

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM ASSOCIAÇÃO COM A UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA

MATHEUS BARBOSA MARTINS

ESTIMATIVAS PARA O ÍNDICE DE MORSE: RESULTADOS DE COTAÇÃO
INFERIOR, CLASSIFICAÇÃO, LACUNA E RIGIDEZ

MACEIÓ - AL

2022

MATHEUS BARBOSA MARTINS

ESTIMATIVAS PARA O ÍNDICE DE MORSE: RESULTADOS DE COTAÇÃO
INFERIOR, CLASSIFICAÇÃO, LACUNA E RIGIDEZ

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva.

MACEIÓ - AL

2022

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

M386e Martins, Matheus Barbosa.

Estimativas para o índice de Morse : resultados de cotação inferior, classificação, lacuna e rigidez / Matheus Barbosa Martins. – 2022.
160 f. : il.

Orientador: Márcio Henrique Batista da Silva.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2022.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia.

Bibliografia: f. 154-160.

1. Hipersuperfícies. 2. Morse, Teoria de - Lacunas. 3. Espaços ponderados. 4. Fronteira livre. I. Título.

CDU: 514.764.27

FOLHA DE APROVAÇÃO

AUTOR: MATHEUS BARBOSA MARTINS

Estimativas para o índice de Morse: resultados de cotação inferior, classificação, lacuna e rigidez

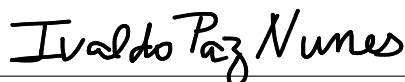
Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Trabalho aprovado, Maceió, 25 de novembro de 2022.

Banca Examinadora



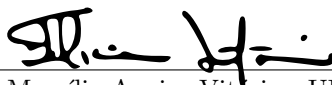
Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL (Orientador)



Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes - UFMA (Avaliador Externo)



Prof. Dr. Allan George de Carvalho Freitas - UFPB (Avaliador Externo)



Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitorio - UFAL (Avaliador Interno)



Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL (Avaliador Interno)

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus por ter me concedido o talento para entender matemática e, ainda mais importante, as oportunidades de desenvolvê-lo. Muitas pessoas foram importantes neste processo de desenvolvimento matemático, especialmente os professores do IM-UFAL, aos quais deixo meus sinceros agradecimentos. Em particular, gostaria de agradecer ao meu orientador Márcio Batista por ter aceitado me orientar no doutorado, por desempenhar uma excelente orientação, pela paciência e dedicação em todas as etapas do desenvolvimento desta Tese, bem como seus conselhos acadêmicos e pessoais. Muito obrigado por tudo!

Ao meu pai José Avacy (In Memoriam) e à minha mãe Gilvaneide Barbosa por terem me dado uma boa educação e incentivado os meus estudos, por serem um referencial de pessoas justas e trabalhadoras, também por todo o esforço, amor e carinho que foram fundamentais ao longo de toda a minha trajetória.

Aos meus irmãos Eleonora Augusto e Murilo Martins que sempre me apoiaram a seguir estudando, agradeço pela união e o suporte familiar.

À todas as amigas cultivadas no decorrer destes anos, que me permitiram ter dias mais leves e felizes enquanto trabalhava para avançar academicamente. Em especial, às turmas que pude conviver em cada semestre na "salinha do mestrado" e aos moradores que tive mais afinidade na "RUD". Em particular, gostaria de agradecer aos meus bons amigos Pedro Carvalho, Carlos Eduardo, Robson Santos, Vinicius Silva, Samuel Rocha, Diego Chicuta e Davis Magalhães.

Aos professores Feliciano Vitório, Cícero Tiarlos, Allan Freitas e Ivaldo Nunes, pela participação na banca examinadora, bem como pelas críticas e sugestões feitas a este trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo suporte financeiro durante todo o meu doutorado.

Resumo

Nesta Tese de doutorado são provadas estimativas para o índice de Morse de hipersuperfícies mínimas em cinco contextos distintos:

- (1): Demonstramos a não existência de uma hipersuperfície mínima, dois-lados, fechada, conexa, imersa no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ com índice dois.
- (2): São provadas estimativas de rigidez e lacuna no índice para hipersuperfícies mínimas, fechadas, orientáveis, imersas em um produto finito de esferas. Tais estimativas são dadas em função dos raios e dimensões das esferas.
- (3): Tratamos de hipersuperfícies (compactas ou completas não compactas) f -mínimas, orientáveis, com fronteira livre em um domínio Ω do espaço euclidiano ponderado $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$. Neste caso, obtemos cotações inferiores para o índice por uma função afim envolvendo uma quantidade topológica. Caso a hipersuperfície seja compacta, esta quantidade é o seu primeiro número de Betti.
- (4): Consideramos operadores do tipo $\Delta_f + W - aK$ sobre superfícies em variedades Riemannianas ponderadas $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, onde W é uma função localmente integrável, K é a curvatura Gaussiana da superfície e a é um inteiro positivo. São apresentados resultados sobre a topologia e crescimento de volume de superfícies com curvatura média ponderada constante f -estáveis ou com f -índice finito. Além disso, também obtemos cotação inferior para o primeiro autovalor do operador de estabilidade.
- (5): Obtemos fórmulas de monotonicidade e densidade para hipersuperfícies com fronteira não vazia, propriamente mergulhadas em um produto warped do tipo $I \times_h \mathbb{S}^2$. Por fim, apresentamos um método para calcular uma região de estabilidade para cones totalmente geodésicos em um espaço conforme a produtos warped da forma $I \times_h \mathbb{S}^2$ ou $I \times_h \mathbb{R}^2$ com curvatura de Ricci constante.

Palavras-chave: Hipersuperfície Mínima; Índice de Morse; Lacuna no Índice; Cotação Inferior; Espaços Ponderados; Fronteira Livre.

Abstract

In this Doctoral Thesis, we obtain several estimates for the Morse index of minimal hypersurfaces in five different settings. More precisely,

(1): We prove the nonexistence of a closed two-sided minimal hypersurface immersed in the real projective space $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ with index two.

(2): We prove a gap of the Morse index of an orientable, closed minimal hypersurface immersed in a finite product of spheres. Such estimates are given as a function of the radii and dimensions of the spheres.

(3): We study orientable complete f -minimal free boundary hypersurfaces in a domain Ω of the weighted Euclidean space $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$. In this case, we get lower bounds for the index by an affine function involving a topological quantity. If the hypersurface is compact, this quantity is its first Betti number.

(4): We consider operators of the type $\Delta_f + W - aK$ on surfaces in weighted Riemannian manifolds $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, where W is a locally integrable function, K is the Gaussian curvature of the surface, and a is a positive integer. We obtain some results about the topology and volume growth of geodesic ball on f -stable constant weighted mean curvature surfaces. In addition, we also get a lower bound for the first eigenvalue of the stability operator.

(5): We obtain monotonicity and density formulas for hypersurfaces with a non-empty boundary, properly embedded in a warped product of type $I \times_h \mathbb{S}^2$. Finally, we present a method to calculate a region of stability for totally geodesic cones in a space conformal to warped products of the form $I \times_h \mathbb{S}^2$ or $I \times_h \mathbb{R}^2$ with curvature constant Ricci.

Keywords: Minimal Hypersurface; Morse Index; Gap In The Index; Lower Bound; Weighted Spaces; Free Boundary.

Sumário

	Página
INTRODUÇÃO	9
1 PRELIMINARES	23
1.1 Tensores de curvatura e geometria das subvariedades	24
1.2 Índice de Morse	26
1.2.1 Índice fraco	28
1.3 Estimativas de índice na esfera unitária	30
1.4 Variedades singulares	33
1.4.1 Operador de Jacobi e o índice de Morse em variedades singulares	34
1.4.2 Funções de corte	35
1.5 Variedades Riemannianas ponderadas	36
1.5.1 f -índice de hipersuperfícies f -mínimas com fronteira livre	37
1.5.2 L -índice	39
1.6 Formas diferenciais	40
1.6.1 Operadores definidos sobre formas diferenciais	40
1.6.2 Laplaciano de Hodge e fórmula de Weitzenböck no caso ponderado	43
1.6.3 1-formas f -harmônicas sobre variedades com fronteira	45
1.6.4 Formas harmônicas L^2 em variedades completas não compactas	50
2 HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COM ÍNDICE BAIXO NO ESPAÇO PROJE-	
TIVO REAL	52
2.1 Hipersuperfícies de Clifford em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$	53
2.2 Resultados básicos	55
2.3 Resultado principal do capítulo	58
3 LACUNA NO ÍNDICE DE MORSE DE HIPERSUPERFÍCIES NO PRODUTO	
FINITO DE ESFERAS	64
3.1 Caso 1: Produto de duas esferas	65
3.1.1 Resultados preliminares	65
3.1.2 Principais resultados no caso 1	67
3.1.3 Cilindros no produto de esferas	70
3.1.4 Larguras do produto de duas esferas	73

3.2	Caso 2: Produto finito de esferas	77
3.3	Lacuna do índice na esfera	84
4	LIMITAÇÃO DE ÍNDICE PARA HIPERSUPERFÍCIES f-MÍNIMAS COM	
	FRONTEIRA LIVRE NO ESPAÇO EUCLIDIANO PONDERADO	88
4.1	Funções teste e cálculos preliminares	89
4.2	Resultados em hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano ponderado	93
4.3	Resultados em hipersuperfícies completas não compactas do espaço euclidi- ano ponderado	101
4.4	Resultados em hipersuperfícies completas não compactas de \mathbb{R}^{n+1}	105
4.5	O caso CMC completo não compacto em \mathbb{R}^{n+1}	108
5	ÍNDICE DE MORSE DE HIPERSUPERFÍCIES EM ESPAÇOS PONDERADOS	113
5.1	Resultados em superfícies fechadas f -estáveis	114
5.2	Operadores com f -índice zero em superfícies completas não compactas . .	116
5.3	Operador de estabilidade	121
5.4	f -índice finito	124
5.5	Primeiro autovalor do operador de estabilidade	126
5.6	Estabilidade de solitons em produtos warped	128
6	ESTIMATIVAS DE CRESCIMENTO, DENSIDADE E ESTABILIDADE EM	
	PRODUTOS WARPED	133
6.1	Resultados de monotonicidade	134
	6.1.1 Exemplos	137
	6.1.2 Solitons	138
6.2	Densidade	140
6.3	Estabilidade de cones totalmente geodésicos	143
	6.3.1 Exemplos	150
	Referências	154

INTRODUÇÃO

Hipersuperfícies mínimas são pontos críticos do funcional área, enquanto hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC) são pontos críticos do funcional área para variações que preservam o volume. Em qualquer hipersuperfície mínima Σ , a fórmula da segunda variação do funcional área induz uma forma quadrática $Q : C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$. O índice desta forma quadrática é chamado índice de Morse de Σ (ou índice de estabilidade) e é denotado por $\text{Ind}(\Sigma)$. Do ponto de vista analítico, o índice indica o número de autovalores negativos do operador de Jacobi J , um operador diferencial elíptico de segunda ordem associado a Q . Do ponto de vista geométrico, o índice indica o número de direções cujas variações decrescem área.

O estudo de como o índice de Morse se relaciona com questões geométricas e topológicas das hipersuperfícies mínimas (ou CMC) tem se tornado um ramo muito estudado da Análise Geométrica. Esta Tese de Doutorado é voltada para o estudo do índice de Morse em cinco contextos distintos, que serão abordados entre os capítulos 2 a 6. No capítulo 1 serão estabelecidos os conceitos clássicos na literatura e que serão fundamentais para o desenvolvimento dos principais resultados nos demais capítulos. A seguir, faremos uma introdução a respeito do que será estudado em cada capítulo:

Capítulo 2. Em 1968, Simons provou que não existem hipersuperfícies mínimas compactas estáveis na esfera unitária \mathbb{S}^{n+1} e também caracterizou as esferas totalmente geodésicas como as únicas hipersuperfícies mínimas compactas com índice um, veja ([62], 1968). No início da década de 90, Urbano provou que qualquer superfície mínima compacta não totalmente geodésica em \mathbb{S}^3 tem índice de Morse maior ou igual a 5, ocorrendo a igualdade apenas para a superfície mínima de Clifford, veja ([68], 1990), e El Soufi mostrou que qualquer hipersuperfície mínima compacta não totalmente geodésica em \mathbb{S}^{n+1} tem índice maior ou igual a $n + 3$, para $n \geq 3$, ver ([31], 1993).

A seguinte conjectura permanece em aberto desde a década de 90:

Conjectura. As únicas hipersuperfícies mínimas compactas da esfera redonda unitária \mathbb{S}^{n+1} com índice $n + 3$ são as hipersuperfícies mínimas de Clifford.

Como respostas parciais, citamos o resultado obtido por Guadalupe-Brasil Jr-Delgado, em ([39], 1999), o qual afirma que a conjectura é verdadeira sob a condição de

curvatura escalar constante. Além disso, Perdomo mostrou que a conjectura é verdadeira se a hipersuperfície é invariante pela aplicação antípoda, veja ([54], 2001).

Neste capítulo, focamos na lacuna do índice de Morse de hipersuperfícies mínimas compactas imersas no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ com curvatura escalar constante. Inicialmente, relembramos a classificação dada por do Carmo–Ritoré–Ros:

Teorema 0.0.1. ([20], 2000) *As únicas hipersuperfícies mínimas compactas de dois-lados com índice um no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies mínimas de Clifford.*

Para o nosso propósito, usamos as funções teste construídas em ([20], 2000) e por meio de um argumento Min-max fomos capazes de construir novas funções com média zero que são interessantes no contexto de nosso estudo. Desse modo, demonstramos o principal resultado do capítulo:

Teorema 0.0.2. *Não há hipersuperfície mínima dois-lados compacta conexa no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ com curvatura escalar constante e índice de Morse dois.*

O seguinte Teorema é uma consequência imediata:

Teorema 0.0.3. *A única hipersuperfície mínima dois-lados compacta conexa do espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ com curvatura escalar constante e índice de Morse menor ou igual a dois são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies de Clifford.*

Vale ressaltar que os principais resultados deste capítulo foram publicados em ([12], 2022).

Capítulo 3. Este capítulo está dividido em duas partes. Na parte 1, estudaremos hipersuperfícies mínimas de $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $n_1 \geq n_2$, $n_1 + n_2 = n + 1 \geq 3$. Ambrozio, Carlotto e Sharp ([6], 2018) provaram que se Σ é uma hipersuperfície mínima fechada e orientável (mergulhada) de $\mathbb{S}^{n_1}(1) \times \mathbb{S}^{n_2}(1)$ ($n_1 \geq 3, n_2 = 1$ ou $n_1, n_2 \geq 2$ e $(n_1, n_2) \neq (2, 2)$), então $\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{(n+3)(n+2)} b_1(\Sigma)$, onde $b_1(\Sigma)$ é o primeiro número de Betti de Σ . No entanto, quando n é suficientemente grande e $b_1(\Sigma)$ é pequeno, não podemos obter mais informações, exceto $\text{Ind}(\Sigma) \geq 0$ ou 1. Por outro lado, um teorema de classificação devido a Torralbo e Urbano ([66], 2014) implica

que $\text{Ind}(\Sigma) = 0$ se e somente se $n_1 > n_2 = 1$ e $\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(1) \times \{q\}$. Uma questão natural seria classificar as hipersuperfícies mínimas com índice 1.

Inicialmente, destacamos as hipersuperfícies totalmente geodésicas

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \mathbb{S}^{n_1-1}(r_1) \times \mathbb{S}^1(mr_2) & \text{for } n_1 > n_2 = 1; \\ \mathbb{S}^{n_1-1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) & \text{for } n_1 \geq n_2 \geq 2. \end{cases}$$

e

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \{q\} & \text{for } n_1 > n_2 = 1; \\ \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2-1}(r_2) & \text{for } n_1 \geq n_2 \geq 2. \end{cases}$$

Em ([25], 2021), Hang Chen deu uma resposta satisfatória a indagação posta. Mais precisamente,

Teorema 0.0.4. *Dado $n_1 \geq n_2 \geq 2$, seja Σ^n uma hipersuperfície mínima orientável em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(1) \times \mathbb{S}^{n_2}(a)$ com $\text{Ind}(\Sigma) = 1$. Suponha que Σ seja fechada e suave ou singular com um conjunto singular satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing}(\Sigma)) = 0$, onde \mathcal{H} é a medida de Hausdorff. Temos que*

(I). *Se $a^2 > \frac{n_2}{n_1-1}$, então $\Sigma = \Sigma_2$;*

(II). *Se $a^2 = \frac{n_2}{n_1-1}$, então $\Sigma = \Sigma_1$ ou Σ_2 ;*

(III). *Se $a^2 < \frac{n_2-1}{n_1}$, então $\Sigma = \Sigma_1$;*

(IV). *Se $a^2 = \frac{n_2-1}{n_1}$, então $\Sigma = \Sigma_1$ ou Σ_2 .*

Todos esses casos são mergulhos totalmente geodésicos.

Os Teoremas principais desta Parte 1 generalizam o resultado acima obtendo lacunas no índice dependendo apenas dos raios e dimensões das duas esferas que compõem o ambiente $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$. Mais especificamente, temos:

Teorema 0.0.5. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima, fechada e orientável com $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_1$ em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 \geq n_2 \geq 1$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Valem as seguintes classificações:*

(I): *Se $C_1 = \frac{n_2-1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2} > 0$, então $\Sigma = \Sigma_1$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_1) = 1$.*

(II): *Se $C_1 = 0$, então $\Sigma = \Sigma_1$ ou $\Sigma = \Sigma_2$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_1) = \text{Ind}(\Sigma_2) = 1$.*

Teorema 0.0.6. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima, fechada e orientável com $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_2$ em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 \geq n_2 \geq 1$. Assuma que Σ é suave ou*

tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Valem as seguintes classificações:

(I): Se $C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2} > 0$, então $\Sigma = \Sigma_2$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_2) = 1$.

(II): Se $C_2 = 0$, então $\Sigma = \Sigma_1$ ou $\Sigma = \Sigma_2$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_1) = \text{Ind}(\Sigma_2) = 1$.

Discutiremos como a k -largura min-max de uma variedade Riemanniana fechada conexa M com curvatura de Ricci positiva se relaciona com os volumes de hipersuperfícies mínimas fechadas orientáveis mergulhadas em M que têm índice menor ou igual a k . Usaremos esta relação junto ao resultado de lacuna obtido no Teorema 0.0.6 para demonstrar o seguinte Teorema:

Teorema 0.0.7. *Seja $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ dotada da métrica produto g_0 . Suponha que $n_1 \geq n_2 \geq 2$ e $n_1 + n_2 \leq 7$. Então as larguras $\omega_1(M, g_0) = \dots = \omega_k(M, g_0)$ são iguais a*

$$\begin{cases} \text{vol}_{g_0}(\Sigma_1) & \text{para } C_1 = \frac{n_2 - 1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2} > 0 \text{ e } k = n_1; \\ \text{vol}_{g_0}(\Sigma_2) & \text{para } C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2} > 0 \text{ e } k = n_2. \end{cases} .$$

A Parte 2 é voltada para a generalização dos resultados desenvolvidos na Parte 1, visando o caso onde o ambiente é um produto finito de esferas $M^{n+1} := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$. Para isso, considere as constantes $C_{i,j} := \frac{n_i - 1}{r_i^2} - \frac{n_j}{r_j^2}$ e as hipersuperfícies totalmente geodésicas $\Sigma_j := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_j-1}(r_j) \times \dots \times \mathbb{S}^k(r_k)$, onde $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Obtemos o seguinte resultado:

Proposição 0.0.8. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima, fechada e orientável em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$. Suponha que para algum $j \in \{1, \dots, k\}$ vale $C_{i,j} > 0 \quad \forall i \neq j$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Se $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_j$, então $\Sigma = \Sigma_j$. Além disso, temos $\text{Ind}(\Sigma_j) = 1$ (quando $n_j \geq 2$) ou $\text{Ind}(\Sigma_j) = 0$ (quando $n_j = 1$).*

Este resultado de lacuna no índice também tem implicações no cálculo das primeiras larguras do produto finito de esferas.

