremos referência ao longo desta tese. A noção de função suporte tem sido usada por diversos pesquisadores e em múltiplos contextos, mostrando a versatilidade e utilidade que possui. Nesse tópico em particular, têm grande relevância para nosso estudo os trabalhos de Hasanis e Koutrofiotis, ver [21], e de Alencar e Frensel, ver [4].

Definição 2.1.1. Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^m$ uma imersão isométrica entre variedades Riemannianas de dimensões n e m , respectivamente. Denotaremos por ∇ a conexão de Σ e por $\bar{\nabla}$ a conexão de M . Diremos que a imersão admite um vetor conforme, se existe um vetor $X \in TM$ que satisfaz

$$\bar{\nabla}_Y X = \varphi Y, \tag{2.1}$$

para alguma função $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ e para todo $Y \in T\Sigma^n$. X será chamado vetor conforme, enquanto a função φ será conhecida como fator de conformidade do vetor X .

Na sequência, consideraremos uma imersão isométrica $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+k}$, $n \geq 2$, $k \geq 1$, e admitiremos que a imersão admite um vetor conforme, $X \in TM$, com fator de conformidade $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Decompondo X nas suas partes tangente e normal à Σ , temos que pode ser escrito como

$$X = X^\top + X^\perp,$$

onde $X^\top \in T\Sigma^n$, $X^\perp \in (T\Sigma^n)^\perp$, e $(T\Sigma^n)^\perp$ é o fibrado normal da imersão tal que $T\Sigma^n \oplus (T\Sigma^n)^\perp = TM^{n+k}$.

Caso a codimensão seja um, temos que $X^\perp = \langle X, N \rangle N$, onde N é um vetor normal e unitário, definido globalmente. Caso a codimensão seja pelo menos dois, será suposto também que $X^\perp \neq 0$. Em ambos os casos, podemos escrever

$$X = X^\top + f\eta. \quad (2.2)$$

A função $f = \langle X, \eta \rangle$ será chamada função suporte do vetor conforme X e η satisfaz

$$\eta = \begin{cases} N, & \text{quando a codimensão for um.} \\ \frac{X^\perp}{\|X^\perp\|}, & \text{quando a codimensão for pelo menos dois.} \end{cases}$$

A imersão x satisfaz

$$\bar{\nabla}_U V = \nabla_U V + \alpha(U, V) \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_U \eta = -AU + \nabla_U^\perp \eta, \quad (2.3)$$

com $\langle AU, V \rangle = \langle \alpha(U, V), \eta \rangle$, onde α denota a segunda forma fundamental da imersão, e ∇^\perp representa a conexão normal no fibrado $(T\Sigma^n)^\perp$.

A proposição a seguir compreende, essencialmente, o cálculo do Laplaciano da função suporte $f = \langle X, \eta \rangle$, do vetor conforme X , nas situações de codimensão um, codimensão arbitrária e quando a variedade ambiente, M , for um espaço com curvatura de Ricci constante.

Proposição 2.1.2. *Seja M^{n+k} uma variedade Riemanniana de dimensão $n+k$ que admite um campo conforme X com fator de conformidade φ . Sejam Σ^n uma subvariedade de M^{n+k} e $\{\eta, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ um referencial ortonormal do fibrado $(T\Sigma^n)^\perp \subset TM^{n+k}$, onde, para $k=1$, $\eta = N$, o vetor normal unitário globalmente definido, e para $k \geq 2$, iremos supor também que $X^\perp \neq 0$ e consideramos $\eta = X^\perp / \|X^\perp\|$.*

Se $f = \langle X, \eta \rangle$, então

$$\begin{aligned} \Delta f + \varphi(\text{tr } A) + f\|A\|^2 + \langle X^\top, \text{grad}(\text{tr } A) \rangle \\ = - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) + \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(X^\top)(\text{tr } A_\beta) \\ + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Aqui, A e A_β são os operadores de forma relativos aos normais η e η_β , $\beta \in \{2, \dots, k\}$, respectivamente, $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$ representa a norma da matriz A , $s_{1\beta}(X) = \langle \nabla_X^\perp \eta, \eta_\beta \rangle$, \bar{R}

denota o tensor de curvatura de M^{n+k} , e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de Σ^n .

Além disso, se a imersão tiver codimensão um, então

$$\Delta f + \varphi H + f\|A\|^2 + \langle X^\top, \text{grad } H \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle, \quad (2.5)$$

onde $H = \text{tr } A$ denota a curvatura média de Σ^n . Em particular, se a curvatura de Ricci de M^{n+1} é constante (i.e., se M^{n+1} for uma variedade de Einstein), então

$$\Delta f + \varphi H + f\|A\|^2 + \langle X^\top, \text{grad } H \rangle = 0. \quad (2.6)$$

Demonstração. Seja $U \in T\Sigma^n$. Dado que X é um campo de vetores conforme, com fator de conformidade φ , utilizamos a decomposição ortogonal (2.2) do campo de vetores X e as relações (2.3) para obter que

$$\begin{aligned} \varphi U &= \bar{\nabla}_U X = \bar{\nabla}_U (X^\top + f\eta) \\ &= \bar{\nabla}_U X^\top + (Uf)\eta + f\bar{\nabla}_U \eta \\ &= \nabla_U X^\top + \alpha(X^\top, U) + (Uf)\eta - fAU + f\nabla_U^\perp \eta. \end{aligned}$$

Considerando agora as partes tangente e normal, temos que

$$\varphi U = \nabla_U X^\top - fAU \quad (2.7)$$

e

$$\alpha(X^\top, U) + (Uf)\eta + f\nabla_U^\perp \eta = 0. \quad (2.8)$$

Visto que, por (2.7), vale

$$\nabla_U X^\top = (\varphi I + fA)U, \quad (2.9)$$

e considerando e_i, e_j , elementos do referencial ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de Σ^n , temos de (2.9) que

$$\langle \nabla_{e_i} X^\top, e_j \rangle = \varphi \langle e_i, e_j \rangle + f \langle Ae_i, e_j \rangle$$

o que, depois de tomar o traço, implica

$$\text{div } X^\top = n\varphi + f(\text{tr } A), \quad (2.10)$$

onde $\text{div } X^\top$ denota a divergência de X^\top em Σ^n . Da equação (2.8), temos

$$Uf = -\langle \alpha(X^\top, U), \eta \rangle, \quad (2.11)$$

visto que $\langle \nabla_U^\perp \eta, \eta \rangle = 0$. Portanto,

$$\text{grad } f = -AX^\top. \quad (2.12)$$

Sejam $\{\eta_1 = \eta, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ um referencial ortonormal de $(T\Sigma^n)^\perp$ e

$$\nabla_U^\perp \eta = \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(X)\eta_\beta, \quad \text{onde } s_{1\beta}(X) = \langle \nabla_X^\perp \eta, \eta_\beta \rangle.$$

Considerando o produto interno de (2.8) com η_β , teremos

$$\langle \alpha(X^\top, U), \eta_\beta \rangle + (Uf)\langle \eta, \eta_\beta \rangle + f\langle \nabla_U^\perp \eta, \eta_\beta \rangle = 0$$

ou, equivalentemente,

$$\langle \alpha(X^\top, U), \eta_\beta \rangle + fs_{1\beta}(U) = 0,$$

i.e.,

$$fs_{1\beta}(U) = -\langle A_\beta X^\top, U \rangle, \quad (2.13)$$

onde $\langle A_\beta U, V \rangle = \langle \alpha(U, V), \eta_\beta \rangle$.

