



**Universidade Federal de Alagoas - UFAL**  
**Instituto de Matemática - IM**

Programa de Pós-Graduação em Matemática  
em associação com a Universidade Federal da Bahia



**WAGNER XAVIER RIBEIRO**

**ASPECTOS GEOMÉTRICOS DE SELF-SHRINKERS DE UM FLUXO GEOMÉTRICO**

Programa: PhD Program in Mathematics UFAL - UFBA

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

**MACEIÓ**  
**JUNHO DE 2023**

Wagner Xavier Ribeiro

Aspectos geométricos de self-shrinkers de um fluxo geométrico

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva

Maceió  
Junho de 2023

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**  
Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

R484a Ribeiro, Wagner Xavier.

Aspectos geométricos de Self-Shrinkers de um fluxo geométrico / Wagner Xavier Ribeiro. – 2023.

65 f.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2023.

Bibliografia: f. 63-65.

1. Self-Shrinker. 2. Fluxos geométricos. 3. Princípios do Máximo (Matemática). 4. Crescimento de volume. 5. Não existência – Matemática. I. Título.

CDU: 51

FOLHA DE APROVAÇÃO

WAGNER XAVIER RIBEIRO

Aspectos geométricos de self-shrinkers de um fluxo geométrico

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Trabalho aprovado, Maceió, 28 de junho de 2023.

Banca Examinadora



---

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL (Orientador)



---

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva - UFAL (Avaliador Interno)



---

Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante - UFAL (Avaliador Interno)



---

Prof. Dr. Fábio Reis dos Santos - UFPE (Avaliador Externo)



---

Prof. Dr. Márcio Silva Santos - UFPB (Avaliador Externo)

EM MEMÓRIA DE DIANA CINTRA XAVIER E  
ESTER MARIA DA CONCEIÇÃO.

## AGRADECIMENTOS

À minha mãe Rosângela Maria Xavier.

À Cilene dos Santos Silva.

Aos meus irmãos e irmãs. *La familia no es solo la sangre.*

Aos meus sobrinhos que aqui estão: Gabriel Xavier, Maria Luna, Máira Paes e Ághata Sophia.

Aos meus sobrinhos que ainda virão.

À todos os meus ancestrais.

Aos meus mestres, em especial Gerson Bezerra.

À todos os meus professores da rede estadual, em especial aos professores da Escola Estadual Professor Theonilo Gama.

À todos os meus professores na Universidade Federal de Alagoas, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

À banca examinadora.

Sem o apoio, atenção e carinho de cada um de vocês nada disso seria possível.

”Exu matou um pássaro ontem, com a pedra que só atirou hoje.”

Adágio Yorubá.

## RESUMO

Na primeira parte desta tese, estudaremos as soluções da equação  $S_r = -\langle x, N \rangle$ , ou seja, o self-shrinker do ponto de vista da teoria de subvariedades e para tal faremos uso de princípios do máximo, a saber o princípio do máximo de Hopf e do princípio do Máximo de Omori-Yau, para obter resultados de rigidez, classificando as soluções da equação acima citada. Na segunda parte, provaremos um resultado de controle de volume ponderado e faremos uma aplicação para o caso  $r = 2$ . Já na terceira parte faremos a classificação tomando como base uma condição do tipo topológica; por fim, na quarta e última parte apresentaremos resultados de não existência em produtos warped.

**Palavras-chave:** Self-Shrinkers, Princípios do Máximo, Resultados de Controle de Volume, Não Existência.

## ABSTRACT

In the first part of this thesis we will study the solutions of the equation  $S_r = -\langle x, N \rangle$ , that is, the self-shrinkers from the point of view of the theory of submanifolds and for this we will make use of principles of some maximum, namely the Hopf maximum principle and the Omori-Yau maximum principle to obtain rigidity results, classifying the solutions of the aforementioned equation. In the second part we will prove a weighted volume control and obtain an application for the case  $r = 2$ , in the third part we will do the classification based on a topological condition, and in the fourth last part we will present non-existence results on warped products.

**Keywords:** Self-Shrinkers, Maximum Principles, Volume Control Results, Nonexistence.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>CONCEITOS PRELIMINARES . . . . .</b>	<b>20</b>
2.1	Variedades . . . . .	20
2.2	Métricas . . . . .	22
2.3	Conexão . . . . .	22
2.4	Curvaturas . . . . .	24
2.5	Imersões Isométricas . . . . .	24
2.6	Gradiente, Divergente, Laplaciano e Hessiana . . . . .	26
2.7	Operador de Newton e $S_r$ curvaturas . . . . .	28
2.8	Operador $L_r$ . . . . .	29
2.9	Elipticidade dos Operadores $L_r$ . . . . .	31
2.10	Princípio do Máximo de Omori-Yau . . . . .	32
2.11	Teorema de Stokes Generalizado . . . . .	33
2.12	Teorema de classificação para hipersuperfícies com função suporte constante	34
<b>3</b>	<b>RIGIDEZ . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1	Exemplos $\text{tr}(A^2 P_{r-1})$ . . . . .	35
3.2	Hipersuperfícies Compactas . . . . .	36
3.3	Hipersuperfícies Completas não-compactas . . . . .	43
3.3.1	O Cilindro . . . . .	43
3.3.2	O Plano . . . . .	45
3.4	Um Teorema de rigidez para um self-shrinker do fluxo da $S_r$ -curvatura confinada em um espaço . . . . .	46
3.5	Resultado do tipo semi-espaço . . . . .	47
3.5.1	Sobre a função altura. . . . .	47
<b>4</b>	<b>CRESCIMENTO DE VOLUME . . . . .</b>	<b>49</b>
4.1	Um Teorema sobre o crescimento de volume . . . . .	49
4.2	Aplicação para os Self-Shrinkers do fluxo da $S_2$ -curvatura . . . . .	52
<b>5</b>	<b>UMA CONDIÇÃO DO TIPO TOPOLÓGICA . . . . .</b>	<b>54</b>
5.1	Uma condição do tipo topológica e um resultado de rigidez . . . . .	54
<b>6</b>	<b>NÃO EXISTÊNCIA EM PRODUTOS WARPED . . . . .</b>	<b>57</b>
6.1	Resultados em $\overline{M}^{n+1} = I \times_f \Sigma^n$ . . . . .	57
6.2	Resultados em $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f \Sigma^n$ . . . . .	61

**REFERÊNCIAS . . . . . 66**

## 1 INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas, fluxos geométricos têm sido um objeto de bastante interesse dos matemáticos e físicos. Dentre os diversos tipos de fluxos podemos destacar o fluxo de Ricci,

$$\begin{cases} \frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2 \operatorname{Ric}_{g(t)}, & t \in (0, T) \\ g(0) = g_0 \end{cases},$$

introduzido por Richard S. Hamilton em (HAMILTON, 1982) para demonstrar que:

**Teorema 1.1.** *Seja  $M^3$  uma variedade Riemanniana compacta que admite uma métrica com curvatura de Ricci estritamente positiva. Então  $M^3$  admite uma métrica de curvatura constante positiva.*

Em (HUISKEN, 1984) Gerhard Huisken, motivado pelas técnicas dos trabalhos de Hamilton, estudou o fluxo

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \Delta_t F(x, t) = -\psi(t)H(x, t), & x \in U \\ F(x, 0) = F_0 \end{cases},$$

em que  $\Delta_t F(x, t)$ ,  $\nu(x, t)$ ,  $H(x, t)$  são o laplaciano, vetor normal e a curvatura média da variação correspondente  $F(x, t)$  e provou

**Teorema 1.2.** *Seja  $n \geq 2$  e assumamos que  $M_0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uniformemente convexa. Então, o fluxo*

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = \Delta_t F(x, t), & x \in U \\ F(x, 0) = F_0 \end{cases},$$

tem uma solução suave num tempo finito  $0 \leq t < T$  e  $M_t$  converge para um ponto  $p_0$  quando  $t \rightarrow T$ . O fluxo normalizado

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{F}(x, \tilde{t})}{\partial \tilde{t}} = \Delta_{\tilde{t}} \tilde{F}(x, \tilde{t}) + \frac{1}{n} \tilde{h}_t \tilde{F}(x, \tilde{t}), & x \in U \\ \tilde{F}(x, 0) = \tilde{F}_0 \end{cases},$$

com  $\tilde{F}(x, \tilde{t}) = \psi(t)F(x, \tilde{t})$  ( $\psi(t)$  é uma função escolhida adequadamente) tem solução  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  para todo  $0 \leq \tilde{t} < \infty$ . A hipersuperfície  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  é uma expansão homotética de  $M_t$  e, se escolhermos o ponto inicial  $p_0$  como a origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$ , então  $\tilde{M}_{\tilde{t}}$  converge para uma esfera com área  $|M_0|$  na topologia  $C^\infty$  quando  $\tilde{t} \rightarrow \infty$ .

Percebendo como a curvatura do ambiente influenciaria nas equações do fluxo em (HUISKEN, 1986), Huisken conseguiu estender o resultado acima para subvariedades de uma variedade

Riemanniana. Como consequência dos resultados discutidos, em (HUISKEN G; POLDEN, 1999), os autores consideraram a evolução do fluxo na direção normal, dependendo de uma função  $f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  com  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , sendo os autovalores da operador de Weingarten, denominados curvaturas principais da variedade  $M$ . Fluxos com essa característica, isto é,

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} = f(\lambda_1, \dots, \lambda_n)N(x, t), & x \in U \\ F(x, 0) = F_0 \end{cases}$$

têm uma classe especial de soluções, que são as soluções homotéticas, isto é, soluções que são equivalentes ao dado inicial, a não ser por uma dilatação ou contração. Essa família de soluções pode ser caracterizada pela seguinte equação:

$$S_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = c\langle x, N \rangle, \quad (1)$$

onde  $S_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  denota o  $r$ -polinômio simétrico, também denominado apenas de  $S_r$ -curvatura e  $N$  é o vetor normal da imersão, ou seja, do dado inicial  $x$ , uma vez que se,  $c < 0$  para cada  $r$  existe uma esfera com raio adequado que resolve (1), para  $c = -1$  surge uma pergunta natural:

*As únicas soluções fechadas de  $S_r = c\langle x, N \rangle$  são as esferas  $\mathbb{S}^n(R_0)$ ?*

Para  $r = 1$ , sob a hipótese de  $x$  ser convexa em média, em (HUISKEN, 1990), Huisken provou que, de fato, apenas a esfera é a solução desta equação. Para  $r = 2$  e  $x$  uma superfície, ou seja, quando o fluxo evolui pela curvatura gaussiana, sob a hipótese de  $x$  ser estritamente convexa, em (ANDREWS, 1999), Andrews também encontrou a esfera como única solução da equação (1). Após mais de uma década em (BRENDLE, 2016) temos um importante trabalho no qual Bandle também encontrou a esfera como solução da equação (1). Motivado por (ANDREWS, 1999), em conjunto com suas generalizações (CHOI; DASKALOPOULOS, 2016) resolveram o caso

$$S_n^\alpha = -\langle x, N \rangle$$

com  $\alpha \geq \frac{1}{n+2}$ , encontrando a esfera como solução e, além disso, mostraram que, quando  $\alpha = \frac{1}{n+2}$ , a solução do fluxo converge para o elipsoide e este último foi generalizado em (GAO et al., 2018). Dizemos que uma hipersuperfície  $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é um self-shrinker quando

$$H = -\langle x, N \rangle$$

Pensando no caso completo não compacto, em (LE; SESUM, 2011), Le e Sesum apresentaram:

**Teorema 1.3.** *Seja  $M^n$  um self-shrinker  $n$ -dimensional completo, mergulhado, sem fronteira e com crescimento de volume polinomial em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $|A|^2 < 1$ , então  $M^n$  é um hiperplano.*

Inspirados neste resultado, em (CAO; LI, 2013), os autores conseguiram a seguinte classificação:

**Teorema 1.4.** *Se  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ , ( $p \geq 1$ ) é um  $n$ -dimensional self-shrinker completo sem fronteira, com crescimento de volume polinomial e satisfazendo,*

$$|A|^2 \leq 1,$$

então  $M^n$  é

- i. *uma esfera  $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$ .*
- ii. *um cilindro  $\mathbb{S}^m(\sqrt{m}) \times \mathbb{R}^{n-m}$ ,  $1 \leq m \leq n - 1$ .*
- iii. *um hiperplano passando pela origem.*

E, como consequência direta, temos o seguinte:

**Corolário 1.1.** *Se  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  ( $p \geq 1$ ) é um  $n$ -dimensional self-shrinker completo sem fronteira, com crescimento de volume polinomial e satisfazendo,*

$$|A|^2 < 1,$$

então  $M$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

E aqui é interessante salientar que os resultados provados por (CAO; LI, 2013) nos garantem que existe um certo tipo de *gap* relacionado a norma da segunda forma fundamental, ou seja, nas condições dadas ou  $|A|^2 = 0$  ou  $|A|^2 = 1$ .

Ainda nesse mesmo artigo, os autores perguntam se é possível obter a mesma classificação sem a hipótese de crescimento de volume polinomial. Para contornar esse problema, (CHENG; PENG, 2015) utilizam o princípio do máximo de Omori-Yau generalizado aplicado ao operador

$$\mathcal{L}(f) = \Delta f - \langle x^\top, \nabla f \rangle,$$

e, assim, provaram que

**Teorema 1.5.** *Se  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  ( $p \geq 1$ ) é um  $n$ -dimensional self-shrinker completa e sem fronteira em  $\mathbb{R}^{n+p}$ , então ocorre uma das situações:*

- i.  $\sup |A|^2 \geq 1$
- ii.  $|A|^2 = 0$  e  $M$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$

**Corolário 1.2.** *Se  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$  é um self-shrinker completa sem fronteira, satisfazendo*

$$|A|^2 < 1,$$

*então  $M$  é um hiperplano em  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

**Teorema 1.6.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma self-shrinker completa e sem fronteira. Se  $\inf H^2 > 0$  e  $|A|^2$  é limitada, então  $\inf |A|^2 \leq 1$ .*

**Corolário 1.3.** *Seja  $x : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma self-shrinker completa e sem fronteira. Se  $\inf H^2 > 0$  e  $|A|^2$  é constante, então  $|A|^2 = 1$  e  $M^n$  é uma esfera  $\mathbb{S}^n(\sqrt{n})$  ou o cilindro  $\mathbb{S}^k(\sqrt{n}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ , com  $1 \leq k \leq n - 1$ .*

E, novamente, assim como em (CAO; LI, 2013), Cheng e Peng encontraram um gap envolvendo a segunda forma fundamental, isto é, nas condições dadas ou  $|A| = 0$  ou  $|A| \geq 1$ .

Na primeira parte desta tese, vamos estudar a equação (1) à luz das ideias apresentadas por (CHENG; PENG, 2015), ou seja, por meio de princípios de máximo aplicados ao operador

$$L_r(f)(p) = \text{tr}[(P_r \text{ Hess } f)(p)].$$

Nos motivamos em usar este operador porque esse operador é uma generalização natural do operador laplaciano, como podemos ver para  $r = 0$ . Além disso, sob certas condições, tais operadores apresentam a propriedade de elipticidade. Desse modo, assim como em (CHENG; PENG, 2015), vamos classificar os self-shrinkers completos sem a hipótese de crescimento de volume e encontraremos um novo tipo de gap, que é a generalização natural para os gaps discutidos anteriormente. Diremos que  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é um self-shrinker do fluxos da  $S_r$ -curvatura quando

$$S_r = -\langle x, N \rangle.$$

Diremos que  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é fracamente convexa quando

$$\langle Av, v \rangle \geq 0,$$

para vetor  $v$  onde  $A$  é o operador de Weingarten de  $\Sigma$ . Nessa direção, nossos resultados para a classificação das esferas são:

**Teorema 1.7** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura, fechado e fracamente convexo. Se*

$$\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r,$$

*então  $\Sigma$  é isométrico a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$ .*

Denotando  $\mathcal{L}^1(\Sigma)$  como o espaço das funções integráveis a Lebesgue em  $\Sigma$ , obtemos:

**Teorema 1.8** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura. Suponha que  $|P_{m+1}|$  é limitado e que existe um ponto elíptico em  $\Sigma$ . Se  $H_{m+1}$  é constante para  $m \geq r$  e  $|x|^\top \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então  $\Sigma$  é isométrica a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$ .*

Extendendo um resultado obtido por (VASQUEZ, 2015), em (COSTA-FILHO, 2020), o autor prova que:

**Teorema 1.9.** *Seja  $\Sigma^n$  um self-shrinker do fluxo da  $S_1$ -curvatura imerso e fechado em  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Se*

$$1 - \left( \frac{n+2}{4n^2} \right) |x|^2 + \left( \frac{2}{n^2} \right) S_1^2 - |A|^2 \geq 0,$$

*então*

$$\Sigma = \mathbb{S}^n(\sqrt{n}).$$

Nessa direção, obtemos a seguinte generalização:

**Teorema 1.10.** *Seja  $\Sigma^n$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura imerso e fechado em  $\mathbb{R}^{n+k}$ . Se*

$$\left( \frac{n-r+1}{n} \right) S_{r-1} - \left( \frac{n+r+1}{n^2} \right) |x|^2 + \left( \frac{r+1}{n^2} \right) S_r^2 - |AP_{r-1}|^2 \geq 0,$$

*então*

$$\Sigma = \mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right).$$

Considerando  $\lambda = \frac{1}{n|\Sigma|} \int_{\Sigma} \text{Ric}(x^\top, x^\top) dv_g$ , temos

**Teorema 1.11** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura e fechado. Se*

$$S_2^3 - \frac{n(n-1+\lambda)}{2}$$

*não muda de sinal em  $\Sigma$ , então  $\lambda = 0$  e  $\Sigma$  é isométrica a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$ .*

Para o próximo resultado, lembremos que uma variedade  $\Sigma$  é dita parabólica se toda função subharmônica e limitada inferiormente em  $\Sigma$  for constante.

