

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA UFBA-UFAL

VANESSA LÚCIA DA SILVA

**Classificação de Superfícies Regradas  
como *Self-Similar Solutions* do *Inverse  
Mean Curvature Flow* no Espaço de  
Lorentz-Minkowski Tridimensional**

Maceió  
2023

VANESSA LÚCIA DA SILVA

**Classificação de Superfícies Regradas como *Self-Similar Solutions* do *Inverse Mean Curvature Flow* no Espaço de Lorentz-Minkowski Tridimensional**

*Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática UFBA-UFAL do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.*

Orientador: *Dr. Gregório Manoel da Silva Neto*

Maceió  
2023

**Catálogo na Fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

S586c Silva, Vanessa Lúcia da.  
Classificação de superfícies regradas como *self-similar solutions* do *inverse mean curvature flow* no espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional / Vanessa Lúcia da Silva. – 2023.

62 f. : il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2023.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia.

Bibliografia: f. 59-62.

1. Espaço de Minkowski. 2. Superfícies regradas. 3. Curvatura média. 4. *Inverse mean curvature flow*. 5. *Translating solitons*. 6. *Homothetic solutions*. I. Título.


CDU: 514.752.2

## Folha de Aprovação

AUTORA: Vanessa Lúcia da Silva

### Classificação de Superfícies Regradas como *Self-similar Solution* do *Inverse Mean Curvature Flow* no Espaço de Lorentz-Minkowski Tridimensional

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia e aprovada em 26 de julho de 2023.

Documento assinado digitalmente  
 GREGORIO MANOEL DA SILVA NETO  
Data: 27/07/2023 13:36:52-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Orientador)

Banca examinadora:  Documento assinado digitalmente  
HILARIO ALENCAR DA SILVA  
Data: 27/07/2023 18:58:55-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva - UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
 MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA  
Data: 27/07/2023 16:16:00-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>


---

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL (Examinador Interno)

Documento assinado digitalmente  
 GREGORIO PACELLI FEITOSA BESSA  
Data: 27/07/2023 14:14:02-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Gregório Pacelli Feitosa Bessa- UFC (Examinador Externo)

Documento assinado digitalmente  
 MARCIO SILVA SANTOS  
Data: 27/07/2023 15:14:41-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr. Márcio Silva Santos - UFPB (Examinador Externo)

*A Vera Lúcia, minha mãe.*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço sempre a Deus por cada conquista alcançada em minha trajetória e, mediante os obstáculos e alguns fracassos, conseguir me reerguer e retomar a caminhada, através da fé.

Ao professor Dr. Gregório Silva Neto, a quem tenho imensurável estima, pela confiança em mim depositada, por se fazer essencialmente presente sempre que solicitei suas orientações acadêmicas, por ser um excelente amigo me tranquilizando com seus conselhos pacientes e pertinentes.

Ao Isnaldo Isaac Barbosa, por sua lealdade, disponibilidade de ajudar sempre, em qualquer contexto, por nossa longa amizade desde a graduação.

Aos professores Hilário Alencar, Márcio Batista, Márcio Santos e Gregório Pacelli pelas discussões e sugestões para melhoria deste trabalho.

Por último, e não menos importante, agradeço aos meus pais Ivo José da Silva e Vera Lúcia, meus irmãos Ivan José da Silva e Vânia Lúcia da Silva por comporem o porto seguro onde me fortaleço com amor e incentivo para seguir. Em memória de Pedro José da Silva e Hilda Maria da Conceição.

*Ainda que eu ande pelo vale da sombra da morte, não temerei mal algum,  
porque Tu estás comigo; a Tua vara e o teu cajado me consolam.*

—SALMOS 23:4

# RESUMO

Nesta tese, classificamos as superfícies regradas não degeneradas no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski que são *translating solitons* para o *inverse mean curvature flow* (IMCF). Em particular, provamos a existência de *translating solitons* não cilíndricos, que contrastam com o cenário Euclidiano. Neste mesmo ambiente semirriemanniano, também classificamos todas as superfícies regradas que são *homothetic solutions* para o IMCF.

**Palavras-chave:** Espaço de Minkowski; superfícies regradas; curvatura média; Inverse Mean Curvature Flow; *translating solitons*; *homothetic solutions*.



# ABSTRACT

In this thesis, we classify non-degenerate ruled surfaces in the three-dimensional Lorentz-Minkowski space that are translating solitons for inverse mean curvature flow (IMCF). In particular, we prove the existence of translating of non-cylindrical solitons, which contrasts with the Euclidean scenario. In this same semi-Riemannian space, we also classify all ruled surfaces that are homothetic solutions for the IMCF.

**Keywords:** Minkowski space; ruled surfaces; mean curvature; inverse mean curvature flow; translating solitons; homothetic solutions.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1	O Espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	13
1.2	Superfícies Regradas no Espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	23
1.3	Fluxos Geométricos no Espaço de Lorentz-Minkowski . . . . .	26
1.3.1	Equação dos <i>translating solitons</i> . . . . .	28
1.3.2	Equação das soluções homotéticas . . . . .	29
<b>2</b>	<b><i>Translating Solitons</i> para o IMCF de Superfícies Regradas no Espaço Tridimensional de Lorentz-Minkowski</b>	<b>31</b>
2.1	<i>Translating Solitons</i> Não Cilíndricas . . . . .	31
2.2	<i>Translating Solitons</i> Cilíndricas . . . . .	37
<b>3</b>	<b><i>Homothetic Solutions</i> para o IMCF de Superfícies Regradas no Espaço Tridimensional de Lorentz-Minkowski</b>	<b>44</b>
3.1	<i>Homothetic Solutions</i> Não Cilíndricas . . . . .	44
3.2	<i>Homothetic Solutions</i> Cilíndricas . . . . .	53

# INTRODUÇÃO

Seja  $X : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  imersão suave de uma superfície  $M$  tipo espaço, com curvatura média não nula, no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ . O *inverse mean curvature flow* (IMCF) no espaço de Lorentz-Minkowski é uma família a um parâmetro de imersões  $X_t = X(\cdot, t) : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  com  $M_t = X_t(M)$ , satisfazendo

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(p, t) = -\frac{1}{H(p, t)} N(p, t) \\ X(p, 0) = X(p), \quad p \in M, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde  $H(\cdot, t)$  e  $N(\cdot, t)$  é a curvatura média e o vetor normal unitário de  $M_t$ , respectivamente, e  $t \in [0, T)$ .

Na literatura existe uma considerável abordagem sobre o IMCF no espaço euclidiano, e esse fluxo tem se mostrado muito útil para obter desigualdades geométricas, como a desigualdade de Penrose para variedades riemannianas assintoticamente euclidianas, demonstrada por Huisken e Ilmanen em [HI01]. Por sua vez, Gerhard e Urbas provaram em [Ger90] e [Urb90] a existência de uma única solução para o fluxo (0.1) para todo  $t \geq 0$ , no caso em que a superfície inicial seja estrelada. Eles provaram que, quando  $t \rightarrow \infty$ , esse fluxo converge para uma esfera redonda após um reescalonamento.

No tocante a desigualdades geométricas, Guan e Li, veja [GL09], usaram o IMCF para provar desigualdades do tipo Alexandrov-Fenchel. Neste tópico, podemos citar também as obras [dLGa15], [MV15] e [BHW16]. No cenário não euclidiano, Gerhard provou em [Ger83] alguns resultados de existência e regularidade para o fluxo de curvatura média em espaços-tempos cosmológicos. Em [Bar84] e [Bar88] podemos encontrar resultados de existência e regularidade para o fluxo de curvatura média em variedades pseudoeuclidianas assintoticamente planas. A existência e regularidade do IMCF em variedades semirriemannianas, com ênfase em variedades lorentzianas, são discutidas por Gerhard em [Ger08]. O IMCF em espaços de Lorentz-Minkowski aparece no problema clássico de encontrar uma transição suave de um espaço-tempo *big crunch* para um *big bang*, mediante as equações de Einstein e a equação de estado para fluidos perfeitos. Também em [Ger08], Gerhard provou, após redimensionamento, que o IMCF em espaços semirriemannianos poderia ser usado para definir esta transição e a existência do IMCF para cada tempo em espaços-tempos cosmológicos.

As *self-similar solutions*, ou seja, superfícies que se movem por contrações ou expansões homotéticas, translações ou rotações sob o fluxo, desempenham um papel notável na teoria das singularidades dos fluxos. Neste trabalho, vamos nos concentrar nos *translating solitons* e *homothetic solutions self-shrinkers* e *self-expanders* de superfícies regradas no espaço de Lorentz-Minkowski.

Seja  $I$  é um intervalo aberto da reta real  $\mathbb{R}$ ,  $\gamma(s)$  uma curva em  $\mathbb{L}^3$  definida em  $I$  e  $\beta(s)$  um campo de vetores ao longo de  $\gamma(s)$ . Para  $t \in \mathbb{R}$ , definimos uma superfície regradada, no espaço de Lorentz-Minkowski, por meio da parametrização local

$$X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s). \quad (0.2)$$

Superfícies regradas em  $\mathbb{L}^3$  foram objeto de estudo de diversos autores, como [Kob83], [VdW90], [DK99], [DVdWVW95], [KY00], [KY04], [KY07], [KK12], [Liu09] e [Ali20], entre outros.

Uma imersão suave  $X_0 : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  é chamada *translating soliton* (ou *translator*) para o IMCF, com relação ao vetor velocidade, não nulo,  $V \in \mathbb{L}^3$ , se a família a 1-parâmetro de imersões

$$X(\cdot, t) = X_0 + \phi(t)V \quad (0.3)$$

é solução de (0.1), para alguma função suave positiva  $\phi(t)$  tal que  $\phi(0) = 0$ . Geometricamente, isso significa que a superfície  $X_0(M)$  move-se sob o fluxo apenas por translações na direção  $V$ . Como provaremos mais adiante, a Equação (0.3) será equivalente à superfície  $M$  satisfazer

$$\langle N, V \rangle = -\frac{1}{H}, \quad (0.4)$$

que será chamada de equação dos *translating solitons*.

Fazendo uso da equação (0.4), para superfícies regradas não degeneradas, com parametrização dada em (0.2), provamos no Lema 2.1.1 que o campo de vetores  $\beta$ , ao longo da curva base, não pode ser um campo tipo luz, quando esta superfície for não cilíndrica. Mais precisamente, mostramos no Teorema 2.1.1 que, a menos de movimentos rígidos em  $\mathbb{L}^3$ , o campo de vetores é determinado por  $\beta(s) = (1, s, s)$ , e a curva base tem parametrização explícita dada em (2.9). Além disso, nesse caso, se  $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ , é a velocidade do *translating soliton*, então  $v_1 \neq v_2$ . Quando a superfície for cilíndrica, isto é, quando o campo de vetores for constante ao longo da curva base, a menos de movimentos rígidos, escolhemos  $\beta = (1, 0, 0)$  ou  $\beta = (0, 0, 1)$ . Uma vez escolhida a direção tipo luz, mostramos que a curva base tem forma explícita em (2.2.1) e (2.2.2), conforme as coordenadas da velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3)$  satisfazem  $v_2 = \pm v_3$  e  $v_2 \neq \pm v_3$ , respectivamente. Esgotamos a análise dos *translating solitons*, para o IMCF de superfícies regradas cilíndricas, mostrando que a curva base tem parametrização (2.36), para o caso em que o campo de vetores é tipo tempo.

Lembramos que Hieu e Hoang provaram em [HH09] que superfícies regradas que são *translating solitons* para o fluxo de curvatura média em  $\mathbb{R}^3$  são partes de planos ou cilindros sobre curvas *grim reapers*. Nessa direção, Aydin e López classificaram em [AL21] todas as superfícies regradas que são *translating solitons* para o fluxo de curvatura média em  $\mathbb{L}^3$ , obtendo uma classificação muito mais rica que a do espaço euclidiano. Em particular, eles obtiveram superfícies regradas não cilíndricas como *translating solitons*. Por outro lado, Kim e Pyo, veja [KP19], classificaram todas as superfícies regradas que são *translating solitons* para o fluxo de curvatura média inversa em  $\mathbb{R}^3$ , provando que são cilindros sobre cicloides. Podemos também citar o trabalho de Aydin e López, ver [AL23], sobre *translating solitons* em  $\mathbb{R}^3$  para o fluxo por potências da curvatura gaussiana, incluindo superfícies regradas, e o artigo de López, veja [L21], sobre superfícies regradas que são *self-similar solutions* generalizadas do fluxo de curvatura média.

Por sua vez, uma imersão  $X_0 : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , com curvatura média não nula  $H$ , é uma solução auto-similar homotética para o IMCF se é uma homotetia de  $X_0$ , isto é, se existe uma função positiva  $\phi(t)$  com  $\phi(0) = 1$  tal que

$$X(\cdot, t) = \phi(t)X_0 \quad (0.5)$$

Também provaremos que, a Equação (0.5) será equivalente existência de uma constante real, não nula,  $C$  tal que

$$C \langle N, X \rangle = -\frac{1}{H}, \quad (0.6)$$

a qual será chamada equação das homotéticas.

Em contraste com os *translating solitons*, as *homothetic solutions* para o IMCF de superfícies regradas não cilíndricas, com parametrização (0.2), pode admitir um campo de vetores tipo luz, onde provamos no Teorema 3.1.1 que esse campo deve satisfazer a relação  $(\beta''(s), \beta(s), \beta'(s)) = 1$  e que a superfície é *self-expander* com  $C = 1$ , possuindo parametrização  $X(s, t) = (a(s) + t)\beta(s) + b(s)\beta'(s)$ , onde  $a(s)$  e  $b(s) \neq 0$  são funções reais suaves. Todavia, quando supomos que  $\beta$  não admite um campo de vetores tipo luz, de maneira análoga aos *translating solitons*, provamos que esse campo é a reta  $\beta(s) = (1, s, s)$ , a menos de movimentos rígidos, e a curva base admite duas parametrizações conforme cada caso  $C = 8$  ou  $C \neq 8$ . Concluimos a análise das superfícies regradas que são *homothetic solutions* para o IMCF, com o caso cilíndrico. Escolhendo o campo de vetores constante tipo espaço, mostramos no Teorema 3.2.1 que a condição *self-shrinker* ou *self-expander* depende do tipo causal da curva  $\gamma$ . Mais precisamente, provamos que a superfície será *self-expander* quando  $C > 0$  e  $\gamma$  for tipo tempo ou quando  $C < 0$  e  $\gamma$  for tipo espaço, e será *self-shrinker* caso contrário. Finalmente, escolhendo o campo de vetores tipo tempo, temos que a superfície será sempre tipo espaço e, conseqüentemente a superfície é *self-shrinker* se  $C < 0$  e *self-expander* se  $C > 0$ . Para ambas escolhas do campo de vetores  $\beta$ , obtivemos as parametrizações da curva base nos Teorema 3.2.1 e Teorema 3.2.2.

No espaço euclidiano, podemos encontrar estudos recentes sobre os sólitons homotéticos para o IMCF em [Ger90], [HI01], [Urb90] e [GL09]. Embora não tenhamos encontrado na literatura resultados sobre sólitons homotéticos para o fluxo de curvatura média inversa em  $\mathbb{L}^3$ , a compreensão desses sólitons é crucial para a compreensão do fluxo, tanto por serem as soluções mais simples quanto por eles geralmente aparecerem como singularidades do fluxo. No cenário bidimensional, porém, podemos citar os trabalhos recentes de Tenenblat e da Silva [dST23], onde consideram o fluxo de curvatura e a curvatura inversa (das curvas) no cone de luz bidimensional, contido no espaço tridimensional de Minkowski, provando que elipses e hipérbolas são as únicas curvas que evoluem por homotetias, entre outras propriedades específicas para essas soluções.

Este trabalho será organizado da seguinte forma: dividiremos o Capítulo 1 em três seções, sendo a Seção 1.1 uma retomada de conceitos e resultados de álgebra linear e geometria diferencial de curvas e superfícies no  $\mathbb{L}^3$ , na 1.2 desenvolvemos a teoria das superfícies regradas no espaço de Lorentz-Minkowski, e finalizamos, na seção 1.3, com uma breve abordagem à teoria dos fluxos geométricos em  $\mathbb{L}^3$ , com ênfase no fluxo de curvatura média inversa, e deduzimos a equação dos *translating solitons* e *homothetic solutions* para o IMCF de superfícies regradas, cruciais para a obtenção dos resultados principais. No Capítulo 2, classificamos todas as superfícies regradas em  $\mathbb{L}^3$  que são *translating soliton* para o IMCF, dividindo o mesmo em duas seções conforme a superfície regrada for cilíndrica ou não cilíndrica. Finalizamos o trabalho classificando todas as superfícies regradas que são *homothetic solutions* para o IMCF em  $\mathbb{L}^3$ , no Capítulo 3. Parte substancial dos resultados dessa tese estão publicados em [SS23].

# 1. PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e propriedades do espaço de Lorentz-Minkowski, o qual denotaremos por  $\mathbb{L}^3$ , seguido de uma análise das curvas e superfícies neste ambiente, com ênfase nas superfícies regradadas, que podem ser encontradas em [CL21], [L14] e [O'N83]. Finalizamos com uma retomada à teoria dos Fluxos em ambientes semirriemannianos.

## 1.1. O Espaço de Lorentz-Minkowski

O espaço de Lorentz-Minkowski tridimensional, denotado por  $\mathbb{L}^3$ , é o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  com suas operações usuais de soma e multiplicação por escalar, munido do produto interno pseudoeuclidiano

$$\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3, \quad (1.1)$$

onde  $x = (x_1, x_2, x_3)$  e  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Vale observar que o produto dado em (1.1), também conhecido por métrica de Lorentz, é uma forma bilinear simétrica, mas não é positivo definido.

**Observação 1.1.1.** *A depender da referência literária, a forma bilinear em (1.1) é definida com o sinal negativo na primeira parcela, em vez de na terceira, que geometricamente representa apenas uma troca de posição dos eixos, o que não interfere no desenvolvimento da teoria.*

O produto escalar definido em (1.1) dá origem a uma norma, chamada de norma pseudo-Euclidiana, que é a aplicação  $\|\cdot\| : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle|}. \quad (1.2)$$

Embora tenhamos utilizado a terminologia *norma* para a aplicação acima, a mesma não determina de fato uma norma, pois não satisfaz a desigualdade triangular e existem vetores não nulos que calculados nessa norma é igual a zero.

Os vetores em  $\mathbb{L}^3$  são classificados conforme seu caráter causal.

**Definição 1.1.1.** *Dizemos que um vetor  $v \in \mathbb{L}^3$  é de*

- (i) *tipo espaço, se  $\langle v, v \rangle > 0$ , ou  $v = 0$ ;*
- (ii) *tipo tempo, se  $\langle v, v \rangle < 0$ ;*
- (iii) *tipo luz, se  $\langle v, v \rangle = 0$ , mas  $v \neq 0$ .*

Note que, se alterarmos o sinal de qualquer coordenada de um vetor, segue de (1.1) que o caráter causal do novo vetor obtido será preservado. Além disso, se  $v = (x, y, z)$  é um vetor em  $\mathbb{L}^3$ , a fim de identificarmos o seu lugar geométrico, em conformidade ao caráter causal, segue de (1.1) que  $\langle v, v \rangle = c$  se, e somente se,  $x^2 + y^2 - z^2 = c$ , onde  $c$  é um número real. Dessa forma, da geometria analítica, temos três opções:

- um cone, quando  $c = 0$ ;

- um hiperboloide de uma folha, quando  $c > 0$ ;
- um hiperboloide de duas folhas, quando  $c < 0$ .

O conjunto de todos os vetores do tipo luz, denotado por  $\mathcal{C}$ , será chamado cone de luz (centrado na origem). Dessa forma, o subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^3$  de todos os vetores do tipo espaço é o exterior de  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{R}^3$ , e o subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$  de todos os vetores tipo tempo é o interior de  $\mathcal{C}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

Listaremos a seguir conceitos e resultados importantes que dizem respeito à ortogonalidade em  $\mathbb{L}^3$ .

**Definição 1.1.2.** *Dois vetores  $u, v \in \mathbb{L}^3$  são ortogonais se, e somente se,  $\langle u, v \rangle = 0$ .*

**Definição 1.1.3.** *Uma base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{L}^3$  é dita ortogonal se seus vetores são dois a dois ortogonais. Uma base ortogonal  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{L}^3$  é dita ortonormal se  $\|v\| = 1$  para todo  $v \in \mathcal{B}$ .*

**Observação 1.1.2.** *A base canônica  $\{e_1, e_2, e_3\}$  do  $\mathbb{R}^3$  é uma base ortonormal em  $\mathbb{L}^3$ , onde os vetores  $e_1, e_2$  são tipo espaço e  $e_3$  tipo tempo.*

Por sua vez, a definição de subespaço de um espaço vetorial não depende do produto interno. Dessa forma, o conceito de subespaço vetorial do  $\mathbb{L}^3$  é análogo ao já existente na literatura. Tal como fizemos anteriormente, definiremos o caráter causal de um subespaço vetorial de  $\mathbb{L}^3$ .