Calculemos o Laplaciano de f . Primeiro notemos que, usando (2.12), temos

$$\begin{aligned} \text{Hess } f(U, U) &= U(Uf) - \langle \text{grad } f, \nabla_U U \rangle \\ &= U(Uf) + \langle AX^\top, \nabla_U U \rangle \\ &= U(Uf) + \langle X^\top, A(\nabla_U U) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, visto que $Uf = -\langle AX^\top, U \rangle$, conforme a expressão em (2.11), e usando (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} U(Uf) &= -U\langle AX^\top, U \rangle = -U\langle X^\top, AU \rangle \\ &= -\langle \nabla_U X^\top, AU \rangle - \langle X^\top, \nabla_U(AU) \rangle \\ &= -\varphi\langle U, AU \rangle - f\langle AU, AU \rangle - \langle X^\top, \nabla_U(AU) \rangle \end{aligned}$$

ou seja,

$$U(Uf) = -\varphi\langle U, AU \rangle - f\langle AU, AU \rangle - \langle X^\top, \nabla_U(AU) \rangle.$$

Isto implica que

$$\text{Hess } f(U, U) = -\varphi\langle U, AU \rangle - f\langle AU, AU \rangle - \langle X^\top, (\nabla_U A)(U) \rangle,$$

onde $(\nabla_U A)(V) = \nabla_U AV - A(\nabla_U V)$. Tomando o traço, temos

$$\Delta f = -\varphi(\text{tr } A) - f(\text{tr}(A^2)) - \sum_{i=1}^n \langle X^\top, (\nabla_{e_i} A)(e_i) \rangle. \quad (2.14)$$

Aqui, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de Σ^n e $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$ denota a norma da matriz A . A equação de Codazzi

$$\begin{aligned} \langle \bar{R}(U, V)W, \eta \rangle &= \langle (\nabla_V A)(U) - (\nabla_U A)(V), W \rangle \\ &\quad + \langle \alpha(V, W), \nabla_U^\perp \eta \rangle - \langle \alpha(U, W), \nabla_V^\perp \eta \rangle \end{aligned} \quad (2.15)$$

e

$$\langle \alpha(V, W), \nabla_U^\perp \eta \rangle = \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(U) \langle \alpha(V, W), \eta_\beta \rangle = \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(U) \langle A_\beta V, W \rangle$$

implicam

$$\begin{aligned}
(\nabla_U A)(V) &= (\nabla_V A)(U) + \sum_{\beta=2}^k [s_{1\beta}(U)A_\beta V - s_{1\beta}(V)A_\beta U] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(U, V)\eta, e_k \rangle e_k.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Visto que A é simétrico, $\nabla_U A$ é também simétrico e, além disso,

$$\text{tr}(\nabla_U A) = U(\text{tr } A).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \langle X^\top, (\nabla_{e_i} A)(e_i) \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} A)(X^\top), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{X^\top} A)(e_i), e_i \rangle \\
&\quad + \sum_{\beta=2}^k \sum_{i=1}^n [s_{1\beta}(e_i) \langle A_\beta X^\top, e_i \rangle - s_{1\beta}(X^\top) \langle A_\beta e_i, e_i \rangle] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)\eta, e_i \rangle \\
&= \text{tr}(\nabla_{X^\top} A) + \sum_{\beta=2}^k \sum_{i=1}^n s_{1\beta}(e_i) \langle A_\beta X^\top, e_i \rangle \\
&\quad - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(X^\top) (\text{tr } A_\beta) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)\eta, e_i \rangle \\
&= \langle X^\top, \text{grad}(\text{tr } A) \rangle + \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) \\
&\quad - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(X^\top) (\text{tr } A_\beta) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)\eta, e_i \rangle,
\end{aligned}$$

o que implica, conforme a equação (2.14), que

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -\varphi(\text{tr } A) - f\|A\|^2 - \langle X^\top, \text{grad}(\text{tr } A) \rangle \\
&\quad - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) + \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(X^\top) (\text{tr } A_\beta) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle,
\end{aligned}$$

que equivale à equação (2.4), como desejado. Observemos agora que, caso a imersão, $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$, tiver codimensão um, automaticamente, os termos relativos a $s_{1\beta}$ serão desconsiderados e obtemos

$$\Delta f = -\varphi(\text{tr } A) - f\|A\|^2 - \langle X^\top, \text{grad}(\text{tr } A) \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle, \tag{2.17}$$

que, por sua vez, é equivalente à equação (2.5). Se admitirmos, além da codimensão um, que M^{n+1} seja uma variedade de Einstein, isto é, $\text{Ric}_M = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top) e_i, \eta \rangle &= \text{Ric}_M(X^\top, \eta) - \langle \bar{R}(\eta, X^\top) \eta, \eta \rangle \\ &= \text{Ric}_M(X^\top, \eta) = \lambda \langle X^\top, \eta \rangle = 0, \end{aligned}$$

o que, junto com a equação (2.17), implica

$$\Delta f = -\varphi(\text{tr } A) - f\|A\|^2 - \langle X^\top, \text{grad}(\text{tr } A) \rangle,$$

que, por sua vez, equivale à equação (2.6), concluindo a demonstração da proposição. \square

2.2. O operador associado a um campo de vetores conformes.

Esta seção está dedicada à construção de um operador diferencial, que chamaremos \mathcal{L} , e que será fundamental nas demonstrações dos resultados principais deste trabalho. Começaremos definindo \mathcal{L} para o caso geral de uma imersão isométrica, entre variedades Riemannianas, de codimensão alta que admite um vetor conforme, com o correspondente fator de conformidade. Nesse contexto será mostrado um resultado direto da Proposição 2.1.2, que essencialmente é o cálculo do operador \mathcal{L} aplicado na função suporte, associada ao vetor conforme admitido pela imersão. Depois, a construção do operador \mathcal{L} será particularizada ao caso de imersões *self-shrinkers* do espaço Euclidiano. Nessa situação o operador \mathcal{L} é altamente conhecido e utilizado, sendo às vezes referido, como *drifted laplacian* (ver, por exemplo, [13] e [11]).

Consideramos, como antes, uma imersão isométrica $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+k}$, $n \geq 2$, $k \geq 1$, que admite um vetor conforme, $X \in TM$, com fator de conformidade $\varphi : M^m \rightarrow \mathbb{R}$. Tomamos também $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal de Σ^n e $\{\eta, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ um referencial ortonormal do fibrado $(T\Sigma^n)^\perp \subset TM^{n+k}$, onde, caso a codimensão seja pelo menos dois, será suposto também que $X^\perp \neq 0$. Suponha agora que existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$ de forma que, em Σ^n , é satisfeito

$$\mathbf{H} = \varepsilon X^\perp, \tag{2.18}$$

onde $\mathbf{H} = \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i)$ denota o vetor de curvatura média de Σ^n in M^{n+k} . Se $M^{n+k} = \mathbb{R}^{n+k}$, então Σ^n é uma solução do fluxo de curvatura média, identificado como *self-shrinker*, caso $\varepsilon < 0$, e *self-expander*, caso $\varepsilon > 0$. Adotaremos as conhecidas normalizações canônicas, considerando $\varepsilon = -\frac{1}{2}$ para *self-shrinkers* e $\varepsilon = \frac{1}{2}$ para *self-expanders*.