**Teorema 1.12** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura e parabólico. Se  $S_2$  é positiva e  $S_2^2 - \frac{(n-1)}{2}H$  é não negativo em  $\Sigma$ , então  $\Sigma$  é isométrico a esfera*

$$\mathbb{S}^n \left( \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2}} \right).$$

**Teorema 1.13.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo, limitada com  $S_{r-1} > 0$*

$$S_r \geq \sqrt{\frac{(n-r+1)S_{r-1}}{r}}.$$

Se existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que

$$x_0 = \sup_{\Sigma} |x|,$$

$$\text{então } \Sigma = \mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$$

Do teorema (1.7) sugem duas perguntas naturais:

*O que acontece se  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r$  e  $\Sigma$  não é fechada?*

*O que acontece se  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) < r$  e  $\Sigma$  não é fechada?*

De forma análoga a (CHENG; PENG, 2015) e, conseqüentemente, a (CAO; LI, 2013), completamos a classificação encontrando o cilindro e o plano:

**Teorema 1.14** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo não compacto e fracamente convexo. Suponha que  $S_{r-1}$  é limitada e  $|\nabla S_r|$  é integrável. Se*

$$\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r,$$

então  $\Sigma$  é isométrico a

$$\mathbb{S}^k \left( \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \right) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

para todo número inteiro  $k$  tal que  $r \leq k \leq n$ .

**Teorema 1.15** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completa não compacto e fracamente convexo. Suponha que  $S_1$  é limitada. Se  $\sup \text{tr}(A^2 P_{r-1}) < r$ , então  $\Sigma$  é isométrico ao  $\mathbb{R}^n$ .*

Em (CHENG; ZHOU, 2013), os autores provam um teorema de controle do volume para uma variedade completa não compacta e, em seguida, aplicam tal resultado para os self-shrinkers do fluxo da  $S_2$ -curvatura. São eles:

**Teorema 1.16.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa não compacta. Se  $f \in C^\infty(M)$  é própria satisfazendo  $|\nabla f|^2 \leq f$  em  $D_r = \{x \in M : 2\sqrt{f} < r\}$  e*

$$\Delta f - |\nabla f|^2 + f \leq k$$

para alguma constante  $k$ , então  $M$  tem volume com peso finito, isto é,

$$V_f(M) = \int_M e^{-f} dv < +\infty$$

e

$$V(r) \leq Cr^{2k}$$

para  $r \geq 1$ , onde  $C$  é uma constante dependendo apenas de  $\int_M e^{-f} dv$ .

**Teorema 1.17.** *Seja  $(M, g)$  um self-shrinker completo não compacto propriamente imerso em  $\mathbb{R}^{n+p}$  com uma constante não negativa  $\beta \leq \inf H_2^2$ . Então, existe uma constante positiva  $C$  tal que para  $r \geq 1$*

$$\text{Vol}(B_r(0) \cap M) \leq Cr^{n-2\beta}.$$

Nessa direção, na segunda parte desta tese, nossos resultados são:

**Teorema 1.18.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa e não-compacta. Sejam  $f \in C^\infty(M)$  própria,  $\mu_1$  o primeiro autovalor do endomorfismo simétrico livre de divergência  $\mathcal{P}_{r-1}$  e  $\mathcal{L}_{r-1}(g) = \text{tr}(\mathcal{P}_r \text{Hess}(g))$  seu operador associado. Se  $|\nabla f|^2 \leq f$ ,  $\mu_1 \geq 0$  é limitado e*

$$\mathcal{L}_{r-1}(f) - |\nabla f|^2 + f \leq k\mu_1$$

em  $D_\alpha = \{x \in M : 2\sqrt{f} < \alpha\}$  para alguma constante  $k$ , então

$$\int_M \mu_1 e^{-f} dv < +\infty$$

e

$$\int_M \mu_1 dv \leq C\alpha^{2k}$$

onde  $C$  é uma constante que depende apenas de  $\int_M \mu_1 e^{-f} dv$ .

De forma análoga, temos a seguinte aplicação:

**Teorema 1.19.** *Seja  $(M, g)$  um self-shrinker do fluxo  $S_2$ -curvatura completo não compacto propriamente imerso em  $\mathbb{R}^{n+p}$  com uma constante não negativa  $\beta \leq \inf S_2^2$ . Se  $\mu_1$  e  $S_1 \leq C\mu_1$  para alguma constante  $C$ , então*

$$\int_{B_r(0) \cap M} S_1 dv \leq Cr^{n-1-2\beta}$$

Na terceira parte, apresentaremos um resultado baseado em (ALENCAR et al., 2023) sob a condição

$$W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} T_p \Sigma,$$

ser diferente de vazio os autores conseguiram obter o mesmo tipo de classificação, isto é, encontraram a esfera, o cilindro e o plano:

**Teorema 1.20.** *Seja  $\Sigma^n$  um self-shrinker  $n$ -dimensional completo, em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $W$  é aberto, não vazio, e a norma da segunda forma fundamental ao quadrado  $|A|^2$  satisfaz*

$$|A|^2 \leq \frac{1}{2},$$

então  $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ , com  $0 \leq k \leq n$ .

**Teorema 1.21.** *Seja  $\Sigma^n$  um self-shrinker  $n$ -dimensional completo, em  $\mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $H \geq 0$ . Se  $W$  é aberto, não vazio, e a norma da segunda forma fundamental ao quadrado  $|A|^2$  satisfaz*

$$|A|^2 \geq \frac{1}{2}$$

então  $\Sigma^n = \mathbb{S}^k(\sqrt{k}) \times \mathbb{R}^{n-k}$ , com  $1 \leq k \leq n$ .

Com base nestes resultados, obtemos:

**Teorema 1.22.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura, com  $S_{r-1}$  positiva e  $H$  limitada. Se*

$$W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} T_p \Sigma$$

é aberto, não-vazio e  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r$ , então  $\Sigma$  é isométrica a

$$\mathbb{S}^k \left( \sqrt{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \right) \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Na quarta e última parte desta tese, inspirados em (BATISTA et al., 2023), apresentaremos resultados de não existência em produtos warped.

**Teorema 1.23.** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$  um produto warped cuja curvatura seccional da fibra satisfaz*

$$K_M \geq -\sup(f'^2 - ff'').$$

*Não existe um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = f(t)\partial_t$  onde  $c \neq 0$  tal que  $S_1$  seja limitada,  $S_2 \geq 0$ , contida em um slab  $[t_1, t_2] \times M^n$  com  $\mathcal{H}'(h) > 0$  com  $\zeta_c(t)$  tendo um sinal estrito em  $[t_1, t_2]$ .*

**Teorema 1.24.** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$  um produto warped cuja curvatura seccional da fibra satisfaz*

$$K_M \geq -\sup(ff'' - f^2).$$

*Não existe um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = f(t)\partial_t$  onde  $c \neq 0$  tal que  $S_1$  seja limitada,  $S_2 \geq 0$ , contida em um slab  $[t_1, t_2] \times M^n$  com  $\mathcal{H}'(h) > 0$  com  $\zeta_c(t)$  tendo um sinal estrito em  $[t_1, t_2]$ .*

## 2 CONCEITOS PRELIMINARES

### 2.1 VARIEDADES

**Definição 2.1.** *Um variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um conjunto  $M^n$  munido de uma família de aplicações injetivas  $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  de abertos  $U_\alpha$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $M$  que satisfazem as seguintes propriedades:*

- i.  $\bigcup_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = M$ ;
- ii. *Para todo par  $\alpha, \beta$  tal que  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , os conjuntos  $\mathbf{x}_\alpha^{-1}(W)$  e  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W)$  são abertos em  $\mathbb{R}^n$  e as aplicações  $\mathbf{x}_\beta^{-1}(W) \circ \mathbf{x}_\alpha(W)$  são diferenciáveis;*
- iii. *A família  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  é máxima relativa às condições (i) e (ii).*

**Definição 2.2.** *Sejam  $M^n$  e  $N^m$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $\varphi : M^n \rightarrow N^m$  é diferenciável em  $p \in M^n$  se dada uma parametrização  $\mathbf{y} : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$  em  $\varphi(p)$ , existe uma parametrização  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  em  $p$  tal que  $\varphi(\mathbf{x}(U)) \subset \mathbf{y}(V)$  e a aplicação*

$$\mathbf{y}^{-1} \circ \varphi \circ \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

*é diferenciável em  $\mathbf{x}^{-1}(p)$ . A aplicação  $\varphi$  é diferenciável em um aberto de  $M$ , se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

**Definição 2.3.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável. Uma aplicação  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  é denominada uma curva (diferenciável) em  $M^n$ . Sejam  $\alpha(0) = p \in M^n$  e  $\mathcal{D}(M^n)$  o conjunto das funções diferenciáveis definidas em  $M^n$ . O vetor tangente à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função  $\alpha'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por*

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}, f \in \mathcal{D}.$$

*Um vetor tangente em  $p$  é o vetor em  $t = 0$  de alguma curva  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ . O conjunto dos vetores tangentes a  $M$  em  $p$  será indicado por  $T_p M$ . O conjunto  $TM = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_p M\}$  é uma variedade diferenciável de dimensão  $2n$ , denominado fibrado tangente.*

**Proposição 2.1.** *Sejam  $M^n, N^m$  variedades diferenciáveis e  $\varphi : M^n \rightarrow N^m$  uma aplicação diferenciável. Dados  $p \in M$  e  $v \in T_p M$ , escolha uma curva diferenciável  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M^n$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$  e seja  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  dada por  $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear que não depende da escolha de  $\alpha$ .*

A aplicação linear  $d\varphi_p$  dada na proposição anterior é denominada diferencial de  $\varphi$  em  $p$ .

**Definição 2.4.** *Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma imersão se  $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$  é injetiva para todo  $p \in M$ . Se, além disso,  $\varphi$  é um homeomorfismo sobre  $\varphi(M) \subset N$ , onde  $\varphi(M)$  tem a topologia induzida por  $N$ , dizemos que  $\varphi$  é um mergulho. Se  $M \subset N$  e a inclusão  $i : M \rightarrow N$  é um mergulho, dizemos que  $M$  é uma subvariedade de  $N$ .*

**Definição 2.5.** *Dizemos que uma variedade diferenciável  $M$  é orientável se admite uma estrutura diferenciável  $\{(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)\}$  tal que, para todo par  $\alpha, \beta$  com  $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , a matriz da diferencial da mudança de coordenadas  $\mathbf{x}_\alpha^{-1} \circ \mathbf{x}_\beta$  tem determinante positivo. Caso contrário, dizemos que  $M$  é não-orientável. Se  $M$  é orientável, a escolha da parametrização que satisfaça essa definição é denominada orientação de  $M$  e, neste caso, dizemos que  $M$  é orientada*

**Definição 2.6.** *Um campo de vetores  $X$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que a cada ponto  $p \in M$  associa um vetor  $X(p) \in T_p M$ .*

Dada uma função  $f \in \mathcal{D}(M)$ , podemos pensar em campos de vetores como uma aplicação  $X : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(N)$  do conjunto  $\mathcal{D}(M)$  das funções diferenciáveis em  $M$  no conjunto  $\mathcal{D}(N)$  das funções em  $N$ , definida do seguinte modo

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p),$$

onde  $f$  indica a expressão de  $f$  na parametrização  $\mathbf{x}$ . Nesse contexto, dizemos que  $X$  é diferenciável se, e somente se,  $Xf \in \mathcal{D}(N)$  para todo  $f \in \mathcal{D}(M)$ .

A interpretação de  $X$  como um operador em  $\mathcal{D}(M)$  permite considerarmos os iterados de  $X$ , porém, na maioria das vezes,  $XY$  e  $YX$  de campos de vetores  $X$  e  $Y$  em  $M$  não são campos de vetores. Entretanto, podemos afirmar o seguinte resultado:

**Lema 2.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  campos diferenciáveis de vetores em uma variedade diferenciável  $M$ . Então, existe um único campo de vetores  $Z$  tal que*

$$Zf = (XY - YX)f, \forall f \in \mathcal{D}(M).$$

O campo de vetores  $Z = XY - YX$  é denominado colchete de  $X$  e  $Y$ , o qual será denotado por  $[X, Y]$ .

Denotaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em  $M$ .

## 2.2 MÉTRICAS

**Definição 2.7.** Uma métrica Riemanniana (ou estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  (isto é, uma forma bilinear simétrica e positiva definida) no espaço tangente  $T_p M$ , que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  é um sistema de coordenadas locais em torno de  $p$ , com  $\mathbf{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in \mathbf{x}(U)$  e  $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\mathbf{x}(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , então  $\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  é uma função diferenciável em  $U$ . As funções  $g_{ij} = g_{ji}$  são chamadas expressão da métrica Riemanniana (ou os  $g_{ij}$  da métrica) no sistema de coordenadas  $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ .

A definição de métrica Riemanniana não depende da escolha do sistema de coordenadas.

**Definição 2.8.** Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é denominada uma variedade Riemanniana.

**Definição 2.9.** Consideremos  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  (isto é,  $f$  é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável) é chamado uma isometria se

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \forall p \in M, \forall u, v \in T_p M \quad (2)$$

**Definição 2.10.** Sejam  $M$  e  $N$  variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável  $f : M \rightarrow N$  é uma isometria local em  $p \in M$ , se existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f : U \rightarrow f(U)$  é um difeomorfismo satisfazendo 2. Dizemos que a variedade Riemanniana  $M$  é localmente isométrica à variedade  $N$  se para todo  $p$  em  $M$  existem uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$  e uma isometria local  $f : U \rightarrow f(U) \subset N$ .

**Exemplo 2.1.** (Variedades Imersas) Seja  $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$  uma imersão. Se  $N$  possui uma estrutura Riemanniana,  $f$  induz uma estrutura Riemanniana em  $M$  dada por  $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$ ,  $u, v \in T_p M$ . A métrica de  $M$  é chamada a métrica induzida por  $f$  e dizemos que  $f$  é uma imersão isométrica.

## 2.3 CONEXÃO

**Definição 2.11.** Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (a)  $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$   
 (b)  $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$   
 (c)  $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + X(f)Y$  onde  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ .

**Proposição 2.2.** *Seja  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim  $\nabla$ . Então, existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$  ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c$ , tal que*

- (a)  $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ ;  
 (b)  $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$ ;  
 (c) *Se  $V$  é um campo vetorial induzido de  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , isto é,  $V(t) = Y(c(t))$ , então*

$$\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dz}}Y,$$

onde  $V, W$  são campos vetoriais ao longo de  $c$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função diferenciável.

**Definição 2.12.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável com uma conexão afim e  $\langle, \rangle$  uma métrica Riemanniana. A conexão  $\nabla$  é dita compatível com a métrica  $\langle, \rangle$  quando para toda curva diferenciável  $c$  e quaisquer pares de campos de vetores paralelos  $P$  e  $P'$  ao longo de  $c$ , tivermos  $\langle P, P' \rangle = k$ , onde  $k$  é uma constante.*

**Proposição 2.3.** *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana. Uma conexão  $\nabla$  em  $M$  é compatível com a métrica se, e somente se, para todo par  $V, W$  de campos de vetores ao longo da curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$ , tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle, t \in I.$$

**Corolário 2.1.** *Uma conexão  $\nabla$  em uma variedade Riemanniana  $M$  é compatível com a métrica se, e somente se,*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_XY, Z \rangle + \langle Y, \nabla_XZ \rangle, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

**Definição 2.13.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita simétrica quando*

$$\nabla_XY - \nabla_YX = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

**Teorema 2.1.** *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  em  $M$  simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

## 2.4 CURVATURAS

Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Definimos a curvatura  $R$  de  $M$  como o tensor que associa a cada par  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  uma aplicação  $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathfrak{X}(M),$$

onde  $\nabla$  é a conexão Riemanniana de  $M$ .

Sejam  $V \in T_p M$  um subespaço bi-dimensional do espaço tangente  $T_p M$  e  $\{X, Y\}$  uma base de  $T_p V$ . Definimos a curvatura seccional de  $V$  em  $p$  como o número real

$$K(X, Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{|X \wedge Y|^2}$$

onde  $|X \wedge Y|^2 = |X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$ . A curvatura seccional  $K$  de  $V$  independe da base particular  $\{X, Y\}$  de  $S$ .

Fixado um vetor unitário  $X$  em  $T_p M$  tomemos uma base ortonormal  $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  do hiperplano de  $T_p M$  ortogonal a  $X$  definimos a *curvatura de Ricci* de  $M$   $\text{Ric}(X) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  por

$$\text{Ric}(X) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)X, e_i \rangle,$$

e a *curvatura escalar* de  $M$  definimos como sendo

$$S(p) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle.$$

Em outras palavras, para cada vetor unitário  $X \in T_p M$ , *curvatura de Ricci* é a soma das curvaturas seccionais de planos gerados por  $X$  e os outros vetores de uma base ortonormal e a *curvatura escalar* é a soma de todas as curvaturas seccionais de planos gerados por pares de vetores de uma base ortonormal.

Para informações mais detalhadas sobre os fatos apresentados nessa seção, sugerimos ao leitor consultar (LEE, 2006) ou (CARMO, 2008), porém, para este último, nossa definição de curvatura difere por um sinal de menos.