Capítulo 4. Atualmente, está bem estabelecido o princípio de que o índice de uma hipersuperfície mínima compacta de uma variedade com curvatura de Ricci positiva é sensível à topologia, mais precisamente, ao primeiro número de Betti da hipersuperfície.

Portanto, cohomologia rica em grau um muitas vezes implica alta instabilidade da imersão. De fato, Schoen, Marques e Neves formularam a seguinte conjectura:

Conjectura: Seja M uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Existe uma constante positiva C tal que, para toda hipersuperfície mínima, fechada, mergulhada Σ , vale a desigualdade

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq Cb_1(\Sigma),$$

onde $b_1(\Sigma)$ é o primeiro número de Betti de Σ .

Toda 1-forma harmônica em uma superfície mínima fechada está associada a um campo vetorial de \mathbb{R}^3 , desse modo pode-se considerar suas funções coordenadas com relação a base canônica. Em ([55], 2006), Ros usou as funções coordenadas de 1-formas harmônicas como funções teste para o operador de estabilidade. Ele provou que o índice de uma superfície mínima em \mathbb{R}^3 é limitado inferiormente por uma função linear de seu gênero. Precisamente, ele provou o seguinte:

Teorema 0.0.9. *Seja Σ uma superfície mínima, completa e não plana em \mathbb{R}^3 . Então Σ tem índice finito se, e somente se, sua curvatura total é finita. Além disso,*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2g}{3}, \text{ se } \Sigma \text{ é orientável,}$$

e

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{g}{3}, \text{ se } \Sigma \text{ é não orientável.}$$

Posteriormente, em ([27], 2016) e ([28], 2018), Chodosh e Maximo melhoraram o resultado de Ros demonstrando o próximo Teorema:

Teorema 0.0.10. *Suponha que Σ é uma superfície mínima, orientável e completa, imersa em \mathbb{R}^3 , com gênero g e r fins. Então*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{3}(g + r) - 1.$$

Para hipersuperfícies mínimas fechadas da esfera unitária, Savo mostrou em ([58], 2010) que:

Teorema 0.0.11. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima de \mathbb{S}^{n+1} . Assuma que $b_1(\Sigma) \geq 1$ e $n \geq 3$. Então,*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{b_1(\Sigma)}{\binom{n+2}{2}} + n + 2.$$

Em ([7], 2018), Ambrozio-Carlotto-Sharp, usando ideias de Ros e Savo, desenvolveram uma estratégia muito bem sucedida para generalizar que o índice de uma hipersuperfície mínima $\Sigma \hookrightarrow M$ é limitado inferiormente por uma função linear de seu primeiro número de Betti em uma classe mais ampla de variedades M além do espaço euclidiano e a esfera redonda.

No caso de hipersuperfícies completas não compactas no espaço euclidiano, temos o seguinte resultado obtido por Chao Li em ([45], 2017):

Teorema 0.0.12. *Seja Σ^{n-1} uma hipersuperfície mínima dois-lados conexa completa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, com r fins. Suponha que Σ tenha curvatura total finita, ou seja, $\int_{\Sigma} |A|^{n-1} d\mu$ é finito. Então temos*

$$\text{Ind}(\Sigma) + \text{Nul}(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n-1)}(r + b_1(\overline{\Sigma}) - 1),$$

onde $\text{Nul}(\Sigma)$ é a dimensão do espaço de L^2 das soluções do operador de Jacobi, e $b_1(\overline{\Sigma})$ é o primeiro número de Betti da compactação de Σ .

Ao considerar hipersuperfícies mínimas com fronteira não vazia, também são obtidos resultados limitando o índice inferiormente por uma função afim do primeiro número de Betti da hipersuperfície, veja os trabalhos de Ambrozio-Carlotto-Sharp ([7], 2018) e P. Sargent ([57], 2017).

Em ([42], 2020), Impera-Rimoldi-Savo estudaram o índice de hipersuperfícies Σ^n f -mínimas no espaço euclidiano ponderado $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$. Quando Σ é compacta e o peso f é uma função convexa em \mathbb{R}^{n+1} , foi obtida uma limitação inferior para $\text{Ind}(\Sigma)$ dependendo apenas da topologia de Σ através do seu primeiro número de Betti:

Teorema 0.0.13. *Seja Σ^n uma hipersuperfície f -mínima compacta da variedade ponderada $M_f := (\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$. Se $\text{Ric}_f \geq \mu > 0$ para alguma constante μ , então*

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(N_{\Delta_f}(2\mu) + b_1(\Sigma) \right),$$

onde $N_{\Delta_f}(2\mu) := \#\{\text{autovalores positivos de } \Delta_f \text{ que são menores que } 2\mu\}$.

Também foi demonstrado o seguinte Teorema para hipersuperfícies f -mínimas completas não compactas:

Teorema 0.0.14. *Seja Σ uma hipersuperfície f -mínima completa não compacta de $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com $Ric_f \geq \mu > 0$. Então*

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim \mathcal{H}_f^1(\Sigma),$$

onde $\mathcal{H}_f^1(\Sigma)$ é o espaço das 1-formas f -harmônicas que são quadrado somáveis para a medida ponderada:

$$\mathcal{H}_f^1(\Sigma) := \{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : d\omega = \delta_f \omega = 0, \int_{\Sigma} |\omega|^2 e^{-f} d\mu < \infty\}.$$

Finalmente, Castro-Rosales ([22], 2014) estudaram o operador de Jacobi em variedades Riemannianas ponderadas com fronteira não vazia e a estabilidade de hipersuperfícies com fronteira livre.

Em nossos principais resultados do capítulo consideraremos hipersuperfícies f -mínimas Σ do espaço euclidiano ponderado $M_f := (\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira livre em um domínio ponderado ilimitado $\Omega \subset M_f$ (com fronteira não vazia). Nosso objetivo neste quarto capítulo é usar principalmente as ideias em ([7], 2018), ([57], 2017), ([42], 2020) e ([22], 2014) para obter resultados que permitam limitar o índice $\text{Ind}_f(\Sigma)$ inferiormente por uma função afim envolvendo alguma quantidade topológica. Isto será feito através da comparação entre o espectro do operador de estabilidade ponderado e o do f -Laplaciano de Hodge atuando em 1-formas. Os dois resultados mais importantes são enunciados da seguinte maneira:

Teorema 0.0.15. *Seja Ω^{n+1} um domínio ponderado em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, f -mínima, orientável, com fronteira livre em Ω . Suponha que Σ seja suave ou tenha um conjunto singular satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing}(\Sigma)) = 0$ e que o tensor $Ric_f = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$.*

(I). *Se Ω é um domínio convexo em \mathbb{R}^{n+1} , então:*

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha) + b_1(\Sigma) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fN}^{[1]}$ menores que 2α . Ou ainda,

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} b_1(\Sigma) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

(II). Se Ω for um domínio f -média convexo em \mathbb{R}^{n+1} , então:

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H^{n-1}(\Sigma; \mathbb{R}) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fT}^{[1]}$ menor que 2α . Ou ainda,

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H^{n-1}(\Sigma; \mathbb{R}) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

Teorema 0.0.16. *Seja Ω^{n+1} um domínio ponderado ilimitado em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^n uma hipersuperfície orientável completa não compacta, f -mínima, com fronteira livre em Ω . Assuma que o tensor $\text{Ric}_f = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$.*

(I). Se Ω for um domínio convexo, então:

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H_{Nf}^1(\Sigma) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fN}^{[1]}$ menor que 2α . Ou ainda,

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{Nf}^1(\Sigma) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

(II). Se Ω for um domínio f -média convexo, então:

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H_{Tf}^1(\Sigma) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fT}^{[1]}$ menor que 2α . Ou ainda,

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{Tf}^1(\Sigma) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

Finalmente, voltando ao caso de hipersuperfícies mínimas completas não compactas de \mathbb{R}^{n+1} , demonstramos a seguinte melhoria do Teorema 0.0.12 de Chao Li:

Teorema 0.0.17. *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa não compacta, mínima e orientável em \mathbb{R}^{n+1} . Suponha que Σ tenha t fins e curvatura total finita. Então*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)}(t + b_1(\bar{\Sigma}) - 1),$$

onde $b_1(\bar{\Sigma})$ é o primeiro número Betti da compactação de Σ .

Capítulo 5. Neste capítulo estudamos operadores do tipo $L_f = \Delta_f + aK + W$ sobre uma superfície Σ^2 da variedade Riemanniana ponderada $M_f = (M^3, g, e^{-f}d\mu)$, onde K denota a curvatura Gaussiana de Σ e $\Delta_f u := \Delta u - g(\nabla u, \nabla f)$ é o f -Laplaciano. Como exemplo, temos o operador de Jacobi ponderado sobre superfícies com curvatura média ponderada $H_f := H + g(N, \bar{\nabla} f)$ constante, que pode ser escrito como

$$J_f = \Delta_f + \frac{1}{2}S_\infty - \Delta f - K + \frac{1}{2}(|\nabla f|^2 + |A|^2 + H_f^2),$$

onde $S_\infty = S + 2\bar{\Delta}f - |\bar{\nabla}f|^2$ é a curvatura escalar de Perelman de M_f . O estudo sobre a topologia de superfícies nas quais é possível que um operador do tipo L_f tenha índice finito (ou zero) vem sendo discutido desde a década de 80. Por exemplo, tem-se o Teorema de Fischer-Colbrie em ([36], 1985), o qual afirma que superfícies mínimas com índice de Morse finito imersas em um ambiente com curvatura escalar não negativa devem ter topologia finita. Outros trabalhos neste sentido são ([29], 2012), ([14], 2014), ([61], 1987), ([32], 2013), ([33], 2017) e ([13], 2018); os dois últimos artigos tratam do contexto ponderado.

Inicialmente, olhamos para o seguinte Teorema obtido por Bérard-Castillon em ([14], 2014) no contexto sem peso ($f = 0$):

Teorema 0.0.18. *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana completa não compacta, e seja W uma função localmente integrável sobre Σ , com W_- integrável. Assuma que o operador $\Delta + W - aK$ é não negativo sobre Σ , e ocorre alguma das condições*

- (i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou
- (ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou
- (iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.

Então,

(A) *A superfície (Σ, g) tem topologia finita, e no máximo crescimento de volume quadrático. Em particular, (Σ, g) é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos.*

(B) A função W é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} W d\mu \leq 2\pi a \chi(\Sigma).$$

(C) Se $\int_{\Sigma} W d\mu = 2\pi a \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático, e $aK + W \equiv 0$ em q.t.p. de Σ .

Dado um operador $L_f = \Delta_f + aK + W$ sobre Σ , associaremos L_f ao operador $L = \Delta + aK + W + \left(\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right)$ e mostraremos que L_f ser não negativo com relação ao produto interno de $L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$ implica em L ser não negativo com relação a $L^2(\Sigma, d\mu)$. A partir desta relação, aplicaremos o Teorema 0.0.18 para obter informações topológicas e de crescimento de volume da superfície (Σ, g) tendo como hipótese condições sobre o índice de L_f . Destacamos os seguintes resultados:

Proposição 0.0.19. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa não compacta, e seja W uma função localmente integrável em Σ , com $\left(W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right)_-$ integrável com respeito a $d\mu$. Assuma que o operador $\Delta_f + W - aK$ tem f -índice zero sobre Σ , e que ocorre alguma das condições*

(i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou

(ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou

(iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.

Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático. Em particular, (Σ, g) é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana fechada com um número finito de pontos removidos.

(B) A função $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 d\mu \leq 2\pi a \chi(\Sigma).$$

(C) If $\int_{\Sigma} W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 d\mu = 2\pi a \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 - aK \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .

Como Corolário, temos a seguinte generalização do Teorema de Huber no contexto ponderado:

Proposição 0.0.20. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa. Suponha que a parte negativa $\left(\frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_{\Sigma}^{\infty}\right)_-$ seja integrável em Σ . Então,*

(i) (Σ, g) tem topologia finita e é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana fechada com um número finito de pontos removidos.

(ii) $\frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_\Sigma^\infty$ é integrável e obtemos uma variação da Desigualdade de Cohn-Vossen

$$\int_\Sigma \frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_\Sigma^\infty d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

Quando o operador tem f -índice finito, obtemos

Proposição 0.0.21. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa não compacta, e seja W uma função localmente integrável em Σ , com $(W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2)_-$ integrável com respeito a $d\mu$. Assuma que o operador $\Delta_f + W - aK$ tem f -índice finito sobre Σ , e que ocorre alguma das condições*

(i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou

(ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou

(iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.

Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.

(B) A função $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ é integrável em (Σ, g) .

Desse modo, conseguimos generalizar o Teorema de Fischer-Colbrie no contexto ponderado:

Proposição 0.0.22. *Seja Σ uma superfície completa não compacta com f -índice finito e curvatura média ponderada constante H_f da variedade Riemanniana ponderada $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, onde $S_\infty + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 > 0$. Então a superfície (Σ, g) tem topologia finita, e no máximo crescimento de volume quadrático. Em particular, (Σ, g) é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos.*

Denotando por λ_1 o primeiro autovalor do operador de estabilidade J_f . Demonstramos as seguintes estimativas sobre superfícies fechadas ou completas não compactas:

Proposição 0.0.23. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície fechada com curvatura média ponderada constante H_f . Suponha que a constante*

$$\delta = \frac{1}{2|\Sigma|} \int_\Sigma S_\infty + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 d\mu$$

é não negativa. Se o primeiro autovalor do operador de estabilidade satisfaz $\lambda_1 \geq -\delta$, então Σ é homeomorfa a esfera S^2 ou ao toro plano \mathbb{T}^2 . Além disso,

(a) Se a desigualdade estrita vale, então Σ é homeomorfa a \mathbb{S}^2 ;

(b) Se Σ é homeomorfo a \mathbb{T}^2 , então Σ é f -minimal, totalmente geodésica e $\lambda_1 = -\delta$.

Proposição 0.0.24. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f} d\mu)$ uma superfície completa não compacta com curvatura média ponderada constante H_f , tal que $\frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 \geq \delta$, para alguma constante $\delta \in \mathbb{R}$.*

(A) Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 \geq -\delta$, então:

(A.1) A superfície (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume quadrático e é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou \mathbb{C}^\bullet com as métricas padrão.

(A.2) A função $\frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_\Sigma \frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

Capítulo 6. Em ([51], 2021), Rafael Montezuma obteve uma fórmula de monotonicidade para superfícies mínimas com fronteira livre no espaço de Schwarzschild e a aplicou para obter uma relação entre o comprimento de sua fronteira e a sua densidade no infinito. Mais precisamente, o espaço de Schwarzschild é definido, para cada $m \geq 0$, como o domínio tridimensional

$$M = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : r \geq \frac{m}{2} \right\},$$

dotado da métrica Riemanniana conforme

$$g = \left(1 + \frac{m}{2r} \right) \delta,$$

onde $r = r(x) = |x|$ representa a distância euclidiana de $x \in M$ até a origem, e δ denota a métrica euclidiana plana em M . Neste espaço, considere o plano totalmente geodésico passando pela origem, isto é,

$$\Sigma_0 = \{x \in M : x_3 = 0\}.$$

Como a métrica g é conforme à Euclidiana, a superfície Σ_0 intersecta o horizonte $\{x \in M : r = \frac{m}{2}\} = \partial M$ ortogonalmente ao longo de $\partial\Sigma_0$.

Na teoria dos buracos negros na relatividade geral, o parâmetro m usado no parágrafo anterior para introduzir nossos espaços é chamado de massa ADM, veja ([60], 1979). Portanto, Σ_0 é uma superfície mínima de fronteira livre propriamente mergulhada da variedade de Schwarzschild com massa ADM igual a m , para todo $m > 0$.

A densidade de Σ no infinito, denotada por $\Theta(\Sigma)$, é um número que representa o comportamento assintótico no infinito da razão entre a área da superfície dentro de uma dada bola centrada no horizonte (o conjunto de pontos a uma distância de no máximo uma certa constante de ∂M), e a área da porção de um plano que passa pela origem que está contida na mesma bola. Esta é uma generalização natural da noção de densidade no infinito para subvariedades mínimas no espaço euclidiano. Usando um argumento de monotonicidade, foi obtido:

Teorema 0.0.25. *Seja Σ uma superfície mínima propriamente mergulhada em M que intersecta ∂M ortogonalmente. Então, o comprimento da fronteira de Σ satisfaz*

$$|\partial\Sigma| \leq 4\pi m\Theta(\Sigma).$$

Além disso, a igualdade vale quando Σ é um plano passando pela origem e $\Theta(\Sigma) = 1$.

Usando métodos semelhantes aos que foram aplicados por Smith-Zhou ([64], 2019) em seu cálculo do índice de Morse catenóide crítico com fronteira livre, Montezuma fez uma análise de EDO's do tipo Equação de Riccati e mostrou que Σ_0 tem índice de Morse igual a um.

No espaço de Schwarzschild n -dimensional com dimensão $n \geq 4$, Barbosa-Espinar ([8], 2021) demonstraram que Σ_0 tem índice de Morse igual a zero. Além disso, mostraram que existem hipersuperfícies mínimas não compactas com fronteira livre e que não são totalmente geodésicas, $n \geq 8$, com índice de Morse igual a 0. Também foi demonstrado que, para $n \geq 4$, existem infinitas hipersuperfícies mínimas com fronteira livre, que não são congruentes entre si, cujo índice de Morse é infinito.

Finalmente, estudamos a densidade no infinito $\Theta_\Gamma(\Sigma)$ de uma hipersuperfície mínima Σ com fronteira livre em relação a um cone mínimo Γ construído sobre uma hipersuperfície mínima da esfera euclidiana unitária, obtendo o resultado:

Teorema 0.0.26. *Se $\Theta_\Gamma(\Sigma)$ existe e é finito; a seguinte fórmula é válida:*

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) = \frac{|\partial\Sigma|}{2m|\Gamma|} + \frac{n-1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{f(t)}{h^{n-1}(t)} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu.$$

Considere um produto warped do tipo $M^{n+1} = I \times_h P^n$, onde (P, g_P) é uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional e $I = [t_0, +\infty)$ com $t_0 > 0$. Dada uma

hipersuperfície propriamente mergulhada Σ de M , usaremos as notações $B_\rho = \{(t, x) \in M : t_0 \leq t < \rho\}$ e $\Sigma_\rho = \Sigma \cap B_\rho$.

Iniciamos o sexto capítulo definindo uma função $\varphi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi(\rho) := \frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu$ e calculamos que:

Proposição 0.0.27. *Se Σ é uma hipersuperfície propriamente mergulhada em $(M, g) = I \times_h P$, então*

$$\begin{aligned} \frac{n}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu &= \int_{\Sigma_\rho} \left(\frac{1}{h(t)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) h(t) Hg(\partial_t, N) d\mu + \int_{\Sigma_\rho} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu \\ &\quad - h(t_0) \left(\frac{1}{h(t_0)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma. \end{aligned}$$

Onde ∂_t^\top e ∂_t^\perp denotam, respectivamente, as componentes tangente e normal de ∂_t em relação a $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e ν é o campo conormal a $\mathfrak{X}(\partial\Sigma)$ com respeito a $\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Se $h(t)$ é monótona, $Hg(\partial_t, N) \geq 0$ em Σ e $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$ então $\varphi(\rho)$ tem o mesmo tipo de monotonicidade que $h(t)$. Vale ressaltar que Σ ter fronteira livre implica em $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$. Como exemplo de produtos warped com $h(t)$ monótona, citamos os espaços de deSitter Schwarzschild, Anti-deSitter Schwarzschild e Reissner-Nordstrom; que são bem conhecidos em teoria dos buracos negros na relatividade geral.