**Definição 1.1.4.** *Um subespaço vetorial, não nulo,  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{L}^3$  é dito de:*

- tipo espaço se, e somente se, todo vetor não nulo em  $\mathcal{U}$  é tipo espaço;*
- tipo tempo se, e somente se  $\mathcal{U}$  tem um vetor tipo-tempo;*
- tipo luz, caso contrário.*

**Observação 1.1.3.** *O subespaço nulo, assim como o vetor nulo, é tipo espaço.*

**Definição 1.1.5.** *Seja  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{L}^3$  um subconjunto qualquer. O subespaço de  $\mathbb{L}^3$  ortogonal a  $\mathcal{U}$  é*

$$\mathcal{U}^\perp = \{v \in \mathbb{L}^3 \mid \langle u, v \rangle = 0, \text{ para todo } u \in \mathcal{U}\}. \quad (1.3)$$

A seguir, ordenaremos algumas caracterizações e propriedades da causalidade de um subespaço de  $\mathbb{L}^3$ .

**Lema 1.1.1.** *Seja  $\mathcal{U}$  um subespaço do  $\mathbb{L}^3$ . As seguintes propriedades são válidas*

- $\dim \mathcal{U}^\perp = 3 - \dim \mathcal{U}$ ;*
- $(\mathcal{U}^\perp)^\perp = \mathcal{U}$ ;*
- $\mathcal{U}$  é tipo tempo (resp. tipo espaço, tipo luz) se, e somente se  $(\mathcal{U})^\perp$  é tipo espaço (resp. tipo tempo, tipo luz);*

(iv) Se  $v \in \mathbb{L}^3$  é um vetor tipo tempo, ou tipo espaço, então  $\mathbb{L}^3 = \text{span}\{v\} \oplus \text{span}\{v\}^\perp$ .

O Lema 1.1.1 é extremamente necessário para demonstrar algumas propriedades, a respeito de vetores tipo tempo e tipo luz, bem diferentes das conhecidas no espaço euclidiano.

**Lema 1.1.2.** *As seguintes propriedades básicas são válidas para vetores em  $\mathbb{L}^3$ :*

- (i) *Dois vetores de tipo luz em  $\mathbb{L}^3$  são ortogonais se, e somente se, forem linearmente dependentes;*
- (ii) *Em  $\mathbb{L}^3$ , não existem dois vetores de tipo tempo ortogonais;*
- (iii) *Em  $\mathbb{L}^3$ , não existem vetores de tipo tempo ortogonais a vetores de tipo luz.*

**Definição 1.1.6.** *Sejam  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ . O produto vetorial de  $u$  e  $v$ , segundo o pseudoproduto interno definido em (1.1), é o único vetor  $u \times v = w \in \mathbb{L}^3$  tal que*

$$\langle w, x \rangle = \det(x, u, v), \text{ para todo } x \in \mathbb{L}^3. \quad (1.4)$$

A existência e unicidade do vetor  $u \times v$  são garantidos pelo Lema de Riesz aplicado ao funcional linear  $f : \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $f(x) = \det(x, u, v)$ .

Os resultados a seguir explicitam algumas propriedades e uma forma prática para calcular o produto vetorial em  $\mathbb{L}^3$ .

**Lema 1.1.3.** *Seja  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, -e_3\}$  base ortonormal do  $\mathbb{L}^3$ , onde  $e_i$  são vetores da base canônica do  $\mathbb{R}^3$ . Vale que*

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.5)$$

**Lema 1.1.4.** *Se  $u, v, w$  são vetores em  $\mathbb{L}^3$ , então*

- (i)  $u \times v = -v \times u$ ;
- (ii)  $u \times v = 0$  se, e somente se,  $\{u, v\}$  é linearmente dependente;
- (iii)  $(u + \lambda v) \times w = u \times v + \lambda(v \times w)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
- (iv)  $\langle u \times v, w \rangle = \langle u, v \times w \rangle$ ;
- (v)  $\langle u \times v, u \rangle = \langle u \times v, v \rangle = 0$ .

Tal como no espaço euclidiano, também obtemos uma versão da identidade de Lagrange em  $\mathbb{L}^3$ , a saber, se  $u, v \in \mathbb{L}^3$  vale

$$\langle u \times v, u \times v \rangle = -\langle u, u \rangle \langle v, v \rangle + \langle u, v \rangle^2. \quad (1.6)$$

Daremos sequência, ao texto, introduzindo alguns conceitos e resultados básicos (locais) sobre curvas no espaço de Lorentz-Minkowski.



**Definição 1.1.7.** Uma curva suave é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  onde  $I$  é um intervalo aberto. Dizemos também que  $\alpha$  é uma curva parametrizada.

**Definição 1.1.8.** A curva é dita regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ . Se existe  $t_0 \in I$  tal que  $\alpha'(t_0) = 0$ , dizemos que  $t_0$  é um ponto singular de  $\alpha$ .

Se  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma curva regular e  $t \in I$ , então o espaço tangente  $T_t I$  é identificado com  $\mathbb{R}$ , e a aplicação diferencial é dada por

$$(d\alpha)_t(s) = \left. \frac{d}{du} \right|_{u=0} \alpha(t + su) = s \cdot \alpha'(t)$$

onde identificamos  $(d\alpha)_t$  por  $\alpha'(t)$ .

Como estamos considerando  $\mathbb{R}^3$  com a métrica de Lorentz-Minkowski, no intervalo  $I$  também será considerada a métrica de  $\mathbb{L}^3$  induzida pela aplicação  $\alpha$ , isto é, estamos considerando

$$\alpha : (I, \alpha^* \langle, \rangle) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3 = (\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$$

onde  $\alpha^* \langle, \rangle$  denota a métrica *pullback*

$$\alpha^* \langle, \rangle_t(a, b) = \langle (d\alpha)_t(a), (d\alpha)_t(b) \rangle = ab \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$$

para  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Para classificarmos as curvas em  $\mathbb{L}^3$  de acordo com o caráter causal, estendendo as definições de tipo causal de vetores e subespaços da Seção 1.1, precisamos saber o sinal de  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$ , pois o subespaço afim associado a cada ponto de uma curva é a reta tangente à curva naquele ponto.

**Definição 1.1.9.** Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva suave regular. Dizemos que  $\alpha$  é de:

- (i) tipo espaço em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0)$  for um vetor de tipo espaço;
- (ii) tipo tempo em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0)$  for um vetor de tipo tempo;
- (iii) tipo luz em  $t_0 \in I$ , se  $\alpha'(t_0)$  for um vetor de tipo luz.

Se a curva possui o mesmo tipo causal para todo  $t \in I$ , atribuímos esse tipo causal à curva  $\alpha$  em si.

Observamos que, como  $f(t) = \langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle$  é uma função contínua, a propriedade de ser tipo espaço ou tempo é uma propriedade aberta, ou seja, se vale para um ponto, vale para um intervalo em torno desse ponto. O mesmo não ocorre para a propriedade tipo luz. Porém, como nossa classificação será essencialmente local, neste trabalho trataremos apenas de curvas com o mesmo tipo causal em todos os seus pontos.

Se a curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  em  $\mathbb{L}^3$  for tipo tempo, obviamente temos

$$0 \leq (x'(t))^2 + (y'(t))^2 < (z'(t))^2$$

o que implica  $z'(t) \neq 0$  pra todo  $t \in I$ , isto é,  $\alpha$  é regular. Por outro lado, se a curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$  em  $\mathbb{L}^3$  for tipo luz, temos

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (z'(t))^2.$$

Se supusermos  $z'(t) = 0$  para todo  $t \in I$ , isso implicaria  $x'(t) = y'(t) = 0$  para  $t \in I$ , o que iria degenerar  $\alpha$  em um ponto e seria tipo espaço, obtendo uma contradição. Logo,  $\alpha$  é regular. Mais precisamente, temos a proposição a seguir.

**Proposição 1.1.1.** *Toda curva tipo tempo ou luz é regular.*

Assim como no espaço euclidiano, uma curva parametrizada  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{L}^3$  é fechada se  $\alpha$  e todas suas derivadas coincidem em  $a$  e  $b$ . O resultado a seguir mostra que no espaço de Lorentz-Minkowski o caráter causal de uma curva em  $\mathbb{L}^3$  impõe restrições às curvas fechadas.

**Proposição 1.1.2.** *Não existem curvas parametrizadas fechadas de tipo luz ou tempo em  $\mathbb{L}^3$ .*

**Proposição 1.1.3.** *Se  $\alpha$  é uma curva parametrizada contida num plano  $\pi$ , tipo espaço, fechada em  $\mathbb{L}^3$ , então  $\pi$  é tipo espaço.*

O conceito de comprimento de arco de uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  é o mesmo utilizado para curvas no  $\mathbb{R}^3$ , ou seja, é a função  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du.$$

**Definição 1.1.10.** *Dizemos que a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  está parametrizada pelo comprimento de arco se  $\|\alpha'(s)\| = 1$  para todo  $s \in I$ .*

Segue da Definição 1.1.10, juntamente com a definição de tipo causal das curvas, que uma curva parametrizada pelo comprimento de arco é necessariamente tipo espaço ou tempo, e de forma recíproca, curvas regulares tipo tempo ou espaço em  $\mathbb{L}^3$ , conforme teorema a seguir, sempre podem ser parametrizadas pelo comprimento do arco.

**Proposição 1.1.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva regular tipo tempo ou espaço e  $s : I \rightarrow s(I)$  a função comprimento de arco. Então existe uma função  $h$ , inversa de  $s$ , definida em um intervalo aberto  $J = s(I)$  e  $\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{L}^3$  reparametrização de  $\alpha$  tal que  $\|\beta'\| = 1$ .*

Se a curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  for de tipo luz, não faz sentido reparametrizar pelo comprimento de arco. A fim de adequar a Definição 1.1.10 para curvas tal que  $\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle = 0$ , observe que por diferenciação obtemos  $\langle \alpha'(t), \alpha''(t) \rangle = 0$ . Então pelo Lema 1.1.2 temos duas opções quanto ao tipo causal de  $\alpha''$ , a saber

- $\alpha''$  é tipo luz;

Nesse caso, pelo item (i) do Lema 1.1.2, temos que  $\alpha''(t)$  é proporcional a  $\alpha'(t)$  para todo  $t \in I$  e por integração obtemos que  $\alpha$  é uma reta tipo luz.

- $\alpha''$  é tipo espaço;

Nesse caso, podemos parametrizar  $\alpha$  de modo que  $\|\alpha''(t)\| = 1$ , conforme teorema a seguir.

**Proposição 1.1.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva tipo luz, cujo traço de  $\alpha$  não é uma reta. Existe uma reparametrização de  $\alpha$  dada por  $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$  tal que  $\|\beta''(s)\| = 1$ . Nesse caso, dizemos que  $\alpha$  é pseudoparametrizada pelo comprimento de arco.*

Faremos agora uma breve retomada de alguns aspectos geométricos de uma superfície regular em  $\mathbb{L}^3$ , introduzindo inicialmente essa terminologia. Em seguida definiremos, naturalmente, o caráter causal de uma superfície, a partir do caráter causal de seus planos tangentes e apresentaremos resultados que o determinem. Por fim, analisaremos a Primeira Forma Fundamental de uma superfície em  $\mathbb{L}^3$ , que trata da restrição do produto escalar do ambiente aos seus planos tangentes, e a Segunda Forma Fundamental, a fim de calcular a variação da direção normal à superfície e, consequentemente, inserir a noção de curvatura média, bem como sua expressão em coordenadas locais.

**Definição 1.1.11.** *Uma superfície regular em  $\mathbb{L}^3$ , é um subconjunto  $M \subseteq \mathbb{L}^3$  tal que, para todo  $p \in M$  existem abertos  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $p \in V \subseteq M$ , além de uma aplicação  $X : \mathcal{U} \rightarrow V$  tais que:*

- (i)  $X$  é suave;
- (ii)  $X$  é homeomorfismo;
- (iii) para todo  $p \in \mathcal{U}$ , a diferencial  $dX_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

Convém observar, na definição anterior, que a condição para  $dX_p$  ser injetiva é equivalente aos vetores  $X_u(p)$  e  $X_v(p)$  serem linearmente independentes. Além disso, tal como fizemos com as curvas em  $\mathbb{L}^3$ , estaremos considerando a métrica *pullback*  $X^*(\langle, \rangle_q) : T_q \mathcal{U} \times T_q \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , isto é,

$$X^*(\langle, \rangle_q)(u, v) = \langle dX_q(u), dX_q(v) \rangle \quad (1.7)$$

com  $u, v \in T_p M$  e  $q = X^{-1}(p)$ .

**Definição 1.1.12.** *Seja  $M$  uma superfície regular do  $\mathbb{L}^3$  e  $T_p M$  o plano tangente a  $M$  em  $p$ . Dizemos que  $M$  é de*

- (i) tipo espaço, se para todo  $p \in M$ ,  $T_p M$  for um plano de tipo espaço;
- (ii) tipo tempo, se para todo  $p \in M$ ,  $T_p M$  for um plano de tipo tempo;
- (iii) tipo luz, se para todo  $p \in M$ ,  $T_p M$  for um plano de tipo luz.

As propriedades tipo espaço e tipo tempo, de uma superfície, são abertas. Além disso, se a superfície  $M$  em  $\mathbb{L}^3$  não possuir nenhum ponto  $p$  tal que  $T_p M$  é tipo luz, diremos apenas que  $M$  é **não degenerada**. Vamos nos restringir, neste trabalho, às curvas não degeneradas, isto é, tipo espaço ou tempo, e com caráter causal constante.

**Observação 1.1.4.** Neste texto, estaremos alternando, eventualmente, as notações  $X_u$  e  $\frac{\partial X}{\partial u}$  para representarmos derivadas parciais.

Outra forma de caracterizarmos o tipo causal de uma superfície  $M$  com parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , onde  $X = X(s, t)$ , é através da análise do tipo causal de  $X_s(p) \times X_t(p)$ .

**Proposição 1.1.6.** Seja  $M \subseteq \mathbb{L}^3$  uma superfície regular,  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ , uma parametrização tal que  $X(s_0, t_0) = p \in M$ . Então,

- (i)  $T_p M$  é tipo espaço se, e somente se,  $X_s(s_0, t_0) \times X_t(s_0, t_0)$  é tipo tempo;
- (ii)  $T_p M$  é tipo tempo se, e somente se,  $X_s(s_0, t_0) \times X_t(s_0, t_0)$  é tipo espaço;
- (iii)  $T_p M$  é tipo luz se, e somente se,  $X_s(s_0, t_0) \times X_t(s_0, t_0)$  é tipo luz;

**Definição 1.1.13.** Seja  $f : U \subset \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $U$  é um aberto, uma função diferenciável. O gradiente Lorentziano de  $f$  em  $p$  é o vetor  $\nabla f(p) \in \mathbb{L}^3$  tal que  $df_p(v) = \langle \nabla f(p), v \rangle$  para todo  $v \in T_p \mathbb{L}^3$ .

Observe que em  $\mathbb{L}^3$ , se  $v = (a, b, c) \in T_p \mathbb{L}^3$ , então

$$df_p(v) = a \frac{\partial f}{\partial x}(p) + b \frac{\partial f}{\partial y}(p) + c \frac{\partial f}{\partial z}(p)$$

ou, equivalentemente,

$$df_p(v) = a \frac{\partial f}{\partial x}(p) + b \frac{\partial f}{\partial y}(p) - c \left( -\frac{\partial f}{\partial z}(p) \right) = \left\langle \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), -\frac{\partial f}{\partial z}(p) \right), v \right\rangle$$

donde obtemos a expressão para o gradiente em  $\mathbb{L}^3$ :

$$\nabla f(p) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), -\frac{\partial f}{\partial z}(p) \right).$$

O resultado a seguir permite-nos determinar o tipo causal de superfícies que são pré-imagens do valor regular de alguma função diferenciável.

**Proposição 1.1.7.** Sejam  $U \subseteq \mathbb{L}^3$  um aberto,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $a \in \mathbb{R}$  um valor regular para  $f$ . Se  $M = f^{-1}(a)$ , então:

- (i)  $M$  é tipo espaço se, e somente se,  $\nabla f(p)$  é sempre tipo tempo;
- (ii)  $M$  é tipo tempo se, e somente se,  $\nabla f(p)$  é sempre tipo espaço;
- (iii)  $M$  é tipo luz se, e somente se,  $\nabla f(p)$  é sempre tipo luz.

Mais uma alternativa para determinarmos o tipo causal de superfície regular dá-se por meio da análise da métrica *pullback* (1.7) por uma parametrização  $X$ . De fato, defina  $X(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$ ,  $q = X^{-1}(p)$  e  $v = (a, b)$ . Temos que

$$dX_q(v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s}(q) & \frac{\partial x}{\partial t}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial s}(q) & \frac{\partial y}{\partial t}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial s}(q) & \frac{\partial z}{\partial t}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

o que implica

$$\langle dX_q(v), dX_q(v) \rangle = a^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial s}(q) \right\rangle + 2ab \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle + b^2 \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle,$$

que é equivalente a

$$\langle dX_q(v), dX_q(v) \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial s}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz central obtida no produto matricial acima, a qual denotaremos por  $g_{ij}$ , satisfaz

$$\langle X_s \times X_t, X_s \times X_t \rangle = - \begin{vmatrix} \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial s}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial X}{\partial s}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial X}{\partial t}(q), \frac{\partial X}{\partial t}(q) \right\rangle \end{vmatrix} = -\det(g_{ij}) \quad (1.8)$$

A equação (1.8) é a motivação para definirmos a primeira forma fundamental de uma superfície, bem como seus coeficientes, no espaço de Lorentz-Minkowski.

**Definição 1.1.14.** Se  $M$  é uma superfície regular em  $\mathbb{L}^3$  e  $p \in M$ , a primeira forma fundamental de Minkowski de  $M$  em  $p$  é a aplicação bilinear  $I_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$I_p(u, v) = \langle u, v \rangle. \quad (1.9)$$

**Definição 1.1.15.** Seja  $M$  uma superfície em  $\mathbb{L}^3$ . Se  $M$  está parametrizada em coordenadas locais por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , onde  $X = X(s, t)$ , os coeficientes da primeira forma fundamental de  $M$  são definidos por

$$E = \langle X_s, X_s \rangle, \quad F = \langle X_s, X_t \rangle \quad e \quad G = \langle X_t, X_t \rangle.$$

De posse da Proposição 1.1.6 e da igualdade (1.8), é possível determinarmos, de forma mais prática, o tipo causal de uma superfície, conhecendo o sinal do determinante de  $g_{ij}$ , como mostra o resultado abaixo.

**Proposição 1.1.8.** Se  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma superfície parametrizada regular, então

- (i)  $X$  é tipo espaço se, e somente se,  $\det g_{ij} > 0$  (isto é,  $EG - F^2 > 0$ );
- (ii)  $X$  é tipo tempo se, e somente se,  $\det g_{ij} < 0$  (isto é,  $EG - F^2 < 0$ );
- (iii)  $X$  é tipo luz se, e somente se,  $\det g_{ij} = 0$  (isto é,  $EG - F^2 = 0$ ).

Um fato óbvio decorrente da Proposição 1.1.8, que será bastante utilizado na discussão dos resultados principais, é que uma superfície é dita não degenerada se  $EG - F^2 \neq 0$  em todos os seus pontos.

Uma superfície  $M$  parametrizada em coordenadas locais por  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , onde  $X = X(s, t)$  e  $U$  é um aberto, é orientável se a sua estrutura admite um atlas tal que, para qualquer par de cartas coordenadas, a mudança de parâmetros tem jacobiano positivo. Em  $X(U) \subset M$ , são definidos dois campos de vetores normais unitários

$$N = \pm \frac{X_s \times X_t}{|X_s \times X_t|}. \quad (1.10)$$

Se  $M$  é orientável, então podemos definir, globalmente, um campo normal unitário  $N : M \rightarrow \mathbb{L}^3$ , chamado aplicação normal de Gauss de  $M$ , cuja expressão em coordenadas locais é dada por uma das expressões em (1.10). A escolha de um desses campos vetoriais normais unitários é chamada de escolha de orientação e, após essa escolha, diz-se que a superfície está orientada. Esse campo vetorial normal satisfaz

$$\langle N, N \rangle = \varepsilon,$$

onde  $\varepsilon = -1$  se  $M$  for tipo espaço e  $\varepsilon = 1$  se  $M$  for tipo tempo.