## 2.5 IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Dadas variedades Riemannianas  $M$  e  $N$ , com métricas Riemannianas respectivamente  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_N$ , dizemos que uma aplicação  $\varphi : M \rightarrow N$  é uma imersão isométrica se

$$\langle d\varphi_p(X_p), d\varphi_p(Y_p) \rangle_N = \langle X_p, Y_p \rangle_M,$$

para todos  $p \in M$  e  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Em particular, toda imersão isométrica é uma imersão e, como tal, localmente um mergulho. Portanto, sempre que não houver perigo de confusão, identificaremos  $p \in M$  com  $\varphi(p) \in N$  e denotaremos as métricas de  $M$  e  $N$  simplesmente por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Dado  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $\varphi(U) \subset N$  é uma subvariedade de  $N$ . Portanto, existem uma vizinhança  $\bar{U}$  de  $\varphi(p)$  e um difeomorfismo  $\Phi : \bar{U} \rightarrow V \subset \mathbb{R}^k$  em um aberto  $V$  do  $\mathbb{R}^k$ , tais que  $\Phi$  aplica difeomorficamente  $\varphi(U) \cap \bar{U}$  em um aberto do subespaço  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}$ . Identificaremos  $U$  com  $\varphi(U)$  e cada vetor  $v \in T_q M$ ,  $q \in U$ , com o vetor  $d\varphi_q(v) \in T_{\varphi(q)} N$ . Assim, para cada  $p \in M$ , o produto interno em  $T_p N$  decompõe  $T_p N$  na soma direta

$$T_p N = T_p M \oplus (T_p M)^\perp,$$

onde  $(T_p M)^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p M$  em  $T_p N$ . Se  $\nu \in T_p N$ ,  $p \in M$ , podemos escrever

$$\nu = \nu^T + \nu^\perp, \quad \nu^T \in T_p M, \quad \nu^\perp \in (T_p M)^\perp.$$

Denominamos por  $\nu^T$  a componente tangencial de  $\nu$  e  $\nu^\perp$  a componente normal de  $\nu$ . Se  $X, Y$  são campos locais de vetores em  $M$  e  $\bar{X}, \bar{Y}$  são extensões locais a  $M$ , definimos

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^T.$$

**Teorema 2.2.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ , a aplicação  $\sigma : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$  dada por*

$$\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

A demonstração deste resultado pode ser encontrado em (LEE, 2006) ou (CARMO, 2008).

É importante salientar que o resultado acima nos garante que em um sistema de coordenadas  $\alpha(X, Y)(p)$  depende apenas de  $X(p)$  e de  $Y(p)$ .

Definimos agora a segunda forma fundamental: sejam  $p \in M$  e  $\eta \in (T_p M)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle, \quad x, y \in T_p M,$$

é, pelo teorema anterior, uma forma bilinear e simétrica.

**Definição 2.14.** A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $T_pM$  por

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x) = \langle \alpha(x, x), \eta \rangle,$$

é denominada a segunda forma fundamental de  $\varphi$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .

Associada à aplicação  $H_\eta$  temos uma aplicação linear auto-adjunta  $A_\eta : T_pM \longrightarrow T_pM$  denominada operador de forma ou operador de Weingarten definido por

$$\langle A_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle \alpha(x, y), \eta \rangle.$$

Um fato muito importante sobre o operador de forma é dado pelo resultado a seguir.

**Proposição 2.4.** Sejam  $p \in M^n, v \in T_pM$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ . Seja  $\bar{\eta}$  uma extensão local de  $\eta$  normal à  $M$ . Então

$$A_\eta(v) = -(\bar{\nabla}_v \bar{\eta})^T$$

**Definição 2.15.** Seja  $M^n$  uma hipersuperfície orientável e  $A_\eta$  seu operador de Weingarten. Dizemos que  $M^n$  é fracamente convexa quando

$$\langle A_\eta v, v \rangle \geq 0$$

para todo  $v \in T_pM$

**Proposição 2.5.** Se  $\varphi : M \rightarrow \bar{M}$  é uma imersão isométrica e  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , então:

(a) (Gauss).  $(\bar{R}(X, Y)Z)^\top = R(X, Y)Z + A_{\alpha(X, Z)}Y - A_{\alpha(Y, Z)}X.$

(b) (Codazzi).  $(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z).$

É importante salientar que utilizando o item (a) da proposição acima podemos escrever a equação de Gauss da seguinte forma:

$$K_{\bar{M}}(X, Y) - K_M(X, Y) = \langle AX, X \rangle \langle AY, Y \rangle - |\langle AX, Y \rangle|^2.$$

## 2.6 GRADIENTE, DIVERGENTE, LAPLACIANO E HESSIANA

**Definição 2.16.** Seja  $f \in \mathcal{D}(M)$ . O gradiente de  $f$  é o campo vetorial suave  $\nabla f$ , definido sobre  $M$  da seguinte maneira:

$$X(f) = \langle \nabla f, X \rangle$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

Segue direto da definição que, se,  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ , então:

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g;$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

**Definição 2.17.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . A divergência de  $X$  é a função suave  $\operatorname{div} X : M \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por*

$$\operatorname{div} X(p) = \operatorname{tr} [Y(p) \longmapsto (\nabla_Y X)(p)],$$

onde  $\operatorname{tr}$  significa o traço da aplicação  $\nabla_{(\cdot)} X : T_p M \rightarrow T_p M$ .

Decorre diretamente da definição que, se  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f \in \mathcal{D}(M)$ , então:

$$\operatorname{div}(X + Y) = \operatorname{div} X + \operatorname{div} Y;$$

$$\operatorname{div}(f \cdot X) = f \cdot \operatorname{div} X + \langle \nabla f, X \rangle.$$

**Definição 2.18.** *Seja  $f \in \mathcal{D}(M)$ . O Laplaciano de  $f$  é o operador  $\Delta : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ , definido por*

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f).$$

Segue das propriedades do gradiente e do divergente que, se  $f, g \in \mathcal{D}(M)$ :

$$i. \Delta(f + g) = \Delta(f) + \Delta(g)$$

$$ii. \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle;$$

$$iii. \operatorname{div}(g\nabla f) = g\Delta f + \langle \nabla f, \nabla g \rangle$$

**Definição 2.19.** *Seja  $f \in \mathcal{D}(M)$ . Definimos o hessiano de  $f$  no ponto  $p$ , para  $v \in T_p M$ , como o operador linear  $\operatorname{Hess} f_p : T_p M \rightarrow T_p M$ , dado por*

$$\operatorname{Hess} f_p(v) = \nabla_v \nabla f.$$

Segue das propriedades de conexão Riemanniana que, se  $X$  é uma extensão local de  $v$ , então

$$\operatorname{Hess} f_p(v) = (\nabla_X \nabla f)(p).$$

**Proposição 2.6.** *Se  $f \in \mathcal{D}(M)$ , então o hessiano de  $f$  no ponto  $p$  é um operador linear auto-adjunto.*

**Proposição 2.7.** *Se  $f \in \mathcal{D}(M)$ , então para todo  $p$  em  $M$  vale a igualdade*

$$\Delta f(p) = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess} f_p).$$

## 2.7 OPERADOR DE NEWTON E $S_r$ CURVATURAS

Seja  $\varphi : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica entre duas variedades Riemannianas e seja  $A : T_p M \rightarrow T_p M$  o operador linear auto-adjunto associado à segunda forma fundamental da imersão  $\varphi$  em cada ponto  $p \in M$ . Associado a  $A$ , tem-se os  $n$  invariantes  $S_r(A)$ ,  $1 \leq r \leq n$ , dados pela igualdade

$$\det(tI - A) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r(A) t^{n-r},$$

onde  $S_0(A) = 1$  por definição. Quando  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base de  $T_p M$  formada por autovetores de  $A$ , com autovalores respectivamente,  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , vê-se que

$$S_r(A) = \sigma_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_r},$$

em que consideramos  $S_0 = H_0 = 1$  e  $S_r = H_r = 0$  se  $r \notin \{0, 1, \dots, n\}$ . As funções  $S_1, S_2$  e  $S_n$  são conhecidas como curvatura média, escalar e de Gauss-Kronecker, respectivamente.

Normalizando as  $S_r$  isto é, escrevendo

$$H_r = \frac{1}{n_r} S_r,$$

onde  $n_r = \binom{n}{r}$ , temos

### Proposição 2.8.

1. Para  $1 < r < n$ , tem-se  $H_r^2 \geq H_{r-1} \cdot H_{r+1}$ . Além disso, se a igualdade ocorrer para  $r = 1$  ou para algum  $1 < r < n$ , com  $H_{r+1} \neq 0$  neste último caso, então  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

2. Se  $H_1, H_2, \dots, H_{r-1}$  são não negativas e  $H_r$  é positivo para algum  $1 < r < n$ , então  $H_1 \geq H_2^{\frac{1}{2}} \geq H_3^{\frac{1}{3}} \geq \dots \geq H_r^{\frac{1}{r}}$ . Além disso, se a igualdade ocorrer para algum  $1 \leq j < r$ , então  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

As transformações  $P_r(A) : T_p M \rightarrow T_p M$  conhecidas também como o  $r$ -ésimo Tensor de Newton, são definidas, para cada  $r \in \{0, \dots, n-1\}$ , por

$$\begin{aligned} P_0(A) &= I \\ P_1(A) &= S_1(A)I - A \\ &\vdots \\ P_r(A) &= S_r(A)I - AP_{r-1}(A), \end{aligned}$$

onde  $I$  é a identidade. De maneira mais geral,

$$P_r(A) = \begin{cases} I, & r = 0 \\ \sum_{j=0}^r (-1)^j S_{r-j}(A) A^j, & r \in \{1, \dots, n-1\} \\ 0, & r \geq n, \end{cases}$$

onde 0 denota a transformação linear nula. Por simplicidade, escrevemos  $P_r$  e  $S_r$  ao invés de  $P_r(A)$  e  $S_r(A)$ , respectivamente.

**Proposição 2.9.** *Para cada  $1 \leq r \leq n-1$ , temos*

$$(a) \operatorname{tr}(P_r) = (n-r)S_r;$$

$$(b) \operatorname{tr}(AP_r) = (r+1)S_{r+1}$$

$$(c) \operatorname{tr}(A^2P_r) = S_1S_{r+1} - (r+2)S_{r+2};$$

$$(d) \operatorname{tr}((\nabla_X A) \circ P_{r-1}) = \langle \nabla S_r, X \rangle.$$

**Lema 2.2.** *Sejam  $\varphi : M^n \rightarrow N^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortornormal de  $T_pM$  e  $\nu$  seu vetor normal unitário. Então*

$$\sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_k) X, e_i \rangle = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^n (-1)^{k-1-j} \langle {}^N R(e_i, A^{k-1-j} X) \nu, P_j e_i \rangle$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  onde  $A$  é o operador de Weingarten na direção de  $\eta$ . Em particular se  $N$  tem curvatura constante

$$\sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_k) X, e_i \rangle = 0.$$

**Prova 2.1.** (ALÍAS et al., 2016) pág. 353-356. □

## 2.8 OPERADOR $L_r$

Para cada tensor de Newton  $P_r$ , temos um operador diferencial linear de segunda ordem  $L_r : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$  definido a seguir.

**Definição 2.20.** *Dada uma função diferenciável  $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{N}$  com  $0 \leq r \leq n-1$ , definimos o operador diferencial de segunda ordem  $L_r$  em  $M^n$  por:*

$$L_r(f)(p) = \operatorname{tr}[(P_r \operatorname{Hess} f)(p)].$$

Apresentar as propriedades dos tensores de Newton em conjunto com a definição de divergente, percebemos que tais operadores generalizam o operador laplaciano. De fato,

$$L_0(f)(p) = \text{tr} [(P_0 \text{Hess } f)(p)] = \Delta f(p).$$

Por esse motivo, em (VOSS, 1956), tais aplicações foram introduzidas no estudo de um certo tipo de problema variacional. Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Então,

$$\begin{aligned} \text{div} (P_r(\nabla f)) &= \sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{e_i} P_r)(\nabla f), e_i \rangle + \sum_{i=1}^n \langle P_r(\nabla_{e_i} \nabla f), e_i \rangle \\ &= \langle \text{div } P_r, \nabla u \rangle + L_r(f), \end{aligned}$$

onde o divergente do operador  $P_r$  em  $M$  é exatamente

$$\text{div } P_r = \text{tr} (\nabla P_r) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} P_r)(e_i).$$

logo

$$L_r(f) = \text{tr} (P_r \circ \text{Hess}(f)) = \text{div} (P_r(\nabla f)) - \langle \text{div } P_r, \nabla f \rangle.$$

e, portanto, pelo lema 2.2 se  $M$  tem curvatura constante,

$$L_r(f) = \text{tr} (P_k \circ \text{Hess}(f)) = \text{div} (P_r \nabla f).$$

Além disso, por um cálculo direto, temos que

$$L_r(fg) = fL_r g + gL_r f + 2 \langle P_r \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Sejam  $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície,  $N(p)$  seu vetor normal em um ponto  $p$  e  $v_0(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$  um vetor fixado. Considere as funções  $f = \langle x, N \rangle$ ,  $g = \langle v_0, N \rangle$  e  $u(p) = \frac{|x(p)|^2}{2}$ . A seguir, vamos explicitar  $L_r f$ ,  $L_r g$  e  $L_r u$ , pois tais expressões são fundamentais para o nosso estudo.

**Lema 2.3.** *Sejam  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície,  $f$ ,  $g$  e  $u$  como acima. Então,*

$$i. L_{r-1}(f) = -\nabla_{x^\top} S_r - r S_r - f(S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}).$$

$$ii. L_{r-1}(g) = -\nabla_{v^\top} S_r - g(S_1 S_r - (r+1)S_{r+1}).$$

$$iii. L_{r-1}(u) = (n-r-1)S_{r-1} - r f S_r.$$

**Corolário 2.2.** *Se  $H_{r+1}$  é constante, então*

$$L_{r-1} f = -c_{r-1} (H_r + f H_{r+1}) - n \binom{n}{r} (H_1 H_r - H_{r+1}) f$$

$$\text{onde } c_{r-1} = (n-r+1) \binom{n}{r-1}.$$

**Proposição 2.10.** *Seja  $x : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma  $S_r$ -shrinker. Então,*

$$\frac{1}{2}L_{r-1}S_r^2 = S_r^2 (r - \text{trace}(A^2 P_{r-1})) + \langle (S_r A + A^2 P_{r-1})x^\top, x^\top \rangle.$$

**Prova 2.2.** *Combinando*

$$\frac{1}{2}L_{r-1}(f^2) = fL_{r-1}(f) + \langle P_{r-1}\nabla f, \nabla f \rangle$$

com o lema anterior e fazendo  $f = S_r = -\langle x, N \rangle$  por uma substituição direta, o resultado segue.  $\square$

## 2.9 ELIPTICIDADE DOS OPERADORES $L_r$

Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto e  $C_c^\infty(U)$  o conjunto das funções de classe  $C^\infty(U)$  com suporte compacto. Se  $u \in C^k(U)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}$ ,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_m^{\alpha_m}},$$

onde  $\alpha$  é tal que  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ . Um operador diferenciável de segunda ordem é da forma

$$Tu = - \sum_{i,j=1}^m [a^{ij}(x)u_{x_i}]_{x_j} + \sum_{i=1}^m b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (3)$$

ou,

$$Tu = \sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^m b^i(x)u_{x_i} + c(x)u \quad (4)$$

O operador  $T$  é dito está na forma divergente se é dado por (3) e na forma não divergente, caso for dado por (4). Se  $a^{ij} \in C^1(U)$ , então as duas formas acima de expressar o operador  $T$  são equivalentes. Doravante, assumimos que  $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$  para todos  $i, j = 1, \dots, n$ , isto é, que a matriz  $(a^{ij})$  é simétrica.

**Definição 2.21.** *O operador  $T$  é dito elíptico, se os autovalores da matriz  $(a^{ij})$  são não nulos e tem todos o mesmo sinal. (Ou seja, a matriz  $(a^{ij})$  ou é definida positiva ou é definida negativa.) Se existe uma constante  $\theta > 0$  tal que*

$$\sum_{i,j=1}^m a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \theta \|\xi\|^2,$$

para quase todo  $x \in U$  e todo  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m$ , o operador  $T$  é dito uniformemente elíptico.

Então, uma vez que os operadores  $L_r$  podem ser expressos da forma

$$L_r(f) = \sum_{i,j=1}^m \langle P_r(e_i), e_j \rangle e_j(e_i(f)) + \sum_{i,j,k=1}^m \langle P_r(e_i), e_j \rangle e_k(f) \Gamma_{jk}^i$$

temos que

**Proposição 2.11.** *O operador  $L_r$  é elíptico se, e somente se,  $P_r$  é positivo definido.*

Utilizando as propriedades algébricas das curvaturas  $S_r$ , para mais detalhes ver (HARDY et al., 1952).