Em seguida, generalizamos os resultados de densidade para hipersuperfícies propriamente mergulhadas em um produto warped $M = I \times_h \mathbb{S}^n$, onde \mathbb{S}^n está munida com a métrica redonda, $I = [t_0, +\infty)$ com $t > 0$ e a função potencial $f(t) = h'(t)$ cumpre a condição $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = k$ para alguma constante $k > 0$. Esta última condição é satisfeita no espaço de Reissner-Nordstrom. Mais especificamente, obtemos:

Proposição 0.0.28. *Seja Σ uma hipersuperfície propriamente mergulhada em M . Então,*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma|} \varphi(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma| h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu = \Theta_\Gamma(\Sigma).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Theta_\Gamma(\Sigma) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma|} \varphi(\rho) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{1}{h(t)^{n-1}} Hg(\partial_t, N) d\mu - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Gamma| h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} h(t) Hg(\partial_t, N) d\mu \\ &\quad + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu - \frac{1}{|\Gamma| h(t_0)^{n-1}} \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma. \end{aligned}$$

Quando Σ é um cone (não necessariamente mínimo) sobre Ω , a densidade é dada por

$$\Theta_\Gamma(C_\Omega) = \frac{1}{h(t_0)^{n-1}} \frac{|\Omega|}{|\Gamma|}.$$

Se forem cumpridas as condições de fronteira livre e $H = 0$, a densidade assume a forma

$$\Theta_{\Gamma}(\Sigma) = \frac{1}{h(t_0)^{n-1}} \frac{|\partial\Sigma|}{|\Gamma|} + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Sigma} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu.$$

Finalmente, considere um produto warped 3-dimensional $M = I \times_h P$ com curvatura de Ricci constante igual a r , onde $I = [t_0, \infty)$ e (P, δ_P) denota \mathbb{R}^2 com a métrica euclidiana ou \mathbb{S}^2 com a métrica redonda. Sejam $\delta = dt^2 + h^2(t) \cdot \pi_P^*(\delta_P)$ a métrica warped e $g = e^{2\varphi(t)} \cdot \delta$ uma métrica conforme, onde $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave positiva. Aplicamos técnicas semelhantes as de R. Montezuma ([51], 2021) e Smith-Zhou ([64], 2019), para estimar o índice de Morse do cone totalmente geodésico $\Sigma_0 \subset (M, g)$ da forma $\Sigma_0 = I \times \gamma$, onde γ é uma geodésica de P .

Se para cada $k \neq 0$ existe uma função $F_k : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_k(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + \frac{k^2}{h^2(t)} - \left(\varphi''(t) + \frac{h'(t)}{h(t)}\varphi'(t) - \varphi'(t)^2 + e^{2\varphi(t)}r \right)$$

e a solução $\psi_k : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ do problema

$$\begin{cases} \psi_k'(t) + \psi_k(t)^2 = F_k(t) \\ \psi_k(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)} \end{cases}$$

não tem singularidades, então $\text{Ind}(\Sigma_0)$ é no máximo um. Se for possível estender a hipótese anterior para $k = 0$, então Σ_0 é estável.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Os dois objetivos deste capítulo são:

- Fixar a notação e terminologia que serão utilizadas ao longo da Tese.
- Apresentar os resultados e técnicas já dispostos na literatura que nos servirão de ferramentas para a demonstração dos nossos principais Teoremas.

1.1 Tensores de curvatura e geometria das subvariedades

Sejam (M^n, g) uma variedade Riemanniana e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ campos vetoriais tangentes a M . Definimos o tensor curvatura R de M como a aplicação $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M . Para a demonstração de que R é um 3-tensor, ver [19].

Fixado um referencial ortonormal local $\{e_1, \dots, e_n\}$ sobre M , definimos o operador de Ricci $\mathcal{R}ic : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ por

$$\mathcal{R}ic(X) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X)e_i.$$

O tensor de Ricci, que denotamos por Ric , é um 2-tensor definido por

$$\text{Ric}(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

Seja $S \in T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e seja $\{X_1, X_2\}$ uma base de $T_p S$. Definimos a curvatura seccional de S em p como o número real

$$K(X_1, X_2) = \frac{g(R(X_1, X_2)X_1, X_2)}{|X_1 \wedge X_2|^2}$$

onde $|X_1 \wedge X_2|^2 = |X_1|^2 |X_2|^2 - g(X_1, X_2)^2$. A curvatura seccional K de S independe da base particular $\{X_1, X_2\}$ de S , ver [19].

Sejam M^n e \bar{M}^{n+k} variedades Riemannianas e $\Phi : M \rightarrow \bar{M}$ uma imersão isométrica. Consideremos ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \bar{M} , respectivamente, de forma

que

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$$

para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Definimos a segunda forma fundamental B de M como a aplicação bilinear e simétrica $B : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$ dada por

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp$$

Em particular, tem-se

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y).$$

A partir da segunda forma fundamental, é possível relacionar as curvaturas seccionais de M e \bar{M} . Tal relação é dada pela Equação de Gauss (demonstrada em [19]):

Proposição 1.1.1. (*Equação de Gauss*). *Sejam $p \in M$ e X, Y vetores ortonormais de $T_p M$. Então*

$$K_M(X, Y) - K_{\bar{M}}(X, Y) = g(B(X, X), B(Y, Y)) - |B(X, Y)|^2.$$

Dado um ponto $p \in M$ e um vetor normal unitário $N \in T_p M$, definimos o operador linear $A_N : T_p M \rightarrow T_p M$, chamado operador de Weingarten ou operador de forma de M em p , associado a N , por

$$A_N X = -\bar{\nabla}_X N,$$

para todo $X \in T_p M$. O operador A_N é autoadjunto e está relacionado com a segunda forma fundamental B pela equação

$$g(B(X, Y), N) = g(A_N X, Y).$$

Quando a codimensão de M em \bar{M} é um, escrevemos apenas A no lugar de A_N . Os autovalores de A são chamados curvaturas principais de M .

O vetor curvatura média de M no ponto p é definido por

$$\vec{H}(p) = \sum_{i=1}^n B(e_i, e_i)(p),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$. Dizemos que M é uma subvariedade mínima de \bar{M} se $\vec{H}(p) = 0$ para todo $p \in M$.

No seguinte lema apresentaremos a Equação de Codazzi no caso particular em que a imersão isométrica $\Phi : M \rightarrow \bar{M}$ tem codimensão um e que $N \in \mathfrak{X}(\bar{M})$ é um campo vetorial normal unitário ao longo de M .

Lema 1.1.1. (*Equação de Codazzi*). *Se \bar{R} é o tensor curvatura de \bar{M} , então*

$$g(\bar{R}(X, Y)Z, N) = g((\nabla_Y A)X, Z) - g((\nabla_X A)Y, Z).$$

1.2 Índice de Morse

Seja $x : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ uma hipersuperfície fechada dois-lados imersa em uma variedade Riemanniana (M, g) . Denote por N o campo vetorial normal unitário ao longo de Σ e por A o operador de Weingarten associado à imersão x , que é dado por $-\bar{\nabla}N$. Também denotamos por H a função de curvatura média definida como $H = \text{tr}(A)$ e note que Σ é mínima quando H se anula.

Uma variação admissível de x é uma aplicação $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ tal que cada $\psi_t : \Sigma \rightarrow M$, definida por $\psi_t(p) = \psi(t, p)$, é uma imersão para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $\psi_0 = x$. O campo variacional associado à variação ψ é dado por

$$X = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0}$$

Uma variação é dita ser normal quando $X = uN$ para alguma função $u \in C^\infty(\Sigma)$. Observa-se que cada função suave $u \in C^\infty(\Sigma)$ induz uma variação normal ψ com campo variacional uN , tal variação é dada por

$$\psi_t(p) = \exp_{x(p)}(tu(p)N(p)),$$

onde \exp denota a aplicação exponencial em M , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e ε é suficientemente pequeno.

Dada uma variação normal ψ com campo variacional uN , podemos considerar o funcional área $\mathcal{A}_u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ associado a ψ , que é definido por

$$\mathcal{A}_u(t) = |\Sigma_t| = \int_{\Sigma} d\mu_t,$$

onde Σ_t significa a variedade Σ dotada da métrica induzida por x_t e $d\mu_t$ é o volume Riemanniano induzido pela métrica em relação a ψ_t .

Definimos também o funcional volume $\mathcal{V}_u : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{V}_u(t) = \int_{[0, t] \times \Sigma} \psi^* dM,$$

onde dM é o elemento de volume de M . Dizemos que a variação normal ψ preserva volume se $\mathcal{V}_u(t) = \mathcal{V}_u(0)$ para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Usando a notação estabelecida, a fórmula para a primeira variação do volume (ver [9], Lema 2.1) afirma que

$$\mathcal{V}'(0) = \int_{\Sigma} \langle X, N \rangle d\mu,$$

onde $X = \frac{\partial \psi}{\partial t}|_{t=0}$. Logo, uma variação normal com campo variacional uN preserva volume se, e somente se, a função u tem média nula, isto é, $\int_{\Sigma} u d\mu = 0$.

A fórmula da primeira variação da área é dada por:

$$\mathcal{A}'_u(0) = - \int_{\Sigma} uH d\mu.$$

A partir desta igualdade observamos que Σ é mínima se, e somente se, Σ é um ponto crítico do funcional área para toda $u \in C^\infty(\Sigma)$.

Assumindo que Σ é um ponto crítico do funcional área e aplicando o teorema da divergência, a fórmula para a segunda variação de área pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}''_u(0) &= \int_{\Sigma} (|\nabla u|^2 - (\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2)u^2) d\mu \\ &\quad - \int_{\Sigma} u(\Delta u + (\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2)u) d\mu = - \int_{\Sigma} uJu d\mu, \end{aligned}$$

e aqui

$$J = \Delta + \overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2, \tag{1.1}$$

onde Δ é o operador Laplaciano, $|A|^2 = \text{tr}(A^2)$ é a norma de Hilbert-Schmidt do operador A e $\overline{\text{Ric}}$ é o tensor curvatura de Ricci associado ao ambiente M . Lembramos que J é conhecido como operador de Jacobi (ou de estabilidade) associado a hipersuperfície mínima Σ . Lembramos que para funções suaves $u \in C^\infty(\Sigma)$, o operador Laplaciano Δ é dado por

$$\Delta u = \text{div } \nabla u = \text{tr } \nabla(\nabla u).$$

A segunda variação da área induz uma forma quadrática $Q : C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$ definida por

$$Q(u, u) := - \int_{\Sigma} (\Delta u + (\overline{\text{Ric}}(N, N) + |A|^2)u)u d\mu. \tag{1.2}$$

Definição 1.2.1. Dizemos que $u \in C^\infty(\Sigma)$ é uma autofunção de Q associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q(v, u) = -\lambda \int_{\Sigma} vu d\mu$ para todo $v \in C^\infty(\Sigma)$.

Se u é autofunção de Q associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\int_{\Sigma} v(Ju + \lambda u) d\mu = 0, \forall v \in C^{\infty}(\Sigma),$$

de onde concluímos que $Ju + \lambda u = 0$; ou seja, u é autofunção do operador de Jacobi associada ao mesmo autovalor λ .

O operador de Jacobi J , também conhecido como operador de estabilidade, é autoadjunto e elíptico. Logo, seu espectro consiste em uma sequência não decrescente de autovalores

$$\lambda_1^J < \lambda_2^J \leq \dots \leq \lambda_k^J \leq \dots$$

divergindo para $+\infty$. Esses autovalores têm multiplicidade finita e o primeiro autovalor λ_1^J é simples, isto é, tem multiplicidade 1.

Uma vez que $C^{\infty}(\Sigma)$ é denso no espaço de Hilbert $L^2(\Sigma)$, temos que $J : C^{\infty}(\Sigma) \rightarrow C^{\infty}(\Sigma)$ é densamente definido. Logo, existe uma base ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ de $L^2(\Sigma)$ formada por autofunções de J , isto é, $J\varphi_i + \lambda_i^J \varphi_i = 0$. Além disso, pelo princípio min-max, o k -ésimo autovalor λ_k^J é caracterizado por

$$\lambda_k^J = \inf_{u \in \mathcal{J}_{k-1}} \frac{Q(u, u)}{\int_{\Sigma} u^2 d\mu},$$

onde $\mathcal{J}_p = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle^{\perp}$ é o subespaço vetorial ortogonal às p primeiras autofunções do operador de Jacobi J .

Definição 1.2.2. *Seja Σ uma hipersuperfície mínima em M . O índice de Morse de Σ , denotado por $\text{Ind}(\Sigma)$, é definido como a dimensão máxima de qualquer subespaço $V \subset C^{\infty}(\Sigma)$ em que a forma quadrática Q é negativa definida, ou seja,*

$$\text{Ind}(\Sigma) = \max\{\dim V : V \subset C^{\infty}(\Sigma), Q(f, f) < 0, \forall f \in V\}.$$

Em outros termos, $\text{Ind}(\Sigma)$ é o número de autovalores negativos de J , sendo necessariamente finito para hipersuperfícies fechadas. Dizemos que Σ é estável se $\text{Ind}(\Sigma) = 0$ e ressaltamos que, a grosso modo, o índice mede em quantas direções linearmente independentes podemos mover Σ decrescendo a área.

1.2.1 Índice fraco

É um fato bem conhecido que hipersuperfícies com curvatura média constante (CMC) são pontos críticos do funcional área considerando apenas as variações normais

que preservam volume. Como vimos, essas variações estão associadas a funções de média nula. Denotaremos por \mathcal{F} o conjunto das funções de média nula, isto é,

$$\mathcal{F} = \{u \in C^\infty(\Sigma); \int_{\Sigma} u d\mu = 0\}$$

Quando restrita ao espaço das funções de média nula, a forma quadrática Q fica associada a um novo operador elíptico. Tal operador passará a ser denotado por L .

Definição 1.2.3. Dizemos que $u \in \mathcal{F}$ é uma autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q|_{\mathcal{F}}(v, u) = -\lambda \int_{\Sigma} v u d\mu$ para todo $v \in \mathcal{F}$.

Note que, se $u \in \mathcal{F}$ é autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\int_{\Sigma} v(Ju + \lambda u) d\mu = 0, \forall v \in \mathcal{F},$$

de onde concluímos que $Ju + \lambda u$ deve ser constante. Por integração, obtemos que

$$Ju + \lambda u = \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} Ju d\mu.$$

Seja $\psi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional linear dado por

$$\psi(u) = \frac{1}{\text{vol}(\Sigma)} \int_{\Sigma} Ju d\mu,$$

e defina o operador linear $L : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ por $L := J - \psi$. Se $u \in \mathcal{F}$ é autofunção de $Q|_{\mathcal{F}}$ com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, então u é autofunção do operador L associada ao mesmo autovalor λ .

Assim como o operador de Jacobi J , o operador L também é autoadjunto e elíptico. Logo, seu espectro é formado por uma sequência não decrescente de autovalores

$$\lambda_1^L \leq \lambda_2^L \leq \dots \leq \lambda_k^L \leq \dots$$

divergindo para $+\infty$ com cada autovalor tendo multiplicidade finita.

Tendo em vista que \mathcal{F} é denso em $L_T^2(\Sigma) = \{u \in L^2(\Sigma); \int_{\Sigma} u d\mu = 0\}$, temos que L é densamente definido no espaço $L_T^2(\Sigma)$. Desse modo, existe uma base ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ de $L_T^2(\Sigma)$ composta por autofunções de L , isto é, $L\varphi_i = \lambda_i^L \varphi_i$. Além disso, o k -ésimo autovalor λ_k^L é caracterizado por

$$\lambda_k^L = \inf_{u \in \mathcal{J}_{k-1}} \frac{Q|_{\mathcal{F}}(u, u)}{\int_{\Sigma} u^2 d\mu},$$

onde $\mathcal{J}_p = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle^\perp$ é o subespaço vetorial ortogonal às p primeiras autofunções de L .

Definição 1.2.4. *Seja Σ uma hipersuperfície CMC de M . O índice fraco de Morse de Σ , denotado por $\text{Ind}_w(\Sigma)$, é definido como a dimensão máxima de qualquer subespaço V de \mathcal{F} no qual a forma quadrática $Q|_{\mathcal{F}}$ é negativa definida, ou seja,*

$$\text{Ind}_w(\Sigma) = \max\{\dim V : V \subset \mathcal{F}, \quad Q|_{\mathcal{F}}(u, u) < 0, \quad \forall u \in V\}.$$

Observe que o índice fraco de Morse pode ser definido, de maneira equivalente, como o número de autovalores negativos do operador L . A grosso modo, $\text{Ind}_w(\Sigma)$ conta o número de funções linearmente independentes para as quais a variação associada diminui a área mantendo o volume constante. Note que, em geral, λ_1 (o primeiro autovalor de Q) pode contribuir para $\text{Ind}(\Sigma)$, mas não para $\text{Ind}_w(\Sigma)$ porque seu autoespaço é gerado por uma função positiva $\varphi_1 > 0$ e, portanto, não satisfaz a condição de média nula.

1.3 Estimativas de índice na esfera unitária

Nesta seção, faremos alguns cálculos bem conhecidos na literatura e que nos serão úteis nos Capítulos 2 e 3.

Seja $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma imersão de uma hipersuperfície mínima orientável compacta na esfera unitária. Fixando um vetor $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, considere as funções em Σ definidas por $h_a(p) := \langle x(p), a \rangle$ e $f_a(p) := \langle N(p), a \rangle$, para $p \in \Sigma$.

Lema 1.3.1. *Para qualquer vetor $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ fixado no espaço euclidiano temos:*

1. $\nabla h_a = a^\top$ e $\nabla f_a = -A(a^\top)$;
2. $\text{Hess } h_a = -h_a \langle \cdot, \cdot \rangle + f_a \langle A \cdot, \cdot \rangle$;
3. $\text{Hess } f_a = -\langle (\nabla_{a^\top} A) \cdot, \cdot \rangle + h_a \langle A \cdot, \cdot \rangle - f_a \langle A \cdot, A \cdot \rangle$.

Em particular,

$$\Delta h_a = -nh_a + Hf_a \quad \text{e} \quad \Delta f_a = -\langle \nabla H, v^\top \rangle + Hh_a - |A|^2 f_a,$$

aqui ∇ e Hess significam o gradiente e a hessiana da função, respectivamente, e $^\top$ significa a projeção ortogonal no espaço tangente de Σ .