No espaço  $\mathbb{L}^3$  existe uma única conexão de Levi-Civita, isto é, se  $\chi(\mathbb{L}^3)$  denota o conjunto dos campos de vetores de  $\mathbb{L}^3$ , então existe uma única aplicação

$$\bar{\nabla} : \chi(\mathbb{L}^3) \times \chi(\mathbb{L}^3) \longrightarrow \chi(\mathbb{L}^3) \quad (1.11)$$

tal que

- (i) Para todos  $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{L}^3)$  e  $f, g \in C^\infty(\mathbb{L}^3, \mathbb{R})$  tem-se

$$\bar{\nabla}_{fX+gY}Z = f\bar{\nabla}_XZ + g\bar{\nabla}_YZ$$

- (ii) Para todos  $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{L}^3)$  e  $a, b \in \mathbb{R}$  tem-se

$$\bar{\nabla}_X(aY + bZ) = a\bar{\nabla}_XY + b\bar{\nabla}_XZ$$

- (iii) Para todos  $X, Y \in \chi(\mathbb{L}^3)$  e  $f \in C^\infty(\mathbb{L}^3, \mathbb{R})$  tem-se

$$\bar{\nabla}_XfY = X(f)Y + f\bar{\nabla}_XY$$

onde  $X(f) = df(X)$ .

(iv) Para todos  $X, Y \in \chi(\mathbb{L}^3)$  tem-se

$$\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X = [X, Y]$$

(v) Para todos  $X, Y, Z \in \chi(\mathbb{L}^3)$  tem-se

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \bar{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \bar{\nabla}_X Z \rangle$$

**Definição 1.1.16.** *Seja  $M$  uma superfície regular. Fixados  $N$  uma aplicação normal de Gauss e  $p \in M$  um ponto, a aplicação de Weingarten de  $M$  em  $p$  é a aplicação diferencial  $-dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$ .*

**Proposição 1.1.9.** *Seja  $M$  uma superfície regular em  $\mathbb{L}^3$ . A aplicação de Weingarten é autoadjunta em qualquer ponto de  $M$ .*

Se  $M$  for uma superfície tipo espaço, então a Primeira Forma Fundamental é positiva definida e, assim, decorre do caso Real do Teorema Espectral que o operador de Weingarten é sempre diagonalizável. Não temos a mesma garantia se  $M$  for uma superfície tipo tempo.

**Definição 1.1.17.** *Seja  $M \subseteq \mathbb{L}^3$  uma superfície regular e  $N$  uma aplicação normal de Gauss para  $M$ . A segunda forma fundamental de  $M$  em  $\mathbb{L}^3$  é a aplicação bilinear simétrica  $II_p : T_p M \times T_p M \rightarrow (T_p M)^\perp$  definida por*

$$\langle II_p(v, w), N(p) \rangle = \langle -dN_p(v), w \rangle, \quad (1.12)$$

onde  $dN_p : T_p M \rightarrow T_p M$  é a diferencial de  $N$  em  $p$ .

**Definição 1.1.18.** *Seja  $M \subseteq \mathbb{L}^3$  uma superfície regular,  $N$  uma aplicação normal de Gauss e  $X : U \rightarrow M$  uma parametrização de  $M$ . Os coeficientes da segunda forma fundamental de  $M$  com relação a  $X$  são definidos por*

$$e(s, t) = \langle X_{ss}, N(X(s, t)) \rangle, f(s, t) = \langle X_{st}, N(X(s, t)) \rangle \text{ e } g(s, t) = \langle X_{tt}, N(X(s, t)) \rangle.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental podem ser expressos em coordenadas locais da seguinte forma:

$$e = \frac{(X_s, X_t, X_{ss})}{|X_s \times X_t|}, f = \frac{(X_s, X_t, X_{st})}{|X_s \times X_t|} \text{ e } g = \frac{(X_s, X_t, X_{tt})}{|X_s \times X_t|}. \quad (1.13)$$

**Definição 1.1.19.** *Sejam  $M \subset \mathbb{L}^3$  uma superfície regular não degenerada e  $N$  sua aplicação normal de Gauss. O vetor curvatura média de  $M$  em  $p$  é definido por*

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \text{tr}_p(II).$$

A curvatura média de  $M$  em  $p$  é o escalar  $H(p)$  determinado pela igualdade

$$\mathbf{H}(p) = H(p)N(p).$$

Note que isso implica

$$H = \varepsilon \langle \mathbf{H}, N \rangle.$$

**Proposição 1.1.10.** *Seja  $M \subseteq \mathbb{L}^3$  uma superfície regular não degenerada,  $N$  uma aplicação normal de Gauss e  $X : U \rightarrow M$  uma parametrização de  $M$  compatível com  $N$ . Então, vale*

$$H = \frac{\varepsilon Eg - 2Ff + Ge}{2 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Segue, da Proposição 1.1.10 e das igualdades em (1.13), que a curvatura média em coordenadas locais pode ser escrita da forma

$$\begin{aligned} H &= \frac{\varepsilon eG - 2fF + Eg}{2 \sqrt{EG - F^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st}) + E(X_s, X_t, X_{tt})}{|EG - F^2|^{3/2}}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde usamos  $(u, v, w) = \langle u \times v, w \rangle$  e  $|X_s \times X_t|^2 = -\varepsilon(EG - F^2)$ .

Finalizamos esta seção determinando expressões, em coordenadas locais, para a curvatura gaussiana em  $\mathbb{L}^3$ .

**Definição 1.1.20.** *Se  $M \subset \mathbb{L}^3$  é uma superfície regular não degenerada e  $N$  sua aplicação normal de Gauss, a curvatura gaussiana de  $M$  em  $p$  é dada por*

$$K(p) = \varepsilon \det(-dN_p(v)). \quad (1.15)$$

**Proposição 1.1.11.** *Seja  $M \subseteq \mathbb{L}^3$  uma superfície regular não degenerada,  $N$  uma aplicação normal de Gauss e  $X : U \rightarrow M$  uma parametrização de  $M$  compatível com  $N$ . Então, vale*

$$K(p) = \varepsilon \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.16)$$

Por fim, decorre da Proposição 1.1.11 e das equações (1.13) que, a curvatura Gaussiana em coordenadas locais pode ser escrita como

$$K(p) = \frac{(X_s, X_t, X_{ss})(X_s, X_t, X_{tt}) - (X_s, X_t, X_{st})^2}{(EG - F^2)^2}.$$

## 1.2. Superfícies Regradas no Espaço de Lorentz-Minkowski

Uma superfície regrada  $M \subset \mathbb{R}^3$  é a união de uma família de linhas retas a um parâmetro. Por se tratar de um conceito afim, e não métrico, a definição de superfícies regradas em  $\mathbb{L}^3$  permanece a mesma do espaço euclidiano. Dessa forma, uma superfície regrada pode ser parametrizada localmente por

$$X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s),$$

onde  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma curva suave em  $\mathbb{L}^3$  e  $\beta(s)$  é um campo de vetores ao longo da curva  $\gamma$ . A curva  $\gamma(s)$  é chamada uma *diretriz* da superfície  $X$  e  $\beta(s)$  são as *geratrizes*. Se  $\gamma$  reduz-se a um ponto, a superfície é chamada de cônica. Por outro lado, se as retas são todas paralelas a uma direção fixa, ou seja,  $\beta(s)$  é constante, a superfície é chamada de cilíndrica.

O resultado a seguir estabelece uma condição suficiente para uma superfície regrada ser cônica.



**Proposição 1.2.1.** *Seja  $M$  uma superfície regrada em  $\mathbb{L}^3$ , com parametrização  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ . Se  $\langle \beta, \beta', \beta'' \rangle = 0$  e  $\|\beta\| = \|\beta'\| = 1$ , então  $M$  é cônica.*

Podemos escolher algumas parametrizações especiais para uma superfície regrada, conforme o tipo causal da curva base e do campo de vetores de uma superfície regrada.

Quando a superfície regrada  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  não for cilíndrica e a curva  $\beta(s)$  não for uma curva tipo luz, isto é,  $\langle \beta', \beta' \rangle \neq 0$ , podemos encontrar uma única parametrização especial tal que  $\langle \gamma', \beta' \rangle = 0$ , como afirma o seguinte teorema. Nesse caso, a curva base é chamada linha de estrição.

**Proposição 1.2.2.** *Seja  $M$  uma superfície regrada em  $\mathbb{L}^3$ , com parametrização  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  tal que  $\langle \beta, \beta \rangle$  é constante e  $\langle \beta', \beta' \rangle \neq 0$ . Existe uma única curva base  $\bar{\gamma}$  tal que  $\langle \bar{\gamma}', \beta' \rangle = 0$ . Além disso,  $\bar{\gamma}$  não depende da escolha da curva base  $\gamma$ .*

Seja  $M$  uma superfície com parâmetros  $X(s,t)$ . Quando a aplicação diferencial  $dX_p : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  não é injetiva, dizemos que o ponto  $p \in M$  é um ponto singular, isto é,  $X_s \times X_t = 0$ . A linha de estrição de uma superfície regrada no espaço de Lorentz-Minkowski, assim como no caso euclidiano, também está associada à localização dos pontos de singularidades das superfícies tipo tempo.

**Proposição 1.2.3.** *Seja  $M$  uma superfície regrada em  $\mathbb{L}^3$ , tipo tempo, com parametrização  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ , tal que  $\langle \beta, \beta \rangle = -1$  e  $\langle \beta', \beta' \rangle \neq 0$ . Os pontos de singularidades de  $M$  estão sobre a linha de estrição.*

Outra parametrização especial é a ortogonal. Dizemos que a superfície regrada  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  tem **parametrização ortogonal** se  $\langle \gamma'(s), \beta(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ . Além disso, a parametrização da superfície regrada  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  tal que  $\|\beta\| = \|\beta'\| = 1$  e  $\langle \gamma', \beta' \rangle = 0$  é chamada de forma padrão e, nesse caso,  $\gamma$  é automaticamente a linha de estrição da superfície.

**Observação 1.2.1.** *Assim como no caso euclidiano, quando  $\beta$  e  $\beta'$  não são um campo de vetores nulos, sempre podemos introduzir parâmetros de forma padrão.*

Resumiremos agora algumas situações especiais para a escolha da parametrização  $X(s,t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  de uma superfície regrada em  $\mathbb{L}^3$ :

- **Caso 1:**  $\langle \beta, \beta \rangle \neq 0$  e  $\langle \beta', \beta' \rangle \neq 0$ ;

Neste caso, a menos da mudança do parâmetro  $t$ , podemos escolher  $\beta$  de modo que  $\|\beta\| = 1$  e, como  $\langle \beta', \beta' \rangle \neq 0$ , segue do Teorema 1.1.4 que também podemos escolher  $\beta$  parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, tal que  $\|\beta'\| = 1$ . Dessa forma, estamos nas hipóteses do Teorema 1.2.2, logo podemos também escolher, para esse caso, a curva base como a linha de estrição, isto é, com  $\langle \gamma', \beta' \rangle = 0$ .

- **Caso 2:**  $\langle \beta, \beta \rangle \neq 0$  e  $\langle \beta', \beta' \rangle = 0$ ;

Tal como no caso anterior, podemos escolher  $\beta$  de modo que  $\|\beta\| = 1$ , obtendo  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ . Como  $\beta'$  é um campo de vetores tipo luz, então  $\beta$  é tipo espaço, isto é,  $\langle \beta, \beta \rangle = 1$ . Logo,  $\beta'$  é uma direção tipo luz no hiperboloide

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{L}^3 \mid \langle x, x \rangle = 1\}$$

e isso implica que  $\beta$  seja uma reta. Neste caso, também podemos considerar a parametrização ortogonal, ou seja, com  $\langle \gamma', \beta \rangle = 0$ . Pela Identidade de Lagrange (1.6) temos

$$\langle \beta \times \beta', \beta \times \beta' \rangle = -\langle \beta, \beta \rangle \langle \beta', \beta' \rangle + \langle \beta, \beta' \rangle^2 = 0$$

assim, pelo Lema 1.1.2 existe uma função  $k(s)$  tal que

$$\beta(s) \times \beta'(s) = k(s)\beta'(s).$$

Derivando a expressão acima e usando o fato de  $\beta$  ser uma reta, podemos concluir que  $k(s)$  é constante. Logo, sem perder a generalidade, neste caso, sempre podemos escolher  $k = 1$  e a parametrização de forma que

$$\beta(s) \times \beta'(s) = \beta'(s).$$

- **Caso 3:**  $\langle \beta, \beta \rangle = 0$  e  $\langle \beta', \beta' \rangle \neq 0$ ;

Se  $\beta$  é um campo de vetores tipo luz, isto é,  $\langle \beta, \beta \rangle = 0$  então  $\langle \beta', \beta \rangle = 0$ . Dessa forma, podemos escolher uma parametrização tal que  $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$ . Segue da identidade de Lagrange (1.6), que

$$\langle \beta' \times \beta, \beta' \times \beta \rangle = -\langle \beta', \beta' \rangle \langle \beta, \beta \rangle + \langle \beta', \beta \rangle^2 = 0,$$

isto é,  $\beta' \times \beta$  é um campo de vetores tipo luz. Novamente, usando o Lema 1.1.2, existe uma função  $k(s)$  tal que

$$\beta'(s) \times \beta(s) = k(s)\beta(s). \quad (1.17)$$

Derivando (1.17), obtemos

$$\beta'' \times \beta = k'\beta + k\beta',$$

o que implica

$$\langle \beta'' \times \beta, \beta'' \times \beta \rangle = k^2.$$

Por outro lado, usando a identidade de Lagrange (1.6),

$$\langle \beta'' \times \beta, \beta'' \times \beta \rangle = -\langle \beta'', \beta'' \rangle \langle \beta, \beta \rangle + \langle \beta'', \beta \rangle^2 = 1,$$

isto é,

$$k(s)^2 = 1.$$

Tomando  $\tilde{\beta}(s) = -\beta(s)$  se necessário (observe que, neste caso, obtemos a mesma superfície regrada), assumiremos que  $k(s) = 1$ , isto é,

$$\beta'(s) \times \beta(s) = \beta(s). \quad (1.18)$$

### 1.3. Fluxos Geométricos no Espaço de Lorentz-Minkowski

Os fluxos geométricos, seja no ambiente euclidiano ou lorentziano, tratam essencialmente das equações de evolução de quantidades geométricas extrínsecas ou intrínsecas a uma variedade diferenciável. Esses fluxos foram desbravados pioneiramente no âmbito da análise geométrica e tomaram uma proporção, em sua abordagem, nas mais diversas áreas das ciências exatas, tais como Geometria Diferencial, topologia e física, cada qual com seu propósito específico. O fluxo lorentziano tem grande aplicabilidade na Teoria da Relatividade Geral e também é utilizado para analisar as singularidades do espaço ambiente, como podemos ver em [GW14].

No âmbito da geometria diferencial, de interesse desta tese, os fluxos intrínsecos são regidos por equações diferenciais parciais que alteram uma quantidade geométrica intrínseca à variedade como, por exemplo, o Fluxo de Ricci, definido por Hamilton em [Ham82], dado por

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_t$$

onde  $Ric_t$  é a curvatura de Ricci da métrica  $g(t)$ . Podemos encontrar mais sobre o fluxo de Ricci no ambiente lorentziano em [Ond10].

Nesta tese, trataremos de fluxos extrínsecos, isto é, fluxos que fazem uso de quantidades geométricas extrínsecas, tais como as curvaturas média e Gaussiana. Mais precisamente, trataremos de deformações de superfícies, no espaço Lorentziano  $\mathbb{L}^3$ , na direção normal, com intensidade inversa a curvatura média. Considerando  $X : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  imersão suave de uma superfície  $M$  no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$ , num contexto geral, os fluxos geométricos consistem na existência de uma família a um parâmetro de imersões  $X_t = X(.,t) : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  com  $M_t = X_t(M)$ , que satisfazem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(p,t) = -f(p,t)N(p,t) \\ X(p,0) = X(p), \quad p \in M, \end{cases} \quad (1.19)$$

onde  $f$  é uma função que depende da segunda forma fundamental e da métrica de  $M_t$ ,  $N(.,t)$  é o vetor normal unitário de  $M_t$  e  $t \in [0, T)$ .

A equação (1.19) modela a evolução de cada ponto  $p$ , da superfície  $M$  orientável, na direção do normal unitário  $N(p)$  com intensidade  $f$ . Na literatura, encontramos uma variedade de trabalhos de acordo com as escolhas de  $f$ , tais como, curvatura gaussiana  $f = K$ , seu inverso  $f = \frac{1}{K}$  bem como suas potências  $f = K^\alpha$ , conforme os trabalhos obtidos em [Cho85], [GM21], [Ju14], [AL23], dentre outros. De maneira análoga, também foram estudados os fluxos lorentzianos para as escolhas de  $f$  como curvatura média  $f = H$ , seu inverso  $f = \frac{1}{H}$  e suas potências  $f = H^\alpha$ , como podemos ver em [Eck93], [Eck97], [Eck03], [EH91], [dST23] e [Ger08].

Em [Ger08] Gehardt provou que o fluxo de curvatura, definido em (1.19), converge para uma solução estacionária, se certas suposições forem satisfeitas. A prova da existência de soluções, para (1.19), consiste de quatro passos:

- (i) Existência em um intervalo de tempo máximo  $[0, T)$ .

- (ii) Prova que o fluxo permanece em um subconjunto compacto.
- (iii) Construção de estimativas uniformes, a princípio, em um espaço de funções apropriado, que juntamente com (ii), implica  $T = \infty$ .
- (iv) Conclusão de que o fluxo, ou pelo menos uma subsequência das superfícies do fluxo, converge se  $t \rightarrow \infty$ .

A existência de solução, para (1.19), em um intervalo de tempo máximo é sempre garantida, se os dados forem suficientemente regulares, pois trataríamos de um problema de natureza parabólica.

**Teorema 1.3.1** ([Ger08], p.141). *Seja  $4 \leq m \in \mathbb{N}$  e  $0 < \alpha < 1$ , e assuma que o ambiente semirriemanniano é de classe  $C^{m+2,\alpha}$ . Considere a função  $f$  de classe  $C^{m,\alpha}$  e seja  $M_0 \in C^{m+2,\alpha}$  uma superfície admissível compacta, tipo espaço, conexa e orientável. Então o fluxo de curvatura (1.19) com condição inicial  $M_0$  existe em um intervalo de tempo máximo  $[0, T)$ , com  $0 < T \leq \infty$ , onde no caso em que as superfícies do fluxo não puderem ser expressas como gráficos, elas devem ser suaves, ou seja, as condições devem ser válidas para  $4 \leq m \in \mathbb{N}$  arbitrários, neste caso.*

**Observação 1.3.1.** *No nosso contexto, o espaço semirriemanniano em questão será sempre o  $\mathbb{L}^3$ .*

**Observação 1.3.2.** *Considere  $F \in C^0(\bar{\Gamma}) \cap C^{2,\alpha}(\Gamma)$  uma função curvatura estritamente monótona, onde  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  é o cone convexo, aberto e simétrico contendo o cone positivo, tal que*

$$F|_{\partial\Gamma} = 0 \text{ e } F|_{\Gamma} > 0.$$

*Uma superfície tipo espaço, orientável,  $M \subset \mathbb{L}^3$ , é dita admissível, se suas curvaturas principais em relação a uma direção normal escolhida estão em  $\Gamma$ .*

Passamos a considerar, a partir de agora, o caso que  $f = \frac{1}{H}$  em (1.19), isto é, o *inverse mean curvature flow* (IMCF) no espaço de Lorentz-Minkowski, que trata de uma família a um parâmetro de imersões  $X_t = X(.,t) : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  com  $M_t = X_t(M)$ , satisfazendo o problema de condição inicial dado em (0.1).

Em [Ger08] Gerhard provou que, mediante uma forte condição de decaimento de volume para o espaço-tempo ambiente  $M$ , o IMCF de hipersuperfícies de  $M$  existe para todo tempo. Tal condição, introduzida em [Ger04], é uma forma de excluir o caso em que o fluxo atinja singularidade em um tempo finito.

Para fins específicos, tais como estudar as singularidades do fluxo, sempre é possível escrever analiticamente algumas soluções particulares, a saber, as *self-similar solutions*, isto é, hipersuperfícies que evoluem por composições de isometrias e homotetias. Neste trabalho estudaremos duas dessas soluções particulares: *translating solitons*, que são superfícies que transladam através do fluxo com respeito a uma velocidade não nula fixada e as homotéticas por contrações (*self-shrinkers*) e dilatações (*self-expanders*).