**Proposição 2.12.** *Seja  $M^m$  uma variedade Riemanniana compacta, conexa, sem bordo e orientada, e  $x: M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}(c)$  uma imersão isométrica. Se  $S_{r+1} > 0$ , então  $L_r$  é um operador elíptico.*

**Definição 2.22.** *Dizemos que  $p_0 \in \Sigma^n$  é um ponto elíptico quando todas as curvaturas principais de  $\Sigma$  em  $p_0$  são positivas.*

## 2.10 PRINCÍPIO DO MÁXIMO DE OMORI-YAU

Dado um endomorfismo simétrico  $T$  em uma variedade Riemanniana  $M$ , vamos considerar o operador

$$L(f) = \text{tr}(T \circ \text{Hess}(f))$$

para  $f \in C^2(M)$ . Em (CHENG; YAU, 1977), os autores observam que operadores desse tipo são da forma divergente, se  $\text{div}(T) = \text{tr}(\nabla T) = 0$  e, conseqüentemente,

$$L(f) = \text{div}(T \nabla f).$$

Além disso,  $L$  é um operador semi-elíptico(elíptico) e, somente, se  $T$  é positivo semi-definido. Assim, dizemos que o operador  $L$  satisfaz o princípio do máximo generalizado de Omori-Yau, se para cada  $f \in C^\infty(M)$  limitada superiormente, existe uma sequência  $\{x_k\}$  em  $M$  tal que

$$\text{i) } f(x_k) \rightarrow f^* := \sup_{\Sigma} f; \quad \text{ii) } \limsup Lf(x_k) \leq 0$$

A seguir, temos apresentaremos um tipo de princípio de máximo para operador do tipo que descrevemos acima.

**Teorema 2.3.** *Sejam  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana completa não compacta,  $o \in \Sigma$  um ponto de referência e  $r(p)$  a função distância de  $p$  até  $o$ . Suponha que a curvatura seccional de  $\Sigma$  satisfaz*

$$K_{\Sigma}(p) \geq -G^2(r(p)),$$

com  $G \in C^1(\mathbb{R}_0^+)$  satisfazendo

$$i) \ G(0) > 0; \quad ii) \ G'(t) \geq 0; \quad iii) \ \frac{1}{G(t)} \notin \mathcal{L}^1(+\infty).$$

Se  $T$  é positivo semi-definido e  $\sup_{\Sigma} T < \infty$ , então  $L$  satisfaz o princípio do máximo de Omori-Yau generalizado.

**Prova 2.3.** Ver Teorema 6.13 em Alías et al. (2016).

Vale salientar que o resultado acima é uma generalização do princípio do máximo de Hopf que apresentaremos a seguir.

**Teorema 2.4** (Princípio do Máximo de Hopf). *Seja*

$$L(f) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + c(x)f$$

um operador elíptico definido em um conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

i) Se  $c = 0$ ,  $L(f) \geq 0$  (ou  $L(f) \leq 0$ ) e existe  $\max_{\Omega} f$  (ou  $\min_{\Omega} f$ ), então  $f$  é constante em  $\Omega$ .

ii) Se  $c \leq 0$ ,  $L(f) \geq 0$  (ou  $L(f) \leq 0$ ) e existe  $\max_{\Omega} f \geq 0$  (ou  $\min_{\Omega} f \leq 0$ ), então  $f$  é constante em  $\Omega$ .

iii) Independente do sinal de  $c$ , se  $L(f) \geq 0$  (ou  $L(f) \leq 0$ ) e  $\max_{\Omega} f = 0$  (ou  $\min_{\Omega} f = 0$ ) então  $f$  é constante.

**Prova 2.4.** Ver (PUCCI; SERRIN, 2004).

Uma vez que em coordenadas os operadores  $L_r$  podem ser escritos na forma

$$L_r(f) = \sum_{i,j=1}^m \langle P_r(e_i), e_j \rangle e_j(e_i(f)) + \sum_{i,j,k=1}^m \langle P_r(e_i), E_j \rangle e_k(f) \Gamma_{jk}^i$$

## 2.11 TEOREMA DE STOKES GENERALIZADO

Seja  $\omega \in \Omega^{n-1}(\Sigma)$  uma  $(n-1)$  forma diferencial em  $\Sigma^n$  e  $d\omega$  sua derivada exterior.

Considere uma subsequência  $B_i$  de domínios  $\Sigma^n$  tais que  $B_i \subset B_{i+1}$ ,  $\Sigma = \cup_{i \geq 1} B_i$  e

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \int_{B_i} d\omega = 0.$$

Suponha que  $\Sigma^n$  seja orientável pelo elemento de volume  $dv_g$ , e seja  $\mathcal{L}^1(\Sigma)$  o espaço das funções integráveis em  $\Sigma^n$ . Se  $\omega = \iota_X dv_g$  é uma contração de  $dv_g$  na direção do campo suave  $X$  em  $\Sigma^n$ , então em (YAU, 1976) temos a seguinte:

**Proposição 2.13.** *Seja  $\Sigma$  uma variedade Riemanniana completa e orientável. Se  $X$  é um campo suave sobre  $\Sigma^n$  tal que  $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$  e  $\operatorname{div} X \geq 0$ , então  $\operatorname{div} X = 0$ .*

Posteriormente, em (KARP, 1981), o autor generalizou esse resultado da seguinte forma:

**Teorema 2.5.** *Seja  $\Sigma^n$  uma variedade Riemanniana completa, não compacta e  $X$  um campo de vetores suave em  $\Sigma$  tal que*

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r) \setminus B(r)} |X| dv_g = 0.$$

*Se  $\operatorname{div} X$  é integrável (i.e se  $(\operatorname{div} X)^+$  ou  $(\operatorname{div} X)^-$  são integráveis), então*

$$\int_{\Sigma} \operatorname{div} X dv_g = 0.$$

*Em particular, se fora de um compacto  $\operatorname{div} X \geq 0$  (ou  $\operatorname{div} X \leq 0$ ), então*

$$\operatorname{div} X = 0.$$

**Prova 2.5.** *Ver (KARP, 1981)* □

De fato, para perceber que este resultado generaliza a proposição acima citada, basta perceber que a condição  $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \int_{B(2r) \setminus B(r)} |X| dv_g = 0$  é um pouco mais fraca do que  $|X| \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ .

## 2.12 TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO PARA HIPERSUPERFÍCIES COM FUNÇÃO SUORTE CONSTANTE

Inspirados por (NOMIZU; SMYTH, 1969), em (DAJCZER; TOJEIRO, 1993), os autores conseguiram classificar as imersões em uma forma espacial  $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ , que possuem função suporte referente a  $p_0$   $f(p) = \langle x(p) + p_0, N \rangle$  constante.

**Teorema 2.6.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície orientada e completa com função suporte referente a  $p_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  constante. Então, ou*

$$\Sigma^n = \mathbb{S}^m(k) \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

*com  $\mathbb{S}(k)$  centrada em  $p_0$  ou  $\Sigma$  é umbílica.*

**Prova 2.6.** *Ver (DAJCZER; TOJEIRO, 1993).* □

### 3 RIGIDEZ

Utilizando as ideias contidas em (COLDING; MINICOZZI, 2012), em (LE; SESUM, 2011), os autores conseguiram obter um resultado do tipo *gap* para self-shrinkers em que o *gap* é dado pela norma do operador de Weingarten. Motivados por esse trabalho em (CAO; LI, 2013), os autores conseguiram obter um resultado de classificação para as self-shrinkers, e com o intuito de usar as ideias desenvolvidas por (COLDING; MINICOZZI, 2012), uma das principais hipóteses utilizada nesse trabalho é a condição de volume com crescimento polinomial finito, porque ela é um importante fator que garante o uso das fórmulas integrais que os autores utilizam na construção do resultado. Com base nas ideias de (COLDING; MINICOZZI, 2012), (LE; SESUM, 2011) e (CAO; LI, 2013), em (CHENG; PENG, 2015), os autores conseguiram obter resultados de rigidez análogos aos obtidos por (CAO; LI, 2013) e, inclusive, como consequência do seu principal resultado, eles conseguiram o mesmo tipo de *gap* encontrado por (LE; SESUM, 2011), mas para codimensão arbitrária. A grande contribuição do trabalho Cheng e Peng é que eles obtêm esses resultados sem a condição de crescimento de volume polinomial finito. Para tal, ao invés de fórmulas integrais como ferramenta principal, os autores fizeram uso de um tipo de princípio do máximo aplicado ao operador linear elíptico  $\mathcal{L}(f) = \Delta f - \langle \nabla f, x \rangle$ . Inspirados na técnica e nos resultados encontrados em (CHENG; PENG, 2015), neste capítulo, vamos estudar os self-shrinkers do fluxo da  $S_r$ -curvatura e, da mesma forma, obter resultados de rigidez como os encontrados por (CHENG; PENG, 2015) e, como consequência de um dos nossos resultados, também obteremos um resultado do tipo *gap*, porém, ao contrário de (LE; SESUM, 2011) e (CHENG; PENG, 2015), ao invés de depender da norma do operador de Weingarten, nosso *gap* dependerá da quantidade  $\text{tr}(A^2 P_1)$  que, como podemos observar, é um substituto natural da norma do operador de Weingarten, pois em geral

$$\text{tr}(A^2 P_{r-1}) = S_1 S_r - (r + 1) S_{r+1}$$

e, para  $r = 0$ , temos

$$\text{tr}(A^2) = S_1^2 - 2S_2 = |A|^2.$$

#### 3.1 EXEMPLOS $\text{tr}(A^2 P_{r-1})$

Nesta seção, vamos calcular a quantidade  $\text{tr}(A^2 P_{r-1})$  para as self-shrinkers do fluxo da  $S_r$ -curvatura.

**Lema 3.1.** *Os cilindros generalizados  $\mathbb{S}^k \left( \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \right) \times \mathbb{R}^{n-k}$  são os self-shrinkers do fluxo da  $S_r$ -curvatura para  $r \leq k \leq n$ . Além disso,  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) = 0$  para  $k = 0$  ou  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) = r$  caso contrário.*

**Prova 3.1.** *Uma vez que  $k_i$  e  $S_1 - k_i$  são os autovalores de  $A$  e  $P_1$ , respectivamente, denotando por  $R$  o raio da esfera temos que  $k_i = \frac{1}{R}$  para  $i = 1, \dots, k$  e zero para os demais índices. Então,*

$$S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r} = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \frac{1}{R^r} = \frac{1}{R^r} \frac{k!}{r!(k-r)!},$$

e

$$\langle (x, y), N(x, y) \rangle = \langle (x, y), \left( -\frac{x}{R}, 0 \right) \rangle = -\frac{|x|^2}{R} = -R.$$

Desse modo, como  $S_r = -\langle x, N \rangle$  temos que  $R = \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}}$ . Utilizando a Proposição 2.9 vamos calcular  $\text{tr}(A^2 P_r)$ .

$$\begin{aligned} \text{tr}(A^2 P_{r-1}) &= S_1 S_r - (r+1) S_{r+1} \\ &= \left( \frac{k}{R} \right) \left( \frac{k!}{R^r r!(k-r)!} \right) - (r+2) \left( \frac{k!}{R^{r+1} (r+1)!(k-r-1)!} \right) \\ &= \left( \frac{1}{R^{r+1}} \right) \left( \frac{k!}{r!(k-r)!} \right) r \\ &= r \end{aligned}$$

Portanto, nossos exemplos estão dados e o lema está provado.  $\square$

A seguir, salientamos que os teoremas 3.1, 3.2, 3.4, 3.5 e 3.7 estão no artigo *On the rigidity of self-shrinkers of the  $r$ -mean curvature flow* aceito para a publicação na revista *Communications in Contemporary Mathematics*.

## 3.2 HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS

Nesta seção, mostraremos que, sob certas condições, é possível caracterizar as self-shrinkers compactos do fluxo da  $S_r$ -curvatura como esferas.

**Teorema 3.1** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura, fechado e fracamente convexo. Se*

$$\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r,$$

então  $\Sigma$  é isométrico a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$ .

**Prova 3.2.** *Uma vez que  $\Sigma$  é fracamente convexo*

$$\langle (S_r A + A^2 P_{r-1}) x^\top, x^\top \rangle \geq 0.$$

*Pelo Proposição 2.10 sabemos que*

$$\frac{1}{2} L_{r-1}(S_r^2) = S_r^2(r - \text{tr}(A^2 P_{r-1})) + \langle (S_r A + A^2 P_{r-1}) x^\top, x^\top \rangle.$$

*Então, integrando essa expressão em conjunto com a convexidade de  $\Sigma$  e o teorema da divergência, obtemos*

$$S_r^2(r - \text{tr}(A^2 P_{r-1})) = 0$$

*e, assim,*

$$\langle A x^\top, x^\top \rangle = 0.$$

*Dessa última igualdade decorre*

$$A x^\top = 0,$$

*mas*

$$\nabla S_r = A x^\top$$

*e, logo,*

$$\langle x, N \rangle = C_0.$$

*Portanto, pelo Teorema 2.6 temos que  $\Sigma$  é uma esfera e, como  $S_r = -\langle x, N \rangle$ , concluímos que*

$$R = \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \quad \square$$

**Observação 3.1.** *Note que em nossos resultados a quantidade  $\text{tr}(A^2 P_{r-1})$  é um substituto natural para  $|A|^2$  e tal fato podemos encontrar em (ALENCAR et al., 2003), no contexto de hiper-superfícies  $r$ -mínimas. Além disso, como observado na introdução do capítulo, vale salientar que  $\text{tr}(A^2 P_1) = |A|^2 S_1 - |A|^3$ .*

No nosso próximo resultado, verificamos que excluindo a hipótese de  $\Sigma$  ser fechado e substituindo-a pela suposição de que alguma das  $H_r$  curvaturas é constante, sob certas condições, ainda é possível obter a compacidade e, mais ainda, concluir a rigidez de  $\Sigma$ , como no teorema anterior. É interessante notar que na literatura temos vários resultados importantes que decorrem da hipótese  $H_r$  constante, dentre eles podemos citar o clássico **Teorema de Alexandrov**, encontrado em (ALEXSANDOROV, 1956) no qual uma das hipóteses é que  $H_1 = H$  (curvatura média) seja constante, sua versão para  $H_2 = S$  (curvatura escalar) constante, provada em (ROS, 1988). Além disso, é importante observar que o caso que generaliza os dois anteriores, isto é, supondo que  $H_r$  seja constante para algum  $r$  encontramos em (ROS, 1987).

**Teorema 3.2** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura. Suponha que  $|P_{m+1}|$  é limitado e que existe um ponto elíptico em  $\Sigma$ . Se  $H_{m+1}$  é constante para  $m \geq r$  e  $|x|^\top \in \mathcal{L}^1(\Sigma)$ , então  $\Sigma$  é isométrico a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$ .*

**Prova 3.3.** *Substituindo  $f = -S_r$  no corolário 2.2, temos que*

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( (P_{m+1} - S_{m+1}I + \frac{c_m}{c_{m+1}} P_{m+1})x^\top \right) &= L_m(f) + \frac{c_m}{c_{m+1}} L_{m+1}(u) \\ &= -n \binom{n}{m+1} (H_1 H_{m+1} - H_{m+2}) S_r. \end{aligned}$$

*Nossas hipóteses em conjunto com a Proposição 2.13 nos garantem que*

$$\operatorname{div} \left( (P_{m+1} - S_{m+1}I + \frac{c_m}{c_{m+1}} P_{m+1})x^\top \right) = 0.$$

*Então,*

$$-n \binom{n}{m+1} (H_1 H_{m+1} - H_{m+2}) S_r = 0.$$

*Assim, uma vez que  $\Sigma$  admite um ponto elíptico,  $S_r \geq C_n^m H_{m+1}^{\frac{r}{m+1}} > 0$  e, deste modo,*

$$(H_1 H_r - H_{r+1}) = 0.$$

*Portanto, pela proposição 2.8,  $\Sigma$  é uma esfera.* □

Como consequência do teorema acima, conseguimos obter o caso fechado.

**Corolário 3.1.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura e fechado. Suponha que  $H_{r+1}$  é constante para algum  $r \geq 1$ , então  $\Sigma$  é isométrico a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$ .*

**Observação 3.2.** *Para  $r = 1$  o resultado acima, é encontrado em (COSTA-FILHO, 2021)*

Assumir que a curvatura  $S_1 = H$  é constante e que a curvatura  $S_2$  não muda de sinal também nos garante a rigidez obtida no teorema 3.1, porém aqui não se faz necessário as hipóteses de convexidade fraca e  $\operatorname{tr}(A^2 P_1) \leq 2$ .

**Corolário 3.2.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura fechado. Suponha que  $S_1$  é constante e que  $S_2$  não muda de sinal, então  $\Sigma$  é isométrico a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$ .*

**Prova 3.4.** *Uma vez que  $S_1$  é constante, pelo corolário 2.2 para  $r = 2$ , temos que*

$$\Delta(f) + \frac{c_1}{c_2} L_1(u) = -n(H_1^2 - H_2) S_2.$$

Integrando essa equação em conjunto com o Teorema 2.13, tem-se:

$$0 = \int_{\Sigma} (H_1^2 - H_2) S_2 dv_g.$$

Ao passo que  $S_2$  não muda de sinal e  $H_1^2 - H_2 \geq 0$ , podemos concluir que  $H_1^2 - H_2 = 0$  e, conseqüentemente, pela proposição 2.8  $\Sigma$  é umbílica e, logo, a compacidade de  $\Sigma$  implica  $\Sigma = \mathbb{S}^n \left( \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$ .  $\square$

**Observação 3.3.** Finalizado esses resultados de rigidez com relação a esfera, nos surge a seguinte questão: "É possível obter tais resultados sem hipóteses na curvatura e apenas a luz da condição que  $\Sigma$  seja mergulhada?". Caso sim, é interessante observar que esse fato seria um retultado do tipo Alexandrov para as self-shrinkers do fluxo da  $S_2$ -curvatura.