Notemos que, independentemente de M^{n+k} , se $\Sigma^n \subset M^{n+k}$ é tal que satisfaz a ex-

pressão (2.18), então

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} A &= \sum_{i=1}^n \langle A(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha(e_i, e_i), \eta \rangle = \langle \mathbf{H}, \eta \rangle = \varepsilon \langle X^\perp, \eta \rangle = \varepsilon f; \\ \operatorname{tr} A_\beta &= \sum_{i=1}^n \langle A_\beta(e_i), e_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \alpha(e_i, e_i), \eta_\beta \rangle = \langle \mathbf{H}, \eta_\beta \rangle = \varepsilon \langle X^\perp, \eta_\beta \rangle = \varepsilon f \langle \eta, \eta_\beta \rangle = 0,\end{aligned}$$

com $\beta \in \{2, \dots, k\}$, isto é,

$$\operatorname{tr} A = \varepsilon f \text{ e } \operatorname{tr} A_\beta = 0. \quad (2.19)$$

Aqui f é a função suporte associada ao vetor conforme X , dada por $f = \langle X, \eta \rangle$ e η satisfaz

$$\eta = \begin{cases} N, & \text{quando a codimensão for um.} \\ \frac{X^\perp}{\|X^\perp\|}, & \text{quando a codimensão for pelo menos dois.} \end{cases}$$

Definimos o operador \mathcal{L} , associado ao vetor conforme X , por

$$\mathcal{L}g = \Delta g + \varepsilon \langle X, \operatorname{grad} g \rangle, \quad (2.20)$$

com ε como na igualdade (2.18). Mostramos, a seguir, como consequência direta da Proposição 2.1.2, um corolário que determina o cálculo do operador \mathcal{L} , aplicado à função suporte associada ao vetor conforme X .

Corolário 2.2.1. *Seja M^{n+k} uma variedade Riemanniana $(n+k)$ -dimensional, que admite um vetor conforme X com fator de conformidade φ . Sejam Σ^n uma subvariedade de M^{n+k} cujo vetor de curvatura média, \mathbf{H} , satisfaz $\mathbf{H} = \varepsilon X^\perp$ para algum $\varepsilon \in \mathbb{R}$, e $\{\eta, \eta_2, \dots, \eta_k\}$ referencial ortonormal do fibrado normal $(T\Sigma^n)^\perp \subset TM^{n+k}$, onde, para $k=1$, $\eta = N$, o vetor normal unitário globalmente definido, e para $k \geq 2$, supomos também que $X^\perp \neq 0$ e consideramos $\eta = X^\perp / \|X^\perp\|$. Se $f = \langle X, \eta \rangle$, então*

$$\mathcal{L}f + (\|A\|^2 + \varepsilon\varphi)f = - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle, \quad (2.21)$$

onde A e A_β denotam os operadores de forma relativos aos vetores normais η e η_β , $\beta \in \{2, \dots, k\}$, respectivamente, $s_{1\beta}(U) = \langle \nabla_U^\perp \eta, \eta_\beta \rangle$, \bar{R} representa o tensor de curvatura de M^{n+k} , e $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial ortonormal de $T\Sigma^n$. Se, além disso, $f \neq 0$, então

$$\mathcal{L}f + (\|A\|^2 + \varepsilon\varphi)f = \frac{1}{f} \sum_{\beta=2}^k \|A_\beta X^\top\|^2 + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle. \quad (2.22)$$

Em particular, se M^{n+k} tem curvatura seccional constante e $\nabla^\perp \eta = 0$, ou a codimensão da imersão é um e M^{n+1} é uma variedade Einstein, então

$$\mathcal{L}f + (\|A\|^2 + \varepsilon\varphi)f = 0. \quad (2.23)$$

Demonstração. Da Proposição 2.1.2, temos, inicialmente, a equação

$$\begin{aligned} & \Delta f + \varphi(\operatorname{tr} A) + f\|A\|^2 + \langle X^\top, \operatorname{grad}(\operatorname{tr} A) \rangle \\ &= - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) + \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(X^\top)(\operatorname{tr} A_\beta) \\ & \quad + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Usando, conforme a equação (2.19), que

$$\operatorname{tr} A = \varepsilon f \text{ e } \operatorname{tr} A_\beta = 0,$$

obtemos a igualdade

$$\Delta f + \varepsilon \varphi f + f\|A\|^2 + \varepsilon \langle X^\top, \operatorname{grad} f \rangle = - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle. \quad (2.24)$$

Substituindo em (2.24), a expressão (2.20) do operador \mathcal{L} , obtemos finalmente que

$$\mathcal{L}f + (\|A\|^2 + \varepsilon \varphi)f = - \sum_{\beta=2}^k s_{1\beta}(A_\beta X^\top) + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle,$$

como desejado. Se, além de tudo, assumimos que $f \neq 0$, então a equação (2.13) implica que

$$s_{1\beta}(A_\beta X^\top) = -\frac{1}{f}\|A_\beta X^\top\|^2. \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25), na igualdade (2.21), obtemos

$$\mathcal{L}f + (\|A\|^2 + \varepsilon \varphi)f = \frac{1}{f} \sum_{\beta=2}^k \|A_\beta X^\top\|^2 + \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle.$$

Por outro lado, se M^{n+k} tem curvatura seccional constante κ_0 , então

$$\langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle = \kappa_0(\langle e_i, e_i \rangle \langle X^\top, \eta \rangle - \langle X^\top, e_i \rangle \langle \eta, e_i \rangle) = 0,$$

visto que $\langle X^\top, \eta \rangle = 0 = \langle \eta, e_i \rangle$. Se, além disso, $\nabla^\perp \eta = 0$, então $s_{1\beta} \equiv 0$ para todo $\beta \in \{2, \dots, k\}$, i.e., $A_\beta X^\top = 0$. Substituindo esses fatos, na igualdade (2.21), concluímos (2.23).

Se agora assumimos que a codimensão da imersão é um, temos, automaticamente que os termos $s_{1\beta}$ são desconsiderados. Observemos também que, se $\operatorname{Ric}_M = \lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \langle \bar{R}(e_i, X^\top)e_i, \eta \rangle &= \operatorname{Ric}_M(X^\top, \eta) - \langle \bar{R}(\eta, X^\top)\eta, \eta \rangle \\ &= \operatorname{Ric}_M(X^\top, \eta) = \lambda \langle X^\top, \eta \rangle = 0. \end{aligned}$$

Incorporando essas informações na igualdade (2.21), concluímos também (2.23). \square

3. *Self-shrinkers e self-expanders* completos

Entramos em matéria, apresentando neste Capítulo, as demonstrações dos Teoremas de classificação para *self-shrinkers*, discutidos na introdução desta Tese. Iremos enfatizar que as hipóteses relativas ao conjunto W não são, a priori, equivalentes com hipóteses sobre o crescimento do volume da imersão, tópico que será discutido no Capítulo 3.3. O capítulo será dividido em três seções, na primeira delas, Seção 3.1, são provadas as afirmações dos Teoremas 1.8, 1.9 e 1.10, relacionados à classificação dos *self-shrinkers* que satisfazem, entre outras, condições relativas ao conjunto W . Na Seção 3.2, é provado o Teorema 1.11 que diz respeito a não existência de *self-expanders* completos e não compactos que atendem condições específicas para o conjunto W . A última seção é dedicada à construção dos exemplos das superfícies não próprias com W não vazio, o que mostra ser esta condição distinta da condição da superfície ser própria.

Será usado, ao longo desse Capítulo, o fato de que o vetor posição, X , do espaço Euclidiano de dimensão m , \mathbb{R}^m , satisfaz

$$\overline{\nabla}_Y X = Y, \quad (3.1)$$

para todo $Y \in T\mathbb{R}^m$, ou seja, a derivada no espaço Euclidiano é a derivada usual. Aqui, $\overline{\nabla}$ denota a conexão do espaço Euclidiano.