Finalizaremos esta seção deduzindo as equações dos *solitons translating* e homotéticos para o fluxo de curvatura média inversa de superfícies regradas, não degeneradas, essenciais para obtenção dos resultados principais.

### 1.3.1. Equação dos *translating solitons*

Considere  $X_0 : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  imersão suave de uma superfície  $M$ , com curvatura média não nula, no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$  e  $X(\cdot, t)$  uma família a um parâmetro de imersões satisfazendo o IMCF

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X(p, t) = -\frac{1}{H(p, t)} N(p, t) \\ X(p, 0) = X(p), \quad p \in M. \end{cases} \quad (1.20)$$

A solução  $X(\cdot, t)$  de (1.20) é dita *translating soliton* com respeito à velocidade, não nula,  $V \in \mathbb{L}^3$  se existe uma função suave, positiva  $\phi(t)$ , com  $\phi(0) = 0$ , tal que

$$X(\cdot, t) = X_0 + \phi(t)V, \quad (1.21)$$

isto é, a imersão inicial evolui exclusivamente por translações sob o fluxo, na direção de  $V$ .

Substituindo a equação (1.21) em (1.20) temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (X_0 + \phi(t)V) = -\frac{1}{H(p, t)} N(p, t). \quad (1.22)$$

Como as translações não alteram a curvatura média, nem o campo vetorial normal, segue-se que

$$\phi'(t)V = -\frac{1}{H(p, 0)} N(p, 0). \quad (1.23)$$

Escreveremos, para simplificar,  $H(p, 0) = H(p)$  e  $N(p, 0) = N(p)$ . Tomando o produto interno de (1.23) com  $N(p)$  e observando que, para superfícies não degeneradas em  $\mathbb{L}^3$ , vale  $\langle N(p), N(p) \rangle = \varepsilon \in \{-1, 1\}$ , obtemos

$$\phi'(t) \langle N(p), V \rangle = -\frac{\varepsilon}{H(p)}. \quad (1.24)$$

Uma vez que apenas  $\phi'(t)$  depende de  $t$  em (1.24), temos que  $\phi'(t)$  é constante. Assim, alterando o tamanho e a direção de  $V$  se necessário (já que  $V$  é constante e arbitrário), podemos tomar  $\phi(t) = t$  em (1.24) e podemos ignorar  $\varepsilon$ , obtendo a

$$\langle N(p), V \rangle = -\frac{1}{H(p)}. \quad (1.25)$$

Agora, considere uma superfície regrada em  $\mathbb{L}^3$  parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ . Com essa parametrização, temos as derivadas parciais

$$X_t = \beta, \quad X_s = \gamma' + t\beta', \quad X_{ss} = \gamma'' + t\beta'', \quad X_{st} = \beta' \text{ e } X_{tt} = 0.$$

Como  $X_{tt} = 0$ , podemos reescrever a equação da curvatura média em (1.14) da seguinte forma

$$H = -\frac{1}{2} \frac{G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st})}{|EG - F^2|^{3/2}}. \quad (1.26)$$

Considerando o campo normal  $N = \frac{X_s \times X_t}{\sqrt{|EG - F^2|}}$  e substituindo (1.26) em (1.25), obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{|EG - F^2|}}(X_s, X_t, V) \left[ \frac{G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st})}{(EG - F^2)^{3/2}} \right] = 2$$

ou, equivalentemente,

$$(X_s, X_t, V)[G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st})] = 2(EG - F^2)^2. \quad (1.27)$$

A equação (1.27) será a equação dos *translating solitons* que estudaremos nesta tese.

### 1.3.2. Equação das soluções homotéticas

Seja  $X_0 : M \rightarrow \mathbb{L}^3$  imersão suave de uma superfície  $M$ , com curvatura média não nula, no espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^3$  e  $X(\cdot, t)$  uma família a um parâmetro de imersões satisfazendo o *inverse mean curvature flow* definido em (1.20). Dizemos que  $X(\cdot, t)$  é solução homotética para o IMCF se é uma homotetia de  $X_0$ , isto é, se existe uma função positiva  $\phi(t)$  com  $\phi(0) = 1$  tal que

$$X(\cdot, t) = \phi(t)X_0. \quad (1.28)$$

Substituindo a expressão homotética (1.28) em (1.20) temos que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi(t)X_0) = -\frac{1}{H(p, t)}N(p, t). \quad (1.29)$$

Como as homotetias não alteram campo vetorial normal, mas modificam a curvatura média de forma inversamente proporcional ao fator homotético, obtemos

$$\phi'(t)X_0 = -\frac{\phi(t)}{H(p, 0)}N(p, 0). \quad (1.30)$$

Tomando o produto interno de (1.30) com o campo normal unitário  $N$  e lembrando que  $\varepsilon = \langle N, N \rangle \in \{-1, 1\}$ , temos

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} \langle N(p), X_0(p) \rangle = -\frac{\varepsilon}{H(p)} \quad (1.31)$$

onde  $\varepsilon = \langle N, N \rangle \in \{-1, 1\}$ . Portanto,  $\varepsilon \frac{\phi'(t)}{\phi(t)}$  é constante, isto é, existe  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\phi'(t)}{\phi(t)} = \varepsilon C. \quad (1.32)$$

Resolvendo a equação diferencial (1.32), obtemos

$$\ln \phi(t) - \ln \phi(0) = \varepsilon Ct. \quad (1.33)$$

Usando o fato que  $\phi(0) = 1$ , segue-se que

$$\ln \phi(t) = \varepsilon C t \quad (1.34)$$

ou, equivalentemente,

$$\phi(t) = e^{\varepsilon C t}. \quad (1.35)$$

Isso implica que, para  $\varepsilon C < 0$ ,  $X_0(M^2)$  contrai homoteticamente sob o IMCF e, para  $\varepsilon C > 0$ ,  $X_0(M^2)$  expande homoteticamente sob o IMCF. No primeiro caso, chamamos  $M^2$  de *self-shrinker* e, no segundo caso, chamamos  $M^2$  de *self-expander*.

Além disso, segue da equação (1.31), que uma superfície é uma solução autossimilar para o IMCF se existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$C \langle N, X \rangle = -\frac{1}{H}. \quad (1.36)$$

Agora, considerando novamente uma superfície regrada em  $\mathbb{L}^3$  parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ . Já vimos que, com essa parametrização podemos escrever a curvatura da seguinte forma

$$H = -\frac{1}{2} \frac{G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st})}{|EG - F^2|^{3/2}}. \quad (1.37)$$

Substituindo (1.37) em (1.36), obtemos

$$\frac{C}{\sqrt{|EG - F^2|}}(X_s, X_t, X) \left[ \frac{G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st})}{|EG - F^2|^{3/2}} \right] = 2$$

ou, equivalentemente,

$$C(X_s, X_t, X)[G(X_s, X_t, X_{ss}) - 2F(X_s, X_t, X_{st})] = 2(EG - F^2)^2. \quad (1.38)$$

A equação (1.38) será denominada a equação dos solitons homotéticos para o IMCF de superfícies regradas.

## 2. *Translating Solitons* PARA O IMCF DE SUPERFÍCIES REGRADAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL DE LORENTZ-MINKOWSKI

Neste capítulo, classificaremos todas as superfícies regradas, não degeneradas, que são *translating solitons* para o *inverse mean curvature flow* em  $\mathbb{L}^3$ . Faremos esse estudo em duas seções, conforme as superfícies regradas forem cilíndricas ou não.

### 2.1. *Translating Solitons* Não Cilíndricas

Começaremos analisando o caso em que a superfície regradada é não cilíndrica, isto é, com parametrização  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  onde  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma curva regular e  $\beta'(s) \neq 0$  no intervalo  $I$ .

**Lema 2.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície regradada não cilíndrica, não degenerada, em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ . Se  $M$  é *translating soliton* para o *inverse mean curvature flow*, com respeito ao vetor velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ , então  $\beta(s)$  não é um campo de vetores do tipo luz.*

*Demonstração.* Os coeficientes da primeira forma fundamental de  $M$  são dados por

$$\begin{cases} E &= \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2t \langle \gamma', \beta' \rangle + \langle \beta', \beta' \rangle t^2, \\ F &= \langle \gamma' + t\beta', \beta \rangle, \\ G &= \langle \beta, \beta \rangle. \end{cases}$$

Mostraremos que  $\beta(s)$  não pode ser um campo de vetores tipo luz. De fato, caso contrário teríamos  $G = \langle \beta, \beta \rangle = 0$  e assim  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ , implicando que  $F = \langle \gamma', \beta \rangle \neq 0$ , uma vez que a superfície é não degenerada. Então, segue-se da equação (1.27) que

$$(X_s, X_t, V)[-2F(X_s, X_t, X_{st})] = 2(-F^2)^2,$$

isto é,

$$(X_s, X_t, V)(X_s, X_t, X_{st}) = -F^3. \quad (2.1)$$

Como

$$X_s \times X_t = \gamma' \times \beta + t(\beta' \times \beta),$$

obtemos

$$(X_s, X_t, V) = (\gamma', \beta, V) + t(\beta', \beta, V) \quad (2.2)$$

e

$$(X_s, X_t, X_{st}) = (\gamma', \beta, \beta') + t(\beta', \beta, \beta') = (\gamma', \beta, \beta'). \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.1), temos

$$(\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta') + t(\beta', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta') = -\langle \gamma', \beta \rangle^3 \quad (2.4)$$



que é equivalente ao polinômio identicamente nulo, na variável  $t$ , com coeficientes dependendo de  $s$ , dado por

$$p(t) := (\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta') + \langle \gamma', \beta \rangle^3 + t(\beta', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta') = 0. \quad (2.5)$$

Segue-se então que

$$\begin{cases} (\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta') + \langle \gamma', \beta \rangle^3 = 0 \\ (\beta', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta') = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

A segunda equação de (2.6) dá-nos duas possibilidades:  $(\gamma', \beta, \beta') = 0$ , o que implica, por (2.4), que  $\gamma'$  seja ortogonal a  $\beta$ , o que nos leva a uma contradição, pois  $F = \langle \gamma', \beta \rangle \neq 0$ , ou  $(\beta', \beta, V) = 0$  implicando que o conjunto  $\{\beta', \beta, V\}$  seja linearmente dependente. Nesse caso, existem funções suaves  $a(s)$  e  $b(s)$  tal que

$$V = a(s)\beta(s) + b(s)\beta'(s). \quad (2.7)$$

Como  $\beta$  é um campo de vetores tipo luz, segue do Lema 1.1.2, item (iii), que  $\beta'$  é tipo espaço e podemos escolher um parâmetro  $s$  tal que  $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$ . Assim,

$$\langle V, V \rangle = a^2 \langle \beta, \beta \rangle + b^2 \langle \beta', \beta' \rangle + 2ab \langle \beta, \beta' \rangle = b^2.$$

Isso implica que  $b(s) = b$ . Afirmamos que  $b \neq 0$ . De fato, caso contrário se  $b = 0$ , teríamos, por (2.7), que  $V$  seria paralelo a  $\beta$ , o que é um absurdo, pois pela primeira equação de (2.6), temos que  $F = \langle \gamma', \beta \rangle = 0$ , isso implicaria que  $M$  seja degenerada. Logo,  $b$  é uma constante não nula. Derivando as equações  $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$  e  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$  obtemos, respectivamente,  $\langle \beta', \beta'' \rangle = 0$  e  $\langle \beta, \beta'' \rangle + 1 = 0$ . Por outro lado, derivando (2.7), temos

$$a'\beta + a\beta' + b\beta'' = 0. \quad (2.8)$$

Fazendo o produto interno de (2.8) com  $\beta$  obtemos  $b\langle \beta, \beta'' \rangle = 0$ , isto é,  $\langle \beta, \beta'' \rangle = 0$ , o que é um absurdo, pois  $\langle \beta, \beta'' \rangle = -1$ . Logo,  $\beta$  não pode ser um campo de vetores do tipo luz.  $\square$

O próximo resultado classifica as superfícies regradas não cilíndricas que são *translating solitons* para o *inverse mean curvature flow*. No lema anterior, provamos que  $\beta$  não pode ser um campo vetores tipo luz em um intervalo aberto. Portanto, como nossa análise é local e os tipos causais espaço e tempo, de uma curva, são propriedades abertas, podemos assumir que  $\beta$  não é um campo vetores tipo luz em todo  $M$ .

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície regrada, não cilíndrica, não degenerada em  $\mathbb{L}^3$  parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ . Se  $M$  é *translating soliton* para o *inverse mean curvature flow*, com relação ao vetor velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ , então existe um parâmetro  $s$  tal que*

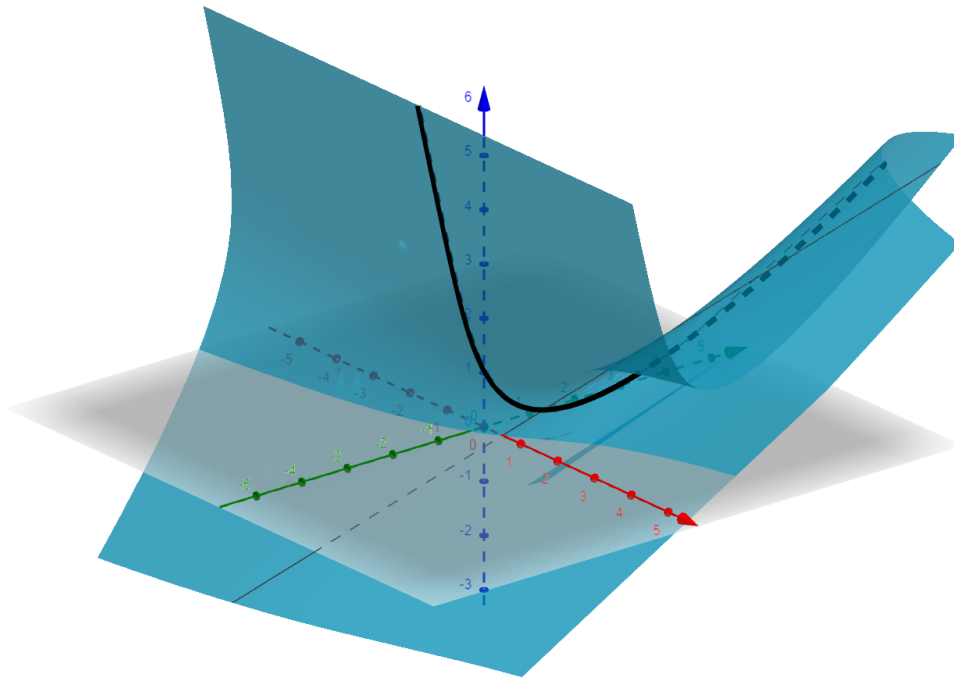
- (i)  $\beta$  é uma reta parametrizada por  $\beta(s) = (1, s, s)$ ;

(ii) Se  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , então  $v_2 \neq v_3$  e

$$\begin{cases} x(s) = \left(\frac{v_2 - v_3}{8}\right)s + c_1 \\ y(s) = \frac{3}{64}(v_2 - v_3)s^2 + \frac{v_1}{16}s + \left(\frac{v_3 - 3v_2}{32}\right)\ln|s| + c_2 \\ z(s) = \frac{3}{64}(v_2 - v_3)s^2 + \frac{v_1}{16}s + \left(\frac{v_2 - 3v_3}{32}\right)\ln|s| + c_3, \end{cases} \quad (2.9)$$

onde  $c_1, c_2$ , e  $c_3$  são constantes (ver Figura 2.1).

**Figura 2.1** Translating soliton, não cilíndrica, para o *inverse mean curvature flow* em  $\mathbb{L}^3$  e sua curva base, com velocidade  $V = (2, 9, 1)$ .



*Demonstração.* Suponha que a parametrização  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  seja ortogonal, isto é,  $\langle \beta, \gamma' \rangle = 0$ . Como  $\beta$  não é um campo de vetores tipo luz, pelo Lema 1.1.2, podemos escolher uma parametrização  $s$  tal que  $\langle \beta, \beta \rangle =: \delta \in \{-1, 1\}$ . Nesse caso, temos que  $\beta'$  é ortogonal a  $\beta$ . Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\begin{cases} E &= \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \gamma', \beta' \rangle t + \langle \beta', \beta' \rangle t^2, \\ F &= \langle \beta, \gamma' \rangle = 0, \\ G &= \delta. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$(X_s, X_t, X_{ss}) = (\gamma', \beta, \gamma'') + [(\gamma', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, \gamma'')]t + (\beta', \beta, \beta'')t^2.$$

Substituindo esses fatos em (1.27), obtemos

$$\begin{aligned} & [(\gamma', \beta, V) + t(\beta', \beta, V)] \times \\ & \times [\delta\{(\gamma', \beta, \gamma'') + [(\gamma', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, \gamma'')]t + (\beta', \beta, \beta'')t^2\}] \\ & = 2[\delta(\langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \gamma', \beta' \rangle t + \langle \beta', \beta' \rangle t^2)]^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Reorganizando a equação (2.10), obtemos o polinômio de grau quatro identicamente nulo  $p(t) = \sum_{i=0}^4 A_i(s)t^i$ , onde

$$\begin{cases} A_0 = 2\langle \gamma', \gamma' \rangle^2 - \delta(\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \gamma''), \\ A_1 = 8\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \gamma', \beta' \rangle \\ \quad - \delta[(\gamma', \beta, V)(\beta', \beta, \gamma'') + (\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, V)(\gamma', \beta, \gamma'')], \\ A_2 = 4\langle \beta', \beta' \rangle \langle \gamma', \gamma' \rangle + 8\langle \gamma', \beta' \rangle^2 \\ \quad - \delta[(\gamma', \beta, V)(\beta', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, V)(\beta', \beta, \gamma'') + (\beta', \beta, V)(\gamma', \beta, \beta'')], \\ A_3 = 4\langle \gamma', \beta' \rangle \langle \beta', \beta' \rangle - \delta(\beta', \beta, V)(\beta', \beta, \beta''), \\ A_4 = 2\langle \beta', \beta' \rangle^2. \end{cases} \quad (2.11)$$

Usando o fato que  $p(t)$  é um polinômio identicamente nulo, temos que  $A_4 = 0$ , isto é,  $\langle \beta', \beta' \rangle = 0$ . Como  $\langle \beta, \beta \rangle = \delta$ ,  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ , e não existem vetores tipo luz ortogonais a vetores tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$  (ver Lema 1.1.2, item (iii)), temos que  $\beta$  é um campo de vetores tipo espaço e assim  $\delta = 1$ . Portanto,  $\beta'$  é uma direção tipo luz no hiperboloide

$$\{p \in \mathbb{L}^3 : \langle p, p \rangle = 1\}.$$

Isso implica que  $\beta$  seja uma reta. Logo, existem vetores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{L}^3$  tal que  $\beta(s) = \vec{a}s + \vec{b}$ . Como  $\beta' = \vec{a}$ , temos

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \text{ e } \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1.$$

Portanto, aplicando movimentos rígidos em  $\mathbb{L}^3$  se necessário, vamos considerar  $\vec{a} = (0, 1, 1)$  e  $\vec{b} = (1, 0, 0)$ . Isso implica que  $\beta(s) = (1, s, s)$  e provamos o item (i). Usando o item (i), vamos usar a parametrização local de  $M$  dada por

$$X(s, t) = \gamma(s) + t(1, s, s).$$

Observe que  $EG - F^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \vec{a}, \gamma' \rangle t$  e, substituindo esses fatos em (2.11), temos  $A_4 = A_3 = 0$  e obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} A_0 = 2\langle \gamma', \gamma' \rangle^2 - (\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \gamma''), \\ A_1 = 8\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \vec{a}, \gamma' \rangle - [(\gamma', \beta, V)(\vec{a}, \beta, \gamma'') + (\vec{a}, \beta, V)(\gamma', \beta, \gamma'')], \\ A_2 = 8\langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2 - (\vec{a}, \beta, V)(\vec{a}, \beta, \gamma''). \end{cases} \quad (2.12)$$

Afirmamos que  $\langle \vec{a}, \gamma' \rangle \neq 0$ . De fato, caso contrário, considerando