Em (COSTA-FILHO, 2020) **Teorema 3.2.1**, o autor estende um resultado encontrado em (VASQUEZ, 2015), em que a extensão é garantida, porque, em (COSTA-FILHO, 2020), considera-se apenas que a variedade esteja imersa e, ao contrário de (VASQUEZ, 2015), em codimensão qualquer. Inspirados no resultado acima citado, conseguimos obter o caso geral para self-shrinkers do fluxo da  $S_r$ -curvatura.

**Definição 3.1.** Diremos que uma imersão  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  é  $r$ -umbílica no ponto  $p \in \Sigma$  quando

$$AP_{r-1} = \lambda I,$$

onde  $A$  é a segunda forma fundamental de  $\Sigma$  e  $I$  sua aplicação identidade em  $p$ . Dizemos que  $\Sigma$  é  $r$ -umbílica se  $\Sigma$  é  $r$ -umbílica para todo  $p$ .

Considerando a  $r$ -forma fundamental sem traço de  $\Sigma$  denotada por  $\phi_r$  como sendo

$$\phi_r = \frac{r}{n} S_r I - AP_{r-1},$$

percebemos que  $\Sigma$  é  $r$ -umbílica se e somente se  $\phi_r = 0$ .

**Lema 3.2.** Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$  curvatura fechada. Se  $\Sigma$  é  $r$ -umbílica então  $\Sigma$  é uma esfera.

**Prova 3.5.** Se  $\Sigma$  é  $r$ -umbílica então pela definição de  $P_r$  para todo  $v \in T_p \Sigma$

$$P_r = \left( \frac{n-r}{r} \right) S_r I.$$

Aplicando o divergente temos que

$$0 = \operatorname{div}(P_r) = \left( \frac{n-r}{r} \right) \operatorname{div}(S_r I)$$

Logo,  $S_r$  é constante e, assim,  $\langle x, N \rangle$  é constante. Pelo Teorema 2.6,  $\Sigma$  é um cilindro generalizado e, como  $\Sigma$  é compacta, temos que  $\Sigma$  é uma esfera.

**Teorema 3.3.** *Seja  $\Sigma^n$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura imerso e fechado em  $\mathbb{R}^{n+k}$ .*

Se

$$\left(\frac{n-r+1}{n}\right) S_{r-1} - \left(\frac{n+r+1}{n^2}\right) |x|^2 + \left(\frac{r+1}{n^2}\right) S_r^2 - |AP_{r-1}|^2 \geq 0,$$

então

$$\Sigma = \mathbb{S}^n \left( \sqrt{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right).$$

**Prova 3.6.** *Multiplicando a equação acima por  $n$  temos que*

$$n|AP_{r-1}|^2 - (n-r+1) S_{r-1} \leq -\left(\frac{n+r+1}{n}\right) |x|^2 + \left(\frac{r+1}{n}\right) S_r^2$$

Uma vez que  $S_r = -\langle x, N \rangle$ ,  $-S_r^2 \geq -|x|^2$ , substituindo essa relação na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} n|AP_{r-1}|^2 &\leq (n-r+1) S_{r-1} - \left(\frac{r+n+1}{n}\right) S_r^2 + \left(\frac{r+1}{n}\right) S_r^2 \\ &\leq (n-r+1) S_{r-1} - S_r^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} n|AP_{r-1}|^2 - r^2 S_r^2 &\leq (n-r+1) S_{r-1} - (r^2+1) S_r^2 \\ &\leq (n-r+1) S_{r-1} - r S_r^2 \end{aligned}$$

Como  $n|\phi_r|^2 = n|AP_{r-1}|^2 - r^2 S_r^2$  temos

$$n|\phi_r|^2 \leq (n-r+1) S_{r-1} - r S_r^2.$$

Integrando essa última inequação

$$\int_{\Sigma} n|\phi_r|^2 dv_g \leq \int_{\Sigma} ((n-r+1) S_{r-1} - r S_r^2) dv_g.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} L_{r-1} \left( \frac{|x|^2}{2} \right) &= (n-r+1) S_{r-1} + \langle x, N \rangle r S_r \\ &= (n-r+1) S_{r-1} - r S_r^2. \end{aligned}$$

Sendo assim, pelo fato de  $\Sigma$  ser fechada,

$$0 = \int_{\Sigma} L_{r-1} \left( \frac{|x|^2}{2} \right) dv_g = \int_{\Sigma} ((n-r+1) S_{r-1} - r S_r^2) dv_g.$$

Então,

$$0 \leq \int_{\Sigma} n \|\phi_r\|^2 dv_g \leq \int_{\Sigma} ((n-r+1)S_{r-1} - rS_r^2) dv_g = 0.$$

Logo,  $\phi_r = 0$  garantindo que  $\Sigma$  é  $r$ -umbílica e, conseqüentemente, o fato de  $\Sigma$  fechada em conjunto com o lema 3.2 nos garante  $\Sigma$  é uma esfera com  $R = \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)}}$   $\square$

A seguir, vamos apresentar os resultados baseados em (GUO, 2018), no qual o autor obtém um condição para self-shrinkers com curvatura escalar constante, em que, ao impor uma limitação para essa constante que envolve uma quantidade dependente da curvatura de Ricci da variedade, ele consegue obter um resultado de rigidez. Além disso, apresentaremos um resultado que relaciona rigidez e parabolicidade de uma self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura.

Considerando

$$\lambda = \frac{1}{n|\Sigma|} \int_{\Sigma} \text{Ric}(x^{\top}, x^{\top}) dv_g,$$

temos:

**Teorema 3.4** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura e fechado. Se*

$$S_2^3 - \frac{n(n-1+\lambda)}{2}$$

*não muda de sinal em  $\Sigma$ , então  $\lambda = 0$  e  $\Sigma$  é isométrica a esfera  $\mathbb{S}^n \left( \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2}} \right)$ .*

**Prova 3.7.** *A fórmula de Bochner nos garante*

$$\frac{1}{2} \Delta(|\nabla f|^2) = \text{Ric}(x^{\top}, x^{\top}) + |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla f, \nabla(\Delta f) \rangle.$$

*Então, para  $f = \frac{|x|^2}{2}$  em conjunto com  $|A|^2 = H^2 - 2S_2$  obtemos,*

$$\frac{1}{2} \Delta(|x^{\top}|^2) = \text{Ric}(x^{\top}, x^{\top}) + n^2 + 2\langle x, N \rangle H + \langle x, N \rangle^2 (H^2 - 2S_2) + \langle x^{\top}, \nabla(n + \langle x, N \rangle H) \rangle.$$

*Uma vez que*

$$\langle x^{\top}, \nabla(n + \langle x, N \rangle H) \rangle = \text{div}((n + \langle x, N \rangle H) x^{\top}) - (n + \langle x, N \rangle H) \text{div}(x^{\top})$$

*e*

$$\text{div}(x^{\top}) = n + \langle x, N \rangle H,$$

*então, considerando o campo*

$$Z = \frac{1}{2} \nabla |x^{\top}|^2 + ((n-2) - H\langle x, N \rangle) x^{\top}$$

podemos escrever

$$\operatorname{div}(Z) = n(n-1) - 2S_2\langle x, N \rangle^2 + \operatorname{Ric}(x^\top, x^\top).$$

Integrando esta última equação e usando o teorema da divergência, concluímos que

$$\int_{\Sigma} (2S_2\langle x, N \rangle^2 + n(n-1+\lambda)) dv_g = 0.$$

Logo,  $S_2$  é constante e, conseqüentemente, pelo teorema 2.6  $\Sigma$  é uma esfera.  $\square$

**Teorema 3.5** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura e parabólica. Se  $S_2$  é positiva e  $S_2^2 - \frac{(n-1)}{2}H$  é não negativo em  $\Sigma$ , então  $\Sigma$  é isométrica a esfera*

$$\mathbb{S}^n \left( \sqrt[3]{\frac{n(n-1)}{2}} \right).$$

**Prova 3.8.** *Pelo fato de*

$$\Delta \left( \frac{|x|^2}{2} \right) = n + \langle x, N \rangle H,$$

em conjunto com  $S_2^2 - \frac{(n-1)}{2}H \geq 0$

$$S_2 H \geq \frac{(n-1)H^2}{2S_2},$$

temos

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{|x|^2}{2} \right) &= n + \langle x, N \rangle H \\ &= n - S_2 H \\ &\leq n - \frac{(n-1)H^2}{2S_2} \\ &= \frac{2nS_2 - (n-1)H^2}{2S_2}, \end{aligned}$$

mas  $H_1^2 \geq H_2$ , ou seja

$$2nS_2 - (n-1)H^2 \leq 0$$

e, conseqüentemente,

$$\Delta \left( \frac{|x|^2}{2} \right) \leq 0.$$

Logo, pela parabolicidade de  $\Sigma$ , temos que  $|x|^2$  é constante e, portanto,  $\Sigma$  é uma esfera.  $\square$

**Teorema 3.6.** *Seja  $x : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo, limitado com  $S_{r-1} > 0$*

$$S_r \geq \sqrt{\frac{(n-r+1)S_{r-1}}{r}}.$$

*Se existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tal que*

$$x_0 = \sup_{\Sigma} |x|,$$

$$\text{então } \Sigma = \mathbb{S}^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right).$$

**Prova 3.9.** *Uma vez que*

$$\begin{aligned} L_{r-1} \left( \frac{|x|^2}{2} \right) &= (n-r+1)S_{r-1} + \langle x, N \rangle r S_r \\ &= (n-r+1)S_{r-1} - r S_r^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

*pelo teorema 2.4,  $|x|$  é constante e, conseqüentemente,  $\Sigma \subset S^n(R_0)$  e, como  $\Sigma$  é completa,  $\Sigma$  é uma esfera.  $\square$*

### 3.3 HIPERSUPERFÍCIES COMPLETAS NÃO-COMPACTAS

Quando trabalhamos com hipersuperfícies compactas, é natural se perguntar sob quais condições é possível obter os resultados encontrados para as hipersuperfícies completa não compactas. Desse modo, pensamos nessa mesma questão ao observamos que a condição  $\text{tr}(A^2 P_r)$  é um substituto natural para  $|A|^2$ , sendo assim, uma vez que no Teorema 3.1 supomos  $\text{tr}(A^2 P_r) \leq r$ , duas perguntas naturais que surgem são:

O que acontece se  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r$  e  $\Sigma$  não é fechado?

O que acontece se  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) < r$  e  $\Sigma$  não é fechado?

Mais ainda, como no teorema 3.1, é possível obter algum tipo de rigidez? A seguir vamos apresentar nossas respostas para essas perguntas.

#### 3.3.1 O Cilindro

O que acontece se  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r$  e  $\Sigma$  é completa não compacta?

**Teorema 3.7** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo não compacto e fracamente convexo. Suponha que  $S_{r-1}$  é limitada e  $|\nabla S_r|$  é integrável. Se*

$$\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r,$$

então  $\Sigma$  é isométrico a

$$\mathbb{S}^k \left( \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \right) \times \mathbb{R}^{n-k}$$

para todo número inteiro  $k$  tal que  $r \leq k \leq n$ .

**Prova 3.10.** Como  $A$  é positivo semi-definido e  $S_{r-1}$  é limitada, então  $P_{r-1}$  também é positivo semi-definido, limitado e  $S_r$  também será. Usando a convexidade de  $A$  em conjunto com a proposição 2.10, obtemos

$$\text{div}(S_r P_{r-1} \nabla S_r) = \frac{1}{2} L_{r-1}(S_r^2) = S_r^2(r - \text{tr}(A^2 P_{r-1})) + \langle (S_r A + A^2 P_{r-1}) x^\top, x^\top \rangle \geq 0.$$

Note que

$$|S_r P_{r-1} \nabla S_r| \leq (n - r + 1) S_r S_{r-1} |\nabla S_r|,$$

e, assim,

$$|S_r P_{r-1} \nabla S_r| \in \mathcal{L}^1(\Sigma).$$

Então, podemos aplicar a proposição 2.13 e obter que

$$0 = \text{div}(S_r P_{r-1} \nabla S_r) = \frac{1}{2} L_{r-1}(S_r^2) \geq 0$$

e, assim,

$$\langle A x^\top, x^\top \rangle = 0.$$

Dessa última igualdade decorre

$$A x^\top = 0,$$

mas

$$\nabla S_r = A x^\top$$

e, logo,

$$\langle x, N \rangle = C_0.$$

Portanto, pelo teorema 2.6 temos que  $\Sigma$  é uma cilíndro e como  $S_r = -\langle x, N \rangle$  concluímos que

$$R = \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \quad \square$$

### 3.3.2 O Plano

O que acontece se  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) < r$  e  $\Sigma$  é completa não compacta?

**Teorema 3.8** ((BATISTA; XAVIER, 2023)). *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo não compacto e fracamente convexo. Suponha que  $S_1$  é limitada. Se  $\sup_{\Sigma} \text{tr}(A^2 P_{r-1}) < r$ , então  $\Sigma$  é isométrica ao  $\mathbb{R}^n$ .*

**Prova 3.11.** *Usando a equação de Gauss em conjunto com a desigualdade de Cauchy-Shwarz e a conveidade de  $\Sigma$  temos*

$$\begin{aligned} K_{\Sigma}(u, v) &= \langle Au, u \rangle \langle Av, v \rangle - \langle Au, v \rangle^2 \\ &\geq -|A|^2 \\ &\geq -S_1^2 \end{aligned}$$

para qualquer 2-plano  $\{u, v\} \subset T_p \Sigma$ . Como  $A$  é positivo semi-definido e  $S_r$  é limitada, então  $P_r$  é positivo semi-definido, limitado, assim,  $\sup \text{tr}(P_{r-1}) < +\infty$ . Desse modo podemos aplicar o teorema 2.3 ao operador  $L_r$ . Pela convexidade de  $\Sigma$  em conjunto com a Proposição 2.10 temos que

$$\begin{aligned} \text{div}(S_r P_{r-1} \nabla S_r) &= \frac{1}{2} L_{r-1}(S_r^2) = S_r^2(r - \text{tr}(A^2 P_{r-1})) + \langle (S_r A + A^2 P_{r-1})x^{\top}, x^{\top} \rangle \\ &\geq S_r^2(r - \sup \text{tr}(A^2 P_{r-1})) \geq 0 \end{aligned}$$

A limitação de  $S_{r-1}$  nos garante a que  $S_r$  também é limitada e, assim, pelo Teorema 2.3 temos que

$$0 \geq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} L_{r-1}(S_r^2(x_k)) \geq (S_r^*)^2(r - \sup \text{tr}(A^2 P_{r-1})) \geq 0,$$

Logo,  $S_r = 0$  em  $\Sigma$  e, conseqüentemente,  $\langle x, N \rangle = 0$  em  $\Sigma$  e, portanto, pelo teorema 2.6 concluímos o resultado.  $\square$

**Observação 3.4.** *É interessante observar que, para todo número inteiro  $k$  tal que  $r \leq k \leq n$ , o cilindro  $\mathbb{S}^k \left( \sqrt[r+1]{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \right) \times \mathbb{R}^{n-k}$  é um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo não compacto e fracamente convexo tal que  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) = r$ , portanto no teorema anterior nossas hipóteses são sharp.*

O resultado a seguir é uma consequência direta do teorema anterior, pois, ao passo que a condição  $\text{tr}(A^2 P_{r-1})$  é sharp, naturalmente, ganhamos um resultado do tipo gap, que nos diz:

**Corolário 3.3.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_{r+1}$ -curvatura completo não compacto e fracamente convexo. Então,*

i.  $\sup \text{tr}(A^2 P_{r-1}) \geq r$  ou

ii.  $\Sigma$  é isométrica ao  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.4 UM TEOREMA DE RIDIGEZ PARA UM SELF-SHRINEKER DO FLUXO DA $S_r$ -CURVATURA CONFINADA EM UM ESPAÇO

**Teorema 3.9.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow B^{n+1}(R_0)$  com  $R_0 \geq \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$  curvatura fechado com  $S_{r-1} > 0$  tal que  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r$ . Suponha que  $\Sigma$  tangência  $B^{n+1}(R_0)$  em um ponto  $p_0$ . Então,  $\Sigma = S^n \left( \sqrt[r+1]{\frac{n!}{r!(n-r)!}} \right)$ .*

**Prova 3.12.** *Uma vez que  $\Sigma$  está dentro da bola,  $|x| \leq \sqrt{R_0}$ . Assim,*

$$\begin{aligned} \langle x, N \rangle &\leq |x||N| \\ &\leq |x| \\ &\leq \sqrt{R_0}. \end{aligned}$$

Considerando a função

$$f(p) = \langle x(p), N(p) \rangle - \sqrt{R_0},$$

temos que  $f \leq 0$  e

$$f(p_0) = \max f = 0.$$

Agora, considere o operador  $T : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  dado por

$$T(f) = L_{r-1}(f) + \langle \nabla f, x^\top \rangle - r f.$$

Então, para  $f(p) = \langle x(p), N(p) \rangle - \sqrt{R_0}$  temos

$$\begin{aligned} T(f) &= \langle \nabla S_r, x^\top \rangle - r S_r - \langle x, N \rangle \text{tr}(A^2 P_{r-1}) + \langle \nabla(\langle x, N \rangle), x^\top \rangle - r \langle x, N \rangle + r \sqrt{R_0} \\ &= \langle A x^\top, x^\top \rangle + r \langle x, N \rangle - \langle x, N \rangle \text{tr}(A^2 P_{r-1}) - \langle A x^\top, x^\top \rangle - r \langle x, N \rangle + r \sqrt{R_0} \\ &= r \sqrt{R_0} - \langle x, N \rangle \text{tr}(A^2 P_1) \\ &\geq r(\sqrt{R_0} - \langle x, N \rangle) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Logo, como pelo teorema 2.4  $f$  é constante e, portanto, pelo teorema do 2.6 é uma esfera.  $\square$