3.1. Rigidez de *self-shrinkers* cujos planos tangentes omitem um conjunto não vazio.

Nesta seção apresentamos as demonstrações dos Teoremas 1.8, 1.9 e 1.10. Todos os resultados que mostram a rigidez da esfera, o cilindro e o hiperplano como os únicos *self-shrinkers* a satisfazer, entre outras condições, que o conjunto W associado seja aberto e não vazio. Esses Teoremas, por sua estrutura e conclusões, podem ser comparados com os Teoremas de classificação de Cao-Li, ver [7], e de Ding-Xing, ver [15], listados na introdução desta Tese como Teorema 1.6 e Teorema 1.7, respectivamente. Destacamos, novamente, que a diferença de maior peso está nas hipóteses relativas ao conjunto W e, dependendo do caso, na limitação do quadrado da norma do operador de forma da imersão.

Começamos então apresentando a demonstração do Teorema 1.8 que tem, entre suas hipóteses, a frequentemente suposta limitação por cima do quadrado da norma do operador de forma da imersão, neste caso, de codimensão um.

Demonstração do Teorema 1.8. Dado que, em \mathbb{R}^{n+1} , é satisfeita a equação (3.1), temos de acordo com a Definição 2.1.1, que o vetor posição é um vetor conforme, com fator de conformidade $\varphi = 1$. Agora, visto que Σ^n é um *self-shrinker*, temos

$$H = -\frac{1}{2}\langle X, N \rangle = -\frac{1}{2}f, \quad (3.2)$$

onde N é um vetor normal unitário. Considerando que a codimensão da imersão é 1, e usando a equação (2.23), no Corolário 2.2.1, para $\varepsilon = -1/2$, obtemos

$$\mathcal{L}f + \left(\|A\|^2 - \frac{1}{2} \right) f = 0. \quad (3.3)$$

Tomando a desigualdade de Newton,

$$\frac{(\operatorname{tr} A)^2}{n} \leq \|A\|^2,$$

assim como a equação (3.2) e a hipótese $\|A\|^2 \leq 1/2$ temos

$$f^2 = 4H^2 = 4(\operatorname{tr} A)^2 \leq 4n\|A\|^2 \leq 2n. \quad (3.4)$$

Isto implica

$$-\sqrt{2n} \leq f \leq \sqrt{2n}$$

portanto, existem $m = \inf_{\Sigma^n} f$ e $d = \sup_{\Sigma^n} f$. Se $m \leq 0$, então

$$\mathcal{L}(f - m) + \left(\|A\|^2 - \frac{1}{2} \right) (f - m) = - \left(\|A\|^2 - \frac{1}{2} \right) m \leq 0.$$

Se o mínimo é atingido pela função f , i.e., caso $m = \min_{\Sigma^n} f$, então pelo princípio do máximo de Hopf (Lema 2.0.1, item (ii)), aplicado à $f - m$, podemos concluir que f é constante. Por outro lado, se $m > 0$, então $d = \sup_{\Sigma^n} f > 0$. Assim, se f atinge o máximo (positivo), i.e., $d = \max_{\Sigma^n} f$ então, utilizando o princípio do máximo de Hopf (Lema 2.0.1, item (ii)), na equação (3.3) deduzimos que f é constante.

Adicionalmente, Dajczer e Tojeiro, ver [14], Teorema 1, p.296, provaram que as únicas hipersuperfícies de \mathbb{R}^{n+1} , cuja função suporte f é constante, são os cilindros, as esferas e os hiperplanos. A conclusão de que $\Sigma^n = \mathbb{S}^p(\sqrt{2p}) \times \mathbb{R}^{n-p}$, $0 \leq p \leq n$, vem da equação (3.2).

Em consequência, precisamos apenas provar que f atinge o mínimo. A prova de que f atinge o máximo é análoga.

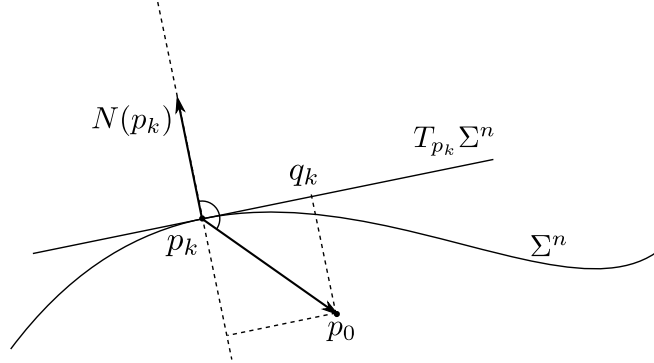
Uma vez que $W \neq \emptyset$, existe $p_0 \in W$, i.e., $p_0 \notin \bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n$, o que implica que $p - p_0 \notin T_p \Sigma^n$ para todo $p \in \Sigma^n$. Seja $\{p_k\}$ a sequência de pontos em Σ^n tais que $f(p_k) \rightarrow m$ quando $k \rightarrow \infty$. Para cada p_k consideremos q_k a projeção de p_0 sobre $T_{p_k} \Sigma^n$ (ver Figura 3.1). Visto que

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(q_k, p_0) &= \|q_k - p_0\| = \|\operatorname{proj}_{N(p_k)}(p_k - p_0)\| = |\langle p_k - p_0, N(p_k) \rangle| \\ &= |f(p_k) - \langle p_0, N(p_k) \rangle| \leq |f(p_k)| + |p_0| \\ &\leq \sqrt{2n} + |p_0|, \end{aligned}$$

onde $\operatorname{proj}_u v$ denota a projeção do vetor v sobre o vetor u , temos que $\{q_k\}$ é uma sequência limitada em $\bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n = \mathbb{R}^{n+1} - W$. Mais ainda, visto que W é aberto, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - W$ é fechado. Portanto, usando uma subsequência se necessário, podemos concluir que q_k converge a um ponto $q_1 \in \mathbb{R}^{n+1} - W$. Seja $p_1 \in \Sigma^n$ tal que $q_1 \in T_{p_1} \Sigma^n$. O que implica que

$$f(p_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = m,$$

i.e, m é um mínimo para f . □

Figura 3.1: Projeção de p_0 sobre $T_{p_k}\Sigma^n$ 

Continuamos, mostrando agora, a prova do Teorema 1.9, que tem a particularidade de contar, entre suas hipóteses, com uma limitação por baixo do quadrado da norma do operador de forma de imersão, assim como a exigência de que $0 \in W$.

Demonstração do Teorema 1.9. Dado que a codimensão é um e que Σ^n é um *self-shrinker* do fluxo de curvatura média, usando a Equação (2.23) no Corolário 2.2.1 para $\varepsilon = -1/2$, obtemos

$$\mathcal{L}f = \left(\frac{1}{2} - \|A\|^2\right) f.$$

Visto que $0 \in W$, temos que $0 \notin \bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n$ donde inferimos que $p \notin T_p \Sigma^n$ (visto como um vetor centrado na origem) para todo $p \in \Sigma^n$. Tendo como resultado que $f(p) = \langle p, N \rangle \neq 0$ para cada $p \in \Sigma^n$, onde N denota o vetor normal unitário de Σ^n em \mathbb{R}^{n+1} . Admitamos, sem perda de generalidade, que $f < 0$ em todo Σ^n . Portanto, se $\|A\|^2 \geq 1/2$, então $\mathcal{L}f \geq 0$. Como $f < 0$, existe $d = \sup_{\Sigma^n} f$. Logo, se f atinge um máximo, i.e., $d = \max_{\Sigma^n} f$, então por meio do princípio do máximo de Hopf (Lema 2.0.1, item (i)), concluímos que f é constante. Assim, basta provar que f atinge o máximo.