Demonstração. Um cálculo padrão nos fornece que os gradientes de h_a e f_a são dados por

$$\nabla h_a = a^\top \quad \text{e} \quad \nabla f_a = -A(a^\top)$$

onde $a^\top \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ denota a componente tangente de a ao longo da imersão Σ ; ou seja,

$$a = a^\top + h_a x + f_a N.$$

Então, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla h_a &= \nabla_X a^\top = -h_a X + f_a A(X) \\ \implies \text{Hess } h_a(X, Y) &= -h_a \langle X, Y \rangle + f_a \langle A(X), Y \rangle \end{aligned}$$

e segue que

$$\Delta h_a = \text{tr}(\text{Hess } h_a) = -nh_a + Hf_a.$$

A equação de Codazzi no Lema 1.1.1 em Σ afirma que

$$\nabla A(X, Y) = \nabla A(Y, X)$$

para quaisquer campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, onde ∇A é a derivada covariante de A ,

$$\nabla A(X, Y) = (\nabla_Y A)X = \nabla_Y (AX) - A(\nabla_Y X).$$

Para obter $\text{Hess } f_a$, usaremos a equação de Codazzi:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla f_a &= -\nabla_X (A(a^\top)) = -(\nabla_X A)(a^\top) - A(\nabla_X a^\top) \\ &= -(\nabla_{a^\top} A)(X) + h_a A(X) - f_a A^2(X) \\ \implies \text{Hess } f_a(X, Y) &= \langle -(\nabla_{a^\top} A)(X), Y \rangle + h_a \langle A(X), Y \rangle - f_a \langle A^2(X), Y \rangle \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta f_a &= \text{tr}(\text{Hess } f_a) = -\text{tr}(\nabla_{a^\top} A) + Hh_a - |A|^2 f_a \\ &= -\langle a^\top, \nabla H \rangle + Hh_a - |A|^2 f_a, \end{aligned}$$

na última igualdade usamos que o traço comuta com a derivada covariante, o que resultou em

$$\text{tr}(\nabla_{a^\top} A) = \nabla_{a^\top} (\text{tr } A) = \langle a^\top, \nabla H \rangle.$$

□

Em particular, se Σ for uma hipersuperfície mínima, teremos as equações

$$\Delta h_a = -nh_a \quad \text{e} \quad \Delta f_a = -|A|^2 f_a.$$

Consequentemente, $Jh_a = |A|^2 h_a$ e $Jf_a = nf_a$.

Corolário 1.3.1. *Sejam $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima, $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+2} e $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ um vetor. Então*

$$(1) J(\langle x, a \rangle \langle x, e_j \rangle) = (|A|^2 - n) \langle x, a \rangle \langle x, e_j \rangle + 2 \langle a^\top, e_j \rangle;$$

$$(2) J(\langle x, a \rangle \langle N, e_j \rangle) = -2 \langle Aa^\top, e_j \rangle$$

$$(3) J(\langle N, a \rangle \langle x, e_j \rangle) = -2 \langle Aa^\top, e_j \rangle$$

$$(4) J(\langle N, a \rangle \langle N, e_j \rangle) = (n - |A|^2) \langle N, a \rangle \langle N, e_j \rangle + 2 \langle A^2 a^\top, e_j \rangle.$$

Demonstração. Basta usar as fórmulas $J = \Delta + n + |A|^2$, $\Delta \langle x, a \rangle = -n \langle x, a \rangle$, $\Delta \langle N, a \rangle = -|A|^2 \langle N, a \rangle$ e $\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2 \langle \nabla u, \nabla v \rangle$. \square

Observação 1.3.1. *Usando a estrutura linear do espaço euclidiano podemos reescrever as fórmulas do Corolário 1.3.1 nas seguintes formas vetoriais:*

$$1. \Delta x = -nx \text{ e } \Delta N = -|A|^2 N;$$

$$2. J(\langle x, a \rangle x) = (|A|^2 - n) \langle x, a \rangle x + 2a^\top;$$

$$3. J(\langle x, a \rangle N) = -2Aa^\top;$$

$$4. J(\langle N, a \rangle x) = -2Aa^\top;$$

$$5. J(\langle N, a \rangle N) = (n - |A|^2) \langle N, a \rangle N + 2A^2 a^\top.$$

Os próximos resultados são bem conhecidos na literatura por evidenciarem uma lacuna no índice de hipersuperfícies mínimas compactas orientáveis na esfera, veja [54], [3].

Proposição 1.3.1. *Se $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima compacta orientável e não totalmente geodésica, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 3$.*

Demonstração. Sabemos que f_a é uma autofunção do operador de Jacobi J para todo $a \in \mathbb{R}^{n+2}$. Afirmamos que o espaço vetorial de funções $\mathcal{F} := \{f_a = \langle N, a \rangle : a \in \mathbb{R}^{n+2}\}$ tem dimensão igual a $n + 2$. É claro que $\dim(\mathcal{F}) \leq n + 2$.

Suponha que $\dim(\mathcal{F}) < n + 2$, então podemos encontrar um vetor $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que $f_a \equiv 0$ sobre Σ . Tomando $h_a = \langle x, a \rangle$, tem-se $\text{Hess } h_a(\cdot, \cdot) = -h_a \langle \cdot, \cdot \rangle + f_a \langle A(\cdot), \cdot \rangle = -h_a \langle \cdot, \cdot \rangle$.

Se $h_a \not\equiv 0$ sobre Σ , o Teorema de Obata em [53] afirma que Σ é isométrica a uma esfera unitária. Denotando por B a segunda forma fundamental de Σ e por $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ as

curvaturas principais de Σ , segue da Equação de Gauss que $\kappa_i \kappa_j = 0$, $\forall i, j = 1, \dots, n$. Então existe no máximo um $\kappa_j \neq 0$. Como $H = \sum_{j=1}^n \kappa_j = 0$, temos $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$ e, portanto, $B \equiv 0$. Isto contradiz a hipótese de Σ não ser totalmente geodésica.

Se $h_a \equiv 0$ sobre Σ , então Σ está contida no hiperplano $a^\perp = \{v \in \mathbb{R}^{n+2} : \langle a, v \rangle = 0\}$ e, desse modo, Σ deve ser totalmente geodésica. Isto conclui a afirmação inicial.

Logo, a multiplicidade de $-n$ como autovalor de J é de pelo menos $n + 2$. Tendo em vista que o primeiro autovalor de J é simples, ele deve ser menor que $-n$; totalizando no mínimo $n + 3$ autovalores negativos de J . \square

Em [62], Simons caracterizou os equadores totalmente geodésicos $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ como as únicas hipersuperfícies mínimas compactas em \mathbb{S}^{n+1} com índice 1. O próximo corolário segue diretamente da Proposição 1.3.1 com o fato dos equadores totalmente geodésicos terem índice 1 na esfera.

Corolário 1.3.2. *Se $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é uma hipersuperfície mínima compacta orientável, então $\text{Ind}(\Sigma) = 1$ ou $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 3$.*

1.4 Variedades singulares

Nesta seção estabeleceremos algumas terminologias inspiradas na discussão encontrada nas Seções 1 e 2 em [71].

Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana $(n + 1)$ -dimensional conexa, fechada e orientável e $\bar{\Sigma} \subset M$ um subconjunto fechado. A parte regular de $\bar{\Sigma}$ é definida como

$$\text{reg}(\Sigma) := \{x \in \bar{\Sigma} : \bar{\Sigma} \text{ é uma hipersuperfície mergulhada suave perto de } x\}$$

e a parte singular é $\text{sing}(\Sigma) := \bar{\Sigma} \setminus \text{reg}(\Sigma)$. Claramente a parte regular $\text{reg}(\Sigma)$ é um subconjunto aberto de $\bar{\Sigma}$.

Por uma hipersuperfície singular com um conjunto singular de co-dimensão de Hausdorff não inferior a k ($k \in \mathbb{N}, k < n$), queremos dizer um subconjunto fechado $\bar{\Sigma}$ de M com medida de Hausdorff n -dimensional finita $\mathcal{H}^n(\bar{\Sigma}) < \infty$ e a $(n - k + \varepsilon)$ -dimensional medida de Hausdorff $\mathcal{H}^{n-k+\varepsilon}(\text{sing}(\Sigma)) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Posteriormente, denotaremos $\Sigma = \text{reg}(\Sigma)$ e também diremos que Σ é uma hipersuperfície singular quando o conjunto de pontos singulares $\text{sing}(\Sigma) := \bar{\Sigma} \setminus \Sigma$ for não vazio.

Para mais detalhes sobre as próximas definições, consulte a segunda seção de [71].

Definição 1.4.1. (A): Uma hipersuperfície mínima singular Σ (com $\dim \text{sing}(\Sigma) \leq n-7$) é chamada conexa se sua parte regular for conexa.

(B): Uma hipersuperfície singular Σ é chamada de orientável (ou não orientável) se a parte regular for orientável (ou não orientável).

(C): Uma hipersuperfície singular Σ é chamada de dois-lados se o fibrado normal $N(\Sigma)$ da parte regular Σ dentro de M for trivial.

Lema 1.4.1. ([71], Lema 2.6): Seja M^{n+1} uma variedade $(n+1)$ -dimensional, conexa, fechada, orientável e $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície singular conexa com $\dim \text{sing}(\Sigma) \leq n-2$, e com fecho compacto $\bar{\Sigma}$. Então Σ é orientável se e somente se Σ for dois-lados.

1.4.1 Operador de Jacobi e o índice de Morse em variedades singulares

Para uma hipersuperfície singular de dois-lados Σ existe um campo vetorial normal unitário N . Consideramos o operador elíptico de segunda ordem dado por

$$J_{\Sigma}\varphi := \Delta\varphi + (\overline{\text{Ric}}_M(N, N) + |A|^2)\varphi,$$

onde $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$, Δ é o operador Laplaciano da métrica induzida em Σ , A é a segunda forma fundamental de Σ e $\overline{\text{Ric}}_M$ é a curvatura Ricci de M . Tal operador é denominado operador de Jacobi associado a hipersuperfície singular.

Dado um subconjunto aberto Ω de Σ com fronteira suave $\partial\Omega$, dizemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de Dirichlet de J em Ω se existe uma função diferente de zero $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ anulando-se em $\partial\Omega$, ou seja, $\varphi|_{\partial\Omega} \equiv 0$, tal que $J\varphi = -\lambda\varphi$. O índice de Morse (Dirichlet) de Ω , denotado por $\text{Ind}_D(\Omega)$, é o número de autovalores negativos de Dirichlet de J em Ω contados com multiplicidade.

Para Σ não orientável, passamos para o recobrimento duplo orientável $\tilde{\Sigma}$ de Σ . Então existe um campo vetorial normal unitário \tilde{N} ao longo de $\tilde{\Sigma}$, satisfazendo $\tilde{N} \circ \tau = -\tilde{N}$, onde $\tau : \tilde{\Sigma} \rightarrow \tilde{\Sigma}$ é a involução de inversão de orientação, tal que $\Sigma = \tilde{\Sigma}/\{id, \tau\}$. Assim, o operador de Jacobi $J_{\tilde{\Sigma}}$ está bem definido usando \tilde{N} . Dado um subconjunto aberto $\Omega \subset \Sigma$, e seu levantamento $\tilde{\Omega}$ para $\tilde{\Sigma}$, podemos definir o autovalor de Dirichlet e o índice de Morse (Dirichlet) restringindo o operador de Jacobi $J_{\tilde{\Sigma}}$ para funções $\tilde{\varphi} \in C_0^1(\tilde{\Omega})$ que são anti-simétricas em τ , ou seja, $\tilde{\varphi} \circ \tau = -\tilde{\varphi}$ ($\tilde{\varphi}\tilde{N}$ desce para um campo vetorial em Σ), veja [56] para mais detalhes.

Concluimos esta subseção introduzindo a definição de índice de Morse de uma hipersuperfície singular:

Definição 1.4.2. *O índice de Morse de uma hipersuperfície singular Σ é definido por*

$$\text{Ind}(\Sigma) := \sup_{\Omega \in \mathcal{O}} \text{Ind}_D(\Omega),$$

onde \mathcal{O} é o conjunto de subconjuntos abertos de Σ com fronteira suave.

Dizemos que Σ é estável se o índice de Morse da hipersuperfície singular for zero.

1.4.2 Funções de corte

Para estudarmos o Índice de Morse em hipersuperfícies com singularidades, devemos usar funções teste que nos permitam lidar com as singularidades durante a integração. Neste intuito, será útil dispormos da função de corte dada na proposição seguinte, que foi originalmente construída por Morgan e Ritoré em [52] e reproduzida por Zhu em [73].

Proposição 1.4.1 (Proposição A.2, [73]). *Seja Σ^n uma subvariedade suave mergulhada em \mathbb{R}^N com curvatura média limitada e fecho compacto $\bar{\Sigma}$. Se $\text{sing } \Sigma = \bar{\Sigma} \setminus \Sigma$ satisfaz $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função suave $\phi_\varepsilon : \bar{\Sigma} \rightarrow [0, 1]$ com suporte em Σ tal que:*

1. $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$;
2. $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$;
3. $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

Observação 1.4.1. *Seguindo o apêndice em [73], a ideia básica para construir ϕ_ε se divide em três passos:*

- Usar a hipótese de que $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ para formar uma cobertura finita de $\text{sing } \Sigma$ com bolas $B(p_i, r_i/2)$ satisfazendo $r_i < 1$, de modo que as bolas $B(p_i, r_i/6)$ sejam disjuntas aos pares e $\sum_i r_i^{n-2} < \varepsilon$.
- Escolher para cada bola $B(p_i, r_i)$ uma função de corte ϕ_i tal que $\phi_i = 0$ dentro de $B(p_i, r_i/2)$, $\phi_i = 1$ fora de $B(p_i, r_i)$ e $|\nabla \phi_i|^2 + |\text{Hess } \phi_i|^2 < C_0 r_i^2$.
- Definimos ϕ_ε como o produto $\phi_\varepsilon := \prod_i \phi_i$.

Em outras palavras, ϕ_ε é uma perturbação da função constante $\phi \equiv 1$, se anulando em

uma cobertura apropriada de $\text{sing } \Sigma$ e permitindo o controle das integrais $\int_{\Sigma} |\nabla \phi_{\varepsilon}|^2 d\mu$ e $\int_{\Sigma} |\Delta \phi_{\varepsilon}| d\mu$. Fixada qualquer bola $B \in \Sigma$, sempre podemos tomar as bolas $B(p_i, r_i)$ pequenas o suficiente para termos $\phi_{\varepsilon} \equiv 1$ sobre B .

1.5 Variedades Riemannianas ponderadas

Uma variedade Riemanniana ponderada é uma tripla $(M^{n+1}, g, e^{-f} d\mu)$, onde (M^{n+1}, g) é uma variedade Riemanniana completa, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave usada como densidade para a medida de objetos geométricos sobre M e $d\mu$ é a medida Riemanniana de M . Para facilitar a notação em alguns casos, $d\mu_f = e^{-f} d\mu$ denotará a medida ponderada da hipersuperfície Σ , onde $d\mu$ também denota a medida Riemanniana de Σ .

Para uma variedade Riemanniana ponderada $(M, g, e^{-f} d\mu)$, o tensor de Bakry-Émery-Ricci é definido por

$$\text{Ric}_f := \text{Ric} + \text{Hess } f,$$

onde Ric e Hess são o tensor de Ricci e o operador Hessiana em (M, g) . A generalização natural da curvatura escalar no contexto ponderado é conhecida como curvatura escalar de Perelman, sendo definida por

$$S_{\infty} = S + 2\bar{\Delta}f - |\bar{\nabla}f|^2,$$

onde $\bar{\Delta}$ e $\bar{\nabla}$ denotam o Laplaciano e o gradiente em (M, g) , e S é a curvatura escalar dada por $S(p) = \sum_{i=1}^{n+1} \text{Ric}_p(e_i, e_i)$, para qualquer base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ de $T_p M$.

Seja Σ uma hipersuperfície orientada suave imersa em M . Para qualquer campo vetorial suave X ao longo de Σ , definimos a f -divergência de X relativa a Σ por

$$\text{div}_f X := \text{div } X - \langle \bar{\nabla}f, X \rangle,$$

onde div é a divergência em relação a Σ em (M, g) .

Seja N o campo vetorial normal unitário ao longo de Σ . A curvatura média ponderada de Σ com respeito a N , introduzida por Gromov em [38], é a função

$$H_f := -\text{div}_f N = H + g(N, \bar{\nabla}f),$$

onde $H = -\text{div } N$ é a curvatura média de Σ em (M, g) . Usando o teorema da divergência Riemanniano, foi provado em [[18], Lema 2.2] a igualdade

$$\int_{\Sigma} \text{div}_f X d\mu_f = - \int_{\Sigma} H_f \langle X, N \rangle d\mu_f + \int_{\partial\Sigma} \langle X, \nu \rangle d\sigma_f \quad (1.3)$$

vale para qualquer $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ com suporte compacto em Σ . Aqui denotamos por ν o vetor conormal, ou seja, o campo vetorial normal unitário de $\partial\Sigma$ em Σ apontando para fora.

Finalmente, associado a esta estrutura ponderada temos um importante operador diferencial de segunda ordem definido por

$$\Delta_f u := \operatorname{div}_f(\nabla u) = \Delta u - g(\nabla u, \nabla f)$$

onde $u \in C^\infty(\Sigma)$. Este operador é conhecido como f -Laplaciano relativo a Σ , ou Laplaciano Drift. Para este operador temos a seguinte fórmula integração por partes, sendo uma consequência imediata de 1.3:

$$\int_{\Sigma} u \Delta_f v \, d\mu_f = - \int_{\Sigma} \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, d\mu_f + \int_{\partial\Sigma} u \langle \nabla v, \nu \rangle \, d\sigma_f, \quad \forall u, v \in C^\infty(\Sigma). \quad (1.4)$$

1.5.1 f -índice de hipersuperfícies f -mínimas com fronteira livre

Nesta subsecção desenvolveremos a noção de f -índice para hipersuperfícies f -mínimas com fronteira livre, nos basearemos no trabalho de K. Castro e C. Rosales em [22].

Uma subvariedade Σ de uma variedade Riemanniana ponderada $(M, g, e^{-f} d\mu)$ com fronteira $\partial\Sigma \subset \partial M$ é dita ter fronteira livre quando Σ intersecta ∂M ortogonalmente. Em outras palavras, se η denota o campo vetorial conormal unitário de $\partial\Sigma$ em ∂M apontando para fora, então Σ tem fronteira livre quando η é ortogonal a $T(\partial M)$.

Suponha inicialmente que Σ é compacta. No contexto ponderado é natural definir a f -área (ou área ponderada) de Σ por

$$\mathcal{A}_f(\Sigma) := \int_{\Sigma} e^{-f} d\mu$$

e estudar as imersões $x : \Sigma \rightarrow M$ críticas para \mathcal{A}_f . Uma variação admissível de x é uma aplicação $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ tal que:

- Para qualquer $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação $\psi_t : \Sigma \rightarrow M$ definida por $\psi_t(p) = \psi(t, p)$ é uma imersão com $\psi_t(\operatorname{int}(\Sigma)) \subset \operatorname{int}(M)$ e $\psi_t(\partial\Sigma) \subset \partial M$;
- $\psi_0 = x$.

O campo variacional associado à variação ψ é dado por

$$X = \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Uma variação é dita ser normal quando $X = uN$ para alguma função com suporte compacto $u \in C^\infty(\Sigma)$. Observa-se que cada função suave $u \in C^\infty(\Sigma)$ induz uma variação normal ψ com campo variacional uN , tal variação é dada por

$$\psi_t(p) = \exp_{x(p)}(tu(p)N(p)).$$

Dada uma variação normal ψ com campo variacional uN , podemos considerar o funcional f -área $\mathcal{A}_{f,u} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ associado a ψ , definido por

$$A_{f,u}(t) := \int_{\Sigma} (e^{-f} \circ \psi_t) |\text{Jac } \psi_t| d\mu.$$

Se $p \in \Sigma$ e $\{e_i\}_{i=1}^n$ for qualquer base ortonormal em $T_p\Sigma$, então $|\text{Jac } \psi_t|(p)$ é a raiz quadrada do determinante da matriz a_{ij} com $a_{ij} = g(e_i(\psi_t), e_j(\psi_t))$.

Mantendo a notação estabelecida, dada uma variação normal ψ com campo variacional uN , a fórmula da primeira variação da f -área [[22], Lema 3.2] é dada por

$$\mathcal{A}'_{f,u}(0) = - \int_{\Sigma} u H_f d\mu_f + \int_{\partial\Sigma} u g(\eta, N) d\sigma_f. \quad (1.5)$$

Dizemos que Σ é f -mínima quando $H_f \equiv 0$. Assim como no caso não ponderado estudado em [9], segue diretamente de (1.5) que Σ é um ponto crítico de $\mathcal{A}_{f,u}$ para todo $u \in C^\infty(\Sigma)$ se, e somente se, Σ é f -mínima com fronteira livre.