### 3.5 RESULTADO DO TIPO SEMI-ESPAÇO

#### 3.5.1 Sobre a função altura.

Fixado um vetor  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$  e definindo  $h(p) = \langle x(p), v \rangle$  a função altura referente a  $v$  onde  $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é uma imersão, é fato que

$$\text{Hess}(h)(Z) = \langle v, N \rangle A(Z)$$

onde  $A$  onde é o operador de Weingarten de  $\Sigma$ . Desse modo  $L_{r-1}(h) = \text{tr}(P_{r-1} \text{Hess}(h))$  é dado por

$$L_{r-1}(h) = r \langle v, N \rangle S_r.$$

Agora, seja  $T : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  um operador definido como

$$T(f) = L_{r-1}(f) - r \langle \nabla f, x^\top \rangle + r f.$$

**Lema 3.3.** *Se  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  é um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura então  $T(h) = 0$ .*

**Prova 3.13.** *Uma vez que  $L_{r-1}(h) = r \langle v, N \rangle S_r$  obtemos:*

$$\begin{aligned} T(h) &= r \langle v, N \rangle S_r - r \langle v^\top, x^\top \rangle + r \langle x, v \rangle \\ &= -r \langle v, N \rangle \langle x, N \rangle - r \langle v^\top, x^\top \rangle + r \langle x, v \rangle \\ &= -r \langle x, \langle v, N \rangle N \rangle - r \langle v^\top, x^\top \rangle + r \langle x, v \rangle \\ &= -r \langle x, \langle v, N \rangle N + v^\top \rangle + r \langle x, v \rangle \\ &= -r \langle x, v \rangle + r \langle x, v \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.10.** *Seja  $x : \Sigma^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura compacto e  $\pi$  um hiperplano do  $\mathbb{R}^{n+1}$  passando pela origem. Se  $\Sigma$  é tangente a  $\pi$ , então  $x(\Sigma)$  não pode estar inteiramente contida em um dos hiperespaços determinados por  $\pi$*

**Prova 3.14.** *Suponha que  $x(\Sigma)$  esteja contida em apenas um dos hiperespaços determinados por  $\pi$ . Então, fixado  $v \in \pi^\perp$ , a função altura referente ao vetor  $v$ ,  $h : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(p) = \langle x(p), v \rangle$  satisfaz  $h \geq 0$  ou  $h \leq 0$ . Sem perda de generalidade suponha  $h \geq 0$ . Seja  $T : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  dado por*

$$T(f) = L_{r-1}(f) - r \langle \nabla f, x^\top \rangle + r f.$$

Pelo lema 3.3 temos que  $T(h) = 0$ . Portanto, pelo teorema 2.4 temos que  $h$  é constante e, portanto,  $h = 0$ . Mas  $h = 0$  nos daria que  $x(\Sigma) \subseteq \pi$  e como  $x(\Sigma)$  é compacto, conseqüentemente completo, temos  $x(\Sigma) = \pi$  e isso é um absurdo. Portanto, não existe  $\Sigma$  que esteja apenas de um lado de qualquer plano passando pela origem.  $\square$

**Corolário 3.4.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura completo não compacto que admite um ponto elíptico. Se  $\Sigma$  é tangente a um hiperplano  $\pi$  passado pela origem do  $\mathbb{R}^{n+1}$  e está contida em um dos hiperespaços determinados por  $\pi$ , então  $\Sigma$  não pode ser um plano.*

A seguir, apresentaremos um resultado de não existência.

**Teorema 3.11.** *Não existe  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura fechado com  $S_2 \leq 0$  tal que  $H \geq 0$  constante.*

**Prova 3.15.** *Suponha que exista. Por um lado*

$$\begin{aligned} \Delta(\langle x, N \rangle) &= -\langle \nabla H, x^\top \rangle - |A|^2 \langle x, N \rangle - H \\ &= -(|A|^2 \langle x, N \rangle + H). \end{aligned}$$

Uma vez que  $S_2 \leq 0$ ,  $\langle x, N \rangle = -S_2 \geq 0$ . Então,

$$\begin{aligned} \Delta(\langle x, N \rangle) &= -(|A|^2 \langle x, N \rangle + H) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema 2.4  $\langle x, N \rangle$  é constante e, conseqüentemente, pelo teorema do 2.6  $\Sigma$  é um plano, portanto temos um absurdo.  $\square$

## 4 CRESCIMENTO DE VOLUME

Teoremas de comparação são resultados muito relevantes na Geometria Riemanniana, dentre vários podemos citar dois resultados clássicos conhecidos como *Teorema da Comparação de Rauch* e *Teorema de Bishop-Gromov* que podem ser encontrados em (RAUCH, 1951) e (BISHOP; CRITTENDEN, 1964) respectivamente. Um aspecto interessante nesses tipos de resultado é que em geral eles exigem algum tipo de hipótese na curvatura, seja ela na curvatura seccional ou na curvatura de Ricci da própria variedade ou do ambiente. Em (DING; XIN, 2013), os autores estabelecem um de resultado de comparação para o volume de self-shrinkers sem a necessidade de exigir algum tipo de hipótese na curvatura. A partir dessas ideias em (CHENG; ZHOU, 2013), os autores foram capazes de generalizar os resultados em (DING; XIN, 2013) para variedades com peso também, sem estabelecer hipótese na curvatura e, mais ainda, fazem uma aplicação para os self-shrinkers do fluxo da  $S_1$ -curvatura. Com base na última referência citada, neste capítulo provaremos um resultado de controle de volume para uma variedade Riemanniana completa e não compacta e faremos uma aplicação para os self-shrinkers do fluxo da  $S_2$ -curvatura.

### 4.1 UM TEOREMA SOBRE O CRESCIMENTO DE VOLUME

**Teorema 4.1.** *Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana completa e não-compacta. Sejam  $f \in C^\infty(M)$  própria,  $\mu_1$  o primeiro autovalor do endomorfismo simétrico livre de divergência  $\mathcal{P}_{r-1}$  e  $\mathcal{L}_{r-1}(g) = \text{tr}(\mathcal{P}_{r-1} \text{Hess}(g))$  seu operador associado. Se  $|\nabla f|^2 \leq f$ ,  $\mu_1 \geq 0$  é limitado e*

$$\mathcal{L}_{r-1}(f) - |\nabla f|^2 + f \leq k\mu_1$$

em  $D_\alpha = \{x \in M : 2\sqrt{f} < \alpha\}$  para alguma constante  $k$ , então

$$\int_M \mu_1 e^{-f} dv_g < +\infty$$

e

$$\int_M \mu_1 dv_g \leq C\alpha^{2k}$$

onde  $C$  é uma constante que depende apenas de  $\int_M \mu_1 e^{-f} dv_g$ .

**Prova 4.1.** *Uma vez que*

$$\text{div}(e^{-\frac{f}{t}} \mathcal{P}_{r-1} \nabla f) = e^{-\frac{f}{t}} (\mathcal{L}_{r-1}(f) - \frac{1}{t} \langle \mathcal{P}_{r-1} \nabla f, \nabla f \rangle)$$

em conjunto com

$$\mathcal{L}_{r-1}(f) - |\nabla f|^2 + f \leq k\mu_1$$

temos

$$\operatorname{div}(e^{-\frac{f}{t}} \mathcal{P}_{r-1} \nabla f) \leq e^{-\frac{f}{t}} (|\nabla f|^2 - f + k\mu_1 - \frac{1}{t} \langle \mathcal{P}_{r-1} \nabla f, \nabla f \rangle).$$

Somando e subtraindo o fator

$$\frac{\mu_1}{t} |\nabla f|^2$$

obtemos,

$$\operatorname{div}(e^{-\frac{f}{t}} \mathcal{P}_{r-1} \nabla f) \leq \left[ \left(1 - \frac{\mu_1}{t}\right) |\nabla f|^2 - f + k\mu_1 + \frac{1}{t} (\mu_1 |\nabla f|^2 - \langle \mathcal{P}_{r-1} \nabla f, \nabla f \rangle) \right] e^{-\frac{f}{t}}.$$

Note que:

i.  $\mu_1$  é o primeiro autovalor de  $\mathcal{P}_{r-1}$ , logo  $\langle \mathcal{P}_{r-1} v, v \rangle \geq \mu_1 \langle v, v \rangle$  para todo vetor  $v$ , ou seja,

$$\mu_1 \langle v, v \rangle - \langle \mathcal{P}_{r-1} v, v \rangle \leq 0.$$

ii.  $|\nabla f|^2 \leq f$ .

iii.  $\mu_1$  limitado garante  $t \geq \sup \mu_1$ .

Então, usando (i), (ii) e (iii) na desigualdade anterior, ocorre o seguinte:

$$\operatorname{div}(e^{-\frac{f}{t}} \mathcal{P}_{r-1} \nabla f) \leq \mu_1 e^{-\frac{f}{t}} \left( k - \frac{f}{t} \right). \quad (5)$$

Pelo fato de  $f$  ser própria, a função

$$I(t) = \frac{1}{t^k} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{t}} dv_g$$

está bem definida. Assim,

$$\begin{aligned} I'(t) &= -\frac{k}{t^{k+1}} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{t}} dv_g + \frac{1}{t^k} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{t}} \frac{f}{t^2} dv_g \\ &= \frac{1}{t^{k+1}} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{t}} \left( \frac{f}{t} - k \right) dv_g. \end{aligned}$$

Então, integrando a desigualdade (5) percebemos que

$$\begin{aligned}
I'(t) &\leq -t^{k+1} \int_{\overline{D}_\alpha} \operatorname{div}(e^{-\frac{f}{t}} \mathcal{P}_{r-1} \nabla f) dv_g \\
&= -t^{k+1} \int_{\partial \overline{D}_\alpha} \left\langle e^{-\frac{f}{t}} \mathcal{P}_{r-1} \nabla f, \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right\rangle dy \\
&\leq -t^{k+1} \int_{\partial \overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{t}} |\nabla f| dy \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

Integrando  $I'(t)$  entre 1 e  $\alpha^2$ , temos

$$I(\alpha^2) - I(1) \leq 0$$

ou seja

$$\frac{1}{\alpha^2} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{\alpha^2}} dv_g \leq \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g$$

Uma vez que as funções na integral anterior são semicontínuas, para todo  $\alpha \geq 1$  temos que desigualdade é verdadeira. Além disso, como  $\sqrt{f} \leq \alpha$  em  $\overline{D}_\alpha$ , então tal desigualdade nos garante que

$$\frac{1}{\alpha^{2k}} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{1}{4}} dv_g \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-\frac{f}{\alpha^2}} dv_g \leq \frac{1}{\alpha^2} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g,$$

ou seja

$$\frac{1}{\alpha^{2k}} e^{-\frac{1}{4}} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 dv_g \leq \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g. \quad (6)$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g - \int_{\overline{D}_{\alpha-1}} \mu_1 e^{-f} dv_g &= \int_{\overline{D}_\alpha / \overline{D}_{\alpha-1}} \mu_1 e^{-f} dv_g \\
&\leq e^{-\frac{(\alpha-1)^2}{4}} \int_{\overline{D}_\alpha / \overline{D}_{\alpha-1}} \mu_1 dv_g \\
&\leq e^{-\frac{(\alpha-1)^2}{4}} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 dv_g.
\end{aligned}$$

Então, por (5) obtemos

$$\int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g - \int_{\overline{D}_{\alpha-1}} \mu_1 e^{-f} dv_g \leq e^{\frac{1}{4}} \alpha^{2k} e^{-\frac{(\alpha-1)^2}{4}} \int_{\overline{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g.$$

Seja  $\alpha_0$ , uma constante tal que se  $\alpha > \alpha_0$  vale

$$e^{\frac{1}{4}\alpha^2} 2k e^{-\frac{(\alpha-1)^2}{4}} < e^{-\alpha}.$$

Consequentemente, por (6)

$$\int_{\bar{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g - \int_{\bar{D}_{\alpha-1}} \mu_1 e^{-f} dv_g \leq e^{-r} \int_{\bar{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g,$$

isto é

$$\int_{\bar{D}_\alpha} \mu_1 e^{-f} dv_g \leq \left( \frac{1}{1 - e^\alpha} \right) \int_{\bar{D}_{\alpha-1}} \mu_1 e^{-f} dv_g.$$

Analogamente, para todo  $N$  inteiro positivo temos que

$$\int_{D_{\alpha+N}} \mu_1 e^{-f} dv_g \leq \prod_{a=0}^N \left( \frac{1}{1 - e^{(\alpha+a)}} \right) \int_{\bar{D}_{\alpha-1}} \mu_1 e^{-f} dv_g.$$

Pelo fato do produtório

$$\prod_{a=0}^N \left( \frac{1}{1 - e^{(\alpha+a)}} \right)$$

convergir para um número inteiro positivo quando  $N \rightarrow +\infty$ , ocorre

$$\int_M \mu_1 e^{-f} dv_g < +\infty.$$

Portanto, usando tal fato na desigualdade (6), concluímos que

$$\int_M \mu_1 dv_g \leq C\alpha^{2k},$$

onde  $C$  é uma constante que depende apenas de  $\int_M \mu_1 e^{-f} dv_g$ . □

## 4.2 APLICAÇÃO PARA OS SELF-SHRINKERS DO FLUXO DA $S_2$ -CURVATURA

**Teorema 4.2.** *Seja  $(M, g)$  uma self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura completa não compacta propriamente imersa em  $\mathbb{R}^{n+p}$  com uma constante não negativa  $\beta \leq \inf S_2^2$ . Se  $S_1 \leq C\mu_1$  para alguma constante  $C$ , então*

$$\int_{B_r(0) \cap M} S_1 dv_g \leq Cr^{n-1-2\beta}.$$

**Prova 4.2.** *Seja  $f = \frac{|x|^2}{4}$ . Uma vez que  $M$  é própria,  $f$  também será. Sendo assim, vamos verificar que  $f$  satisfaz as hipóteses do teorema anterior e utiliza-lá para construir a função*

adequada.

i.

$$\begin{aligned}
 f - |\nabla f|^2 &= \frac{|x|^2}{4} - \frac{|x^\top|^2}{4} \\
 &= \frac{|x^\perp|^2}{4} \\
 &= S_2^2 \\
 &\geq \beta \\
 &\geq 0,
 \end{aligned}$$

logo

$$|\nabla f|^2 \leq f.$$

ii.

$$\begin{aligned}
 L_1\left(\frac{|x|^2}{4}\right) &= \frac{1}{4}L_1(|x|^2) \\
 &= \frac{1}{4}(2(n-1))S_1 + 4\langle x, N \rangle S_2 \\
 &= \frac{1}{2}(n-1)S_1 - S_2^2 \\
 &= \frac{1}{2}(n-1)S_1 - f + |\nabla f|^2 \\
 &\leq \frac{C(n-1)}{2}\mu_1 - f + |\nabla f|^2,
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$L_1(f) - |\nabla f|^2 + f \leq \frac{C(n-1)}{2}\mu_1.$$

Desse modo, considere  $\bar{f} = f - \beta$ , ainda assim, temos que  $\bar{f}$  é própria e  $\bar{f}$  satisfaz as condições (i) e (ii). Logo,  $\bar{f}$  satisfaz as condições do teorema 4.1. Então, considere

$$\begin{aligned}
 D_r &= \{x \in M : 2\sqrt{\bar{f}} < r\} \\
 &= \{x \in M : |x| < \sqrt{r^2 - 4\beta}\}.
 \end{aligned}$$

Então, pelo teorema 4.1

$$\int_{D_r} \mu_1 dv_g \leq Cr^{2k},$$

portanto,

$$\int_{B_r(0) \cap M} S_1 dv_g \leq Cr^{n-1-2\beta}.$$

□

## 5 UMA CONDIÇÃO DO TIPO TOPOLÓGICA

Dada uma imersão  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{Q}_c^{n+1}$ , seja  $W = \mathbb{Q}_c^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} T_p \Sigma$ . Se  $W$  é aberto e não vazio, para  $c = 0$ , em (HALPERN, 1971), encontramos o primeiro resultado na direção de classificar as imersões que satisfazem essa condição. Motivados pelo trabalho de Harpen em (ALENCAR; FRENSEL, 1991), os autores conseguiram classificar as imersões mínimas em  $\mathbb{Q}_c^{n+1}$ , mostrando que, independente, do valor de  $c$ , ou seja, para  $c = -1, 0$  ou  $1$ ,  $\Sigma$  é totalmente geodésica. Recentemente, em (ALENCAR et al., 2023), os autores classificaram as self-shrinkers  $H = -\langle x, N \rangle$ , satisfazendo a condição acima citada. Inspirados por este último, obtemos o resultado a seguir.