Seja $\{p_k\}$ uma sequência de pontos em Σ^n tal que $f(p_k) \rightarrow d$ quando $k \rightarrow \infty$. Para cada p_k considere q_k a projeção de p_0 sobre $T_{p_k} \Sigma^n$. Visto que

$$\text{dist}(q_k, 0) = |q_k| = |\text{proj}_{N(p_k)}(p_k)| = |\langle p_k, N(p_k) \rangle| = -f(p_k)$$

e que $f(p_k)$ é forma uma sequência limitada (dado que converge), temos que $\{q_k\}$ é uma sequência limitada em $\bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n = \mathbb{R}^{n+1} - W$. Além disso, uma vez que W é aberto, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - W$ é fechado. Portanto, utilizando uma subsequência caso necessário, concluímos que $\{q_k\}$ converge a um ponto $q_1 \in \mathbb{R}^{n+1} - W$. Seja $p_1 \in \Sigma^n$ tal que $q_1 \in T_{p_1} \Sigma^n$. Isto implica que

$$f(p_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = d,$$

i.e, d é um máximo para f . Logo, $f = d$ é constante, donde

$$\left(\frac{1}{2} - \|A\|^2\right) d = 0.$$

Se $d = 0$, então $H = \frac{1}{2}\langle X, N \rangle = 0$, o que implica que Σ^n é um hiperplano o que, por sua vez, contradiz a suposição de que $\|A\|^2 \geq 1/2$. Portanto, $d < 0$, $\|A\|^2 = 1/2$, e $\Sigma^n = \mathbb{S}^p(\sqrt{2p}) \times \mathbb{R}^{n-p}$, $1 \leq p \leq n$. \square

Finalmente, demonstraremos o Teorema 1.10, que é semelhante aos resultados prévios, porém em codimensões altas.

Demonstração do Teorema 1.10. Dado que $\nabla^\perp \eta = 0$, onde $\eta = \mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$, então $s_{1\beta} \equiv 0$, o que implica que $A_\beta X^\top = 0$ para cada $\beta = 2, \dots, k$. Visto que $\text{tr} A_\beta = 0$ e a dimensão de Σ^2 é dois, temos que $A_\beta = 0$. Por outro lado, em \mathbb{R}^{2+k} o vetor posição é um vetor conforme com fator de conformidade $\varphi = 1$. Em cujo caso, visto que a codimensão é $k \geq 2$ e Σ^2 é um *self-shrinker*, temos que

$$f = \langle X, \eta \rangle = \|X^\perp\| = 2\|\mathbf{H}\| > 0.$$

Deste modo, utilizando o Corolário 2.2.1, temos que para $\varepsilon = -1/2$,

$$\mathcal{L}f = \left(\frac{1}{2} - \|A\|^2\right) f. \quad (3.5)$$

- i) Se $\|A\|^2 \leq 1/2$, então $\mathcal{L}f \geq 0$. Dado que $f^2 \leq 4$ (veja a limitação (3.4) na prova do Teorema 1.8), existe $d = \sup_{\Sigma^2} f$. Logo, caso f atinja o máximo, i.e., $d = \max_{\Sigma^2} f$, pelo princípio do máximo de Hopf (Lema 2.0.1, item (i)), tem-se que f é constante. Mostraremos que f atinge o máximo. Como $W \neq \emptyset$, existe $p_0 \in W$, i.e., $p_0 \notin \bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n$, o que implica que $p - p_0 \notin T_p \Sigma^n$ para todo $p \in \Sigma^n$. Seja $\{p_k\}$ a sequência de pontos em Σ^n tais que $f(p_k) \rightarrow d$ quando $k \rightarrow \infty$. Para cada p_k consideremos q_k a projeção de p_0 sobre $T_{p_k} \Sigma^n$. Visto que

$$\begin{aligned} \text{dist}(q_k, p_0) &= \|q_k - p_0\| = \|\text{proj}_{N(p_k)}(p_k - p_0)\| = |\langle p_k - p_0, N(p_k) \rangle| \\ &= |f(p_k) - \langle p_0, N(p_k) \rangle| \leq |f(p_k)| + |p_0| \\ &\leq \sqrt{2n} + |p_0|, \end{aligned}$$

onde $\text{proj}_u v$ denota a projeção do vetor v sobre o vetor u , temos que $\{q_k\}$ é uma sequência limitada em $\bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n = \mathbb{R}^{n+1} - W$. Além disso, visto que W é aberto, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - W$ é fechado. Portanto, usando uma subsequência se necessário, podemos concluir que q_k converge a um ponto $q_1 \in \mathbb{R}^{n+1} - W$. Seja $p_1 \in \Sigma^n$ tal que $q_1 \in T_{p_1} \Sigma^n$. O que implica que

$$f(p_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = d,$$

i.e., d é um máximo para f .

- ii) Se $\|A\|^2 \geq 1/2$ então $\mathcal{L}f \leq 0$. Visto que $f > 0$, existe $m = \inf_{\Sigma^2} f$. Logo, caso f atinja o mínimo, i.e., $m = \min_{\Sigma^2} f$, usando o princípio do máximo de Hopf, (Lema 2.0.1, item (i)), concluímos que f é constante. Assim, mostraremos que f atinge

o mínimo. Seja $\{p_k\}$ uma sequência de pontos em Σ^n tal que $f(p_k) \rightarrow m$ quando $k \rightarrow \infty$. Para cada p_k considere q_k a projeção de p_0 sobre $T_{p_k}\Sigma^n$. Visto que

$$\text{dist}(q_k, 0) = |q_k| = |\text{proj}_{N(p_k)}(p_k)| = |\langle p_k, N(p_k) \rangle| = f(p_k)$$

e $f(p_k)$ forma uma sequência limitada (dado que converge), temos que $\{q_k\}$ é uma sequência limitada em $\bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n = \mathbb{R}^{n+1} - W$. Além disso, uma vez que W é aberto, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - W$ é fechado. Portanto, utilizando uma subsequência caso necessário, concluímos que $\{q_k\}$ converge a um ponto $q_1 \in \mathbb{R}^{n+1} - W$. Seja $p_1 \in \Sigma^n$ tal que $q_1 \in T_{p_1}\Sigma^n$. Isto implica que

$$f(p_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = m,$$

i.e, m é um mínimo para f .

Portanto, em ambos casos, f é constante, o que implica que $\|A\| = 0$ e Σ é um plano passando pela origem, ou $\|A\|^2 = 1/2$. Dado que a segunda forma fundamental α satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\|\alpha\|^2 &= 2\|\nabla\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2 - 2 \sum_{\beta \neq \delta} \|[A_\beta, A_\delta]\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{\beta, \delta} \left(\sum_{i, j=1}^2 \langle \alpha(e_i, e_j), \eta_\beta \rangle \langle \alpha(e_i, e_j), \eta_\delta \rangle \right)^2 \\ &= 2\|\nabla\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2 - 2 \sum_{\beta \neq \delta} \|A_\beta \circ A_\delta - A_\delta \circ A_\beta\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{\beta, \delta} \left(\sum_{i, j=1}^2 \langle A_\beta(e_i), e_j \rangle \langle A_\delta(e_i), e_j \rangle \right)^2 \\ &= 2\|\nabla\alpha\|^2 + \|\alpha\|^2 - 2 \sum_{\beta \neq \delta} \|A_\beta \circ A_\delta - A_\delta \circ A_\beta\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{\beta, \delta} (\text{tr}(A_\beta \circ A_\delta))^2 \end{aligned}$$

(ver [15], p.5069, Eq. (2.5)) e $A_\beta = 0$, $\beta = 2, \dots, k$, temos que $\|\alpha\| = \|A\|$ e

$$\mathcal{L}\|A\|^2 = 2\|\nabla A\|^2 + \|A\|^2 - 2\|A\|^4.$$

Consequentemente $\|A\|^2 = 1/2$ implica que $\|\nabla A\|^2 = 0$. Portanto, Σ^2 é isoparamétrica e, assim, $\Sigma^2 = \mathbb{S}^1(\sqrt{2}) \times \mathbb{R}$ ou $\Sigma^2 = \mathbb{S}^2(2)$. \square

3.2. *Self-expanders* completos cujos planos tangentes omitem um conjunto não vazio.