Quando Σ é um mínimo local do funcional f -área, dizemos que Σ é f -estável. Se Σ for instável, faz sentido investigar as direções nas quais se pode tomar uma variação normal decrescendo a f -área.

Sejam Σ uma hipersuperfície f -mínima com fronteira livre e ψ uma variação normal com campo variacional uN , a fórmula da segunda variação da f -área [[22], Proposição 3.5] é dada por

$$\mathcal{A}''_{f,u}(0) = \int_{\Sigma} (|\nabla u|^2 - (\text{Ric}_f(N, N) + |A|^2)u^2) d\mu_f + \int_{\partial\Sigma} u^2 h^{\partial M}(N, N) d\sigma_f,$$

onde $\text{Ric}_f = \text{Ric} + \text{Hess } f$ é o tensor de Bakry-Émery-Ricci no ambiente ponderado $(M, g, e^{-f}d\mu)$ e $h^{\partial M}$ é a segunda forma fundamental de ∂M em M com relação ao campo vetorial normal ν apontando para fora.

Como consequência da equação (1.4), escrevemos

$$\mathcal{A}''_{f,u}(0) = - \int_{\Sigma} u J_f u d\mu_f + \int_{\partial\Sigma} u (\eta(u) + h^{\partial M}(N, N)u) d\sigma_f,$$

onde $J_f := \Delta_f + \text{Ric}_f(N, N) + |A|^2$ é o operador de Jacobi ponderado. O f -índice de Σ é a dimensão máxima de um subespaço linear V de $C^\infty(\Sigma)$ em que a forma quadrática Q_f é negativa.

Considere a forma quadrática $Q_f : C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ associada à segunda variação da f -área e definida como

$$Q_f(u, v) := - \int_{\Sigma} u J_f v \, d\mu_f + \int_{\partial\Sigma} u \left(\eta(v) + h^{\partial M}(N, N)v \right) \, d\sigma_f.$$

Definição 1.5.1. Dizemos que $u \in C^\infty(\Sigma)$ é uma autofunção de Q_f associada ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ se $Q_f(u, v) = -\lambda \int_{\Sigma} uv \, d\mu_f$ para todo $v \in C^\infty(\Sigma)$. Isto é equivalente a dizer que u é solução do problema de fronteira do tipo Robin

$$\begin{cases} J_f u + \lambda u = 0 & \text{sobre } \Sigma, \\ \eta(u) + h^{\partial M}(N, N)u = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases}$$

A condição $\eta(u) + h^{\partial M}(N, N)u = 0$ é uma condição elíptica de fronteira para o operador elíptico e autoadjunto J_f . Além disso, J_f está densamente definido no espaço de Hilbert $L^2(\Sigma, d\mu_f)$. Logo, existe uma sequência não decrescente de autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \nearrow +\infty$ associados a uma base ortonormal $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2(\Sigma, d\mu_f)$. Além disso, pelo princípio min-max, o k -ésimo autovalor λ_k é caracterizado por

$$\lambda_k = \inf_{u \in \mathcal{J}_{k-1}} \frac{Q_f(u, u)}{\int_{\Sigma} u^2 \, d\mu_f},$$

onde $\mathcal{J}_p = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle^\perp$ é o subespaço vetorial ortogonal às p primeiras autofunções do operador de Jacobi J_f . O ínfimo é atingido precisamente por autofunções de J_f associadas a λ_k e satisfazendo a condição de fronteira $\eta(u) + h^{\partial M}(N, N)u = 0$.

Se Σ é completo não compacto, podemos definir o índice $\text{Ind}_f(\Omega)$ para qualquer domínio relativamente compacto $\Omega \subset \Sigma$ como a dimensão máxima de um subespaço de $C_0^\infty(\Omega)$ em que a forma quadrática Q_f é negativa definida. Finalmente, definimos

$$\text{Ind}_f(\Sigma) := \sup\{\text{Ind}_f(\Omega) : \Omega \subset\subset \Sigma\}.$$

Neste caso, o f -índice de Σ pode ser infinito.

1.5.2 L -índice

Dedicaremos esta breve subseção para introduzir o conceito mais geral de L -índice, que será estudado no Capítulo 5:

Seja $L = \Delta_f + W$, onde W é uma função localmente integrável. Dado um domínio limitado $\Omega \subset \Sigma$, definimos

$$\text{Ind}^L(\Omega) = \#\{\text{autovalores negativos de } L \text{ sobre } C_0^\infty(\Omega)\}$$

e o L -índice de Σ como

$$\text{Ind}_L(\Sigma) := \sup_{\Omega \subset \Sigma} \text{Ind}^L(\Omega).$$

O L -índice é a dimensão máxima de um subespaço de $C_0^\infty(\Sigma)$ onde a forma quadrática

$$Q_L(\phi, \phi) := - \int_{\Sigma} \phi L \phi \, d\mu_f = \int_{\Sigma} [|\nabla \phi|^2 - W \phi^2] \, d\mu_f$$

é negativa definida.

1.6 Formas diferenciais

1.6.1 Operadores definidos sobre formas diferenciais

Nesta subsecção introduzimos a terminologia sobre formas diferenciais que será utilizada ao longo do trabalho e apresentamos os operadores definidos sobre formas diferenciais que são bem conhecidos na literatura e fundamentais no desenvolvimento dos resultados do Capítulo 4.

Denotaremos por $\Omega^p(\Sigma)$ o espaço das p -formas diferenciais sobre uma variedade Riemanniana Σ , isto é, o espaço das seções de $\Lambda^p(\Sigma) := \bigcup_{x \in \Sigma} \Lambda^p(T_x^* \Sigma)$ onde

$$\Lambda^p(T_x^* \Sigma) := T_x^* \Sigma \wedge \cdots \wedge T_x^* \Sigma \quad (p \text{ vezes})$$

é o produto exterior de p espaços cotangentes à Σ no ponto x . Desse modo, uma p -forma sempre pode ser escrita como a soma de termos do tipo

$$f(x) \, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$$

onde $f \in C^\infty(\Sigma)$ e (x_1, \dots, x_n) são coordenadas locais. Neste contexto, estamos considerando que $C^\infty(\Sigma) = \Omega^0(\Sigma)$, ou seja, uma função suave é vista como uma 0-forma.

Dada uma variedade Riemanniana (M, g) , os operadores

$$\sharp : \Omega^1(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$$

$$\omega \longmapsto \omega^\sharp$$

$$\flat : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \Omega^1(\Sigma)$$

$$X \longmapsto X^\flat$$

definidos por

$$g(\omega^\sharp, Y) = \omega(Y) \text{ e } X^\flat(Y) = g(X, Y)$$

para todo $Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, são isomorfismos. Estes operadores são conhecidos como isomorfismos musicais entre os espaços $\Omega^1(\Sigma)$ e $\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Definição 1.6.1. *Seja $\omega \in \Omega^p(\Sigma^n)$. Se a expressão local de ω é*

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p},$$

definimos sua diferencial exterior $d\omega \in \Omega^{p+1}(\Sigma)$ por

$$d\omega = \sum_{k=1}^n \sum_{I \in \mathcal{I}} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_k} dx_k \wedge dx_I$$

onde $\mathcal{I} = \{i_1 i_2 \dots i_p; 1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n\}$, $\omega_I = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$ e $dx_I = dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.

Definição 1.6.2. *Fixada uma forma de volume $d\mu$ sobre a variedade Riemanniana (Σ^n, g) , definimos o operador estrela de Hodge $\star : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \Omega^{n-p}(\Sigma)$ por*

$$\alpha \wedge (\star\beta) = g(\alpha, \beta)d\mu$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \Omega^p(\Sigma)$.

O próximo Lema apresenta duas propriedades importantes do operador estrela de Hodge:

Proposição 1.6.1. *O operador estrela de Hodge é uma isometria linear e $\star^2 : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \Omega^p(\Sigma)$ é dado por $\star^2 = (-1)^{p(n-p)} Id$.*

Demonstração. Veja a seção 3.3 do capítulo 3 de [44] para a segunda parte da proposição. Mostraremos que \star é uma isometria. De fato, dados quaisquer $\alpha, \beta \in \Omega^p(\Sigma)$, temos

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta)d\mu &= \alpha \wedge \star\beta \\ &= (-1)^{p(n-p)} \star\beta \wedge \alpha \\ &= \star\beta \wedge \star(\star\alpha) \\ &= g(\star\alpha, \star\beta)d\mu \end{aligned}$$

□

Definimos o L^2 -produto

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_{\Sigma} g(\alpha, \beta) d\mu$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \Omega^p(\Sigma)$. Para o operador diferencial exterior

$$d_{p-1} : \Omega^{p-1}(\Sigma) \rightarrow \Omega^p(\Sigma),$$

o produto interno \langle, \rangle nos permite definir o adjunto formal de d_{p-1} ,

$$\delta_p : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \Omega^{p-1}(\Sigma),$$

que é dado por

$$\langle d_{p-1}\omega_1, \omega_2 \rangle = \langle \omega_1, \delta_p\omega_2 \rangle$$

para quaisquer $\omega_1 \in \Omega^{p-1}(\Sigma)$ e $\omega_2 \in \Omega^p(\Sigma)$.

A L^2 -norma de uma p -forma α é definida como

$$\|\alpha\|_{L^2} := \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle} = \left(\int_{\Sigma} g(\alpha, \alpha) d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A próxima proposição apresenta uma expressão para o operador adjunto formal de d em função de d e do operador estrela de Hodge. A sua demonstração pode ser encontrada na Seção 3.3 do Capítulo 3 de [44].

Proposição 1.6.2. *Sobre uma variedade Riemanniana (Σ, g) fechada, o adjunto formal do operador d é dado por*

$$\delta_p = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star.$$

Definição 1.6.3. *O operador Laplaciano de Hodge $\Delta_p : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \Omega^p(\Sigma)$ é definido por*

$$\Delta_p \omega = \delta_{p+1} d_p \omega + d_{p-1} \delta_p \omega, \forall \omega \in \Omega^p(\Sigma).$$

Visando simplificar a notação, passaremos a representar os operadores Δ_p , d_p e δ_p apenas por Δ , d e δ , respectivamente.

Proposição 1.6.3. *Em uma variedade Riemanniana fechada, o operador estrela de Hodge comuta com o operador Laplaciano de Hodge.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.6.2 que

$$\begin{aligned}
\Delta\star &= d\delta\star + \delta d\star \\
&= d\left((-1)^{n(n-p+1)+1}\star d\star\right)\star + \left((-1)^{n(n-p)+1}\star d\star\right)d\star \\
&= \star\left((-1)^{n(p+1+1)+1}\star d\star\right)d + \star d\left((-1)^{n(p+1)+1}\star d\star\right) \\
&= \star\delta d + \star d\delta \\
&= \star\Delta.
\end{aligned}$$

□

Definição 1.6.4. O operador Laplaciano de Böchner $\nabla^*\nabla : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por

$$\nabla^*\nabla\omega = \text{tr}\nabla^2\omega, \forall\omega \in \Omega^p(\Sigma).$$

Dado um referencial ortonormal local $\{e_i\}_{i=1}^n$ sobre Σ , o Laplaciano de Böchner pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\nabla^*\nabla\omega = \sum_i \left(\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\omega \right).$$

Os operadores Laplaciano de Hodge e Laplaciano de Böchner, agindo sobre 1-formas, estão relacionados pela clássica fórmula de Weitzenböck:

$$\Delta_1\omega = -\nabla^*\nabla\omega + \text{Ric}(\omega^\sharp).$$

1.6.2 Laplaciano de Hodge e fórmula de Weitzenböck no caso ponderado

Para mais informações sobre o que será discutido nesta seção, ver [42]. Relembramos que o f -Laplaciano de uma variedade Riemanniana ponderada $(\Sigma, g, e^{-f}d\mu)$ é definida por:

$$\Delta_f u = \Delta u - g(\nabla f, \nabla u).$$

Em geral, se introduz a divergência ponderada

$$\delta_f := \delta + \iota_{\nabla f},$$

onde ι_X é o operador contração pela direita por X . Então temos $\Delta_f u = -\delta_f du$. Note que Δ_f é autoadjunto com respeito a medida ponderada $e^{-f}d\mu$.

O operador f -Laplaciano de Hodge $\Delta_f^{[p]} : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \Omega^p(\Sigma)$ é definido naturalmente por:

$$\Delta_f^{[p]} := d\delta_f + \delta_f d.$$

Quando Σ é compacta, o f -Laplaciano de Hodge tem o espectro discreto $\{\lambda_k(\Delta_f^{[p]})\}_{k=1,2,\dots}$. Um fato importante é que a decomposição de Hodge continua valendo no contexto ponderado, logo a dimensão do núcleo de $\Delta_f^{[p]}$ é igual ao p -ésimo número de Betti, implicando que

$$\lambda_k(\Delta_f^{[p]}) = 0 \text{ para } k = 1, \dots, b_p(\Sigma).$$

O próximo Lema generaliza a fórmula de Weitzenböck sobre 1-formas diferenciais para o contexto ponderado:

Lema 1.6.1. *Sejam $(\Sigma, g, e^{-f}d\mu)$ uma variedade ponderada e $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$. Então*

$$\Delta_f^{[1]}\omega = -\nabla_f^* \nabla \omega + Ric_f(\omega^\sharp), \quad (1.6)$$

onde $\Delta_f^{[1]} = \delta_f d + d\delta_f$, $\delta_f = \delta + \iota_{\nabla f}$, $\nabla_f^* = \nabla^* - \iota_{\nabla f}$, $Ric_f = Ric + Hess f$.

Demonstração. Lembramos que a fórmula de Weitzenböck clássica afirma que

$$\Delta^{[1]}\omega = -\nabla^* \nabla \omega + Ric(\omega^\sharp), \quad \forall \omega \in \Omega^1(\Sigma).$$

Então,

$$\begin{aligned} \Delta_f^{[1]}\omega &= (\delta_f d + d\delta_f)\omega = (\delta d + i_{\nabla f} d + d\delta + d i_{\nabla f})\omega \\ &= (\Delta^{[1]} + \mathcal{L}_{\nabla f})\omega = -\nabla^* \nabla \omega + Ric(\omega^\sharp) + \mathcal{L}_{\nabla f}\omega \\ &= -\nabla_f^* \nabla \omega + Ric(\omega^\sharp) - i_{\nabla f} \nabla \omega + \mathcal{L}_{\nabla f}\omega, \end{aligned}$$

onde \mathcal{L} denota a derivada de Lie. Logo, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, tem-se

$$\begin{aligned} -(i_{\nabla f} \nabla \omega)(X) + (\mathcal{L}_{\nabla f} \omega)(X) &= -\nabla \omega(\nabla f, X) + (i_{\nabla f} d\omega)(X) + d(i_{\nabla f} \omega)(X) \\ &= -\nabla \omega(\nabla f, X) + d\omega(\nabla f, X) + X(\omega(\nabla f)) \\ &= -\nabla \omega(X, \nabla f) + \nabla_X \omega(\nabla f) + \omega(\nabla_X \nabla f) \\ &= \langle \nabla_X \nabla f, \omega^\sharp \rangle. \end{aligned}$$

Uma vez que $\langle \nabla_X \nabla f, \omega^\sharp \rangle = \text{Hes}f(X, \omega^\sharp) = \text{Hess}f(\omega^\sharp, X)$, segue diretamente das duas equações anteriores que

$$\begin{aligned} \Delta_f^{[1]} \omega(X) &= -\nabla_f^* \nabla \omega(X) + \text{Ric}(\omega^\sharp, X) + \text{Hess}f(\omega^\sharp, X) \\ &= -\nabla_f^* \nabla \omega(X) + \text{Ric}_f(\omega^\sharp, X) \end{aligned}$$

demonstrando o resultado desejado. \square

Dado um campo vetorial $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, definimos o f -Laplaciano de Hodge aplicado em ξ como sendo o único campo vetorial tal que

$$\langle \Delta_f^{[1]} \xi, X \rangle = \Delta_f^{[1]} \xi^\flat(X), \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

A fórmula de Weitzenböck se torna:

$$\Delta_f^{[1]} \xi = -\nabla_f^* \nabla \xi + \text{Ric}_f(\xi),$$

onde $\nabla_f^* \nabla \xi = \nabla^* \nabla \xi - \nabla_{\nabla f} \xi$ e, com respeito a uma base ortonormal $\{e_i\}_{i=1}^n$,

$$\nabla^* \nabla \xi = \sum_i \left(\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \xi - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i} \xi \right).$$

1.6.3 1-formas f -harmônicas sobre variedades com fronteira

Ao longo desta seção consideraremos $i : \partial\Sigma \rightarrow \Sigma^n$ a aplicação inclusão e i^* seu pullback; d é o operador derivada exterior e $\delta := (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star$ é o operador derivada interior (ou adjunto formal de d), onde $\star : \Omega^p(\Sigma) \rightarrow \Omega^p(\Sigma)$ é o operador estrela de Hodge. No contexto ponderado, consideramos o operador derivada interior ponderado, definido por $\delta_f = \delta + \iota_{\nabla f}$, onde ι_X é o operador contração pela direita por X . Finalmente, temos o f -Laplaciano de Hodge agindo sobre p -formas, denotado por $\Delta_f^{[p]}$ e definido naturalmente como

$$\Delta_f^{[p]} := d\delta_f + \delta_f d.$$

Uma p -forma $\omega \in \Omega^p(M)$ será chamada f -harmônica quando $d\omega = 0$ e $\delta_f \omega = 0$. Em variedades com fronteira, o conjunto $\{\omega \in \Omega^p(M) : \Delta_f^{[p]} \omega = 0\}$ pode diferir do conjunto $\mathcal{H}_f^p(\Sigma) = \{\omega \in \Omega^p(M) : d\omega = 0, \delta_f \omega = 0\}$. Neste caso, precisamos impor uma condição de fronteira para que uma p -forma no núcleo de $\Delta_f^{[p]}$ seja fechada e cofechada.

Em relação ao comportamento de uma p -forma sobre a fronteira, dizemos que uma p -forma ω é normal na fronteira quando $i^* \omega = 0$ ou, de maneira equivalente, quando

$\eta \wedge \omega = 0$ sobre $\partial\Sigma$. Além disso, ω é dita ser tangencial na fronteira quando $i^*(\star\omega) = 0$, ou seja, quando $\iota_\eta\omega = 0$ sobre $\partial\Sigma$. Denotaremos os espaços das p -formas f -harmônicas tangentes e normais na fronteira respectivamente por

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{Tf}^p(\Sigma) &= \{\omega \in \Omega^p(\Sigma) : d\omega = 0, \delta_f\omega = 0 \text{ e } \iota_\eta\omega = 0 \text{ sobre } \partial\Sigma\}, \\ \mathcal{H}_{Nf}^p(\Sigma) &= \{\omega \in \Omega^p(\Sigma) : d\omega = 0, \delta_f\omega = 0 \text{ e } i^*\omega = 0 \text{ sobre } \partial\Sigma\}.\end{aligned}$$

Uma p -forma ω satisfaz a **condição relativa de fronteira** se ambas ω e $\delta_f\omega$ são normais na fronteira. Se ω e $d\omega$ são tangenciais na fronteira, dizemos que ω satisfaz a **condição absoluta de fronteira**.