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

se  $y' - z' = \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = 0$ , seguiria, da condição  $\langle \gamma', \beta \rangle = 0$ , que

$$\langle \gamma', \beta \rangle = \langle \vec{b}, \gamma' \rangle + s \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = \langle \vec{b}, \gamma' \rangle = x' = 0,$$

e isso implicaria que

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0,$$

isto é,  $\gamma$  é tipo luz, e conseqüentemente  $EG - F^2 = 0$ , o que é um absurdo, pois  $M$  é não degenerada. Logo,  $\langle \vec{a}, \gamma' \rangle \neq 0$ . Dessa forma,  $y'(s) \neq z'(s)$  para todo  $s$ . Para concluirmos que  $v_2 - v_3 \neq 0$ , observe que

$$\vec{a} \times \beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & s & s \end{vmatrix} = (0, 1, 1) = \vec{a}.$$

Substituindo esse fato na expressão  $A_2 = 0$  dada em (2.12), obtemos

$$8 \langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2 - \langle \vec{a}, V \rangle \langle \vec{a}, \gamma'' \rangle = 0. \quad (2.13)$$

Como  $\langle \vec{a}, \gamma' \rangle \neq 0$ , temos que  $\langle \vec{a}, V \rangle \neq 0$ . Isso implica  $v_2 \neq v_3$ . Por outro lado, a Equation (2.13) é equivalente a

$$(v_2 - v_3)(y''(s) - z''(s)) - 8(y'(s) - z'(s))^2 = 0.$$

Definindo  $u(s) = y'(s) - z'(s)$  obtemos a EDO separável

$$(v_2 - v_3)u'(s) - 8(u(s))^2 = 0,$$

cujas soluções (após uma translação do parâmetro  $s$ ) é

$$y'(s) - z'(s) = u(s) = \frac{v_3 - v_2}{8s}. \quad (2.14)$$

Por outro lado,  $\langle \gamma', \beta \rangle = 0$  e (2.14) implicam

$$x'(s) = -(y'(s) - z'(s))s = -\frac{v_3 - v_2}{8}, \quad (2.15)$$

a expressão de  $x(s)$  segue por integração de (2.15) com relação à variável  $s$ . Das expressões  $A_0 = 0$  e  $A_2 = 0$  dadas em (2.12), obtemos

$$(\gamma', \beta, V)(\gamma', \beta, \gamma'') = 2 \langle \gamma', \gamma' \rangle^2 \quad \text{e} \quad (\vec{a}, \beta, V)(\vec{a}, \beta, \gamma'') = 8 \langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2. \quad (2.16)$$

Por outro lado, multiplicando a expressão de  $A_1 = 0$ , dada em (2.12), por  $\frac{1}{2}(\vec{a}, \beta, V) \cdot (\gamma', \beta, V)$  e substituindo a expressão resultante em (2.16), temos

$$4(\gamma', \beta, V)^2 \langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2 + (\vec{a}, \beta, V)^2 \langle \gamma', \gamma' \rangle^2 - 4 \langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \vec{a}, \gamma' \rangle (\gamma', \beta, V)(\vec{a}, \beta, V) = 0,$$

isto é,

$$[2(\gamma', \beta, V) \langle \vec{a}, \gamma' \rangle - (\vec{a}, \beta, V) \langle \gamma', \gamma' \rangle]^2 = 0,$$

o que implica

$$2(\gamma', \beta, V) \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = (\vec{a}, \beta, V) \langle \gamma', \gamma' \rangle. \quad (2.17)$$

Observando que

$$s \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = s(y' - z') = \frac{v_3 - v_2}{8}, \quad (\vec{a}, \beta, V) = \langle \vec{a}, V \rangle = v_2 - v_3,$$

$$\begin{aligned} s(\gamma', \beta, V) &= s \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ 1 & s & s \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= v_1 s^2 (y' - z') - v_2 s (sx' - z') + v_3 s (sx' - y') \\ &= -v_1 sx' + s^2 x' (v_3 - v_2) + v_2 (x' + sy') - v_3 sy' \\ &= x' (-v_1 s + (v_3 - v_2) s^2 + v_2) + s (v_2 - v_3) y' \\ &= - \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right) ((v_3 - v_2) s^2 - v_1 s + v_2) + s (v_2 - v_3) y', \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s^2 \langle \gamma', \gamma' \rangle &= s^2 (x')^2 + s^2 (y')^2 - s^2 (z')^2 \\ &= s^2 (x')^2 + s^2 (y')^2 - (x' + sy')^2 \\ &= (x')^2 (s^2 - 1) - 2sx'y' \\ &= \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right)^2 (s^2 - 1) + 2s \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right) y', \end{aligned}$$

temos, após multiplicar (2.17) por  $s^2$ , que

$$\begin{aligned} -2 \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right)^2 ((v_3 - v_2) s^2 - v_1 s + v_2) - 2s (v_3 - v_2) \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right) y' \\ = (v_3 - v_2) \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right)^2 (s^2 - 1) \\ + 2s (v_3 - v_2) \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right) y'. \end{aligned}$$

Após simplificações, temos que

$$\begin{aligned} 4s(v_3 - v_2)y'(s) &= - \left( \frac{v_3 - v_2}{8} \right) \times \\ &\times (2(v_3 - v_2)s^2 - 2v_1s + 2v_2 + (v_3 - v_2)(s^2 - 1)), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} y'(s) &= - \frac{3(v_3 - v_2)s^2 - 2v_1s + 3v_2 - v_3}{32s} \\ &= - \frac{3(v_3 - v_2)}{32} s + \frac{v_1}{16} - \frac{3v_2 - v_3}{32s} \end{aligned} \quad (2.18)$$

A expressão de  $y(s)$  é obtida após integração na variável  $s$ , e a expressão de  $z(s)$  após substituição de (2.18) em (2.14) e por integração em  $s$ .  $\square$

**Corolário 2.1.1.** *Não existe superfície cônica translating soliton para o inverse mean curvature flow em  $\mathbb{L}^3$ .*

*Demonstração.* Segue do item (ii) do Teorema 2.1.1 que  $\langle \vec{a}, V \rangle = v_2 - v_3 \neq 0$ , onde  $V = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{L}^3$ . Pelo item (iii) do Teorema 2.1.1, a primeira função coordenada  $x(s)$ , da parametrização de  $\gamma$ , não é constante. Logo,  $\gamma$  não se reduz a um ponto, isto é, a superfície não é cônica.  $\square$

## 2.2. Translating Solitons Cilíndricas

Nesta seção classificaremos as superfícies cilíndricas, não degeneradas, que são *translating solitons* para o *inverse mean curvature flow* em  $\mathbb{L}^3$ . Tais superfícies têm parametrização

$$X(s, t) = \gamma(s) + tw,$$

onde  $\gamma$  é uma curva suave e  $w$  é um vetor constante. A menos de movimentos rígidos em  $\mathbb{L}^3$ , podemos escolher

$$w = (1, 0, 1), \quad w = (1, 0, 0), \quad \text{ou} \quad w = (0, 0, 1).$$

Com essa parametrização, temos  $X_t = \gamma'(s)$  e  $X_t = w$ , o que implica  $E = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \delta \in \{-1, 1\}$ ,  $F = \langle \gamma', w \rangle$  e  $G = \langle w, w \rangle$ . O caso  $w = (1, 0, 1)$  não pode ser considerado para o *inverse mean curvature flow* pois,  $w$  tipo luz e  $X_{st} = X_{tt} = 0$  implicam

$$H = -\frac{1}{2} \frac{eG}{EG - F^2} = -\frac{1}{2} \frac{e \langle w, w \rangle}{\langle w, w \rangle - \langle \gamma', w \rangle^2} = 0. \quad (2.19)$$

Assim, temos que  $w = (1, 0, 0)$  (isto é,  $w$  é tipo espaço) ou  $w = (0, 0, 1)$  (isto é,  $w$  é tipo tempo). Começamos analisando o caso quando  $w = (1, 0, 0)$ .

Seja  $M$  superfície cilíndrica, não degenerada, em  $\mathbb{L}^3$  parametrizada por

$$X(s, t) = \gamma(s) + t(1, 0, 0),$$

onde  $\gamma$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, contida no plano ortogonal a  $w$ , isto é,

$$\gamma(s) = (0, x(s), y(s)) \quad \text{e} \quad (x'(s))^2 - (y'(s))^2 = \delta \in \{-1, 1\}.$$

Com essa parametrização, obtemos  $X_s = \gamma'(s) = (0, x'(s), y'(s))$  e  $X_t = (1, 0, 0)$ , o que implica  $E = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \delta$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Observando que  $X_s \times X_t = (0, y'(s), x'(s))$  e  $(EG - F^2)^2 = 1$ , a equação dos *translating soliton* (1.27), com respeito à velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3)$ , torna-se

$$(v_2 y'(s) - v_3 x'(s))(y'(s)x''(s) - x'(s)y''(s)) = 2. \quad (2.20)$$

Como  $(x'(s))^2 - (y'(s))^2 = \delta$ , após diferenciação com relação a  $s$ , temos que  $x'(s)x''(s) - y'(s)y''(s) = 0$ . Assim, temos um sistema de equações lineares nas incógnitas  $x''(s)$  e  $y''(s)$ ,

$$\begin{cases} x'(s)x''(s) - y'(s)y''(s) = 0 \\ y'(s)x''(s) - x'(s)y''(s) = \frac{2}{v_2y'(s) - v_3x'(s)}, \end{cases}$$

cuja solução é

$$x''(s) = \frac{-2\delta y'(s)}{v_2y'(s) - v_3x'(s)} \quad \text{e} \quad y''(s) = \frac{-2\delta x'(s)}{v_2y'(s) - v_3x'(s)}. \quad (2.21)$$

Multiplicando a primeira equação em (2.21) por  $-v_2$ , a segunda equação em (2.21) por  $v_3$  e somando os resultados, obtemos

$$v_3y''(s) - v_2x''(s) = 2\delta. \quad (2.22)$$

Integrando (2.22) na variável  $s$ , e fazendo, se necessário, uma mudança de variáveis por translação de  $s$ , para evitar a constante após a integração obtemos

$$v_3y'(s) - v_2x'(s) = 2\delta s. \quad (2.23)$$

Assim, temos o seguinte sistema linear, nas incógnitas  $x'$  e  $y'$

$$\begin{cases} v_3y'(s) - v_2x'(s) = 2\delta s \\ (x'(s))^2 - (y'(s))^2 = \delta. \end{cases} \quad (2.24)$$

Multiplicando a segunda equação de (2.24) por  $v_3^2$  e substituindo a primeira equação na equação resultante, obtemos

$$(v_3^2 - v_2^2)(x'(s))^2 - 4\delta v_2 s x'(s) - (4s^2 + \delta v_3^2) = 0. \quad (2.25)$$

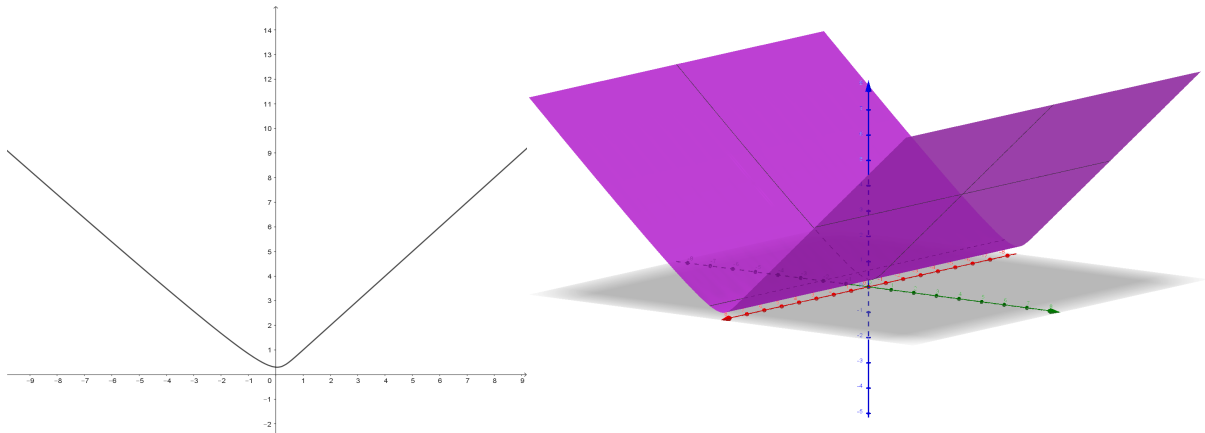
Claramente, a análise de (2.25) deve ser dividida nos casos em que  $v_2^2 \neq v_3^2$  e  $v_2^2 = v_3^2$ . Observe que, como  $v_2$  e  $v_3$  não podem ser simultaneamente zero, o segundo caso implica que  $v_2 \neq 0$  e  $v_3 \neq 0$ . Para maior clareza, apresentamos esses dois casos em dois teoremas diferentes, começando com o caso em que  $v_2^2 = v_3^2$ .

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $M$  superfície regrada cilíndrica, não degenerada, em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + tw$ , onde  $w = (1, 0, 0)$ . Se  $M$  é translating soliton para o fluxo de curvatura média inversa, com relação ao vetor velocidade  $V = (v_1, v_2, \pm v_2)$ , com  $v_2 \neq 0$ , então a curva base  $\gamma(s) = (0, x(s), y(s))$  tem parametrização*

$$\begin{cases} x(s) = -\frac{\delta s^2}{2v_2} - \frac{v_2}{4} \ln |s| + c_1 \\ y(s) = \pm \left( \frac{\delta s^2}{2v_2} - \frac{v_2}{4} \ln |s| \right) + c_2, \end{cases} \quad (2.26)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  são constantes (ver Figure 2.2).

**Figura 2.2** Exemplo de *translating soliton* cilíndrica para o IMCF dado no Teorema 2.2.1, onde  $v_2 = v_3 = 1$  e  $\delta = 1$



*Demonstração.* Se o vetor velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3)$  do *translating soliton* é tal que  $v_2 = \pm v_3$ , segue, da Equação (2.25), que

$$\begin{aligned} x'(s) &= -\frac{\delta s}{v_2} - \frac{v_3^2}{4v_2} \frac{1}{s} \\ &= -\frac{\delta s}{v_2} - \frac{v_2}{4} \frac{1}{s}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Integrando (2.27) por  $x'(s)$ , obtemos

$$x(s) = -\frac{\delta s^2}{2v_2} - \frac{v_2}{4} \ln|s| + c_1.$$

Por outro lado, substituindo (2.27) em (2.23) temos

$$\begin{aligned} v_3 y'(s) &= v_2 x'(s) + 2\delta s \\ &= v_2 \left( -\frac{s}{v_2} - \frac{v_2}{4s} \right) + 2\delta s \\ &= \delta s - \frac{v_2^2}{4s}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Integrando (2.28) obtemos

$$v_3 y(s) = \frac{\delta s^2}{2} - \frac{v_2^2}{4} \ln|s| + k,$$

isto é,

$$y(s) = \pm \left( \frac{\delta s^2}{2v_2} - \frac{v_2}{4} \ln|s| \right) + c_2,$$

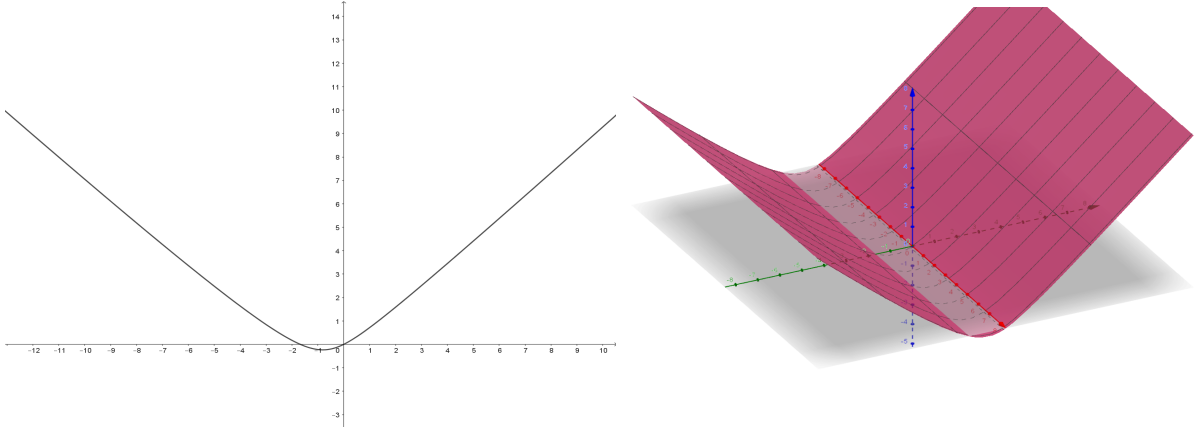
onde  $v_3 = \pm v_2$ ,  $c_1, k$  and  $c_2 = k/v_3$  são constantes. □



**Teorema 2.2.2.** *Seja  $M$  superfície regrada cilíndrica, não degenerada, em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s,t) = \gamma(s) + tw$ , onde  $w = (1, 0, 0)$ . Se  $M$  é *translating soliton* para o fluxo de curvatura média inversa, com relação ao vetor velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3)$ , com  $v_2^2 \neq v_3^2$ , então a curva base  $\gamma(s) = (0, x(s), y(s))$  tem parametrização (ver Figura 2.3)*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = \frac{\delta v_2}{v_3^2 - v_2^2} s^2 \\ \quad \pm \frac{|v_3|}{v_3^2 - v_2^2} \left[ s \sqrt{s^2 + \frac{\delta(v_3^2 - v_2^2)}{4}} + \ln \left| s + \sqrt{s^2 + \frac{\delta(v_3^2 - v_2^2)}{4}} \right| \right] + c_1 \\ y(s) = \frac{\delta v_3}{v_3^2 - v_2^2} s^2 \\ \quad \pm \frac{|v_2|}{v_3^2 - v_2^2} \left[ s \sqrt{s^2 + \frac{\delta(v_3^2 - v_2^2)}{4}} + \ln \left| s + \sqrt{s^2 + \frac{\delta(v_3^2 - v_2^2)}{4}} \right| \right] + c_2. \end{array} \right. \quad (2.29)$$

**Figura 2.3** Exemplo de *translating soliton* cilíndrica para o IMCF dado no Teorema 2.2.2, onde  $v_2 = 1$ ,  $v_3 = 2$  and  $\delta = 1$ .