Apresentamos, nesta seção, a demonstração do Teorema 1.11, que diz respeito a não existência de *self-expanders* completos, não compactos e que, entre outros fatos, possui W aberto e não vazio.

Demonstração Teorema 1.11. Se $k \geq 2$, $\mathbf{H}/\|\mathbf{H}\|$ paralelo e Σ^n um *self-expander*, temos que $f = 2\|\mathbf{H}\| > 0$.

Se $k = 1$, visto que $0 \in W$, temos que $0 \notin \bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n$ donde obtemos que $p \notin T_p \Sigma^n$ (visto como um vetor centrado na origem) para todo $p \in \Sigma^n$. Tendo como resultado que $f(p) = \langle p, N \rangle \neq 0$ para cada $p \in \Sigma^n$, onde N denota o vetor normal unitário de Σ^n em \mathbb{R}^{n+1} . Admitamos, sem perda de generalidade, que $f > 0$. Em ambos os casos, é satisfeita, conforme o Corolário 2.2.1, a expressão

$$\mathcal{L}f + \left(\|A\|^2 + \frac{1}{2} \right) f = 0.$$

Assim $\mathcal{L}f \leq 0$. Visto que f é limitada por baixo, existe $m = \inf_{\Sigma^n} f$. Assim, se f atinge um mínimo, i.e., $m = \min_{\Sigma^n} f$, então pelo princípio do máximo de Hopf (Lema 2.0.1, item (i)), concluímos que f é constante. Assim, mostraremos que f atinge o mínimo. Seja $\{p_k\}$ uma sequência de pontos em Σ^n tal que $f(p_k) \rightarrow m$ quando $k \rightarrow \infty$. Para cada p_k considere q_k a projeção de p_0 sobre $T_{p_k} \Sigma^n$. Visto que

$$\text{dist}(q_k, 0) = |q_k| = |\text{proj}_{N(p_k)}(p_k)| = |\langle p_k, N(p_k) \rangle| = f(p_k)$$

e $f(p_k)$ forma uma sequência limitada (dado que converge), temos que $\{q_k\}$ é uma sequência limitada em $\bigcup_{p \in \Sigma^n} T_p \Sigma^n = \mathbb{R}^{n+1} - W$. Além disso, uma vez que W é aberto, temos que $\mathbb{R}^{n+1} - W$ é fechado. Portanto, utilizando uma subsequência caso necessário, concluímos que $\{q_k\}$ converge a um ponto $q_1 \in \mathbb{R}^{n+1} - W$. Seja $p_1 \in \Sigma^n$ tal que $q_1 \in T_{p_1} \Sigma^n$. Isto implica que

$$f(p_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(p_k) = m,$$

i.e, m é um mínimo para f . Logo, $f = m$ é constante, o que implica que

$$\left(\|A\|^2 + \frac{1}{2} \right) f = 0,$$

porém, isto não é possível, visto que $f > 0$. □

3.3. Superfícies não próprias cujos planos tangentes omitem um conjunto não vazio.

Neste capítulo, será mostrado diretamente, com dois exemplos, que a condição $W \neq \emptyset$ não implica necessariamente que a imersão seja própria ou que esta apresenta crescimento polinomial do volume. Ou seja, a condição $W \neq \emptyset$ determina uma classe de subvariedade, distinta da classe das subvariedades próprias e distinta também da classe das subvariedades com crescimento polinomial do volume.

Seja $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ o cilindro sobre a curva Γ parametrizada por

$$\Gamma(t) = (1 + b(t)) (\cos t, \sin t). \quad (3.6)$$

Onde $b(t)$ é definida mediante

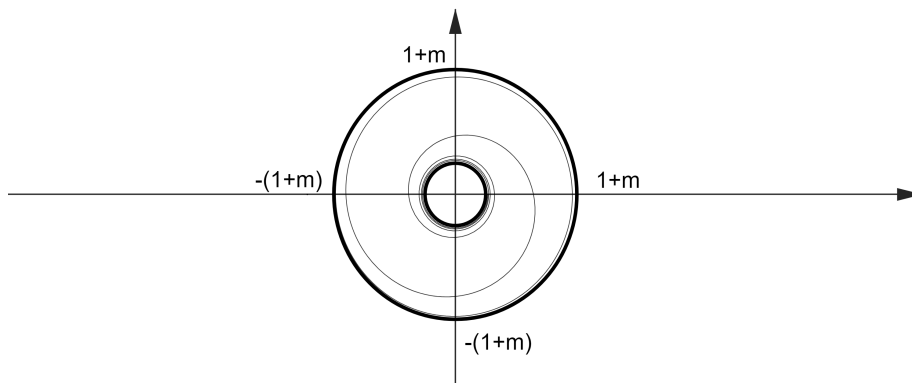
$$b(t) = \frac{m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(at) \right), \quad m > 0, \quad 0 < a \leq 1. \quad (3.7)$$

Assim definida, a função $b(t)$ satisfaz as seguintes propriedades

- i) $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$;
- ii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} b(t) = m$;
- iii) $b'(t) < 0$;
- iv) $b(t) \geq |b'(t)|$;
- v) $|b'(t)| < 1$.

Observemos que a curva Γ é uma espiral assintótica ao círculo unitário, segundo a propriedade *i*) de $b(t)$, ao redor do qual dá uma quantidade infinita de voltas. Se $m < \infty$, então Γ é também assintótica à circunferência centrada na origem e de raio $1+m$, conforme à propriedade *ii*) de $b(t)$, ao redor da qual dá também uma quantidade infinita de voltas, ver a Figura 3.2. Assim $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R}$ é assintótica ao cilindro $\mathbb{S} \times \mathbb{R}$ e também assintótica ao cilindro $\mathbb{S}(1+m) \times \mathbb{R}$, caso $m < \infty$, dando, portanto, uma quantidade infinita de voltas dentro de qualquer conjunto compacto que contenha um *slice* do cilindro $\mathbb{S}^2(1+\varepsilon) \times \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Consequentemente, a imersão não é própria.

Figura 3.2: Curva $\Gamma(t) = \left(1 + \frac{m}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg(at) \right) \right) (\cos t, \sin t)$, $m > 0$, $0 < a \leq 1$.