Lema 1.6.2. *Sejam Σ uma variedade Riemanniana compacta ponderada com peso f e fronteira não vazia. Dada uma p -forma $\omega \in H_f^p(\Sigma)$, vale*

$$\int_{\Sigma} (\langle \Delta_f^{[p]}\omega, \omega \rangle - \|d\omega\|^2 - \|\delta_f\omega\|^2) e^{-f} d\mu = \int_{\partial\Sigma} (\langle i^*\delta_f\omega, \iota_\eta\omega \rangle - \langle i^*\omega, \iota_\eta d\omega \rangle) e^{-f} d\sigma.$$

Demonstração. Considere as formas $\alpha \in \Omega^p(\Sigma)$ e $\beta \in \Omega^{p+1}(\Sigma)$. Aplicando a fórmula de integração por partes (sem peso), temos

$$\int_{\Sigma} \langle d(e^{-f}\alpha), \beta \rangle - \langle e^{-f}\alpha, \delta\beta \rangle d\mu = \int_{\partial\Sigma} \langle e^{-f}i^*\alpha, \iota_\eta\beta \rangle d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle i^*\alpha, \iota_\eta\beta \rangle e^{-f} d\sigma.$$

Por outro lado, um cálculo direto nos fornece

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \langle d(e^{-f}\alpha), \beta \rangle - \langle e^{-f}\alpha, \delta\beta \rangle d\mu &= \int_{\Sigma} \langle e^{-f}d\alpha, \beta \rangle + \langle \alpha \wedge d(e^{-f}), \beta \rangle - \langle e^{-f}\alpha, \delta\beta \rangle d\mu \\ &= \int_{\Sigma} \langle e^{-f}d\alpha, \beta \rangle - \langle e^{-f}\alpha, \iota_{\nabla f}\beta \rangle - \langle e^{-f}\alpha, \delta\beta \rangle d\mu \\ &= \int_{\Sigma} (\langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta_f\beta \rangle) e^{-f} d\mu.\end{aligned}$$

Então vale a seguinte fórmula para integração por partes no contexto ponderado:

$$\int_{\Sigma} (\langle d\alpha, \beta \rangle - \langle \alpha, \delta_f\beta \rangle) e^{-f} d\mu = \int_{\partial\Sigma} \langle i^*\alpha, \iota_\eta\beta \rangle e^{-f} d\sigma.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \langle \Delta_f^{[p]}\omega, \omega \rangle e^{-f} d\mu &= \int_{\Sigma} \langle \delta_f d\omega, \omega \rangle e^{-f} d\mu + \int_{\Sigma} \langle d\delta_f\omega, \omega \rangle e^{-f} d\mu \\ &= \int_{\Sigma} \|d\omega\|^2 e^{-f} d\mu - \int_{\partial\Sigma} \langle i^*\omega, \iota_\eta d\omega \rangle e^{-f} d\sigma \\ &\quad + \int_{\Sigma} \|\delta_f\omega\|^2 e^{-f} d\mu + \int_{\partial\Sigma} \langle i^*\delta_f\omega, \iota_\eta\omega \rangle e^{-f} d\sigma,\end{aligned}$$

para todo $\omega \in \Omega^p(\Sigma)$. □

Se ω satisfaz alguma das condições de fronteira, relativa ou absoluta, então

$$\int_{\partial\Sigma} (\langle i^* \delta_f \omega, \iota_\eta \omega \rangle - \langle i^* \omega, \iota_\eta d\omega \rangle) e^{-f} d\sigma = 0.$$

Logo, o Lema 1.6.2 implica em

$$\int_{\Sigma} \langle \Delta_f^{[p]} \omega, \omega \rangle e^{-f} d\mu = \int_{\Sigma} (||d\omega||^2 + ||\delta_f \omega||^2) e^{-f} d\mu.$$

Como consequência, $\Delta_f^{[p]} \omega = 0$ equivale a ω ser f -harmônica. Também podemos caracterizar os espaços $\mathcal{H}_{Tf}^p(\Sigma)$ e $\mathcal{H}_{Nf}^p(\Sigma)$ da seguinte maneira:

$$\mathcal{H}_{Tf}^p(\Sigma) = \{\omega \in \Omega^p(\Sigma) : \Delta_f^{[p]} \omega = 0 \text{ e } \omega \text{ satisfaz a condição absoluta de fronteira}\},$$

$$\mathcal{H}_{Nf}^p(\Sigma) = \{\omega \in \Omega^p(\Sigma) : \Delta_f^{[p]} \omega = 0 \text{ e } \omega \text{ satisfaz a condição relativa de fronteira}\}.$$

Observação 1.6.1. *Quando Σ é uma variedade Riemanniana ponderada completa não compacta com fronteira não vazia, também vale uma versão do Lema 1.6.2 para p -formas nas quais as integrais do enunciado estão bem definidas. Em particular, também vale a caracterização anterior de $\mathcal{H}_{Tf}^p(\Sigma)$ e $\mathcal{H}_{Nf}^p(\Sigma)$.*

Agora, discutiremos a cohomologia de De Rham e a definição do p -ésimo número de Betti de uma variedade compacta Σ .

Uma p -forma α é dita ser fechada se $d\alpha = 0$ e exata se existe uma $(p-1)$ -forma β tal que $d\beta = \alpha$. Duas p -formas α e β são ditas cohomólogas se $\alpha - \beta$ é exata. A propriedade de ser cohomóloga determina uma relação de equivalência no espaço das p -formas fechadas e o conjunto de suas classes de equivalência é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , chamado p -ésimo grupo de cohomologia de De Rham, que será denotado por

$$H_{dR}^p(\Sigma) := \frac{\{\alpha \in \Omega^p(\Sigma); d\alpha = 0\}}{d\Omega^{p-1}(\Sigma)}.$$

O clássico Teorema de G. de Rham afirma que $H_{dR}^p(\Sigma) \simeq H^p(\Sigma, \mathbb{R})$. Além disso, podemos definir o p -ésimo grupo de cohomologia com suporte compacto de Σ por

$$H_0^p(\Sigma) := \frac{\{\alpha \in \Omega_0^p(\Sigma); d\alpha = 0\}}{d\Omega_0^{p-1}(\Sigma)}$$

e estes espaços também serão isomorfos aos grupos de cohomologia real de Σ com suporte compacto. Quando Σ é fechada, os grupos de cohomologia de De Rham têm dimensão finita denotada por

$$b_p(\Sigma) := \dim H_{dR}^p(\Sigma),$$

onde o número $b_p(\Sigma)$ é chamado o p -ésimo número de Betti de Σ . Os números de Betti gozam da propriedade $b_p(\Sigma) = b_{n-p}(\Sigma)$ e também são usados para definir a característica de Euler de uma variedade fechada:

$$\chi(\Sigma) := \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(\Sigma).$$

Teorema 1.6.4. (*Hodge*). *Seja Σ uma variedade Riemanniana fechada. Então toda classe de cohomologia no p -ésimo grupo de cohomologia de De Rham possui exatamente uma p -forma harmônica, isto é, $H_{dR}^p(\Sigma) \simeq \mathcal{H}^p(\Sigma)$.*

Uma consequência direta do Teorema de Hodge é que $b_p(\Sigma) = \dim \mathcal{H}^p(\Sigma)$. Quando Σ tem fronteira não vazia, o espaço das formas harmônicas é infinito dimensional. Neste caso, existem duas noções distintas para o p -ésimo grupo de cohomologia de De Rham: o p -ésimo grupo de cohomologia absoluto de De Rham, definido analogamente ao contexto de variedades fechadas como

$$H_{dR}^p(\Sigma) := \frac{\{\alpha \in \Omega^p(\Sigma); d\alpha = 0\}}{d\Omega^{p-1}(\Sigma)},$$

e o p -ésimo grupo de cohomologia relativo de De Rham, dado por

$$H_{dR}^p(\Sigma, \partial\Sigma) := \frac{\{\alpha \in \Omega^p(\Sigma); d\alpha = 0 \text{ e } \eta \wedge \alpha = 0\}}{\{\alpha \in d\Omega^{p-1}(\Sigma); \eta \wedge \alpha = 0\}}.$$

Teorema 1.6.5. (*Hodge-Morrey-Friedrichs*) *Seja Σ uma variedade Riemanniana compacta com fronteira não vazia. Então,*

$$H_{dR}^p(\Sigma) \simeq \mathcal{H}_T^p(\Sigma) \text{ e } H_{dR}^p(\Sigma, \partial\Sigma) \simeq \mathcal{H}_N^p(\Sigma).$$

Definimos o p -ésimo absoluto número de Betti de uma variedade compacta com fronteira não vazia Σ por

$$b_p^A(\Sigma) := \dim \mathcal{H}_T^p(\Sigma)$$

e o p -ésimo relativo número de Betti de Σ por

$$b_p^R(\Sigma) := \dim \mathcal{H}_N^p(\Sigma).$$

Pela dualidade de Poincaré-Lefschetz, esses números se relacionam por

$$b_p^A(\Sigma) = b_{n-p}^R(\Sigma).$$

Um fato importante é que a decomposição de Hodge continua válida em espaços ponderados, como foi demonstrado por E. Bueler em [17]. No caso de 1-formas, temos os seguintes isomorfismos:

- $\mathcal{H}_T^1(\Sigma) \cong \mathcal{H}_{Tf}^1(\Sigma)$ via isomorfismo $\omega \mapsto \omega + du$ para $\omega \in \mathcal{H}_T^1(\Sigma)$, onde $u \in C^\infty(\Sigma)$ é uma solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta_f u = -\iota_{\nabla f} \omega & \text{sobre } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma. \end{cases}$$

- $\mathcal{H}_N^1(\Sigma) \cong \mathcal{H}_{Nf}^1(\Sigma)$ via isomorfismo $\omega \mapsto \omega + du$ para $\omega \in \mathcal{H}_N^1(\Sigma)$, onde $u \in C^\infty(\Sigma)$ é uma solução do problema de fronteira

$$\begin{cases} \Delta_f u = -\iota_{\nabla f} \omega & \text{sobre } \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\iota_\eta \omega, u = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma. \end{cases}$$

Os dois problemas de fronteira tem solução, visto que

$$\int_\Sigma -\iota_{\nabla f} \omega d\mu_f = \int_\Sigma -\delta(\omega e^{-f}) d\mu = \int_{\partial \Sigma} \iota_\eta(\omega e^{-f}) d\sigma = 0.$$

Em particular, a dimensão de $\mathcal{H}_T^1(\Sigma)$ é igual ao primeiro número de Betti $b_1(\Sigma) := \dim H_{dR}^1(\Sigma)$. Ao longo do Capítulo 4, usaremos os isomorfismos $\mathcal{H}_{Tf}^p(\Sigma) \cong H_{dR}^p(\Sigma)$ e $\mathcal{H}_{Nf}^p(\Sigma) \cong H_{dR}^{n-p}(\Sigma)$.

Finalizamos esta subseção enunciando alguns resultados presentes na literatura e que serão fundamentais para os nossos principais teoremas do Capítulo 4, mais detalhes podem ser encontrados em [58],[42] e [57].

Nos dois próximos Lemas suporemos que Σ é uma hipersuperfície f -mínima com fronteira livre em um domínio ponderado $\Omega \subset (\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira não vazia.

Lema 1.6.3. [57] *Suponha que ω é uma 1-forma satisfazendo a condição absoluta na fronteira. Então, em cada ponto $p \in \partial \Sigma$,*

$$\langle \nabla_\eta \omega^\sharp, \omega^\sharp \rangle = h^{\partial \Omega}(\omega^\sharp, \omega^\sharp).$$

Lema 1.6.4. *Suponha que ω é uma 1-forma satisfazendo a condição relativa na fronteira. Então, em cada ponto $p \in \partial \Sigma$,*

$$\langle \nabla_\eta \omega^\sharp, \omega^\sharp \rangle = H_f^{\partial \Sigma} \|\omega^\sharp\|^2.$$

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal de $\partial\Sigma$. A hipótese de ω satisfazer a condição relativa na fronteira implica que $\omega^\sharp = \alpha\eta$ para alguma função $\alpha : \partial\Sigma \rightarrow \mathbb{R}$. Logo, sobre $\partial\Sigma$,

$$\begin{aligned} 0 = \delta_f \omega &= \sum_{j=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_j} \omega^\sharp, e_j \rangle - \langle \nabla_\eta \omega^\sharp, \eta \rangle + \langle \nabla f, \omega^\sharp \rangle \\ &= \alpha H^{\partial\Sigma} - \langle \nabla_\eta \omega^\sharp, \eta \rangle + \alpha \langle \nabla f, \eta \rangle = \alpha H_f^{\partial\Sigma} - \langle \nabla_\eta \omega^\sharp, \eta \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, $\langle \nabla_\eta \omega^\sharp, \omega^\sharp \rangle = \alpha^2 H_f^{\partial\Sigma} = H_f^{\partial\Sigma} \|\omega^\sharp\|^2$. \square

Lema 1.6.5. [7] *Seja Σ^n uma variedade n -dimensional compacta, orientável, conexa com fronteira não vazia $\partial\Sigma$, $n \geq 2$. Se $\partial\Sigma$ tem $r \geq 1$ componentes de fronteira, então*

$$\dim H_1(\Sigma, \partial\Sigma; \mathbb{R}) = r - 1 + (\dim H_1(\Sigma; \mathbb{R}) - \dim \text{Im}(i_*)),$$

onde $i_* : H_1(\partial\Sigma; \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\Sigma; \mathbb{R})$ denota o mapa entre os primeiros grupos de homologia induzida pela inclusão $i : \partial\Sigma \rightarrow \Sigma$.

Lema 1.6.6. [7] *Seja Σ^2 uma superfície compacta e orientável com fronteira não vazia $\partial\Sigma$. Se Σ tem gênero g e $r \geq 1$ componentes de fronteira, então*

$$\dim H_1(\Sigma, \partial\Sigma; \mathbb{R}) = 2g + r - 1.$$

1.6.4 Formas harmônicas L^2 em variedades completas não compactas

Seja (M^n, g, e^{-f}) uma variedade Riemanniana ponderada completa não compacta. Neste contexto não compacto é usual considerar as k -formas diferenciais L^2

$$L^2(\Omega^k(M)) := \left\{ \omega \in \Omega^k(M) : \int_M |\omega^\sharp|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{H}^k(M)$ o espaço das k -formas harmônicas; ou seja, o espaço das L^2 k -formas que são fechadas e cofechadas:

$$\mathcal{H}^k(M) = \left\{ \omega \in L^2(\Omega^k(M)) : d\omega = \delta_f \omega = 0 \right\}.$$

Conforme discutido em [21], o espaço $\mathcal{H}^k(M)$ pode ter dimensão infinita e sua dimensão, se finita, pode depender da métrica g . Além disso, são apresentados os seguintes resultados:

Proposição 1.6.6. *Os espaços $\mathcal{H}^k(M)$ são invariantes quase-isométricos de (M, g) . Ou seja, se g_1 e g_2 são duas métricas Riemannianas completas, de modo que para algum $C > 1$ temos*

$$C^{-1}g_1 < g_2 < Cg_1,$$

então $\mathcal{H}^k(M, g_1) \simeq \mathcal{H}^k(M, g_2)$.

Teorema 1.6.7. *(J. Lott, [48]) Os espaços de formas harmônicas L^2 de duas variedades Riemannianas completas, isométricas fora de algum conjunto compacto, têm simultaneamente dimensão finita ou infinita.*

O Teorema de Lott afirma que a finitude de $\dim \mathcal{H}^k(M)$ depende apenas da geometria dos fins de M . Em particular, Visentini [70] afirma que se M tem fins planos então $\dim \mathcal{H}^k(M)$ é finita. Mais especificamente:

Teorema 1.6.8. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana completa tal que para um conjunto compacto $K_0 \subset M$, a curvatura de (M, g) se anula em $M - K_0$. Então, para cada k ,*

$$\dim \mathcal{H}^k(M) < \infty.$$

Terminaremos esta seção apresentando resultados sobre a invariância conforme do espaço das formas harmônicas L^2 :

Proposição 1.6.9. *Se (M^n, g) é uma variedade Riemanniana de dimensão $n = 2k$, e se $f \in C^\infty(M)$ então*

$$\mathcal{H}^k(M, g) = \mathcal{H}^k(M, e^{2f}g).$$

Corolário 1.6.1. *Se (M, g) é uma superfície completa com curvatura Gaussiana integrável, de acordo com o teorema de Huber, sabemos que tal superfície é conformemente equivalente a uma superfície compacta \overline{M} com um número finito de pontos removidos. Então*

$$\dim \mathcal{H}^1(M) = b_1(\overline{M}).$$

onde $b_1(\overline{M})$ denota o primeiro número de Betti de \overline{M} .

Teorema 1.6.10. *Seja M uma superfície Riemanniana conexa completa com topologia finita (gênero finito e número finito de fins) então*

- $\dim \mathcal{H}^1(M, g) = \infty$,

- ou $\dim \mathcal{H}^1(M, g) < \infty$ e M é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta \overline{M} com um número finito de pontos removidos.

Capítulo 2

HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS COM ÍNDICE BAIXO NO ESPAÇO PROJETIVO REAL

2.1 Hipersuperfícies de Clifford em \mathbb{RP}^{n+1}

Nesta seção relembremos as hipersuperfícies de Clifford imersas na esfera unitária redonda e no espaço projetivo real. Também calculamos o índice de Morse de tais hipersuperfícies, quando esta é mínima, e concluímos a seção apresentando um belo resultado devido a do Carmo-Ritoré-Ros.

Dados um número real $0 < r < 1$ e um inteiro $k \in \{1, \dots, n\}$, a hipersuperfície de Clifford $\mathbb{T}^n(k, r)$ em \mathbb{S}^{n+1} é definida como o produto $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$. Em cada ponto $(x, y) \in \mathbb{T}^n(k, r)$, o campo vetorial unitário normal a $\mathbb{T}^n(k, r)$ em (x, y) é dado por

$$N(x, y) = \left(-\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}x, \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}y \right).$$

Com respeito a essa orientação, as curvaturas principais de $\mathbb{T}^n(k, r)$ são $\frac{\sqrt{1-r^2}}{r}$, com multiplicidade k , e $-\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$, que tem multiplicidade $n-k$. Logo, $\mathbb{T}^n(k, r)$ tem curvatura média constante $H = H(k, r)$, onde

$$H(k, r) = k \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} - (n-k) \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{k - nr^2}{r\sqrt{1-r^2}}.$$

Em particular, $\mathbb{T}^n(k, r)$ será mínima precisamente quando $k = nr^2$. Fixado k , a família $\{\mathbb{T}^n(k, r)\}_{r \in (0,1)}$ folheia \mathbb{S}^{n+1} por hipersuperfícies com curvatura média constante, sendo que apenas uma delas é mínima.

Para as hipersuperfícies de Clifford mínimas $\mathbb{T}^n(k) = \mathbb{T}^n(k, \sqrt{\frac{k}{n}})$, temos

$$|A|^2 = k \left(\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \right)^2 + (n-k) \left(\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \right)^2 = nr^2 \frac{1-r^2}{r^2} + n(1-r^2) \frac{r^2}{1-r^2} = n.$$

Além disso, o operador de Jacobi de $\mathbb{T}^n(k)$ assume a forma $J = \Delta + 2n$. Assim como foi demonstrado em [31], os autovalores dos Laplacianos de $\mathbb{S}^k(\sqrt{\frac{k}{n}})$ e $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{\frac{n-k}{n}})$ são dados, respectivamente, por

$$\alpha_i = \frac{n(i-1)(k+i-2)}{k} \quad \text{e} \quad \beta_j = \frac{n(j-1)(n-k+j-2)}{n-k}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots$$

Logo, os autovalores do Laplaciano de $\mathbb{T}^n(k)$ são da forma $\alpha_i + \beta_j$. Testando os valores de i e j tais que $\alpha_i + \beta_j < 2n$, vemos que $\mathbb{T}^n(k)$ tem índice $n + 3$ em \mathbb{S}^{n+1} .