### 5.1 UMA CONDIÇÃO DO TIPO TOPOLÓGICA E UM RESULTADO DE RIGIDEZ

**Lema 5.1.** *Seja  $T : C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  um operador dado por*

$$T(f) = L_{r-1}(f) - \langle \nabla^\Sigma f, x^\top \rangle.$$

*Então, se  $\Sigma$  é um self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura*

$$T(\langle x, N \rangle) = \langle x, N \rangle (r - \text{tr}(A^2 P_{r-1})).$$

**Prova 5.1.** *Uma vez que*

$$L_r(\langle x, N \rangle) = -\nabla_{x^\top} S_r - r S_r - \langle x, N \rangle \text{tr}(A^2 P_{r-1}).$$

*Usando que  $S_r = -\langle x, N \rangle$ , o resultado segue.  $\square$*

**Teorema 5.1.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma self-shrinker do fluxo da  $S_r$ -curvatura, com  $S_{r-1}$  é positiva e  $S_1$  limitada. Se*

$$W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} T_p \Sigma$$

*é aberto, não-vazio e  $\text{tr}(A^2 P_{r-1}) \leq r$ , então  $\Sigma$  é isométrica a*

$$\mathbb{S}^k \left( \sqrt{\frac{k!}{r!(k-r)!}} \right) \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

**Prova 5.2.** *Pelo lema 5.1 temos que*

$$T(\langle x, N \rangle) = \langle x, N \rangle (r - \text{tr}(A^2 P_{r-1})).$$

Então, se  $\langle x, N \rangle$  atingir o mínimo em  $\Sigma$ , pelo teorema 2.4, temos que  $\langle x, N \rangle$  é constante e, conseqüentemente, pelo teorema 2.6 temos o resultado. Então, vamos garantir tal fato. Primeiro, note que como  $H_r \leq H_1^r$ , vale

$$\frac{S_r}{C_r^n} \leq \left( \frac{H}{n} \right)^2,$$

então

$$S_r \leq C_r^n K_0.$$

Logo,

$$0 \leq S_r \leq C_r^n K_0,$$

portanto

$$-C_r^n K_0 \leq \langle x, N \rangle \leq 0 \leq C_r^n K_0. \quad (7)$$

Por outro lado  $W \neq \emptyset$ , nos garante que

$$h_{p_0}(p) = \langle x(p) - p_0, N \rangle,$$

onde  $p_0 \notin W = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} T_p \Sigma$  e  $h_{p_0}$  não muda de sinal em  $\Sigma$ , pois, caso contrário, teríamos que  $p_0 \in T_p \Sigma$  para algum  $p \in \Sigma$ .

Uma vez que  $\langle x, N \rangle$  é limitada, considere  $(p_k)_k \subset \Sigma$  uma seqüência tal que

$$\langle x, N \rangle(p_k) \longrightarrow \inf_{\Sigma} \langle x, N \rangle.$$

Para cada  $p_k$ , considere  $q_k$  a projeção de  $p_0$  sobre  $T_{p_k} \Sigma$ . Como

$$d(q_k, p_0) = |q_k - p_0| = |P_{T_{p_k} \Sigma}^{p_0}| = |\langle x(p_k) - p_0, N(p_k) \rangle| = h_{p_0}(p_k)$$

Além disso, para todo  $q \in \Sigma$ ,

$$\begin{aligned} |h_{p_0}(q)| &= |\langle x(q) - p_0, N(q) \rangle| \\ &= |\langle x(q), N(q) \rangle - \langle p_0, N(q) \rangle| \\ &\leq |\langle x(q), N(q) \rangle| + |\langle p_0, N(q) \rangle| \\ &\leq \left( \frac{n-1}{n} \right) C + |p_0|, \end{aligned}$$

em que na última desigualdade estamos usando a limitação de  $\langle x, N \rangle$ . Assim, a sequência  $(q_k)_k$  é limitada em

$$\bigcup_{p \in \Sigma} T_p \Sigma = \mathbb{R}^{n+1} - W$$

que é fechado, pelo fato de  $W$  ser aberto. Assim, passando a uma subsequência se necessário, temos que

$$q_{k_j} \longrightarrow q_1,$$

Agora, seja  $p_1 \in \Sigma$  tal que  $q_1 \in T_{p_1} \Sigma$ . Então,

$$\begin{aligned} \langle x, N \rangle(p_1) &= \lim_{k_j \rightarrow \infty} \langle x, N \rangle(p_{k_j}) \\ &= \inf_{\Sigma} \langle x, N \rangle. \end{aligned}$$

Logo,  $\langle x, N \rangle$  atinge seu mínimo, conseqüentemente, pelo teorema 2.4  $\langle x, N \rangle$  é constante e, portanto, pelo teorema 2.6 concluímos o resultado.

□

## 6 NÃO EXISTÊNCIA EM PRODUTOS WARPED

Em (BATISTA et al., 2023), (BATISTA et al., 2022b) e (BATISTA et al., 2022a), os autores se propoem a estudar sólitons em produtos warped do tipo  $I \times_f \Sigma^n - I \times_f \Sigma^n$ , aplicando técnicas de princípio de máximo conseguem, sob certas condições, obter alguns resultados, dentre eles resultados de não existência. Inspirados nessas ideias, neste capítulo mostraremos que é possível obter teoremas de não existência correlatos aos resultados citados anteriormente. Na primeira seção, estudaremos os sólitons no espaço  $I \times_f \Sigma^n$ , e na segunda, sólitons no espaço  $-I \times_f \Sigma^n$ .

**Definição 6.1.** *Seja  $\varphi : \Sigma^n \rightarrow \overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$  uma imersão. Diremos que  $\Sigma$  um self-shrinker do fluxos da  $S_2$ -curvatura quando,*

$$S_2 = cf\Theta,$$

com  $\Theta = \langle \partial_t, N \rangle$ .

### 6.1 RESULTADOS EM $\overline{M}^{n+1} = I \times_f \Sigma^n$

**Proposição 6.1.** *Seja  $h : I \times_f \Sigma^n \rightarrow I$  a função altura de  $I \times_f \Sigma^n$ . Então,*

$$L_1(h) = \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \zeta_c(f)\Theta^2$$

onde

$$\zeta_c(f) = \frac{f'}{f} (n-1)S_1 + \frac{rcf^2}{f}.$$

**Prova 6.1.** *Uma vez que*

$$\text{Hess}(h)(Z) = \frac{f'}{f} (Z - \langle \nabla h, Z \rangle \nabla h) + \Theta A(Z),$$

temos que

$$\begin{aligned} L_1(h) &= \text{tr}(P_1 \text{Hess}(h)) \\ &= \frac{f'}{f} (\text{tr}(P_1) - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \Theta \text{tr}(P_1 A) \\ &= \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + 2\Theta S_2. \end{aligned}$$

Desse modo, usando que  $\partial_t = \nabla h + \Theta N$  e  $\partial_t$  é unitário, decorre que

$$1 = |\nabla h|^2 + \Theta^2.$$

Substituindo essa última igualdade em conjunto com  $S_2 = cf\Theta$  em  $L_{r-1}(h)$  obtemos,

$$\begin{aligned} L_1(h) &= \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + 2\Theta S_1 \\ &= \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \left( \frac{f'}{f} (n-1)S_1 + \frac{2cf^2}{f} \right) \Theta^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_1(h) = \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \zeta_c(f)\Theta^2.$$

□

**Definição 6.2.** *Seja  $M^n$  uma variedade completa e  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Dizemos que a hipersuperfície  $x : \Sigma \rightarrow I \times_f M^n$  está contida em um slab se  $x(\Sigma)$  está entre  $M_{t_1}^n$  e  $M_{t_2}^n$ .*

Com base em (IMPERA et al., 2012) temos o seguinte:

**Lema 6.1.** *Seja  $\varphi : \Sigma \rightarrow I \times_f M^n$  uma hipersuperfície imersa e  $M^n$  uma variedade riemanniana com curvatura seccional satisfazendo*

$$K_M \geq -\sup_I (f'^2 - ff'').$$

*Suponha que  $S_1$  seja limitada e que  $\Sigma$  esteja contida em um slab, então  $\Sigma$  tem curvatura seccional limitada inferiormente.*

**Prova 6.2.** *Pela equação de Gauss sabemos que se  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é uma hipersuperfície, então*

$$\langle R(X, Y)Z, V \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, V \rangle - \langle AY, V \rangle \langle AX, Z \rangle + \langle AX, V \rangle \langle AY, Z \rangle$$

*para  $X, Y, Z, V \in T\Sigma$ , onde  $R$  e  $\overline{R}$  os tensores de curvatura de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$  respectivamente. Então, se  $\{X, Y\}$  é uma base ortornormal de um 2-plano tangente a  $\Sigma$  temos*

$$\begin{aligned} K_\Sigma(X, Y) &= \overline{K}(X, Y) + \langle AX, X \rangle \langle AY, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle^2 \\ &\geq \overline{K}(X, Y) - \|AX\| \|AY\| - \|AX\|^2 \\ &\geq \overline{K}(X, Y) - 2\|A\|^2. \end{aligned}$$

*Dado que  $S_1$  é limitado,  $|S_2| \leq |c|f$  e  $\Sigma$  está contida em um slab em conjunto com  $\|A\|^2 = S_1^2 - 2S_2$ , temos que  $\|A\|^2$  é limitado e, assim, resta garantir a limitação de  $\overline{K}(X, Y)$ . Escrevendo a tensor curvatura de  $\overline{M}^{n+1}$  em função da fibra  $M^n$ , obtemos*

$$\begin{aligned} \overline{R}(U, V)W &= R_M(U^*, V^*)W^* - \mathcal{H}^2(\pi_I)(\langle V, W \rangle U - \langle U, W \rangle V) \\ &+ \mathcal{H}'(\pi_I)\langle W, T \rangle(\langle U, T \rangle V - \langle V, T \rangle U) \\ &- \mathcal{H}'(\pi_I)(\langle V, W \rangle \langle U, T \rangle - \langle U, W \rangle \langle V, T \rangle)T, \end{aligned}$$

para  $U, V, W \in T\overline{M}$ , onde  $T = \partial_t$  e  $U^*$  denota a projeção de  $U$  sobre  $M^n$ . Logo, pelo fato de  $\{X, Y\}$  ser uma base ortornormal

$$\begin{aligned}\overline{K}(X, Y) &= \frac{1}{f^2(h)} K_M(X^*, Y^*) \|X^* \wedge Y^*\|^2 \\ &\quad - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h) (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2),\end{aligned}$$

Observando que  $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$  e  $Y^* = Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t$  tem-se

$$\begin{aligned}0 \leq \|X^* \wedge Y^*\|^2 &= \|X^*\|^2 \|Y^*\|^2 - \langle X^*, Y^* \rangle^2 \\ &= 1 - \langle X, T \rangle^2 - \langle Y, T \rangle^2.\end{aligned}$$

Mas  $\langle X, \partial_t \rangle = \langle X, \nabla h \rangle$  e  $\langle Y, \partial_t \rangle = \langle Y, \nabla h \rangle$ . Assim,

$$\begin{aligned}0 \leq \|X^* \wedge Y^*\|^2 &= \|X^*\|^2 \|Y^*\|^2 - \langle X^*, Y^* \rangle^2 \\ &= 1 - \langle X, T \rangle^2 - \langle Y, T \rangle^2 \\ &= 1 - (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2),\end{aligned}\tag{8}$$

Substituindo esta última relação em  $\overline{K}(X, Y)$ , temos

$$\begin{aligned}\overline{K}(X, Y) &= \frac{1}{f^2(h)} K_M(X^*, Y^*) (1 - (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2)) \\ &\quad - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h) (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2) \\ &= \frac{1}{\rho^2(h)} K_M(X^*, Y^*) - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h) (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2),\end{aligned}$$

Usando (1), isto é,  $1 \geq \langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2$ , obtemos

$$\begin{aligned}\overline{K}(X, Y) &= \frac{1}{f^2(h)} K_M(X^*, Y^*) - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h) (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2) \\ &\geq \frac{1}{f^2(h)} K_M(X^*, Y^*) - \mathcal{H}^2(h) - 2|\mathcal{H}'(h)| \\ &\geq \frac{1}{f^2(h)} (f(h)f(h)'' - f'^2(h)) - \mathcal{H}^2(h) - 2|\mathcal{H}'(h)| \\ &= -\left(\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2 \\ &= -\mathcal{H}^2(h).\end{aligned}$$

Portanto, pelo fato de  $\Sigma$  está contida em um slab, concluímos o resultado.  $\square$

**Teorema 6.1.** Seja  $\overline{M}^{n+1} = I \times_f M^n$  um produto warped cuja curvatura seccional da fibra satisfaz

$$K_M \geq -\sup(f'^2 - f f'')$$

Não existe uma self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = f(t)\partial_t$ , onde  $c \neq 0$  tal que  $S_1$  seja limitada,  $S_2 \geq 0$ , contida em um slab  $[t_1, t_2] \times M^n$  com  $\zeta_c(t)$  tendo um sinal estrito em  $[t_1, t_2]$ .

**Prova 6.3.** Suponha que exista tal variedade. Por hipótese, podemos aplicar o lema 6.2 a variedade  $\Sigma$  e, assim, obter que

$$K_\Sigma \geq -G^2(r)$$

com  $G^2(r) = \mathcal{H}^2(r) + C_0$ . Assim, uma vez que  $S_2 \geq 0$   $\Sigma$  satisfaz as condições do teorema 2.3 para o operador  $L_1$ . Consequentemente,  $|\nabla h|^2 \rightarrow 0$  o que implica  $\Theta \rightarrow 1$ . Nesse ponto, temos duas situações a considerar:

- Se  $\zeta_c(f) > 0$ , usando o ponto de máximo da função  $h$  em conjunto com a proposição 6.2, teríamos

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_k L_1(h)(x_k) \\ &= \limsup_k \left( \frac{f'}{f} ((n-1)S_1|\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \zeta_c(f)\Theta^2 \right) (x_k) \\ &\geq \limsup_k \zeta_c(f)(x_k) \end{aligned}$$

e, assim,

$$0 \geq \limsup_k L_1(h)(x_k) \geq \limsup_k \zeta_c(f)(x_k) \geq 0.$$

- Se  $\zeta_c(f) < 0$ , usando o ponto de mínimo da função  $h$  em conjunto com a proposição 6.2 teríamos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_k L_1(h)(x_k) \\ &= \liminf_k \left( \frac{f'}{f} ((n-1)S_1|\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \zeta_c(f)\Theta^2 \right) (x_k) \\ &\leq \liminf_k \zeta_c(f)(x_k), \end{aligned}$$

e, assim,

$$0 \leq \liminf_k L_1(h)(x_k) \leq \liminf_k \zeta_c(f)(x_k) \leq 0.$$

Logo, independente do caso  $h$  seria nula e, portanto, isso seria um absurdo.  $\square$

**Corolário 6.1.** Seja  $\overline{M} = I \times_{e^t} M^n$  o pseudo espaço hiperbólico. Não existe uma self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = f(t)\partial_t$ , onde  $c \neq 0$  tal que  $S_1$  seja limitada,  $S_2 \geq 0$ , contida em um slab  $[t_1, t_2] \times M^n$  com  $\zeta_c(t)$  tendo um sinal estrito em  $[t_1, t_2]$ , com  $t_1 > \log(-\frac{n}{c})$ .

Dado um parâmetro de massa  $\mu > 0$ , o espaço de Schwarzschild é definido pelo produto

$$\overline{M}^{n+1} = (r_0(\mu), +\infty) \times \mathbb{S}^n,$$

munido com a métrica  $\overline{g} = V_\mu^{-1} dr^2 + r^2 g_{\mathbb{S}^n}$ , onde  $g_{\mathbb{S}^n}$  é a métrica padrão da esfera e,  $V_\mu(r) = 1 - 2\mu r^{1-n}$  é a função potencial e  $r_0(\mu) = (2\mu)^{\frac{1}{n-1}}$  é a única raiz positiva de  $V_\mu(r) = 0$ . Vale salientar que  $\mathbb{R} \times \overline{M}^{n+1}$ , munida com a métrica  $-V_\mu(r) dt^2 + \overline{g}$ , é solução da equação de Einstein no vácuo com constante cosmológica nula (para mais detalhes sobre a geometria do espaço de Schwarzschild ver (O'NEILL, 1983) cap.13). Em (COLOMBO et al., 2018) exemplo 1.3,  $\overline{M}^{n+1}$ , pode ser reduzida a  $I \times_f \mathbb{S}^n$  com a métrica warped e  $f$  satisfazendo

$$t = \int_{r_0(\mu)}^r \frac{dx}{V_\mu(x)}, \quad f(t) = r(t), \quad I = \mathbb{R}_+.$$

**Corolário 6.2.** *Seja  $\overline{M} = I \times_f \mathbb{S}^n$  o espaço de Reissner-Nordström com  $f$  como discutida anteriormente. Não existe uma  $S_2$ -shrinker  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = f(t)\partial_t$  com  $c < 0$   $S_2 \geq 0$  tendo volume com crescimento polinomial e contida em um slab  $[t_1, t_2] \times \mathbb{S}^n$  com  $V_\mu(r(t)) < \frac{c^2}{n^2} r^4(t)$  para todo  $t \in [t_1, t_2]$ .*

## 6.2 RESULTADOS EM $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f \Sigma^n$

**Proposição 6.2.** *Seja  $h : -I \times_f \Sigma^n \rightarrow I$  a função altura de  $-I \times_f \Sigma^n$ . Então,*

$$L_1(h) = -\frac{f'}{f} \left( (n-1)S_1 |\nabla h|^2 + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) + \zeta_c(f) \Theta^2,$$

onde

$$\zeta_c(f) = \frac{2cf^2 - (n-1)f'S_1}{f}.$$

**Prova 6.4.** *Uma vez que*

$$\text{Hess}(h)(Z) = -\frac{f'}{f} (Z + \langle \nabla h, Z \rangle \nabla h) + \Theta A(Z),$$

temos que

$$\begin{aligned} L_1(h) &= \text{tr}(P_1 \text{Hess}(h)) \\ &= -\frac{f'}{f} (\text{tr}(P_1) + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \Theta \text{tr}(P_1 A) \\ &= -\frac{f'}{f} (-(n-1)S_1 + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) - 2\Theta S_2 \\ &= \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) - 2\Theta S_2. \end{aligned}$$