Dado que os planos tangentes ao cilindro $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R}$ são todos planos verticais sobre retas tangentes a curva Γ , se mostrarmos que todo ponto de cada reta tangente de Γ tem distância à origem maior ou igual do que um, teremos que $W = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$, onde \mathbb{D}^2 é o disco unitário. A reta tangente à curva Γ no instante t é determinada mediante

$$R_t(s) = \Gamma(t) + s\Gamma'(t),$$

donde

$$|R_t(s)|^2 = |\Gamma(t)|^2 + 2s\langle\Gamma(t), \Gamma'(t)\rangle + s^2 |\Gamma'(t)|^2.$$

Visto que

$$\Gamma'(t) = b'(t)(\cos t, \sin t) + (1 + b(t))(-\sin t, \cos t),$$

obtemos

$$\begin{aligned} |R_t(s)|^2 &= (1 + b(t))^2 + 2s(1 + b(t))b'(t) + s^2(1 + b(t))^2 + s^2b'(t)^2 \\ &= [1 + b(t) + sb'(t)]^2 + s^2(1 + b(t))^2. \end{aligned}$$

A propriedade *iii*) de $b(t)$ garante que $-|b'(t)| = b'(t)$. Definindo $c(t) := 1 + b(t) - |b'(t)|$ temos

$$\begin{aligned} |R_t(s)|^2 &= [1 + b(t) - s|b'(t)|]^2 + s^2(1 + b(t))^2 \\ &= [c(t) + (1 - s)|b'(t)|]^2 + s^2(1 + b(t))^2 \\ &= (c(t))^2 + 2c(t)(1 - s)|b'(t)| + (1 - s)^2|b'(t)|^2 + s^2(1 + b(t))^2 \\ &= (c(t))^2 + 2c(t)(1 - s)|b'(t)| + (1 - s)^2|b'(t)|^2 + s^2 + 2s^2b(t) + s^2(b(t))^2 \\ &= (c(t))^2 + s^2 + 2[(1 - s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t)] + (1 - s)^2|b'(t)|^2 + s^2(b(t))^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$|R_t(s)|^2 = (c(t))^2 + s^2 + 2[(1 - s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t)] + (1 - s)^2|b'(t)|^2 + s^2(b(t))^2,$$

usando agora a propriedade *iv*) de $b(t)$, temos

$$\begin{aligned} |R_t(s)|^2 &\geq (c(t))^2 + s^2 + 2[(1 - s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t)] + [(1 - s)^2 + s^2]|b'(t)|^2 \\ &> (c(t))^2 + s^2 + 2[(1 - s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t)]. \end{aligned}$$

Consideramos as igualdades

$$\begin{aligned}
(1-s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t) &= (1-s)c(t)|b'(t)| + s^2c(t)|b'(t)| - s^2c(t)|b'(t)| + s^2b(t) \\
&= (1-s+s^2)c(t)|b'(t)| - s^2c(t)|b'(t)| + s^2b(t) \\
&= (1-s+s^2)c(t)|b'(t)| + s^2(b(t)-c(t)|b'(t)|) \\
&= (1-s+s^2)c(t)|b'(t)| + s^2(b(t)-c(t)(1+b(t)-c(t))) \\
&= (1-s+s^2)c(t)|b'(t)| + s^2(b(t)-c(t)-c(t)(b(t)-c(t))) \\
&= \left(\frac{3}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right)c(t)|b'(t)| + s^2(c(t)-1)(c(t)-b(t)),
\end{aligned}$$

assim, usando a expressão $c(t) = 1 + b(t) - |b'(t)|$, temos

$$(1-s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t) = \left(\frac{3}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right)c(t)|b'(t)| + s^2(b(t) - |b'(t)|)(1 - |b'(t)|),$$

logo, pelas das propriedades *iv*) e *v*) de $b(t)$, concluimos que

$$(1-s)c(t)|b'(t)| + s^2b(t) \geq 0.$$

Portanto

$$|R_t(s)|^2 > (c(t))^2 + s^2 \geq 1.$$

O anterior implica, como discutido, que $W = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$.

A curvatura $k(t)$ de Γ é

$$k(t) = \frac{(1+b(t))^2 + 2(b'(t))^2 - (1+b(t))b''(t)}{[(1+b(t))^2 + (b'(t))^2]^{3/2}}.$$

Também, se $m < \infty$, utilizando as propriedades *i*) e *ii*) de $b(t)$, assim como a monotonicidade desta, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} b'(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} b''(t) = 0.$$

Consequentemente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 1 \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} k(t) = \frac{1}{1+m}.$$

Portanto, a curvatura média de $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R}$ é limitada. Visto que, no cilindro, a normal é perpendicular ao eixo z e Γ está contida no anel delimitado pelas circunferências centradas na origem e com raios 1 e $1+m$, temos que $\langle X, N \rangle$ é limitada. Isto implica que a curvatura média com peso

$$H_f = H + \frac{1}{2}\langle X, N \rangle,$$

do espaço Gaussiano com peso $f = \frac{|X|^2}{4}$, é também limitada. Usando o Teorema 1.4, p. 6 de [12], concluímos que Σ^2 não tem crescimento polinomial do volume. Assim, foi obtida uma classe de superfícies não próprias, com crescimento do volume não polinomial e cujo conjunto W associado é não vazio.

Observação 3.3.1. A superfície desse primer exemplo, na verdade, faz parte de uma família maior $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, o cilindro sobre a curva Γ parametrizada por

$$\Gamma(t) = (d + b(t))(\cos t, \sin t), \quad d > 0,$$

onde, $b(t)$ é uma função que satisfaz

- i) $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$;
- ii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} b(t) = m, \quad m \in (0, \infty]$;
- iii) $b'(t) < 0$;
- iv) $b(t) \geq |b'(t)|$;
- v) $|b'(t)| < 1$.

De fato, essa família determina uma classe de exemplos de imersões não próprias, com crescimento do volume não polinomial e cujo conjunto W é não vazio. Além disso, notemos que usando as propriedades *i*) e *ii*) de $b(t)$, assim como a monotonicidade desta, temos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} b'(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} b''(t) = 0.$$

Consequentemente, a curvatura $k(t)$ de $\Gamma(t)$, determinada por

$$k(t) = \frac{2(b'(t))^2 - b''(t)(d + b(t)) + (d + b(t))^2}{\left((b'(t))^2 + (d + b(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = \frac{1}{d} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} k(t) = \frac{1}{d + m},$$

isto é,

$$\frac{1}{d + m} < k(t) < \frac{1}{d}.$$

Portanto, o quadrado da norma do operador de forma, $\|A\|^2$, de Σ^2 , poderá satisfazer a limitação do Teorema 1.8 ou do Teorema 1.9, dependendo da escolha dos valores para $d > 0$ e $m > 0$.

Finalizamos, analisando um exemplo mais simples, comparado com o anterior, e que em contraste possui função $\langle X, N \rangle$ não limitada. Considerando agora $b(t) = e^{-t}$ na expressão 3.6, tomamos, como antes, $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R}$, o cilindro sobre a curva

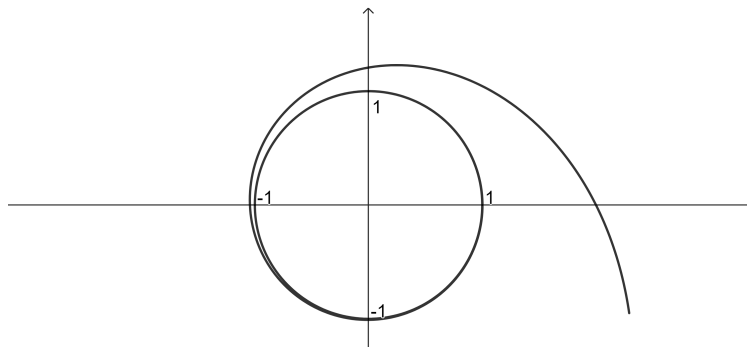
$$\Gamma(t) = (1 + e^{-t})(\cos t, \sin t),$$

ver figura 3.3. Neste caso, a norma ao quadrado da reta tangente à curva Γ no instante t , satisfaz

$$\begin{aligned}
 |R_t(s)|^2 &= \left(1 + (1-s)e^{-t}\right)^2 + \left(1 + e^{-t}\right)^2 s^2 \\
 &= 1 + s^2 + 2(1-s+s^2)e^{-t} + [(1-s)^2 + s^2]e^{-2t} \\
 &= 1 + s^2 + 2\left[\frac{3}{4} + \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]e^{-t} + [(1-s)^2 + s^2]e^{-2t} \\
 &> 1 + s^2 \geq 1.
 \end{aligned}$$

O que implica, como na discussão do exemplo anterior, que $W = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{R}$, por outro lado, visto que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$, temos que $\Gamma(t) = (1 + e^{-t})(\cos t, \sin t)$ é uma espiral assintótica ao círculo unitário. O que implica que $\Sigma^2 = \Gamma \times \mathbb{R}$ é assintótico ao cilindro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, assim, dando uma quantidade infinita de voltas dentro de qualquer conjunto compacto que contenha um *slice* do cilindro $\mathbb{S}^1(1 + \varepsilon) \times \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Consequentemente, a imersão não é própria.