*Demonstração.* Se  $v_2^2 \neq v_3^2$  temos, de (2.25), que

$$x'(s) = \frac{4\delta v_2 s \pm \sqrt{16v_2^2 s^2 + 4(v_3^2 - v_2^2)(4s^2 + v_3^2 \delta)}}{2(v_3^2 - v_2^2)}$$

ou, equivalentemente,

$$x'(s) = \frac{2\delta v_2 s}{v_3^2 - v_2^2} \pm \frac{2|v_3|}{v_3^2 - v_2^2} \sqrt{s^2 + \frac{\delta(v_3^2 - v_2^2)}{4}}. \quad (2.30)$$

A expressão de  $x(s)$  é obtida após integração de (2.30) na variável  $s$  (analisando os casos  $\delta(v_3^2 - v_2^2) > 0$  e  $\delta(v_3^2 - v_2^2) < 0$  separadamente). A expressão de  $y(s)$  é obtida substituindo a expressão de  $x'(s)$  no sistema (2.24) e integrando o resultado em  $s$ .  $\square$

Vamos considerar agora o caso  $w = (0, 0, 1)$  e  $M$  tem parametrização

$$X(s, t) = \gamma(s) + t(0, 0, 1)$$

Tomando novamente a curva base  $\gamma$  em um plano ortogonal do  $w$  e parametrizando  $\gamma$  pelo comprimento do arco, temos

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), 0), \quad \text{e} \quad (x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1.$$

Como  $X_s = (x'(s), y'(s), 0)$  e  $X_t = (0, 0, 1)$ , obtemos  $E = 1$ ,  $F = 0$ , e  $G = -1$ . Assim, a equação do *translating soliton* (1.27) implica

$$(v_1 y'(s) - v_2 x'(s))(y'(s)x''(s) - x'(s)y''(s)) = -2. \quad (2.31)$$

Derivando a equação do comprimento de arco e usando (2.31), obtemos o sistema

$$\begin{cases} x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) & = 0 \\ y'(s)x''(s) - x'(s)y''(s) & = \frac{-2}{v_1 y'(s) - v_2 x'(s)}, \end{cases}$$

cujas soluções são

$$x''(s) = \frac{-2y'(s)}{v_1 y'(s) - v_2 x'(s)} \quad \text{e} \quad y''(s) = \frac{2x'(s)}{v_1 y'(s) - v_2 x'(s)}.$$

Dessa forma

$$v_2 y''(s) + v_1 x''(s) = -2,$$

isto é, (após translação do parâmetro  $s$ ),

$$v_2 y'(s) + v_1 x'(s) = -2s.$$

Essa equação, junto com a equação do comprimento do arco, dá-nos o sistema de equações

$$\begin{cases} v_2 y'(s) + v_1 x'(s) & = -2s \\ (x'(s))^2 + (y'(s))^2 & = 1. \end{cases} \quad (2.32)$$

Multiplicando a segunda equação de (2.32) por  $v_2^2$  e então substituindo a primeira equação desse sistema na equação resultante, para eliminar  $y'(s)$ , obtemos

$$(v_1^2 + v_2^2)(x'(s))^2 + 4v_1 s x'(s) + 4s^2 - v_2^2 = 0. \quad (2.33)$$

o que implica

$$\begin{aligned} x'(s) &= \frac{-4v_1 s \pm \sqrt{16v_1^2 s^2 - 4(v_1^2 + v_2^2)(4s^2 - v_2^2)}}{2(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= -\frac{2v_1}{v_1^2 + v_2^2} s \pm \frac{2|v_2|}{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{4} - s^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo a expressão de  $x'(s)$  dada em (2.34) no sistema de equações (2.33), temos que

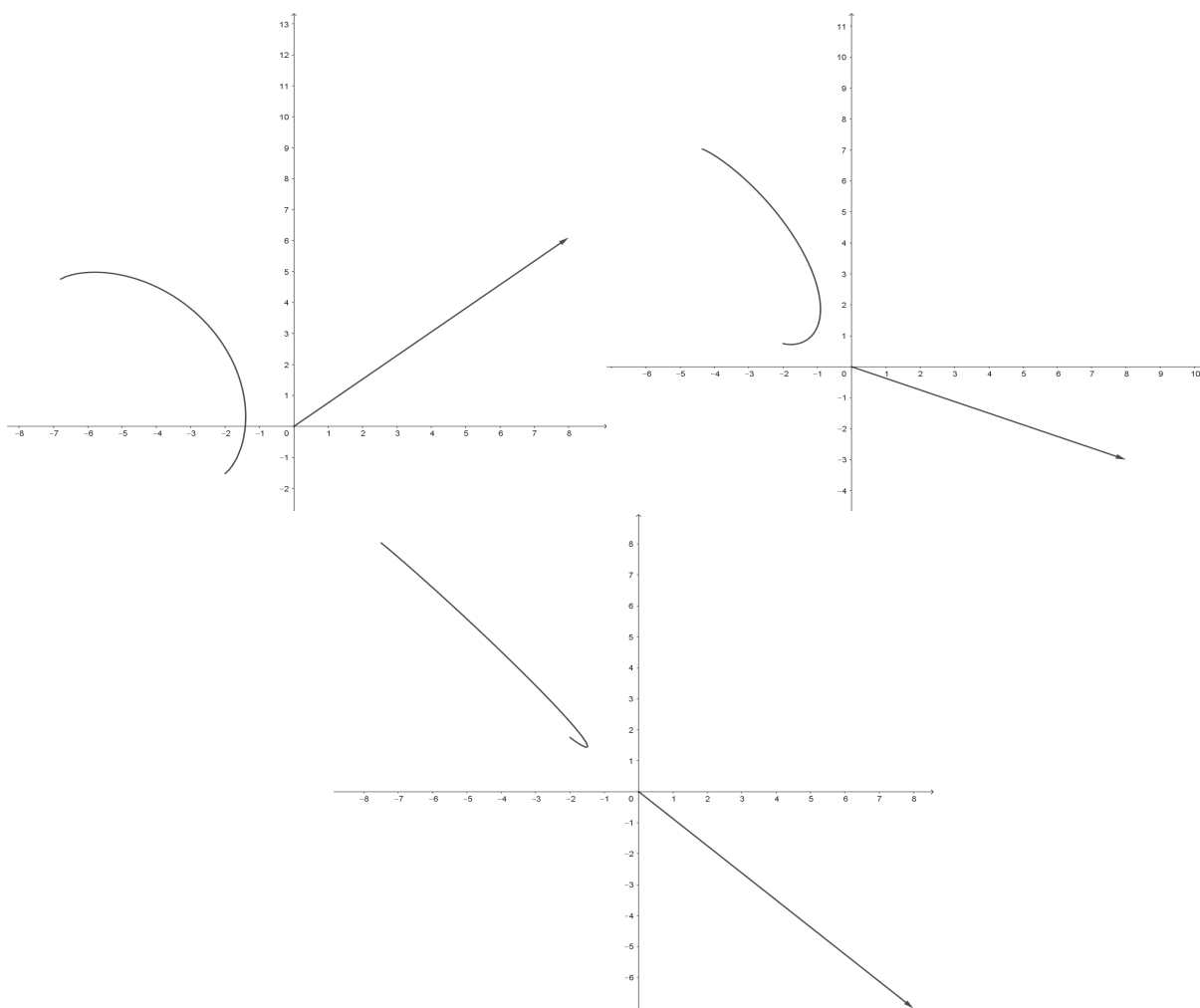
$$y'(s) = -\frac{2v_2}{v_1^2 + v_2^2}s \mp \frac{2|v_1|}{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{4} - s^2}. \quad (2.35)$$

Integrando (2.34) e (2.35) na variável  $s$ , obtemos

**Teorema 2.2.3.** *Seja  $M$  superfície regrada cilíndrica, não degenerada, em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s,t) = \gamma(s) + tw$ , onde  $w = (0,0,1)$ . Se  $M$  é translating soliton para o fluxo de curvatura média inversa, com relação ao vetor velocidade  $V = (v_1, v_2, v_3)$ , então a curva base  $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$  tem parametrização (ver Figura 2.4)*

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = -\frac{v_1}{v_1^2 + v_2^2}s^2 \mp \frac{|v_2|}{4} \arccos\left(\frac{2s}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right) \\ \quad \pm \frac{|v_2|s}{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{4} - s^2} + c_1 \\ y(s) = -\frac{v_2}{v_1^2 + v_2^2}s^2 \pm \frac{|v_1|}{4} \arccos\left(\frac{2s}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\right) \\ \quad \mp \frac{|v_1|s}{v_1^2 + v_2^2} \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{4} - s^2} + c_2. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

**Figura 2.4** Exemplos de curvas base “cicloides” de *translating soliton* cilíndricas para o IMCF dada no Teorema 2.2.3, onde, respectivamente,  $(v_1, v_2) = (8, 6)$ ,  $(v_1, v_2) = (8, -3)$ , and  $(v_1, v_2) = (8, -7)$ .



### 3. *Homothetic Solutions* PARA O IMCF DE SUPERFÍCIES REGRADAS NO ESPAÇO TRIDIMENSIONAL DE LORENTZ-MINKOWSKI

Neste capítulo, classificaremos as superfícies regradas que são *self-similar solutions* para o *inverse mean curvature flow* e, tal como no capítulo anterior, dividiremos este estudo conforme a superfície for cilíndrica ou não.

#### 3.1. *Homothetic Solutions Não Cilíndricas*

Iniciaremos com as *homothetic solutions* para o IMCF, que são superfícies regradas, não cilíndricas, não degeneradas, isto é, que são solução de (1.38) com parametrização  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  onde  $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  é uma curva regular e  $\beta'(s) \neq 0$  no intervalo  $I$ . No primeiro resultado a seguir, será considerado o caso em que a curva  $\beta$  é (localmente) um campo de vetores do tipo luz, isto é,  $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ . Como  $X_t(s, t) = \beta(s)$  é um campo de vetores do tipo luz no espaço tangente a  $M$ , temos que  $M$  é tipo tempo, neste caso.

**Teorema 3.1.1.** *Seja  $M$  uma superfície regrada não cilíndrica, não degenerada de  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ , tal que  $\beta$  é um campo de vetores tipo luz parametrizada pelo comprimento de arco, isto é, tal que  $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ . Se  $M$  é homothetic solution para o inverse mean curvature flow, então*

- (i)  $M$  é *self-expander* tipo tempo com  $C = 1$ ;
- (ii)  $\gamma(s) = a(s)\beta(s) + b(s)\beta'(s)$  onde  $a(s)$  e  $b(s) \neq 0$  são funções reais suaves;
- (iii)  $(\beta''(s), \beta(s), \beta'(s)) = 1$ .

*Reciprocamente, seja  $M$  uma superfície regrada parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ , onde  $\beta(s)$  é um campo de vetores tipo luz, parametrizada pelo comprimento de arco. Se  $\beta$  e  $\gamma$  satisfazem (ii) e (iii), para quaisquer funções reais  $a(s)$  e  $b(s) \neq 0$ , então  $M$  é tipo tempo, *self-expander* para o inverse mean curvature flow com  $C = 1$ .*

*Demonstração.* Se  $\beta$  é um campo de vetores tipo luz, isto é,  $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ , pelo **caso 3** da discussão elencada na Seção 1.2, podemos escolher uma parametrização tal que  $\langle \beta', \beta' \rangle = 1$  e  $\beta' \times \beta = \beta$ , além de já obtermos naturalmente  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ .

Os coeficientes da primeira forma fundamental de  $M$  são dados por

$$\begin{cases} E &= \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2t \langle \gamma', \beta' \rangle + t^2, \\ F &= \langle \gamma', \beta \rangle, \\ G &= \langle \beta, \beta \rangle = 0 \end{cases}$$

implicando que  $F = \langle \gamma', \beta \rangle \neq 0$ , pois a superfície é não degenerada. Assim, por (1.38), temos que

$$C(X_s, X_t, X)[-2F(X_s, X_t, X_{st})] = 2(-F^2)^2$$

isto é,

$$C(X_s, X_t, X)(X_s, X_t, X_{st}) = -F^3. \quad (3.1)$$

Como

$$X_s \times X_t = \gamma' \times \beta + t\beta' \times \beta,$$

obtemos

$$(X_s, X_t, X) = \langle \gamma' \times \beta + t\beta' \times \beta, \gamma + t\beta \rangle = (\gamma', \beta, \gamma) + t(\beta', \beta, \gamma) \quad (3.2)$$

e

$$(X_s, X_t, X_{st}) = (\gamma', \beta, \beta') + t(\beta', \beta, \beta') = (\gamma', \beta, \beta'). \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) e (3.3) em (3.1), temos que

$$C[(\gamma', \beta, \gamma) + t(\beta', \beta, \gamma)](\gamma', \beta, \beta') = -\langle \gamma', \beta \rangle^3, \quad (3.4)$$

que é equivalente ao polinômio identicamente nulo, na variável  $t$ , com coeficientes dependendo de  $s$ , dado por

$$p(t) := C(\gamma', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \beta') + \langle \gamma', \beta \rangle^3 + tC(\beta', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \beta') = 0. \quad (3.5)$$

Dessa forma, temos que

$$\begin{cases} C(\beta', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \beta') & = 0 \\ C(\gamma', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \beta') + \langle \gamma', \beta \rangle^3 & = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

A primeira equação de (3.6) acarreta duas possibilidades:  $(\gamma', \beta, \beta') = 0$ , o que implica, por (3.6), que  $F = \langle \gamma', \beta \rangle = 0$ , o que nos leva a uma contradição, ou  $(\beta', \beta, \gamma) = 0$  e assim  $\{\beta', \beta, \gamma\}$  é linearmente dependente. Neste último caso, existem funções suaves  $a(s)$  e  $b(s)$  tais que

$$\gamma(s) = a(s)\beta(s) + b(s)\beta'(s) \quad (3.7)$$

e assim obtemos

$$\langle \gamma, \gamma \rangle = a^2 \langle \beta, \beta \rangle + 2ab \langle \beta, \beta' \rangle + b^2 \langle \beta', \beta' \rangle = b^2. \quad (3.8)$$

Tomando a derivada de (3.7), temos

$$\gamma' = a'\beta + (a+b')\beta' + b\beta''. \quad (3.9)$$

Isso implica que

$$\gamma' \times \beta = (a+b')(\beta' \times \beta) + b(\beta'' \times \beta) = (a+b')\beta + b(\beta'' \times \beta). \quad (3.10)$$

Tomando o produto interno de (3.10) com  $\gamma$  temos que

$$(\gamma', \beta, \gamma) = b^2(\beta'', \beta, \beta'). \quad (3.11)$$

Similarmente, tomando o produto interno de (3.10) com  $\beta'$  obtemos

$$(\gamma', \beta, \beta') = b(\beta'', \beta, \beta'). \quad (3.12)$$

Note que  $\langle \gamma', \beta \rangle = b \langle \beta'', \beta \rangle$  e, derivando  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ , obtemos  $\langle \beta, \beta'' \rangle = -1$ . Logo, temos que

$$\langle \gamma', \beta \rangle = -b \neq 0. \quad (3.13)$$

Substituindo as expressões obtidas em (3.11), (3.12) e (3.13) na segunda equação do sistema (3.6) temos

$$b^3 C(\beta'', \beta, \beta')^2 - b^3 = 0, \quad (3.14)$$

ou, equivalentemente,

$$C(\beta'', \beta, \beta')^2 = 1. \quad (3.15)$$

Como, por (1.18),

$$(\beta'', \beta, \beta') = -(\beta', \beta, \beta'') = -\langle \beta, \beta'' \rangle = 1,$$

temos que  $C = 1$ . Assim, como  $\varepsilon = 1$ , pois  $M$  é tipo tempo, concluímos que  $M$  é *self-expander*. Reciprocamente, se  $M$  é uma superfície regrada parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ , e tal que  $\beta(s)$  é tipo luz,  $\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = 1$ ,  $(\beta''(s), \beta(s), \beta'(s)) = 1$ , e  $\gamma(s) = a(s)\beta(s) + b(s)\beta'(s)$ , para funções reais arbitrárias  $a(s)$  e  $b(s) \neq 0$ , então, substituindo essas informações em (3.1) e seguindo os passos da prova anterior, podemos concluir que  $M$  é uma *self-expander* tipo tempo, com  $C = 1$ .  $\square$

**Exemplo 3.1.1.** A classe de vetores  $\beta(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco, tal que

$$(\beta''(s), \beta(s), \beta'(s)) = 1$$

é não vazia. De fato, tome os vetores

$$\vec{A} = (0, a_0, a_0), \vec{B} = (b_0, b_0, b_0), \text{ e } \vec{C} = (c_0, 0, c_0), \quad (3.16)$$

onde  $a_0, b_0, c_0 > 0$  são números reais a determinar. Defina

$$\beta(s) = \vec{A}s^2 + \vec{B}s + \vec{C} \quad (3.17)$$

temos que

$$\begin{aligned} \langle \beta(s), \beta(s) \rangle &= \langle \vec{A}, \vec{A} \rangle s^4 + 2 \langle \vec{A}, \vec{B} \rangle s^3 + \left( 2 \langle \vec{A}, \vec{C} \rangle + \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle \right) s^2 \\ &\quad + 2 \langle \vec{B}, \vec{C} \rangle s + \langle \vec{C}, \vec{C} \rangle \\ &= (-2a_0c_0 + b_0^2) s^2 = 0 \end{aligned}$$

se, e somente se  $b_0^2 = 2a_0c_0$ . Por outro lado, como  $\beta'(s) = 2\vec{A}s + \vec{B}$ , devemos ter

$$\langle \beta'(s), \beta'(s) \rangle = \langle \vec{B}, \vec{B} \rangle = b_0^2 = 1,$$

isto é, temos a relação

$$2a_0c_0 = b_0^2 = 1.$$

Por sua vez, temos

$$\begin{aligned}
 (\beta''(s), \beta(s), \beta'(s)) &= (2\vec{A}, \vec{A}s^2 + \vec{B}s + \vec{C}, 2\vec{A}s + \vec{B}) = 2(\vec{A}, \vec{C}, \vec{B}) \\
 &= 2 \begin{vmatrix} 0 & a_0 & a_0 \\ c_0 & 0 & c_0 \\ b_0 & b_0 & b_0 \end{vmatrix} \\
 &= 2a_0b_0c_0 = b_0^3 = 1,
 \end{aligned}$$

se, e somente se  $b_0 = 1$ .

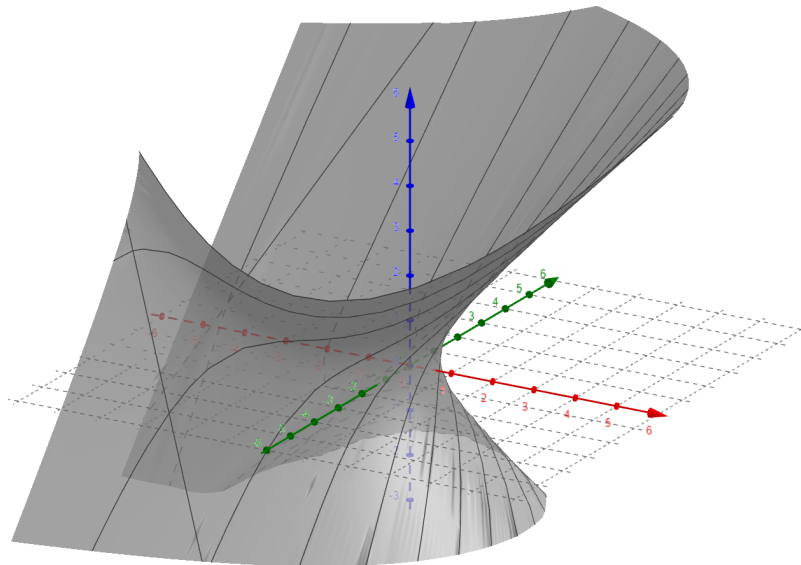
Portanto, definindo  $\beta$  como em (3.17), onde  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$ , e  $\vec{C}$  são dados por (3.16), com  $2a_0c_0 = 1$  e  $b_0 = 1$  temos um exemplo de um campo vetorial tipo luz que satisfaz a condição recíproca do Teorema 3.1.1. Podemos obter outro exemplo tomando  $\vec{A} = (a_0, 0, a_0)$ ,  $\vec{B} = (-1, -1, -1)$  e  $\vec{C} = (0, c_0, c_0)$ , onde  $2a_0c_0 = 1$ .

Isso dará exemplos de superfícies regradas tipo tempo, *self-expanders* para o inverse mean curvature flow com  $C = 1$ , tomando a parametrização

$$X(s, t) = (a(s) + t)\beta(s) + b(s)\beta'(s),$$

para  $a(s)$  e  $b(s) \neq 0$  funções arbitrárias.

**Figura 3.1** Superfície regrada não cilíndrica, *self-expander* tipo tempo para o IMCF em  $\mathbb{L}^3$ , com  $C = 1$ , nas condições do Teorema 3.1.1, onde  $a(s) = s$ ,  $b(s) = s^2 + 1$ ,  $\beta(s) = (0, 1, 1)s^2 + (1, 1, 1)s + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ .



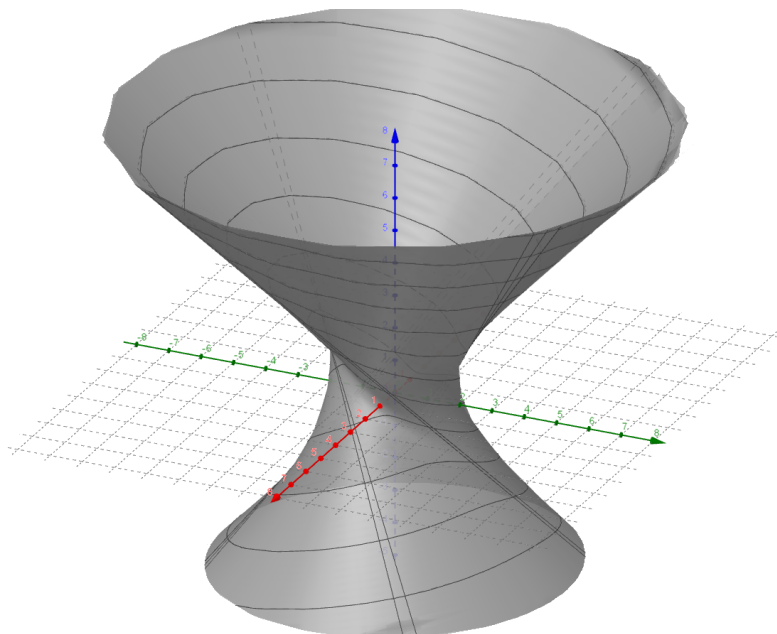
**Exemplo 3.1.2.** Tomando  $\beta(s) = (-\cos s, -\sin s, -1)$  obtemos outra classe de superfícies regradas satisfazendo a hipótese do Teorema 3.1.1. De fato, temos que

$$(\beta''(s), \beta(s), \beta'(s)) = \begin{vmatrix} \sin s & \cos s & 0 \\ -\sin s & -\cos s & -1 \\ -\cos s & \sin s & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 s + \cos^2 s = 1$$



isto é,  $\beta(s)$  satisfaz a recíproca do Teorema 3.1.1. (ver Figura 3.2)

**Figura 3.2** Outra *self-expander*, não cilíndrica, tipo tempo, para o IMCF em  $\mathbb{L}^3$ ,  $C = 1$ , nas condições do Teorema 3.1.1, onde  $\beta(s) = (-\cos s, -\sin s, -1)$ ,  $a(s) = \cos s$ , e  $b(s) = 1 + \sin^2 s$ .