Desse modo, usando que  $\partial_t = -\nabla h - \Theta N$  e  $\partial_t$  é unitário, decorre que

$$1 = \Theta^2 - |\nabla h|^2.$$

Substituindo essa última igualdade em conjunto com  $S_2 = cf\Theta$  em  $L_1(h)$ , obtemos,

$$\begin{aligned} L_1(h) &= \frac{f'}{f} \left( (n-1)S_1(\Theta^2 - |\nabla h|^2) - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) - 2cf\Theta S_2 \\ &= \frac{f'}{f} \left( -(n-1)S_1|\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) + \left( \frac{f'}{f}(n-1)S_1 - \frac{2cf^2}{f} \right) \Theta^2. \\ &= -\frac{f'}{f} \left( (n-1)S_1|\nabla h|^2 + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) - \left( \frac{2cf^2}{f} - \frac{f'}{f}(n-1)S_1 \right) \Theta^2. \\ &= -\frac{f'}{f} \left( (n-1)S_1|\nabla h|^2 + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) - \left( \frac{2cf^2 - (n-1)f'S_1}{f} \right) \Theta^2 \\ &= -\frac{f'}{f} \left( (n-1)S_1|\nabla h|^2 + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) + \zeta_c(f)\Theta^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$L_1(h) = -\frac{f'}{f} \left( (n-1)S_1|\nabla h|^2 + \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle \right) + \zeta_c(f)\Theta^2.$$

□

Com base em (IMPERA et al., 2012) temos o seguinte:

**Lema 6.2.** *Seja  $\varphi : \Sigma \rightarrow -I \times_f M^n$  uma hipersuperfície imersa e  $M^n$  uma variedade Riemanniana com curvatura seccional satisfazendo*

$$K_M \geq \sup_I (ff'' - f'^2).$$

*Suponha que  $S_1$  seja limitada e que  $\Sigma$  esteja contida em um slab. Então,  $\Sigma$  tem curvatura seccional limitada inferiormente.*

**Prova 6.5.** *Pela equação de Gauss sabemos que, se  $x : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  é uma hipersuperfície, então*

$$\langle R(X, Y)Z, V \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, V \rangle - \langle AY, V \rangle \langle AX, Z \rangle + \langle AX, V \rangle \langle AY, Z \rangle,$$

*para  $X, Y, Z, V \in T\Sigma$ , onde  $R$  e  $\overline{R}$  os tensores de curvatura de  $M^n$  e  $\overline{M}^{n+1}$  respectivamente. Então, se  $\{X, Y\}$  é uma base ortornormal de um 2-plano tangente a  $\Sigma$ , temos*

$$\begin{aligned} K_\Sigma(X, Y) &= \overline{K}(X, Y) + \langle AX, X \rangle \langle AY, Y \rangle - \langle AX, Y \rangle^2 \\ &\geq \overline{K}(X, Y) - \|AX\| \|AY\| - \|AX\|^2 \\ &\geq \overline{K}(X, Y) - 2\|A\|^2. \end{aligned}$$

Dado que  $S_1$  é limitado e  $|S_2| \leq |c|f$  e  $\Sigma$  está contida em um slab em conjunto com  $\|A\|^2 = S_1^2 - 2S_2$ , temos que  $\|A\|^2$  é limitado e, assim, resta garantir a limitação de  $\bar{K}(X, Y)$ . Escrevendo a tensor curvatura de  $\bar{M}^{n+1}$  em função da fibra  $M^n$ , obtemos

$$\begin{aligned}\bar{R}(U, V)W &= R_M(U^*, V^*)W^* - \mathcal{H}^2(\pi_I)(\langle V, W \rangle U - \langle U, W \rangle V) \\ &+ \mathcal{H}'(\pi_I)\langle W, T \rangle(\langle U, T \rangle V - \langle V, T \rangle U) \\ &- \mathcal{H}'(\pi_I)(\langle V, W \rangle \langle U, T \rangle - \langle U, W \rangle \langle V, T \rangle)T,\end{aligned}$$

para  $U, V, W \in T\bar{M}$ , onde  $T = \partial_t$  e  $U^*$  denota a projeção de  $U$  sobre  $M^n$ . Logo, pelo fato de  $\{X, Y\}$  ser uma base ortornormal

$$\begin{aligned}\bar{K}(X, Y) &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*, Y^*)\|X^* \wedge Y^*\|^2 \\ &- \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h)(\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2),\end{aligned}$$

Observando que  $X^* = X - \langle X, \partial_t \rangle \partial_t$  e  $Y^* = Y - \langle Y, \partial_t \rangle \partial_t$ , tem-se

$$\begin{aligned}0 \leq \|X^* \wedge Y^*\|^2 &= \|X^*\|^2 \|Y^*\|^2 - \langle X^*, Y^* \rangle^2 \\ &= 1 - \langle X, T \rangle^2 - \langle Y, T \rangle^2.\end{aligned}$$

Mas  $\langle X, \partial_t \rangle = \langle X, \nabla h \rangle$  e  $\langle Y, \partial_t \rangle = \langle Y, \nabla h \rangle$ . Assim,

$$\begin{aligned}0 \leq \|X^* \wedge Y^*\|^2 &= \|X^*\|^2 \|Y^*\|^2 - \langle X^*, Y^* \rangle^2 \\ &= 1 - \langle X, T \rangle^2 - \langle Y, T \rangle^2 \\ &= 1 - (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2),\end{aligned}\tag{9}$$

Substituindo esta última relação em  $\bar{K}(X, Y)$ , temos

$$\begin{aligned}\bar{K}(X, Y) &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*, Y^*)(1 - (\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2)) \\ &- \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h)(\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2) \\ &= \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*, Y^*) - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h)(\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2)\end{aligned}$$

Usando (9), isto é,  $1 \geq \langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2$ , obtemos

$$\begin{aligned}\bar{K}(X, Y) &= \frac{1}{\rho^2(h)}K_M(X^*, Y^*) - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h)(\langle X, \nabla h \rangle^2 + \langle Y, \nabla h \rangle^2) \\ &\geq \frac{1}{f^2(h)}K_M(X^*, Y^*) - \mathcal{H}^2(h) - \mathcal{H}'(h) \\ &= \frac{1}{f^2(h)}(f'^2(h) - f(h)f(h)'' ) + \frac{f''(h)}{f(h)} \\ &= \left(\frac{f'(h)}{f(h)}\right)^2 \\ &= \mathcal{H}^2(h).\end{aligned}$$

Portanto, pelo fato de  $\Sigma$  está contida em um slab, concluímos o resultado.  $\square$

**Teorema 6.2.** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = -I \times_f M^n$  um produto warped cuja curvatura seccional da fibra satisfaz*

$$K_M \geq -\sup(f f'' - f'^2)$$

*Não existe uma self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = f(t)\partial_t$ , onde  $c \neq 0$  tal que  $S_1$  seja limitada,  $S_2 \geq 0$ , contida em um slab  $[t_1, t_2] \times M^n$  com  $\mathcal{H}'(h) > 0$  e com  $\zeta_c(t)$ , tendo um sinal estrito em  $[t_1, t_2]$ .*

**Prova 6.6.** *Suponha que exista tal variedade. Por hipótese, podemos aplicar o lema 6.2 a variedade  $\Sigma$  e, assim, obter que*

$$K_\Sigma \geq -G^2(r)$$

*com  $G^2(r) = \mathcal{H}^2(r) + C_0$ . Assim, uma vez que  $S_2 \geq 0$   $\Sigma$  satisfaz as condições do teorema 2.3 para o operador  $L_1$ , conseqüentemente  $|\nabla h|^2 \rightarrow 0$ , o que implica  $\Theta \rightarrow 1$ . Nesse ponto, temos duas situações a considerar:*

- *Se  $\zeta_c(f) > 0$ , usando o ponto de máximo da função  $h$  em conjunto com a proposição 6.2, teríamos*

$$\begin{aligned} 0 &\geq \limsup_k L_1(h)(x_k) \\ &= \limsup_k \left( \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \zeta_c(f) \Theta^2 \right) (x_k) \\ &\geq \limsup_k \zeta_c(f)(x_k) \end{aligned}$$

*e, assim,*

$$0 \geq \limsup_k L_1(h)(x_k) \geq \limsup_k \zeta_c(f)(x_k) \geq 0.$$

- *Se  $\zeta_c(f) < 0$ , usando o ponto de mínimo da função  $h$  em conjunto com a proposição 6.2, teríamos*

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_k L_1(h)(x_k) \\ &= \liminf_k \left( \frac{f'}{f} ((n-1)S_1 |\nabla h|^2 - \langle P_1 \nabla h, \nabla h \rangle) + \zeta_c(f) \Theta^2 \right) (x_k) \\ &\leq \liminf_k \zeta_c(f)(x_k) \end{aligned}$$

*e, assim,*

$$0 \leq \liminf_k L_1(h)(x_k) \leq \liminf_k \zeta_c(f)(x_k) \leq 0.$$

Logo, independente do caso,  $h$  seria nula e, portanto, um absurdo.  $\square$

**Corolário 6.3.** *Seja  $\overline{M}^{n+1} = -\mathbb{R}^+ \times_{t^{\frac{2}{3}}} \mathbb{R}^n$  o espaço tempo de Einstein Sitter. Não existe uma self-shrinker do fluxo da  $S_2$ -curvatura  $\varphi : \Sigma \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  com respeito a  $K = t^{\frac{2}{3}} \partial_t$  com  $c \neq 0$  tal que  $S_1$  seja limitada com crescimento de volume polinomial,  $S_2 \geq 0$ , contida em um slab com  $(\log f''(h)) < 0$  e  $\zeta_c(t) < 0$  em  $[t_1, t_2]$ .*

## REFERÊNCIAS

- ALENCAR, H.; CARMO, M. d.; ELBERT, M. F. Stability of hypersurfaces with vanishing  $r$ -mean curvatures in euclidean spaces. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG Berlin, Germany, 2003.
- ALENCAR, H.; CRUZ, M.; NETO, G. S. Rigidity of complete self-shrinkers whose tangent planes omit a nonempty set. **Results in Mathematics**, Springer, v. 78, n. 4, p. 1–16, 2023.
- ALENCAR, H.; FRENSEL, K. Hypersurfaces whose tangent geodesics omit a nonempty set. **Differential Geometry, Pitman Monographs**, v. 52, p. 1–13, 1991.
- ALEXSANDOROV, A. Uniqueness theorem for surfaces in the large. **Vestnik Leningrad Univ.**, v. 11, p. 5–17, 1956.
- ALÍAS, L. J.; MASTROLIA, P.; RIGOLI, M. **Maximum principles and geometric applications**. [S.l.]: Springer, 2016. v. 700.
- ANDREWS, B. Gauss curvature flow: the fate of the rolling stones. **Inventiones mathematicae**, Springer Berlin Heidelberg, v. 138, p. 151–161, 1999.
- BATISTA, M.; LIMA, H. F. d.; GOMES, W. F. Rigidity of mean curvature flow solitons and uniqueness of solutions of the mean curvature flow soliton equation in certain warped products. **Mediterranean Journal of Mathematics**, Springer, v. 20, n. 4, p. 199, 2023.
- BATISTA, M.; LIMA, H. F. d.; GOMES WALLACE F, G. M. B. Mean curvature flow solitons in certain warped products: nonexistence, rigidity and moser-berneistein type results. 2022.
- BATISTA, M.; LIMA, H. F. d.; GOMES WALLACE F, G. M. B. Nonexistence of mean curvature flow solitons with polynomial volume growth immersed in certain semi-riemannian warped products. 2022.
- BATISTA, M.; XAVIER, W. On the rigidity of self-shrinkers of the  $r$ -mean curvature flow. **Communications in Contemporary Mathematics**, World Scientific, p. 2350023, 2023.
- BISHOP, R. L.; CRITTENDEN, R. J. Geometry of manifolds academic press. **New York**, 1964.
- BRENDLE, S. Embedded self-similar shrinkers of genus 0. **annals of Mathematics**, JSTOR, p. 715–728, 2016.
- CAO, H.-D.; LI, H. A gap theorem for self-shrinkers of the mean curvature flow in arbitrary codimension. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Springer, v. 46, p. 879–889, 2013.
- CARMO, M. P. do. **Geometria riemanniana**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- CHENG, Q.-M.; PENG, Y. Complete self-shrinkers of the mean curvature flow. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Springer, v. 52, n. 3, p. 497–506, 2015.
- CHENG, S.-Y.; YAU, S.-T. Hypersurfaces with constant scalar curvature. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 225, p. 195–204, 1977.
- CHENG, X.; ZHOU, D. Volume estimate about shrinkers. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 141, n. 2, p. 687–696, 2013.

- CHOI, K.; DASKALOPOULOS, P. Uniqueness of closed self-similar solutions to the gauss curvature flow. **arXiv preprint arXiv:1609.05487**, 2016.
- COLDING, T. H.; MINICOZZI, W. P. Generic mean curvature flow i; generic singularities. **Annals of mathematics**, JSTOR, p. 755–833, 2012.
- COLOMBO, G.; MARI, L.; RIGOLI, M. Remarks on mean curvature flow solitons in warped products. **arXiv preprint arXiv:1811.10968**, 2018.
- COSTA-FILHO, W. O. A note on the characterization of spheres as self-shrinkers. **Archiv der Mathematik**, Springer, v. 115, n. 6, p. 737–739, 2020.
- COSTA-FILHO, W. O. The  $r$ -mean curvature and rigidity of compact hypersurfaces in the euclidean space. **Annals of Global Analysis and Geometry**, Springer, v. 60, n. 4, p. 903–910, 2021.
- DAJCZER, M.; TOJEIRO, R. Hypersurfaces with a constant support function in spaces of constant sectional curvature. **Archiv der Mathematik**, Birkhäuser-Verlag, v. 60, p. 296–299, 1993.
- DING, Q.; XIN, Y. Volume growth eigenvalue and compactness for self-shrinkers. **Asian Journal of Mathematics**, International Press of Boston, v. 17, n. 3, p. 443–456, 2013.
- GAO, S.; LI, H.; MA, H. Uniqueness of closed self-similar solutions to  $\sigma_k^\alpha$ -curvature flow. **Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA**, Springer, v. 25, p. 1–26, 2018.
- GUO, Z. Scalar curvature of self-shrinker. **Journal of the Mathematical Society of Japan**, The Mathematical Society of Japan, v. 70, n. 3, p. 1103–1110, 2018.
- HALPERN, B. On the immersion of an  $n$ -dimensional manifold in  $n+1$ -dimensional euclidean space. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 30, n. 1, p. 181–184, 1971.
- HAMILTON, R. S. Three-manifolds with positive ricci curvature. **Journal of Differential geometry**, Lehigh University, v. 17, n. 2, p. 255–306, 1982.
- HARDY, G. H.; LITTLEWOOD, J. E.; PÓLYA, G. **Inequalities**. [S.l.]: Cambridge university press, 1952.
- HUISKEN, G. Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 20, n. 1, p. 237–266, 1984.
- HUISKEN, G. Contracting convex hypersurfaces in riemannian-manifolds by their mean-curvature. **Inventiones mathematicae**, v. 84, n. 3, p. 463–480, 1986.
- HUISKEN, G. Asymptotic behavior for singularities of the mean curvature flow. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 31, n. 1, p. 285–299, 1990.
- HUISKEN G; POLDEN, A. Geometric evolution equations for hypersurfaces. **n: Hildebrandt S., Struwe M. (eds) Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems. Lecture Notes in Mathematics, vol 1713 (1999) . Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0092669**, Springer, p. 45–84, 1999.
- IMPERA, D. et al. On the geometry of newton operators. Università degli Studi di Milano, 2012.

- KARP, L. On stokes' theorem for noncompact manifolds. **Proceedings of the American Mathematical Society**, v. 82, n. 3, p. 487–490, 1981.
- LE, N. Q.; SESUM, N. Blow-up rate of the mean curvature during the mean curvature flow and a gap theorem for self-shrinkers. **Communications in Analysis and Geometry**, v. 19, p. 633–659, 2011.
- LEE, J. M. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. v. 176.
- NOMIZU, K.; SMYTH, B. On the gauss mapping for hypersurfaces of constant mean curvature in the sphere. **Commentarii Mathematici Helvetici**, Springer, v. 44, n. 1, p. 484–490, 1969.
- O'NEILL, B. **Semi-Riemannian geometry with applications to relativity**. [S.l.]: Academic press, 1983.
- PUCCI, P.; SERRIN, J. The strong maximum principle revisited. **Journal of Differential Equations**, Elsevier, v. 196, n. 1, p. 1–66, 2004.
- RAUCH, H. E. A contribution to differential geometry in the large. **Annals of Mathematics**, JSTOR, p. 38–55, 1951.
- ROS, A. Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures. **Revista Matemática Iberoamericana**, v. 3, n. 3, p. 447–453, 1987.
- ROS, A. Compact hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem. **Journal of Differential Geometry**, Lehigh University, v. 27, n. 2, p. 215–220, 1988.
- VASQUEZ, C. J. Minimal hypersurfaces in conformally flat spaces. **Journal of Geometry**, Springer, v. 106, n. 2, p. 363–382, 2015.
- VOSS, K. **Einige differentialgeometrische Kongruenzsätze für geschlossene Flächen und Hyperflächen**. Tese (Doutorado) — ETH Zurich, 1956.
- YAU, S.-T. Some function-theoretic properties of complete riemannian manifold and their applications to geometry. **Indiana University Mathematics Journal**, JSTOR, v. 25, n. 7, p. 659–670, 1976.