Figura 3.3: Curva $\Gamma(t) = (1 + e^{-t})(\cos t, \sin t)$



Referências Bibliográficas

- [1] U. Abresch and J. Langer, The normalized curve shortening flow and homothetic solutions, *J. Differential Geom.* 23 (1986), no. 2, 175-196.
- [2] Alencar, H., Cruz, M. and Silva Neto, G., Rigidity of complete self-shrinkers whose tangent planes omit a nonempty set, *Results Math* 78, 125 (2023), DOI 10.1007/s00025-023-01909-3.
- [3] Hilário Alencar and Márcio Batista, Hypersurfaces with null higher order mean curvature, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* 41 (2010), no. 4, 481–493, DOI 10.1007/s00574-010-0022-z.
- [4] Hilário Alencar and Katia Frensel, Hypersurfaces whose tangent geodesics omit a nonempty set, *Differential geometry*, Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math., vol. 52, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 1–13.
- [5] Claudio Arezzo and Jun Sun, Self-shrinkers for the mean curvature flow in arbitrary codimension, *Math. Z.* 274 (2013), no. 3-4, 993–1027, DOI 10.1007/s00209-012-1104-y.
- [6] Bruno Bianchini, Luciano Mari, and Marco Rigoli, Spectral radius, index estimates for Schrödinger operators and geometric applications, *J. Funct. Anal.* 256 (2009), no. 6, 1769–1820, DOI 10.1016/j.jfa.2009.01.021.
- [7] Huai-Dong Cao and Haizhong Li, A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 46 (2013), no. 3-4, 879–889, DOI 10.1007/s00526-012-0508-1.
- [8] Qing-Ming Cheng and Yejuan Peng, Complete self-shrinkers of the mean curvature flow, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 52 (2015), no. 3-4, 497–506, DOI 10.1007/s00526-014-0720-2.
- [9] Qing-Ming Cheng and Guoxin Wei, A gap theorem of self-shrinkers, *Trans. Amer. Math. Soc.* 367 (2015), no. 7, 4895–4915, DOI 10.1090/S0002-9947-2015-06161-3.
- [10] Xu Cheng and Detang Zhou, Volume estimate about shrinkers, *Proc. Amer. Math. Soc.* 141 (2013), no. 2, 687–696, DOI 10.1090/S0002-9939-2012-11922-7.
- [11] Xu Cheng and Detang Zhou, Spectral properties and rigidity for self-expanding solutions of the mean curvature flows. *Math. Ann.* 371, 371–389 (2018), DOI 10.1007/s00208-018-1662-3
- [12] Xu Cheng, Matheus Vieira, and Detang Zhou, Volume Growth of Complete Submanifolds in Gradient Ricci Solitons with Bounded Weighted Mean Curvature, *Internat. Math. Res. Notices*, posted on 2019, DOI 10.1093/imrn/rnz355.

- [13] Tobias H. Colding and William P. Minicozzi II, Generic mean curvature flow I: generic singularities, *Ann. of Math. (2)* 175 (2012), no. 2, 755–833, DOI 10.4007/annals.2012.175.2.7.
- [14] Marcos Dajczer and Ruy Tojeiro, Hypersurfaces with a constant support function in spaces of constant sectional curvature, *Arch. Math. (Basel)* 60 (1993), no. 3, 296–299, DOI 10.1007/BF01198815.
- [15] Qi Ding and Y. L. Xin, The rigidity theorems of self-shrinkers, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366 (2014), no. 10, 5067–5085, DOI 10.1090/S0002-9947-2014-05901-1. MR3240917
- [16] Qi Ding, Y. L. Xin, and Ling Yang, The rigidity theorems of self shrinkers via Gauss maps, *Adv. Math.* 303 (2016), 151–174, DOI 10.1016/j.aim.2016.08.019.
- [17] Gregory Drugan and Stephen J. Kleene, Immersed self-shrinkers, *Trans. Amer. Math. Soc.* 369 (2017), no. 10, 7213–7250, DOI 10.1090/tran/6907.
- [18] Klaus Ecker and Gerhard Huisken, Mean curvature evolution of entire graphs, *Ann. of Math. 2nd Ser.* 130 (1989), no. 3, 453–471.
- [19] Hoekuldur P. Halldorsson, Self-similar solutions to the curve shortening flow, *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (2012), no. 10, 5285–5309, DOI 10.1090/S0002-9947-2012-05632-7.
- [20] Benjamin Halpern, On the immersion of an n -dimensional manifold in $n + 1$ -dimensional Euclidean space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 30 (1971), 181–184, DOI 10.2307/2038246.
- [21] Thomas Hasanis and Dimitri Koutroufiotis, A property of complete minimal surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 281 (1984), no. 2, 833–843, DOI 10.2307/2000089.
- [22] Gerhard Huisken, Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow, *J. Differential Geom.* 31 (1990), no. 1, 285–299.
- [23] Stephen Kleene and Niels Martin Møller, Self-shrinkers with a rotational symmetry, *Trans. Amer. Math. Soc.* 366 (2014), no. 8, 3943–3963, DOI 10.1090/S0002-9947-2014-05721-8.
- [24] Haizhong Li and Yong Wei, Classification and rigidity of self-shrinkers in the mean curvature flow, *J. Math. Soc. Japan* 66 (2014), no. 3, 709–734, DOI 10.2969/jmsj/06630709.
- [25] Sérgio Mendonça and Heudson Mirandola, Hypersurfaces whose tangent geodesics do not cover the ambient space, *Proc. Amer. Math. Soc.* 136 (2008), no. 3, 1065–1070, DOI 10.1090/S0002-9939-07-09282-9.

- [26] Stefano Pigola, Marco Rigoli, and Alberto G. Setti, Some applications of integral formulas in Riemannian geometry and PDE's, *Milan J. Math.* 71 (2003), 219–281, DOI 10.1007/s00032-003-0021-2.
- [27] Patrizia Pucci and James Serrin, The strong maximum principle revisited, *J. Differential Equations* 196 (2004), no. 1, 1–66, DOI 10.1016/j.jde.2003.05.001.
- [28] Michele Rimoldi, On a classification theorem for self-shrinkers, *Proc. Amer. Math. Soc.* 142 (2014), no. 10, 3605–3613, DOI 10.1090/S0002-9939-2014-12074-0.
- [29] Knut Smoczyk, Self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension, *Int. Math. Res. Not.* 48 (2005), 2983–3004, DOI 10.1155/IMRN.2005.2983.
- [30] Knut Smoczyk, Self-expanders of the mean curvature flow. *Vietnam J. Math.* 49, 433–445 (2021), DOI 10.1007/s10013-020-00469-1
- [31] Nikolaos Stavrou, Selfsimilar solutions to the mean curvature flow, *J. reine angew.Math.* 499 (1998), 189–198.
- [32] Hongwei Xu and Zhiyuan Xu, On Chern's conjecture for minimal hypersurfaces and rigidity of self-shrinkers, *J. Funct. Anal.* 273 (2017), no. 11, 3406–3425, DOI 10.1016/j.jfa.2017.08.020.