**Observação 3.1.1.** Foi provado por Dillen e Kühnel em [DK99] (ver Teorema 2, item (iii), p.313) que superfícies regradas em  $\mathbb{L}^3$ , onde  $\beta(s)$  é um campo de vetores tipo luz, são superfícies de Weingarten satisfazendo  $H^2 = K$ , onde  $K$  é a curvatura gaussiana da superfície.

Continuaremos a classificação considerando agora o caso em que  $\beta(s)$  não é um campo de vetores tipo luz, ou seja, tal que  $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle \neq 0$  em um intervalo aberto.

**Teorema 3.1.2.** Seja  $M$  superfície regrada, não cilíndrica, em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$ , tal que  $\beta$  não é um campo de vetores tipo luz. Se  $M$  é solução autossimilar para o inverse mean curvature flow, então existe um parâmetro  $s$  tal que

(i)  $\beta$  é uma reta parametrizada por  $\beta(s) = (1, s, s)$ ;

(ii) Se  $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ , então  $y(s) - z(s)$  não é constante e

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = -\frac{C}{2C-8} \left( \frac{(C-8)k_1}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}} s^{\left(\frac{2C-8}{C-8}\right)} + k_2 \\ y(s) = \left( \frac{s^2+1}{2} \right) \left( \frac{(C-8)k_1 s}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}} \\ \quad - \frac{C}{2C-8} \left( \frac{(C-8)k_1}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}} s^{\left(\frac{3C-16}{C-8}\right)} + k_2 s \\ z(s) = \left( \frac{s^2-1}{2} \right) \left( \frac{(C-8)k_1 s}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}} \\ \quad - \frac{C}{2C-8} \left( \frac{(C-8)k_1}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}} s^{\left(\frac{3C-16}{C-8}\right)} + k_2 s, \end{array} \right. \quad (3.18)$$

quando  $C \neq 8$  e

$$\left\{ \begin{array}{l} x(s) = -e^{k_1 s} \left( s - \frac{1}{k_1} \right) + k_2 \\ y(s) = e^{k_1 s} \left( \frac{1-s^2}{2} + \frac{s}{k_1} \right) + k_2 s \\ z(s) = e^{k_1 s} \left( -\frac{1+s^2}{2} + \frac{s}{k_1} \right) + k_2 s \end{array} \right. \quad (3.19)$$

quando  $C = 8$ , onde  $k_1, k_2$  são constantes com  $k_1 \neq 0$ .

*Demonstração.* Suponha que a parametrização  $X(s, t) = \gamma(s) + t\beta(s)$  é ortogonal, isto é,  $\langle \beta, \gamma' \rangle = 0$ . Como  $\beta$  não é um campo de vetores tipo luz, por hipótese, podemos escolher um parâmetro  $s$  tal que  $\langle \beta, \beta \rangle =: \delta \in \{-1, 1\}$ . Nos dois casos, temos  $\beta'$  ortogonal a  $\alpha$ . Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \gamma', \beta' \rangle t + \langle \beta', \beta' \rangle t^2, \\ F = \langle \beta, \gamma' \rangle = 0, \\ G = \delta. \end{array} \right.$$

Por outro lado,

$$(X_s, X_t, X_{ss}) = (\gamma', \beta, \gamma'') + [(\gamma', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, \gamma'')]t + (\beta', \beta, \beta'')t^2.$$

Substituindo esses fatos em (1.38), obtemos

$$\begin{aligned} & C[(\gamma', \beta, \gamma) + t(\beta', \beta, \gamma)] \times \\ & \times [\delta\{(\gamma', \beta, \gamma'') + [(\gamma', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, \gamma'')]t + (\beta', \beta, \beta'')t^2\}] \\ & = 2[\delta(\langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \gamma', \beta' \rangle t + \langle \beta', \beta' \rangle t^2)]^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Fazendo cálculos com a Equação (3.20), obtemos o polinômio de grau quatro identicamente nulo  $p(t) = \sum_{i=0}^4 A_i(s)t^i$ , onde

$$\begin{cases} A_0 = 2\langle \gamma', \gamma' \rangle^2 - C\delta(\gamma', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \gamma''), \\ A_1 = 8\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \gamma', \beta' \rangle \\ \quad - C\delta[(\gamma', \beta, \gamma)(\beta', \beta, \gamma'') + (\gamma', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \gamma'')], \\ A_2 = 4\langle \beta', \beta' \rangle \langle \gamma', \gamma' \rangle + 8\langle \gamma', \beta' \rangle^2 \\ \quad - C\delta[(\gamma', \beta, \gamma)(\beta', \beta, \beta'') + (\beta', \beta, \gamma)(\beta', \beta, \gamma'') + (\beta', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \beta'')], \\ A_3 = 8\langle \gamma', \beta' \rangle \langle \beta', \beta' \rangle - C\delta(\beta', \beta, \gamma)(\beta', \beta, \beta''), \\ A_4 = 2\langle \beta', \beta' \rangle^2. \end{cases} \quad (3.21)$$

Usando que  $p(t)$  é um polinômio identicamente nulo, temos  $A_4 = 0$ , isto é,  $\langle \beta', \beta' \rangle = 0$ . Como  $\langle \beta, \beta \rangle = \delta$ ,  $\langle \beta, \beta' \rangle = 0$ , e não existem vetores tipo luz ortogonais a vetores tipo tempo em  $\mathbb{L}^3$  (ver Lema 1.1.2, item (iii)), temos que  $\beta$  é tipo espaço e assim  $\delta = 1$ . Logo,  $\beta'$  é uma direção tipo luz no hiperboloide

$$\{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x, x \rangle = 1\}.$$

Isso implica que  $\beta$  seja uma reta, e assim existem vetores  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{L}^3$  tais que  $\beta(s) = \vec{a}s + \vec{b}$ . Como  $\beta' = \vec{a}$ , temos que

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \text{ e } \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = 1.$$

Portanto, aplicando movimentos rígidos de  $\mathbb{L}^3$ , se necessário, podemos considerar  $\vec{a} = (0, 1, 1)$  e  $\vec{b} = (1, 0, 0)$ . Isso implica que  $\beta(s) = (1, s, s)$ . Usando esse último fato, podemos considerar a parametrização local de  $M$  dada por

$$X(s, t) = \gamma(s) + t(1, s, s).$$

Observe que  $EG - F^2 = \langle \gamma', \gamma' \rangle + 2\langle \vec{a}, \gamma' \rangle t$  e, substituindo tais fatos em (3.21), temos  $A_4 = A_3 = 0$  e obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} A_0 = 2\langle \gamma', \gamma' \rangle^2 - C(\gamma', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \gamma''), \\ A_1 = 8\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \vec{a}, \gamma' \rangle - C[(\gamma', \beta, \gamma)(\vec{a}, \beta, \gamma'') + (\vec{a}, \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \gamma'')], \\ A_2 = 8\langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2 - C(\vec{a}, \beta, \gamma)(\vec{a}, \beta, \gamma''). \end{cases} \quad (3.22)$$

Afirmamos que  $\langle \vec{a}, \gamma' \rangle \neq 0$ . De fato, caso contrário, considerando

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s)),$$

se  $y' - z' = \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = 0$ , decorreria, da condição  $\langle \gamma', \beta \rangle = 0$ , que

$$\langle \gamma', \beta \rangle = \langle \vec{b}, \gamma' \rangle + s \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = \langle \vec{b}, \gamma' \rangle = x' = 0,$$

o que implicaria que

$$\langle \gamma', \gamma' \rangle = (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0,$$

isto é,  $\gamma$  é tipo luz, e assim  $EG - F^2 = 0$ , o que é um absurdo já que  $M$  é não degenerada. Assim,  $\langle \vec{a}, \gamma' \rangle \neq 0$ . Isso dá  $y'(s) \neq z'(s)$  para cada  $s$  e, conseqüentemente,  $y(s) - z(s)$  não é constante. Por outro lado, observando que

$$\vec{a} \times \beta = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & s & s \end{vmatrix} = (0, 1, 1) = \vec{a}, \quad (3.23)$$

e substituindo esse fato na expressão de  $A_2 = 0$  dada em (3.22), temos

$$C \langle \vec{a}, \gamma \rangle \langle \vec{a}, \gamma'' \rangle - 8 \langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2 = 0,$$

isto é,

$$C(y(s) - z(s))(y''(s) - z''(s)) - 8(y'(s) - z'(s))^2 = 0. \quad (3.24)$$

Substituindo  $u(s) := y(s) - z(s)$  em (3.24), obtemos a EDO

$$Cu(s)u''(s) - 8u'(s)^2 = 0. \quad (3.25)$$

Como a solução  $u(s)$  constante implica  $\langle \vec{a}, \gamma' \rangle = 0$ , que não é possível, vamos considerar apenas as soluções não constantes de (3.25), cuja solução, após translação do parâmetro  $s$ , é

$$y(s) - z(s) = u(s) = \begin{cases} \left( \frac{(C-8)k_1 s}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}}, & \text{para } C \neq 8, \\ e^{k_1 s} & \text{para } C = 8. \end{cases} \quad (3.26)$$

onde  $k_1 \neq 0$  é uma constante. Como  $\langle \gamma', \beta \rangle = 0$ , temos

$$x'(s) = -(y'(s) - z'(s))s, \quad (3.27)$$

isso implica, por (3.26), que

$$x(s) = \begin{cases} -\frac{C}{2C-8} \left( \frac{(C-8)k_1}{C} \right)^{\frac{C}{C-8}} s^{\left(\frac{2C-8}{C-8}\right)} + k_2 & \text{para } C \neq 8, \\ -e^{k_1 s} \left( s - \frac{1}{k_1} \right) + k_2 & \text{para } C = 8, \end{cases} \quad (3.28)$$

onde  $k_2 \in \mathbb{R}$  é constante. As expressões  $A_0 = A_2 = 0$  dadas em (3.22), implicam

$$C(\gamma', \beta, \gamma)(\gamma', \beta, \gamma'') = 2\langle \gamma', \gamma' \rangle^2 \quad \text{e} \quad C(\vec{a}, \beta, \gamma)(\vec{a}, \beta, \gamma'') = 8\langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2. \quad (3.29)$$

Por outro lado, multiplicando a expressão de  $A_1 = 0$ , dada em (3.22), por  $\frac{1}{2}(\vec{a}, \beta, \gamma) \cdot (\gamma', \beta, \gamma)$  e substituindo a expressão resultante em (3.29), temos

$$4(\gamma', \beta, \gamma)^2 \langle \vec{a}, \gamma' \rangle^2 + (\vec{a}, \beta, \gamma)^2 \langle \gamma', \gamma' \rangle^2 - 4\langle \gamma', \gamma' \rangle \langle \vec{a}, \gamma' \rangle (\gamma', \beta, \gamma)(\vec{a}, \beta, \gamma) = 0,$$

isto é,

$$(2(\gamma', \beta, \gamma) \langle \vec{a}, \gamma' \rangle - (\vec{a}, \beta, \gamma) \langle \gamma', \gamma' \rangle)^2 = 0,$$

ou equivalentemente

$$2(\gamma', \beta, \gamma) \langle \vec{a}, \gamma' \rangle = (\vec{a}, \beta, \gamma) \langle \gamma', \gamma' \rangle. \quad (3.30)$$

Usando novamente a notação  $u(s) := y(s) - z(s)$  e (3.27), temos

$$\langle \vec{a}, \gamma' \rangle = u'(s), \quad (\vec{a}, \beta, \gamma) = \langle \vec{a}, \gamma \rangle = u(s),$$

$$\begin{aligned} (\gamma', \beta, \gamma) &= \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ 1 & s & s \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= x's(z-y) - y'(z-sx) + z'(y-sx) \\ &= -sx'u + sx(y' - z') + z'y - y'z \\ &= s^2uu' + sxu' + (y-u)'y - y'(y-u) \\ &= su'(su+x) - yu' + y'u, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle \gamma', \gamma' \rangle &= (x')^2 + (y')^2 - (z')^2 \\ &= (x')^2 + (y')^2 - (y' - u')^2 \\ &= (x')^2 - (u')^2 + 2u'y' \\ &= (u')^2(s^2 - 1) + 2u'y'. \end{aligned}$$

Substituindo esses fatos em (3.30) temos

$$2u'[su'(x+su) + uy' - yu'] = u[(u')^2(s^2 - 1) + 2u'y'].$$

Isso implica, após algumas simplificações, que

$$y(s) = \left( \frac{s^2 + 1}{2} \right) u(s) + sx(s), \quad (3.31)$$

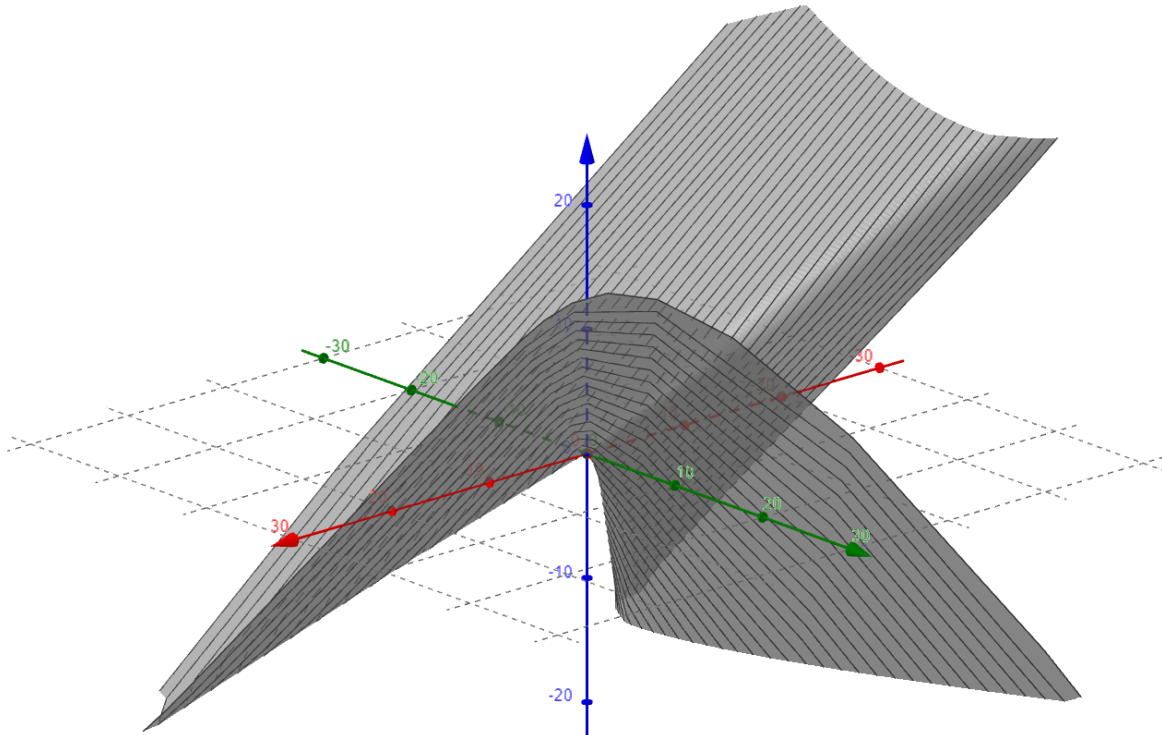
e, como  $z(s) = y(s) - u(s)$ , temos

$$z(s) = \left( \frac{s^2 - 1}{2} \right) u(s) + sx(s). \quad (3.32)$$

O resultado segue por substituição das expressões  $x(s)$  e  $u(s)$  dadas em (3.28) e (3.26), conforme cada caso  $C \neq 8$  ou  $C = 8$ .

□

**Figura 3.3** Solução autossimilar não cilíndrica do IMCF dada pelo Teorema 3.1.2, onde  $C = k_1 = 9$  e  $k_2 = 0$ .



## 3.2. Homothetic Solutions Cilíndricas

Nesta seção, classificaremos as superfícies regradas não degeneradas cilíndricas que são *homothetic self-similar solutions* para o IMCF em  $\mathbb{L}^3$ . Essas superfícies têm a parametrização

$$X(s, t) = \gamma(s) + tw,$$

onde  $\gamma$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e  $w$  é um vetor constante.

A menos de movimentos rígidos no  $\mathbb{L}^3$ , podemos escolher

$$w = (1, 0, 1), \quad w = (1, 0, 0), \quad \text{ou} \quad w = (0, 0, 1).$$

Com essa parametrização, temos que  $X_t = \gamma'(s)$  e  $X_{tt} = w$ , o que implica  $E = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \delta \in \{-1, 1\}$ ,  $F = \langle \gamma', w \rangle$  e  $G = \langle w, w \rangle$ . O caso  $w = (1, 0, 1)$  não pode ser considerado para o IMCF, pois  $w$  tipo luz e  $X_{st} = X_{tt} = 0$  implicam

$$H = -\frac{1}{2} \frac{eG}{EG - F^2} = -\frac{1}{2} \frac{e \langle w, w \rangle}{\langle w, w \rangle - \langle \gamma', w \rangle^2} = 0. \quad (3.33)$$

Assim, temos que  $w = (1, 0, 0)$  (isto é,  $w$  é tipo espaço) ou  $w = (0, 0, 1)$  (isto é,  $w$  é tipo tempo). Começamos analisando o caso quando  $w = (1, 0, 0)$ .