Visto que $\mathbb{T}^n(k)$ é invariante sob a aplicação antípoda, ela induz uma hipersuperfície mínima compacta mergulhada $\tilde{\mathbb{T}}^n(k) = \mathbb{T}^n(k)/\{\pi\}$ em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$, que também chamaremos de hipersuperfície de Clifford. Como a projeção $\pi : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ é uma isometria local, o operador de Jacobi de $\tilde{\mathbb{T}}^n(k)$ é o mesmo da hipersuperfície de Clifford na esfera, mas as autofunções são aquelas que se mantêm invariantes pelo mapeamento π ; ou seja, funções pares. As autofunções de Δ associadas ao autovalor $\alpha_i + \beta_j$ são da forma $P_i(x)Q_j(y)$, onde $P_i(x)$ (resp. $Q_j(y)$) denota um polinômio harmônico homogêneo em \mathbb{R}^{k+1} (resp. \mathbb{R}^{n-k+1}) de grau $i - 1$ (resp. $j - 1$). Portanto, os autovalores de Δ são dados por $\alpha_i + \beta_j$ com $i + j$ par.

Um cálculo direto nos mostra que $\alpha_1 + \beta_1 = 0$ e que o primeiro autovalor não nulo de $\tilde{\Delta}$ é $\alpha_2 + \beta_2 = 2n$. Então $\tilde{\mathbb{T}}^n(k)$ tem índice 1 em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$.

Resumimos o cálculo acima na seguinte proposição:

Proposição 2.1.1. *As hipersuperfícies mínimas de Clifford $\tilde{\mathbb{T}}^n(k)$ em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ têm índice um.*

Apresentaremos agora um belo resultado devido a do Carmo-Ritoré-Ros. Eles caracterizaram as hipersuperfícies mínimas compactas dois-lados com índice de Morse igual a um no espaço projetivo real.

Teorema 2.1.2 ([20]). *As únicas hipersuperfícies mínimas dois-lados compactas com índice um no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies mínimas de Clifford.*

Concluimos esta seção enunciando um teorema de C. Viana caracterizando quais são as hipersuperfícies compactas dois-lados estáveis para variações preservando volume em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$.

Teorema 2.1.3 ([69]). *Se Σ é uma hipersuperfície compacta dois-lados estável para variações preservando volume em $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$, então Σ é uma esfera geodésica, uma hipersuperfície de Clifford, ou um recobrimento duplo do subespaço projetivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.*

2.2 Resultados básicos

Nesta seção apresentamos alguns resultados fundamentais para provar o teorema principal deste capítulo. Começamos lembrando o campo vetorial introduzido por do Carmo, Ritoré e Ros em [20].

Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$, considere a função vetorial $\Phi_{a,b} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$\Phi_{a,b} := -\langle x, a \rangle x + \langle N, a \rangle N + \langle x, b \rangle N.$$

Lema 2.2.1. *O operador de Jacobi aplicado na função $\Phi_{a,b}$ é dado por*

$$J\Phi_{a,b} = -(|A|^2 - n) (\langle x, a \rangle x + \langle N, a \rangle N) + X$$

onde $X : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ é o campo vetorial tangente a Σ da forma $X = 2A^2 a^\top - 2a^\top - 2Ab^\top$.

Demonstração. Basta usar as fórmulas vetoriais dadas na Observação 1.3.1 e a linearidade de J . □

Lema 2.2.2. *Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$, temos*

$$\int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \langle N, a \rangle \langle x, b \rangle d\mu = 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \langle N, a \rangle \langle x, b \rangle d\mu &= \int_{\Sigma} \langle |A|^2 N, a \rangle \langle x, b \rangle - \langle N, a \rangle \langle nx, b \rangle d\mu \\ &= \int_{\Sigma} \langle N, a \rangle \Delta \langle x, b \rangle - \Delta \langle N, a \rangle \langle x, b \rangle d\mu = 0, \end{aligned}$$

onde usamos o Teorema da Divergência na última igualdade. □

A seguir, apresentaremos uma fórmula importante e que será usada muitas vezes no restante deste capítulo:

Proposição 2.2.1. *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$, vale a seguinte fórmula:*

$$Q(\Phi_{a,b}, \Phi_{a,b}) = \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) (-h_a^2 + f_a^2) d\mu.$$

Demonstração. Aplicando os Lemas 2.2.1 e 2.2.2, obtemos

$$\begin{aligned}
Q(\Phi_{a,b}, \Phi_{a,b}) &:= - \int_{\Sigma} \langle \Phi_{a,b}, J\Phi_{a,b} \rangle d\mu \\
&= - \int_{\Sigma} \left\langle -\langle x, a \rangle x + \langle N, a \rangle N + \langle x, b \rangle N, -(|A|^2 - n)(\langle x, a \rangle x + \langle N, a \rangle N) + X \right\rangle d\mu \\
&= \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \left(-\langle x, a \rangle^2 + \langle N, a \rangle^2 + \langle x, b \rangle \langle N, a \rangle \right) d\mu \\
&= \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \left(-\langle x, a \rangle^2 + \langle N, a \rangle^2 \right) d\mu.
\end{aligned}$$

□

Dado $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, considere a função suave $g_a : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$g_a := -h_a x + f_a N. \quad (2.7)$$

Note que $g_a = \Phi_{a,0}$. Então o Lema 2.2.1 implica em

$$J(g_a) = -(|A|^2 - n)(h_a x + f_a N) + X,$$

e aqui $X = 2A^2 a^\top - 2a^\top$. Desse modo, tem-se $Q(g_a, g_a) = Q(\Phi_{a,b}, \Phi_{a,b})$, para qualquer $b \in \mathbb{R}^{n+2}$.

Doravante usaremos ideias análogas a [69]; até onde sabemos, é o primeiro lugar onde essa estratégia apareceu. Associaremos a cada aplicação linear $\psi : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ uma forma quadrática definida pela expressão:

$$Q_\psi(a, b) := - \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \langle g_a, \psi(b) \rangle d\mu.$$

Tome o conjunto $\Lambda := SO(n+2) \times \mathbb{S}^{n+1}$ e seja $F : \Lambda \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função suave definida por

$$F(\psi, a, \beta) := Q_{\beta\psi}(a, a) = \beta \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \langle g_a, \psi(a) \rangle d\mu.$$

Estabelecida a notação, apresentamos o seguinte resultado:

Lema 2.2.3. *Se $(\psi_0, a_0, \beta_0) \in \Lambda \times \mathbb{R}$ é um ponto crítico de F , então*

$$\int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_{a_0} d\mu = 0.$$

Demonstração. Note que $T_{\psi_0} SO(n+2) = \{\psi_0 \cdot K \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{n+2}) : K^T = -K\}$. Ao tomarmos as derivadas de $F(\psi, a, \beta)$ em relação à entrada ψ , obtemos

$$\begin{aligned}
0 = DF(\psi_0, a_0, \beta_0)(\psi_0 \cdot K) &= \beta_0 \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) \langle g_{a_0}, \psi_0 \cdot K(a_0) \rangle d\mu \\
&= \beta_0 \left\langle \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_{a_0} d\mu, \psi_0 \cdot K(a_0) \right\rangle.
\end{aligned}$$

Observe que $\{\psi_0 \cdot K(a_0) : K^T = -K\} = \langle \psi_0(a_0) \rangle^\perp$. Se $\beta_0 \neq 0$, então a equação acima nos permite concluir que $\int_\Sigma (|A|^2 - n)g_{a_0} d\mu \in \langle \psi_0(a_0) \rangle$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial \beta}(\psi_0, a_0, \beta_0) = \int_\Sigma (|A|^2 - n) \langle g_{a_0}, \psi_0(a_0) \rangle d\mu \\ &= \left\langle \int_\Sigma (|A|^2 - n)g_{a_0} d\mu, \psi_0(a_0) \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim, no caso $\beta_0 \neq 0$, obtemos $\int_\Sigma (|A|^2 - n)g_{a_0} d\mu = 0$. Finalmente, se $\beta_0 = 0$, então a equação anterior ainda vale para qualquer aplicação ortogonal ψ . A partir disso, concluímos que $\int_\Sigma (|A|^2 - n)g_{a_0} d\mu = 0$, conforme desejado. \square

Como vimos, um ponto crítico de F desempenha um papel importante para produzir uma função de média ponderada zero a partir das funções h_a e f_a . Portanto, precisamos esboçar uma forma de produzir um ponto crítico de F . Visando este objetivo, nossa estratégia será aplicar o princípio Min-max para o funcional F .

Defina o número

$$m_1 := \sup_{\phi \in [\phi_0]} \min_{(\psi, a, \beta) \in \phi(\Lambda)} F(\psi, a, \beta), \quad (2.8)$$

onde $[\phi_0]$ é a classe de mapeamentos $\phi : \Lambda \rightarrow \Lambda \times \mathbb{R}$ que são homotópicos a $\phi_0(\psi, a) = (\psi, a, 0)$. Para este número, provamos o seguinte resultado:

Lema 2.2.4. *O número m_1 em (2.8) é bem definido e não positivo.*

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que cada componente conexa de

$$\mathcal{C} = \{(Id, v, \beta) \in \Lambda \times \mathbb{R} : v \text{ é o primeiro autovetor de } Q_{\beta \cdot Id}\}$$

é ilimitada na direção β . Em particular, \mathcal{C} deve cruzar a fatia $\phi_0(\Lambda) = \Lambda \times \{0\}$. Portanto, qualquer mapeamento ϕ na classe homotópica $[\phi_0]$ satisfaz $\phi(\Lambda) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Em seguida, note que o primeiro autovalor da forma quadrática simétrica $Q_{\beta \cdot Id}$ é não positivo para todo β em \mathbb{R} . De fato, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+2} , então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+2} Q_{\beta \cdot Id}(e_i, e_i) &= \beta \sum_{i=1}^{n+2} \int_\Sigma (|A|^2 - n)(-\langle x, e_i \rangle^2 + \langle N, e_i \rangle^2) d\mu \\ &= \beta \int_\Sigma (|A|^2 - n)(-|x|^2 + |N|^2) d\mu = 0. \end{aligned}$$

Da definição de F deduzimos que $F(Id, v, \beta) = Q_{\beta, Id}(v, v) \leq 0$, para qualquer (Id, v, β) em \mathcal{C} . Logo, $\phi(\Lambda) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset, \forall \phi \in [\phi_0]$ implica que

$$\min_{(\psi, a, \beta) \in \phi(\Lambda)} F(\psi, a, \beta) \leq 0, \forall \phi \in [\phi_0].$$

Assim $m_1 \leq 0$, como afirmamos. Em particular, m_1 é sempre bem definido. \square

Nos próximos parágrafos introduziremos a condição de Palais-Smale e a usaremos para provar que m_1 é um ponto crítico de F . Então, lembre-se de que um funcional E em uma variedade de Hilbert satisfaz a condição de Palais-Smale se qualquer sequência $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfazendo as condições

(i): $|E(u_i)| \leq c$ para alguma constante c ,

(ii): $|\nabla E(u_i)| \rightarrow 0$,

admite uma subsequência convergente.

A seguir apresentamos o princípio Min-max em dimensão finita, veja [65, Capítulo II], que será uma ferramenta fundamental.

Teorema 2.2.2 (princípio min-max em dimensão finita). *Suponha que Σ seja uma variedade Riemanniana completa e $E \in C^1(\Sigma)$ satisfaça a condição de Palais-Smale. Suponha também que \mathcal{F} é uma coleção de conjuntos invariante em relação a qualquer semifluxo suave $\Psi : \Sigma \times [0, \infty) \rightarrow \Sigma$ tal que $\Psi(\cdot, 0) = Id$, $\Psi(\cdot, t)$ é um homeomorfismo de Σ para qualquer $t \geq 0$, e $E(\Psi(u, t))$ é não decrescente em t para qualquer $u \in \Sigma$. Se*

$$\beta = \inf_{F \in \mathcal{F}} \sup_{u \in F} E(u)$$

é finito, então β é um valor crítico de E .

Corolário 2.2.1. *Se F satisfaz a condição Palais-Smale, então o número m_1 definido em (2.8) é um valor crítico de F .*

Demonstração. Sob nossa hipótese, podemos aplicar o Teorema anterior para $\Sigma = \Lambda \times \mathbb{R}$, $E = -F$ e $\mathcal{F} = \{\phi(\Lambda) : \phi \in [\phi_0]\}$ e assim concluir que $-m_1$ é um valor crítico de $-F$. \square

2.3 Resultado principal do capítulo

Nesta seção apresentamos e provamos o principal Teorema do capítulo, que se enuncia da seguinte maneira:

Teorema 2.3.1. *As únicas hipersuperfícies mínimas dois-lados compactas conexas do espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n+1}$ com curvatura escalar constante e índice de Morse menor ou igual a dois são as esferas totalmente geodésicas e as hipersuperfícies de Clifford.*

O resultado anterior segue imediatamente do Teorema abaixo:

Teorema 2.3.2. *Não há hipersuperfície mínima dois-lados compacta conexa no espaço projetivo real $\mathbb{R}P^{n+1}$ com curvatura escalar constante e índice de Morse dois.*

Demonstração. Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima dois-lados compacta conexa com curvatura escalar constante e índice dois. Se conseguirmos levantar x para um mapeamento $\tilde{x} : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$, então teremos uma hipersuperfície mínima dois-lados compacta conexa na esfera unitária com curvatura escalar constante e índice dois, que é uma contradição ao Corolário 1.3.2, o qual afirma que $\text{Ind}(\Sigma) = 1$ ou $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 3$. Logo, x não admite tal levantamento.

Em seguida, considere $p : \hat{\Sigma} \rightarrow \Sigma$ o recobrimento duplo orientável e tome o levantamento de $x \circ p$. Então, temos um mapeamento $\hat{x} : \hat{\Sigma} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ tal que $\pi \circ \hat{x} = x \circ p$. Observe que \hat{x} é uma imersão mínima dois-lados compacta conexa com curvatura escalar constante e localmente isométrica a x . Denotando por $s : \hat{\Sigma} \rightarrow \hat{\Sigma}$ a involução isométrica induzida por p , temos $\hat{x} \circ s = -\hat{x}$. Seja N um campo vetorial normal unitário ao longo de $\hat{\Sigma}$. Uma das propriedades do recobrimento duplo orientável é que a aplicação $s_* : T_p \hat{\Sigma} \rightarrow T_{s(p)} \hat{\Sigma}$ inverte orientações. Consequentemente, $N \circ s = -N$. É importante observar que as funções teste φ em $\hat{\Sigma}$ que podem ser projetadas e se tornarem funções teste em Σ são aquelas que satisfazem $\varphi \circ s = \varphi$, nós a chamaremos de funções pares.

Estabelecida a notação, observamos que o operador de Jacobi associado a \hat{x} é $J = \Delta + |A|^2 + n$ e como $|A|^2$ é constante, os autovalores de J são os autovalores de Δ somados com a constante $-|A|^2 - n$. Em particular, o primeiro autovalor de J é $\lambda_1^J = -|A|^2 - n$ e está associado a função 1. Denote por $\lambda_2 < 0$ o segundo autovalor de J , que é simples devido à hipótese sobre o índice ser dois, e por φ_2 a autofunção associada a λ_2 .

Nossa hipótese sobre o índice ser dois também implica em $|A|^2 \neq 0, n$, veja [26]. Das fórmulas dadas em Observação 1.3.1 e Lema 2.2.2, temos que:

$$\int_{\hat{\Sigma}} h_a d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} f_a d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} h_a f_b d\mu = 0, \forall a, b \in \mathbb{R}^{n+2}.$$

Como estamos interessados no índice de Σ no espaço projetivo real, consideraremos apenas funções em $U := \{u \in C^\infty(\hat{\Sigma}) : u \circ s = u\}$. Agora precisamos do seguinte resultado:

Afirmção 1: Para qualquer $u \in U$ satisfazendo

$$\int_{\hat{\Sigma}} u \, d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 u \, d\mu = 0, \quad (2.9)$$

temos $Q(u, u) \geq 0$. Além disso, $Q(u, u) = 0$ implica em $Ju = 0$.

Demonstração. A primeira parte da afirmação decorre da hipótese sobre Σ ter índice dois. Em seguida, observe que para qualquer u e w em U satisfazendo (2.9), a função $tu + w$ também pertence a U e satisfaz (2.9). Consequentemente,

$$0 \leq Q(tu + w, tu + w) = t^2 Q(u, u) + 2t Q(u, w) + Q(w, w), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Se $Q(u, u) = 0$, então $2t Q(u, w) + Q(w, w) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, e assim

$$0 = Q(u, w) = - \int_{\hat{\Sigma}} w Ju \, d\mu \quad \text{para todo } w \in U \text{ satisfazendo (2.9).}$$

Logo, $Ju = c_1 + c_2 \varphi_2$.

Vamos provar que c_1 e c_2 são zero. Com efeito, observe que

$$\int_{\hat{\Sigma}} Ju \, d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} J(1)u \, d\mu = (|A|^2 + n) \int_{\hat{\Sigma}} u \, d\mu = 0,$$

e, por outro lado

$$\int_{\hat{\Sigma}} Ju \, d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} c_1 \, d\mu + \int_{\hat{\Sigma}} c_2 \varphi_2 \, d\mu = c_1 \cdot \text{area}(\hat{\Sigma}).$$

Então, $c_1 = 0$. Para a constante c_2 temos

$$\int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 Ju \, d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} J(\varphi_2)u \, d\mu = -\lambda_2 \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 u \, d\mu = 0,$$

e

$$\int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 Ju \, d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} c_1 \varphi_2 \, d\mu + \int_{\hat{\Sigma}} c_2 \varphi_2^2 \, d\mu = c_2 \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2^2 \, d\mu.$$

Como φ_2 não se anula, deduzimos que c_2 é zero e concluímos a afirmação desejada. \square

Também precisaremos do resultado abaixo em nossos argumentos.

Afirmção 2: Seja $G : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ a aplicação vetorial definida por $G(b) := \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 h_b \cdot N \, d\mu$. Então G é um isomorfismo linear.

Demonstração. Suponha que exista $b \neq 0$ tal que $G(b) = 0$. Tomando $\psi := h_b \cdot N$, as seguintes igualdades são válidas:

$$\psi \circ s = \psi, \quad \int_{\hat{\Sigma}} \psi \, d\mu = 0, \quad \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 \psi \, d\mu = 0 \quad \text{e} \quad Q(\psi, \psi) = 0.$$

Em vista da Afirmação 1 temos $J\psi = 0$. Por outro lado, a Observação 1.3.1 diz que $J\psi = -2Ab^T$, e assim $Ab^T = 0$ em $\hat{\Sigma}$. Agora, considere $Y \in \mathfrak{X}(\hat{\Sigma})$ e observe que

$$Y \langle N, b \rangle = \langle \bar{\nabla}_y N, b \rangle = \langle -Ay, b^T \rangle = \langle y, -Ab^T \rangle = 0.$$

Portanto, a função $\langle N, b \rangle$ é constante. Como N é uma função ímpar, deduzimos que $\langle N, b \rangle = 0$. Usando o Lema 1.3.1, obtemos $\text{Hess } h_b = -\langle \cdot, \cdot \rangle h_b$.

Se $h_b \not\equiv 0$ sobre Σ , o Teorema de Obata em [53] afirma que Σ é isométrica a uma esfera unitária. Denotando por B a segunda forma fundamental de Σ e por $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ as curvaturas principais de Σ , segue da Equação de Gauss que $\kappa_i \kappa_j = 0, \forall i, j = 1, \dots, n$. Então existe no máximo um $\kappa_j \neq 0$. Como $H = \sum_{j=1}^n \kappa_j = 0$, temos $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$ e, portanto, $B \equiv 0$. Concluimos que Σ é uma hipersuperfície linear unilateral ou a projeção de uma esfera totalmente geodésica com índice um, assim obtemos uma contradição em relação as nossas hipóteses.