Seja  $M$  superfície regrada não degenerada, cilíndrica, em  $\mathbb{L}^3$  parametrizada por

$$X(s, t) = \gamma(s) + t(1, 0, 0),$$

onde  $\gamma$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco contida num plano ortogonal a  $w$ , isto é,

$$\gamma(s) = (0, x(s), y(s)),$$

onde

$$(x'(s))^2 - (y'(s))^2 = \delta \in \{-1, 1\} \quad (3.34)$$

é a equação do comprimento de arco. Como,

$$\langle N, N \rangle = \frac{\langle X_s \times X_t, X_s \times X_t \rangle}{|EG - F^2|} = \frac{-\langle X_s, X_s \rangle \langle X_t, X_t \rangle + \langle X_s, X_t \rangle^2}{|EG - F^2|} = -\delta,$$

temos que a superfície é tipo espaço se  $\delta = 1$  tipo tempo se  $\delta = -1$ . Isso dá-nos o seguinte cenário:

$\delta = -1$	$C > 0$	<i>self-expander</i>
	$C < 0$	<i>self-shrinker</i>
$\delta = 1$	$C > 0$	<i>self-shrinker</i>
	$C < 0$	<i>self-expander</i>

O primeiro resultado da seção é

**Teorema 3.2.1.** *Seja  $M$  superfície regrada cilíndrica, não degenerada em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + tw$ , onde  $w = (1, 0, 0)$  e  $\gamma(s) = (0, x(s), y(s))$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco contida num plano ortogonal a direção  $w$ . Seja*

$$\begin{cases} f(s) := \delta \left( \frac{2}{C} - 1 \right) s^2 + k, \\ t(s) := \pm \int \frac{\sqrt{4\delta f(s) + (f'(s))^2}}{2|f(s)|} ds = \pm \int \frac{\sqrt{2(2-C)s^2 + \delta kC^2}}{|(2-C)s^2 + \delta kC|} ds, \\ r(s) := \pm \sqrt{|f(s)|}, \end{cases}$$

onde  $k \in \mathbb{R}$ . Se  $M$  é homothetic solution para o fluxo de curvatura média inversa, então

$$\gamma(s) = \begin{cases} (r(s) \sinh(t(s)), r(s) \cosh(t(s)), 0) & , \text{ para } f(s) > 0; \\ (r(s) \cosh(t(s)), r(s) \sinh(t(s)), 0) & , \text{ para } f(s) < 0. \end{cases}$$

*Demonstração.* Com a parametrização dada, da superfície, obtemos  $X_s = \gamma'(s) = (0, x'(s), y'(s))$  e  $X_t = (1, 0, 0)$ , o que implica  $E = \langle \gamma', \gamma' \rangle = \delta$ ,  $F = 0$  e  $G = 1$ . Note que  $X_s \times X_t = (0, y'(s), x'(s))$  e  $(EG - F^2)^2 = 1$  e a Equação (1.38) torna-se

$$C(xy' - yx')(y'x'' - x'y'') = 2. \quad (3.35)$$

Derivando (3.34), obtemos

$$x'(s)x''(s) - y'(s)y''(s) = 0.$$

Assim, temos o sistema linear de equações, nas incógnitas  $x''(s)$  e  $y''(s)$ ,

$$\begin{cases} x'x'' - y'y'' = 0 \\ y'x'' - x'y'' = \frac{2}{C(xy' - yx')} \end{cases},$$

cuja solução é

$$x'' = \frac{-2\delta y'}{C(xy' - yx')} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{-2\delta x'}{C(xy' - yx')}.$$

As soluções acima são equivalentes a

$$\frac{-xC\delta}{2}x'' = \frac{xy'}{xy' - yx'} \quad \text{e} \quad \frac{yC\delta}{2}y'' = \frac{-yx'}{xy' - yx'}.$$

Somando as duas últimas igualdades temos

$$\frac{C\delta}{2}(yy'' - xx'') = 1$$

isto é,

$$yy'' - xx'' = \frac{2\delta}{C}. \quad (3.36)$$

Definindo as funções

$$u(s) := y(s)y'(s) = \frac{1}{2}(y(s)^2)' \quad \text{e} \quad v(s) := x(s)x'(s) = \frac{1}{2}(x(s)^2)',$$

temos

$$u'(s) = y(s)y''(s) + (y'(s))^2 \quad \text{e} \quad v'(s) = x(s)x''(s) + (x'(s))^2. \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) e (3.34) em (3.36), obtemos

$$u'(s) - v'(s) = \delta \left( \frac{2}{C} - 1 \right). \quad (3.38)$$

Por translação do parâmetro  $s$ , a integração de (3.38) juntamente com as definições de  $u$  e  $v$  implicam

$$u(s) - v(s) = \frac{1}{2} [(y(s)^2)' - (x(s)^2)'] = \delta \left( \frac{2}{C} - 1 \right) s \quad (3.39)$$

que é equivalente a

$$y(s)^2 - x(s)^2 = \delta \left( \frac{2}{C} - 1 \right) s^2 + k, \quad (3.40)$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é constante. Seja

$$f(s) := \delta \left( \frac{2}{C} - 1 \right) s^2 + k.$$

Vamos separar a análise em dois casos:



(i) Se  $f(s) > 0$ , definindo

$$\begin{cases} x(s) = r(s) \sinh(t(s)), \\ y(s) = r(s) \cosh(t(s)), \end{cases} \quad (3.41)$$

para algumas funções  $r(s)$  e  $t(s)$ , obtemos, substituindo (3.41) em (3.40), que

$$(r(s))^2 = f(s) = |f(s)|. \quad (3.42)$$

Substituindo (3.42) e (3.41) em (3.34), obtemos

$$-(r'(s))^2 + (r(s))^2(t'(s))^2 = \delta,$$

o que implica, após uma multiplicação por  $4r^2$ , que

$$-(f'(s))^2 + 4(f(s))^2(t'(s))^2 = 4\delta f(s).$$

Isso dá a expressão para  $t(s)$  quando  $f(s) > 0$ .

(ii) Se  $f(s) < 0$ , defina

$$\begin{cases} x(s) = r(s) \cosh(t(s)), \\ y(s) = r(s) \sinh(t(s)), \end{cases} \quad (3.43)$$

onde  $r(s)$  e  $t(s)$  são funções a serem determinadas. Substituindo (3.43) em (3.40), obtemos

$$(r(s))^2 = -f(s) = |f(s)|. \quad (3.44)$$

Agora, substituindo (3.43) em (3.34) temos

$$-(r'(s))^2 + (r(s))^2(t'(s))^2 = -\delta,$$

o que implica, depois de multiplicar a última equação por  $4r^2$  e usar a expressão (3.44), que

$$-(f'(s))^2 + 4(f(s))^2(t'(s))^2 = 4\delta f(s),$$

donde obtemos a expressão para  $t(s)$ .

□

Agora vamos considerar o caso em que  $w = (0, 0, 1)$  e  $M$  tem a parametrização

$$X(s, t) = \gamma(s) + t(0, 0, 1).$$

Tomando novamente a curva base  $\gamma$  contida em um plano ortogonal à direção  $w$  e parametrizando  $\gamma$  pelo comprimento do arco, temos

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$$

e

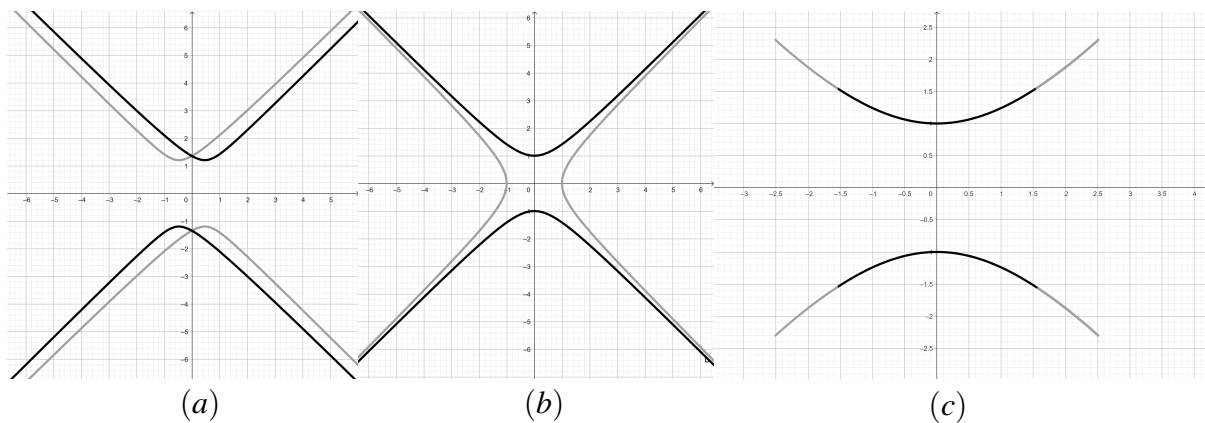
$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1. \quad (3.45)$$

Como

$$\langle N, N \rangle = \frac{\langle X_s \times X_t, X_s \times X_t \rangle}{|EG - F^2|} = \frac{-\langle X_s, X_s \rangle \langle X_t, X_t \rangle + \langle X_s, X_t \rangle^2}{|EG - F^2|} = 1,$$

temos que a superfície é sempre tipo tempo. Nesse caso, temos que a superfície é *self-shrinker* se  $C < 0$  e *self-expander* se  $C > 0$ . O segundo resultado desta seção é

**Figura 3.4** Curva base das *self-similar solutions* cilíndricas para o IMCF dada pelo Teorema 3.2.1. Em cada figura, estamos desenhando os quatro ramos dependendo do sinal + ou - em  $t(s)$  e  $r(s)$ . As figuras foram desenhadas para (a)  $C = k = \delta = 1$ , (b)  $C = 2$ ,  $\delta = 1$ , e  $k = \pm 1$  (neste caso as curvas são a hipérbole  $x^2 - y^2 = \pm 1$ ), e  $C = 4$ ,  $\delta = k = 1$ . Nesse último caso a curva não é completa.



**Teorema 3.2.2.** *Seja  $M$  superfície cilíndrica, não degenerada em  $\mathbb{L}^3$ , parametrizada por  $X(s, t) = \gamma(s) + tw$ , onde  $w = (0, 0, 1)$  e  $\gamma(s) = (x(s), y(s), 0)$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, contida num plano ortogonal a direção  $w$ . Se  $M$  é homothetic solution para o fluxo de curvatura média inversa, então*

$$\gamma(s) = (r(s) \cos(t(s)), r(s) \sin(t(s)), 0),$$

onde

$$\begin{cases} (r(s))^2 &= (1 - \frac{2}{C})s^2 + k > 0, \\ t(s) &= \pm \int \frac{\sqrt{\frac{2}{C}(1 - \frac{2}{C})s^2 + k}}{(1 - \frac{2}{C})s^2 + k} ds, \end{cases}$$

e  $k \in \mathbb{R}$  é constante.

*Demonstração.* Como  $X_s = (x'(s), y'(s), 0)$  e  $X_t = (0, 0, 1)$ , obtemos  $E = 1$ ,  $F = 0$ , e  $G = -1$ . Assim, a equação das *self-similar solutions* (1.38) torna-se

$$C(xy' - yx')(y'x'' - x'y'') = -2. \quad (3.46)$$

Derivando a equação do comprimento de arco e usando (3.46), obtemos o sistema

$$\begin{cases} x'x'' + y'y'' &= 0 \\ y'x'' - x'y'' &= \frac{-2}{C(xy' - yx')}, \end{cases}$$

cuja solução é

$$x'' = \frac{-2y'}{C(xy' - yx')} \quad \text{e} \quad y'' = \frac{2x'}{C(xy' - yx')}.$$

Isso implica

$$xx'' + yy'' = -\frac{2}{C}. \quad (3.47)$$

Defina as funções

$$u(s) := y(s)y'(s) = \frac{1}{2}(y(s)^2)' \quad \text{e} \quad v(s) := x(s)x'(s) = \frac{1}{2}(x(s)^2)'$$

Somando  $u'$  com  $v'$  e substituindo (3.47) no resultado obtemos

$$u'(s) + v'(s) = 1 - \frac{2}{C}. \quad (3.48)$$

Isso implica, por integração e após uma translação do parâmetro  $s$ , que

$$u(s) + v(s) = \frac{1}{2} [(x(s)^2)' + (y(s)^2)'] = \left(1 - \frac{2}{C}\right)s, \quad (3.49)$$

isto é,

$$x(s)^2 + y(s)^2 = \left(1 - \frac{2}{C}\right)s^2 + k =: f(s), \quad (3.50)$$

onde  $k \in \mathbb{R}$  é uma constante. Note que  $f(s)$  definida em (3.50) é não negativa. Seja

$$\begin{cases} x(s) &= r(s) \cos(t(s)), \\ y(s) &= r(s) \sin(t(s)), \end{cases} \quad (3.51)$$

onde  $r(s)$  e  $t(s)$  são funções a determinar. Substituindo (3.51) em (3.50) temos

$$r(s)^2 = f(s). \quad (3.52)$$

Substituindo (3.52) e 3.51 em (3.45), obtemos

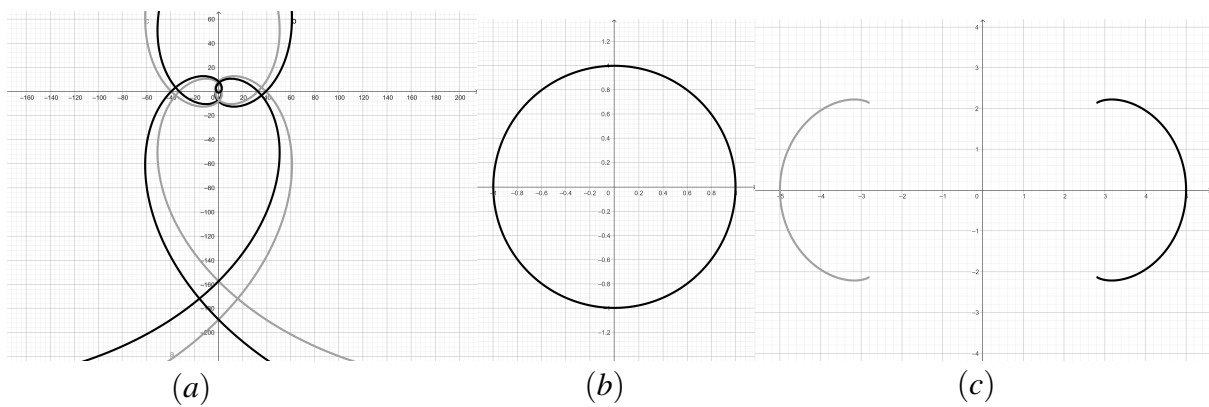
$$(r'(s))^2 + (r(s))^2(t'(s))^2 = 1,$$

que é equivalente (após multiplicação por  $4r^2$ ) a

$$(f'(s))^2 + 4(f(s))^2(t'(s))^2 = 4f(s).$$

Logo, após integração em  $s$ , obtemos a expressão de  $t(s)$ . □

**Figura 3.5** Curva base de superfície cilíndrica *self-similar solution* para o IMCF dada no Teorema 3.2.1. Em cada figura, esboçamos os quatro ramos dependendo do sinal + ou - em  $t(s)$  e  $r(s)$ . As figuras foram desenhadas para (a)  $C = 4$  e  $k = 1$ , (b)  $C = 2$  e  $k = 1$  (neste caso a curva é o círculo  $x^2 + y^2 = 1$ ), e  $C = 1$ ,  $k = 25$ . Nesse último caso a curva não é completa.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AL21] Muhittin Evren Aydin and Rafael López. Ruled translating solitons in Minkowski 3-space. *J. Geom. Phys.*, 170:Paper No. 104392, 10, 2021.
- [AL23] Muhittin Evren Aydin and Rafael López. Translators of flows by powers of the Gauss curvature. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 202(1):235–251, 2023.
- [Ali20] Ahmad T. Ali. Non-lightlike constant angle ruled surfaces in Minkowski 3-space. *J. Geom. Phys.*, 157:103833, 10, 2020.
- [Bar84] Robert Bartnik. Existence of maximal surfaces in asymptotically flat spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 94(2):155–175, 1984.
- [Bar88] Robert Bartnik. Remarks on cosmological spacetimes and constant mean curvature surfaces. *Comm. Math. Phys.*, 117(4):615–624, 1988.
- [BHW16] Simon Brendle, Pei-Ken Hung, and Mu-Tao Wang. A Minkowski inequality for hypersurfaces in the anti-de Sitter–Schwarzschild manifold. *Comm. Pure Appl. Math.*, 69(1):124–144, 2016.
- [Cho85] Bennett Chow. Deforming convex hypersurfaces by the  $n$ th root of the Gaussian curvature. *J. Differential Geom.*, 22(1):117–138, 1985.
- [CL21] Ivo Terek Couto and Alexandre Lyberopoulos. *Introduction to Lorentz geometry—curves and surfaces*. CRC Press, Boca Raton, FL, 2021. Translation of the Portuguese original.
- [DK99] Franki Dillen and Wolfgang Kühnel. Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space. *Manuscripta Math.*, 98(3):307–320, 1999.
- [dLGa15] Levi Lopes de Lima and Frederico Girão. The ADM mass of asymptotically flat hypersurfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(9):6247–6266, 2015.
- [dST23] Fábio Nunes da Silva and Ketten Tenenblat. Self-similar solutions to the curvature flow and its inverse on the 2-dimensional light cone. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 202(1):253–285, 2023.
- [DVdWVW95] Franki Dillen, Ignace Van de Woestyne, Leopold Verstraelen, and Johan Walrave. Ruled surfaces of finite type in 3-dimensional Minkowski space. *Results Math.*, 27(3-4):250–255, 1995.
- [Eck93] Klaus Ecker. On mean curvature flow of spacelike hypersurfaces in asymptotically flat spacetimes. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 55(1):41–59, 1993.

- [Eck97] Klaus Ecker. Interior estimates and longtime solutions for mean curvature flow of noncompact spacelike hypersurfaces in Minkowski space. *J. Differential Geom.*, 46(3):481–498, 1997.
- [Eck03] Klaus Ecker. Mean curvature flow of spacelike hypersurfaces near null initial data. *Comm. Anal. Geom.*, 11(2):181–205, 2003.
- [EH91] Klaus Ecker and Gerhard Huisken. Parabolic methods for the construction of spacelike slices of prescribed mean curvature in cosmological spacetimes. *Comm. Math. Phys.*, 135(3):595–613, 1991.
- [Ger83] Claus Gerhardt.  $H$ -surfaces in Lorentzian manifolds. *Comm. Math. Phys.*, 89(4):523–553, 1983.
- [Ger90] Claus Gerhardt. Flow of nonconvex hypersurfaces into spheres. *J. Differential Geom.*, 32(1):299–314, 1990.
- [Ger04] Claus Gerhardt. The inverse mean curvature flow in cosmological spacetimes. *Preprint arXiv:math.DG/0403097*, 2004.
- [Ger08] Claus Gerhardt. Curvature flows in semi-Riemannian manifolds. In *Surveys in differential geometry. Vol. XII. Geometric flows*, volume 12 of *Surv. Differ. Geom.*, pages 113–165. Int. Press, Somerville, MA, 2008.
- [GL09] Pengfei Guan and Junfang Li. The quermassintegral inequalities for  $k$ -convex starshaped domains. *Adv. Math.*, 221(5):1725–1732, 2009.
- [GM21] Ya Gao and Jing Mao. Inverse gauss curvature flow in a time cone of lorentz-minkowski space  $\mathbb{R}_1^{n+1}$ . *Preprint arXiv:2108.08686*, 2021.
- [GW14] Gregory J. Galloway and Eric Woolgar. Cosmological singularities in Bakry-Émery spacetimes. *J. Geom. Phys.*, 86:359–369, 2014.
- [Hah84] Jörg Hahn. Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms. *Math. Z.*, 187(2):195–208, 1984.
- [Ham82] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geometry*, 17(2):255–306, 1982.
- [HH09] Doan The Hieu and Nguyen Minh Hoang. Ruled minimal surfaces in  $\mathbb{R}^3$  with density  $e^z$ . *Pacific J. Math.*, 243(2):277–285, 2009.
- [HI01] Gerhard Huisken and Tom Ilmanen. The inverse mean curvature flow and the Riemannian Penrose inequality. *J. Differential Geom.*, 59(3):353–437, 2001.
- [Ju14] Hongjie Ju. Exterior Dirichlet problem for translating solutions of Gauss curvature flow in Minkowski space. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 671537, 7, 2014.

- [KK12] Dong-Soo Kim and Young Ho Kim. Minimal ruled submanifolds in Minkowski space  $\mathbb{L}^m$ . *J. Geom. Phys.*, 62(9):1893–1902, 2012.
- [Kob83] Osamu Kobayashi. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space  $L^3$ . *Tokyo J. Math.*, 6(2):297–309, 1983.
- [KP19] Daehwan Kim and Juncheol Pyo. Translating solitons for the inverse mean curvature flow. *Results Math.*, 74(1):Paper No. 64, 28, 2019.
- [Krö06] Heiko Kröner. Der inverse mittlere krümmungsfluß in lorentz mannigfaltigkeiten. *Diplomthesis, Heidelberg University*, 2006.
- [KY00] Young Ho Kim and Dae Won Yoon. Ruled surfaces with pointwise 1-type Gauss map. *J. Geom. Phys.*, 34(3-4):191–205, 2000.
- [KY04] Young Ho Kim and Dae Won Yoon. Classification of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces. *J. Geom. Phys.*, 49(1):89–100, 2004.
- [KY07] Young Ho Kim and Dae Won Yoon. On non-developable ruled surfaces in Lorentz-Minkowski 3-spaces. *Taiwanese J. Math.*, 11(1):197–214, 2007.
- [L14] Rafael López. Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space. *Int. Electron. J. Geom.*, 7(1):44–107, 2014.
- [L21] Rafael López. Ruled surfaces of generalized self-similar solutions of the mean curvature flow. *Mediterr. J. Math.*, 18(5):Paper No. 197, 12, 2021.
- [Liu09] Huili Liu. Ruled surfaces with lightlike ruling in 3-Minkowski space. *J. Geom. Phys.*, 59(1):74–78, 2009.
- [MV15] H. Mirandola and F. Vitório. The positive mass theorem and Penrose inequality for graphical manifolds. *Comm. Anal. Geom.*, 23(2):273–292, 2015.
- [O’N83] Barrett O’Neill. *Semi-Riemannian geometry*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. With applications to relativity.
- [Ond10] Kensuke Onda. Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups. *Geom. Dedicata*, 147:313–322, 2010.
- [SS23] Gregório Silva Neto and Vanessa Silva. Ruled surfaces as translating solitons of the inverse mean curvature flow in the three-dimensional lorentz-minkowski space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 528(2):127550, 2023.
- [SY12] Semra Saraçoğlu and Yusuf Yaylı. On timelike and spacelike developable ruled surfaces. *J. Math. Comput. Sci.*, 2(6):1824–1838, 2012.

- [Urb90] John I. E. Urbas. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures. *Math. Z.*, 205(3):355–372, 1990.
- [VdW90] Ignace Van de Woestijne. Minimal surfaces of the 3-dimensional Minkowski space. In *Geometry and topology of submanifolds, II (Avignon, 1988)*, pages 344–369. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1990.
- [YS12] Yusuf Yayli and Semra Saracoglu. On developable ruled surfaces in Minkowski space. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 22(2):499–510, 2012.