Caso contrário, h_b se anula e $\hat{\Sigma}$ é a intersecção da esfera unitária com o hiperplano b^\perp passando pela origem, novamente encontramos uma contradição. \square

Agora provaremos o seguinte resultado de rigidez:

Afirmação 3: Suponha que existem $a_0, b_0 \in \mathbb{R}^{n+2}$, com a_0 diferente de zero tal que $\int_{\hat{\Sigma}} \Phi_{a_0, b_0} \, d\mu = \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 \Phi_{a_0, b_0} \, d\mu = 0$ e $Q(\Phi_{a_0, b_0}, \Phi_{a_0, b_0}) = 0$, Então $\hat{\Sigma}$ é localmente congruente a uma hipersuperfície mínima de Clifford.

Demonstração. Aplicando a Afirmação 1 obtemos

$$0 = J(\Phi_{a_0, b_0}) = -(|A|^2 - n)(h_{a_0} \hat{x} + f_{a_0} N) + 2(A^2(a_0^\top) - A(b_0^\top) - a_0^\top) = 0.$$

Em particular,

1. $0 = \langle J(\Phi_{a_0, b_0}), \hat{x} \rangle = -(|A|^2 - n)h_{a_0}$;
2. $0 = \nabla[(|A|^2 - n)h_{a_0}] = (|A|^2 - n)\nabla h_{a_0} = (|A|^2 - n)a_0^\top$;
3. $0 = \langle J(\Phi_{a_0, b_0}), N \rangle = -(|A|^2 - n)f_{a_0}$.

Por isso,

$$(|A|^2 - n)a_0 = (|A|^2 - n)h_{a_0}\hat{x} + (|A|^2 - n)f_{a_0}N + (|A|^2 - n)a_0^\top = 0,$$

e como a_0 difere de zero, obtemos $|A|^2 = n$. Aplicando o teorema de Chern-do Carmo-Kobayashi, veja [26], concluímos que $\hat{\Sigma}$ é localmente congruente a uma hipersuperfície mínima de Clifford. \square

Dado $a \in \mathbb{R}^{n+2}$, relembremos a função definida em (2.7), ou seja, $g_a = -h_a\hat{x} + f_aN$.

Para concluir a prova do teorema, analisaremos dois casos. O primeiro é o caso em que F satisfaz a condição de Palais-Smale. Assim, podemos aplicar o Corolário 2.2.1 e deduzir que m_1 definido em (2.8) é um valor crítico de F da forma $F(\psi_0, a_0, \beta_0)$, e pelo Lema 2.2.3 temos que

$$\int_{\Sigma} (|A|^2 - n)g_{a_0} d\mu = 0.$$

Tomando b_0 associado a a_0 através da Afirmação 2 e considerando a aplicação Φ_{a_0, b_0} obtemos, após um cálculo direto, que

$$\int_{\hat{\Sigma}} \Phi_{a_0, b_0} d\mu = 0 \text{ e } \int_{\hat{\Sigma}} \varphi_2 \Phi_{a_0, b_0} d\mu = 0.$$

Além disso, pela Proposição 2.2.1, vale

$$\begin{aligned} Q(\Phi_{a_0, b_0}, \Phi_{a_0, b_0}) &= (|A|^2 - n) \int_{\hat{\Sigma}} -h_{a_0}^2 + f_{a_0}^2 d\mu \\ &= (|A|^2 - n) \left\langle \int_{\hat{\Sigma}} g_{a_0} d\mu, a_0 \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

e assim podemos aplicar a Afirmação 3 para deduzir que $\hat{\Sigma}$ é localmente congruente a uma hipersuperfície de Clifford mínima, o que nos dá uma contradição em relação à hipótese sobre o índice.

O segundo caso é quando F não satisfaz a condição Palais-Smale. Portanto, existe uma sequência (ψ_j, a_j, β_j) em $\Lambda \times \mathbb{R}$ tal que

$$|F(\psi_j, a_j, \beta_j)| \leq c, \lim_{j \rightarrow \infty} |\beta_j| = \infty \text{ e } |\nabla F(\psi_j, a_j, \beta_j)| = \varepsilon_j \rightarrow 0.$$

Lembre-se que $\{\psi \cdot K(a) : K^t = -K\} = \langle \psi(a) \rangle^\perp$ e então considere a base ortogonal de \mathbb{R}^{n+2} dada por $\{b_1, \dots, b_{n+2}\}$ com $b_1 = \psi(a)$ e $b_i = \psi \cdot K_i(a)$, onde $K_i^t = -K_i$ para

$i = 2, \dots, n + 2$. Portanto,

$$\begin{aligned} DF(\psi, a, \beta)(\psi \cdot K_i) &= \beta \left\langle \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu, \psi \cdot K_i(a) \right\rangle \\ &= \beta \left\langle \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu, b_i \right\rangle, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \beta}(\psi, a, \beta) &= \left\langle \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu, \psi(a) \right\rangle \\ &= \left\langle \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu, b_1 \right\rangle. \end{aligned}$$

Tendo em vista as expressões acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu &= \sum_{i=1}^{n+2} \left\langle \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu, b_i \right\rangle b_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial \beta}(\psi, a, \beta) b_1 + \frac{1}{\beta} \sum_{i=2}^{n+2} DF(\psi, a, \beta)(\psi \cdot K_i) b_i. \end{aligned} \tag{2.10}$$

A partir da expressão (2.10) decorre a seguinte estimativa:

$$\left| \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_{a_j} d\mu \right| \leq \varepsilon_j + \frac{\varepsilon_j}{\beta_j}.$$

Como Λ é compacto, podemos assumir sem perda de generalidade que $(\psi_j, a_j) \rightarrow (\psi, a)$ em Λ . Então,

$$\left| \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_{a_j} d\mu \right| \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left(\varepsilon_j + \frac{\varepsilon_j}{\beta_j} \right) = 0.$$

Portanto, existe $a \in \mathbb{S}^{n+1}$ tal que $\int_{\Sigma} (|A|^2 - n) g_a d\mu = 0$. Podemos repetir o argumento anterior e obter novamente uma contradição, concluindo o resultado desejado. \square

Para apresentarmos o nosso primeiro corolário, relembramos o conceito de índice fraco apresentado na Subseção 1.2.1.

Corolário 2.3.1. *Não existe hipersuperfície mínima compacta dois-lados no espaço projetivo real $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ com curvatura escalar constante e índice fraco um.*

Demonstração. Como a curvatura escalar é constante, a primeira autofunção é $\varphi_1 = 1$. Usando $\int_{\Sigma} \varphi_j d\mu = \int_{\Sigma} \varphi_1 \varphi_j d\mu = 0$ para qualquer autofunção φ_j de Q com $j \geq 2$ e aplicando a Fórmula de Rayleigh, vemos que os autovalores de Q e $Q_w := Q|_{\mathcal{F}}$, satisfazem $\lambda_j = \lambda_{j-1}^w$ para todo $j \geq 2$, onde $\mathcal{F} = \{u \in C^\infty(\Sigma); \int_{\Sigma} u d\mu = 0\}$. Portanto, $\text{Ind}(\Sigma) = \text{Ind}_w(\Sigma) + 1$.

Segue diretamente do Teorema 2.3.2 que não existe hipersuperfície mínima compacta dois-lados conexa com índice fraco 1 e curvatura escalar constante. É fácil notar que essa conclusão de não existência continua valendo sem a hipótese de conexidade, pois esse caso só seria possível se houvesse a união de componentes conexas fracamente estáveis com uma componente conexa de índice fraco 1. \square

Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima compacta orientável com curvatura escalar constante. Aplicando o resultado de Simons em [62], vemos que não é possível ter $|A|^2$ satisfazendo $0 < |A|^2 < n$. É bem conhecido que o caso $|A|^2 \equiv 0$ apresenta $\text{Ind}(\Sigma) = 1$ e o caso $|A|^2 \equiv n$ implica em $\text{Ind}(\Sigma) = n + 3$. Quando $|A|^2 > n$, o Teorema principal em [10] afirma que $\text{Ind}(\Sigma) \geq 2n + 5$, pois Q é negativa definida no subespaço de funções

$$V = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma) : u = t \cdot 1 + \langle x, a \rangle + \langle N, b \rangle, \forall a, b \in \mathbb{R}^{n+2}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

o qual tem dimensão $2n + 5$.

O nosso próximo corolário melhora essa cotação do índice exigindo-se duas novas hipóteses.

Corolário 2.3.2. *Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima não totalmente geodésica compacta orientável. Suponha que sua curvatura escalar seja constante e que seu campo vetorial unitário normal N seja ímpar. Se Σ for antipodalmente invariante e não for uma hipersuperfície de Clifford, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq 2n + 7$.*

Demonstração. Pelas hipóteses do enunciado, $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ é localmente congruente a uma imersão isométrica de uma hipersuperfície mínima compacta dois-lados $\tilde{x} : \tilde{\Sigma} \rightarrow \mathbb{RP}^{n+1}$ com curvatura escalar constante. Aplicando o Teorema 2.3.1, obtemos $\text{Ind}(\tilde{\Sigma}) \geq 3$. Logo, existem pelo menos três autofunções pares associadas a autovalores negativos de J , que denotaremos por $\tilde{\varphi}_1 \equiv 1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3 \in C^\infty(\tilde{\Sigma})$. Mostraremos que as autofunções $\tilde{\varphi}_2$ e $\tilde{\varphi}_3$ aumentam a instabilidade de Σ . De fato, as funções $\tilde{\varphi}_j \langle x, a \rangle$ e $\tilde{\varphi}_j \langle N, a \rangle$ serem ímpares, junto a Σ ser antipodalmente invariante, implicam em $\int_\Sigma \tilde{\varphi}_j \langle x, a \rangle d\mu = 0$ e $\int_\Sigma \tilde{\varphi}_j \langle N, a \rangle d\mu = 0$ para todo $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ e $j = 2, 3$. Portanto, as autofunções $\tilde{\varphi}_2$ e $\tilde{\varphi}_3$ são ortogonais a $V = \text{span}\{1, \langle N, a \rangle, \langle x, b \rangle : a, b \in \mathbb{R}^{n+2}\}$. Isso é suficiente para concluirmos que J é negativa definida em $V \oplus \langle \{\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3\} \rangle$. Como $\dim V = 2n + 5$, segue que $\text{Ind}(\Sigma) \geq 2n + 7$. \square

Capítulo 3

LACUNA NO ÍNDICE DE MORSE DE HIPERSUPERFÍCIES NO PRODUTO FINITO DE ESFERAS

3.1 Caso 1: Produto de duas esferas

3.1.1 Resultados preliminares

Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima fechada em $M^{n+1} := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 + n_2 = n + 1 \geq 3$ e $r_1^2 + r_2^2 = r^2$. Denotaremos por $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ a imersão isométrica e suporemos que $n_1 \geq n_2$. Para simplificar a notação ao longo da seção, também denotaremos $\lambda_1 := \frac{1}{r} \frac{r_2}{r_1}$ e $\lambda_2 := -\frac{1}{r} \frac{r_1}{r_2}$.

Lidaremos com a seguinte configuração:

- $x_j : \mathbb{S}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j+1}$ são as imersões triviais; ou seja, x_j é o vetor posição de \mathbb{S}^{n_j} em \mathbb{R}^{n_j+1} .
- Imersão isométrica $\Sigma \rightarrow M$ com vetor normal unitário N .
- Imersão isométrica $M \rightarrow \mathbb{S}^{n+2}(r)$ com vetor normal unitário $\eta = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$.
- Imersão isométrica $\mathbb{S}^{n+2}(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+3}$ com vetor normal unitário $\nu = \frac{1}{r}(x_1, x_2)$.
- $x = (x_1, x_2) : \Sigma \rightarrow M \rightarrow \mathbb{S}^{n+2}(r) \rightarrow \mathbb{R}^{n+3}$.

Lema 3.1.1. *Seja Σ uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \subset \mathbb{R}^{n+3}$. O Laplaciano do vetor posição $x = (x_1, x_2)$ é dado por*

$$\Delta x = - \left(\lambda_1 (n_1 - |N_1|^2) + \lambda_2 (n_2 - |N_2|^2) \right) \eta - \frac{n}{r} \nu.$$

Demonstração. O passo inicial será escolher dois referenciais ortonormais apropriados em M . O primeiro referencial é da forma $E = \{e_1, \dots, e_n, N\}$, onde e_1, \dots, e_n são tangentes a Σ .

Para definir o segundo, identificamos os vetores $a \in \mathbb{R}^{n_1+1}$ e $b \in \mathbb{R}^{n_2+1}$, respectivamente, com $(a, 0)$ e $(0, b) \in \mathbb{R}^{n_1+1} \times \mathbb{R}^{n_2+1}$. Em seguida, tome os referenciais ortonormais $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n_1}\}$ em $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ e $\{\bar{e}_{n_1+1}, \dots, \bar{e}_{n_1+n_2}\}$ em $\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$. Finalmente, consideramos o referencial em M dado por $\bar{E} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n_1}, \bar{e}_{n_1+1}, \dots, \bar{e}_{n_1+n_2}\}$.

Dado qualquer vetor $a \in \mathbb{R}^{n+3}$ não nulo, um cálculo direto nos dá o gradiente

$$\nabla \langle x, a \rangle = a^\top = a - \langle N, a \rangle N - \langle \eta, a \rangle \eta - \frac{1}{r^2} \langle x, a \rangle x.$$

A Hessiana de $\langle x, a \rangle$ é

$$\begin{aligned} \text{Hess}\langle x, a \rangle(X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_X a^\top, Y \rangle \\ &= -\langle N, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle - \langle \eta, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle - \frac{1}{r^2} \langle x, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X x, Y \rangle \\ &= \langle N, a \rangle \langle AX, Y \rangle - \langle \eta, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X \eta, Y \rangle - \frac{1}{r^2} \langle x, a \rangle \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Para obter $\Delta\langle x, a \rangle$ será necessário calcular os traços de cada termo acima em relação ao referencial mais adequado. Desta forma, o primeiro e o terceiro traço serão feitos em relação ao referencial E , enquanto o segundo traço será tomado em relação a \bar{E} .

- $\sum_{j=1}^n \langle Ae_j, e_j \rangle = H = 0$ e $\sum_{j=1}^n \langle e_j, e_j \rangle = n$.
- $\sum_{j=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{\bar{e}_j} \eta, \bar{e}_j \rangle - \langle \bar{\nabla}_N \eta, N \rangle = \lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 - \lambda_1 |N_1|^2 - \lambda_2 |N_2|^2 = \lambda_1 (n_1 - |N_1|^2) + \lambda_2 (n_2 - |N_2|^2)$.

Portanto,

$$\Delta\langle x, a \rangle = - \left(\lambda_1 (n_1 - |N_1|^2) + \lambda_2 (n_2 - |N_2|^2) \right) \langle \eta, a \rangle - \frac{n}{r} \langle \nu, a \rangle.$$

□

Segue diretamente do Lema 3.1.1 que:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= - \left(\lambda_1 (n_1 - |N_1|^2) + \lambda_2 (n_2 - |N_2|^2) \right) \lambda_1 x_1 - \frac{n}{r^2} x_1 \\ &= \left(-\frac{r_2^2}{r^2 r_1^2} (n_1 - |N_1|^2) + \frac{1}{r^2} (n_2 - |N_2|^2) - \frac{n}{r^2} \right) x_1 \\ &= \left(-\frac{r_2^2}{r^2 r_1^2} (n_1 - |N_1|^2) - \frac{1}{r^2} (n_1 - |N_1|^2) \right) x_1 \\ &= -\frac{1}{r_1^2} (n_1 - |N_1|^2) x_1. \end{aligned}$$

Tendo em vista que

$$\text{Ric}(N, N) = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} |N_1|^2 + \frac{n_2 - 1}{r_2^2} |N_2|^2,$$

concluimos que o operador de Jacobi aplicado em x_1 é

$$\begin{aligned}
Jx_1 &= \Delta x_1 + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)x_1 \\
&= \left(-\frac{1}{r_1^2}(n_1 - |N_1|^2) + \frac{n_1 - 1}{r_1^2}|N_1|^2 + \frac{n_2 - 1}{r_2^2}|N_2|^2 + |A|^2 \right) x_1 \\
&= \left(\frac{n_1}{r_1^2}(|N_1|^2 - 1) + \frac{n_2 - 1}{r_2^2}|N_2|^2 + |A|^2 \right) x_1 \\
&= \left(|N_2|^2 \left(\frac{n_2 - 1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2} \right) + |A|^2 \right) x_1 \\
&= (C_1|N_2|^2 + |A|^2)x_1,
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \frac{n_2 - 1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2}$ é uma constante. De maneira análoga, podemos verificar que $\Delta x_2 = -\frac{1}{r_2^2}(n_2 - |N_2|^2)x_2$ e $Jx_2 = (C_2|N_1|^2 + |A|^2)x_2$, com a constante $C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2}$.

3.1.2 Principais resultados no caso 1

Proposição 3.1.1. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, com $n_1 \geq n_2 \geq 2$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Valem as seguintes afirmações:*

(I): *Suponha que $|A|^2 \geq -C_1|N_2|^2$ sobre Σ . Se $|A|^2 > -C_1|N_2|^2$ em algum ponto $p_1 \in \Sigma$, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_1 + 1$.*

(II): *Suponha que $|A|^2 \geq -C_2|N_1|^2$ sobre Σ . Se $|A|^2 > -C_2|N_1|^2$ em algum ponto $p_2 \in \Sigma$, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_2 + 1$.*

Demonstração. Dado um vetor $a \in \mathbb{R}^{n_1+1}$ não nulo, consideraremos a função teste f_a definida por $f_a := \langle x_1, a \rangle$.

• $f_a \not\equiv 0$ sobre qualquer bola aberta B em Σ :

$f_a \equiv 0$ em B implica que $\Phi(B)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{S}^{n_1-1}(t) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ para algum $0 \leq t \leq r_1$. Pela minimalidade de Σ , deve ocorrer a igualdade $t = r_1$. Segue que Σ é totalmente geodésica com $N_2 \equiv 0$, isto gera a contradição $(C_1|N_2|^2 + |A|^2)f_a^2 \equiv 0$ sobre Σ . Note que $C_1|N_2|^2 + |A|^2 > 0$ sobre uma bola aberta $B = B(p_1, r)$ com r suficientemente pequeno. Uma vez que $f_a \not\equiv 0$ sobre B , temos

$$\int_B (C_1|N_2|^2 + |A|^2)f_a^2 d\mu > 0, \forall a \in \mathbb{R}^{n_1+1}.$$

Agora, podemos definir

$$\delta := \max_{a \in \mathbb{R}^{n_1+1}, |a|=1} - \int_B (C_1|N_2|^2 + |A|^2)f_a^2 d\mu < 0.$$

Assim como foi enunciado na Proposição 1.4.1, para cada $\varepsilon > 0$, podemos construir uma função de corte ϕ_ε de modo que $\phi_\varepsilon \equiv 1$ em B , $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$ e $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

Sejam $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_1}$ as primeiras n_1 autofunções de J , e considere a transformação linear $\Psi : \mathbb{R}^{n_1+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ definida por

$$\Psi(a) = \left(\int_\Sigma \rho_1 \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu, \int_\Sigma \rho_2 \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu, \dots, \int_\Sigma \rho_{n_1} \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu \right).$$

Um simples fato da álgebra linear mostra que $\ker(\Psi) \geq 1$ e então existe um vetor unitário $a \in \mathbb{R}^{n_1+1} \setminus \{0\}$ tal que a função teste $\phi_\varepsilon f_a$ é ortogonal a ρ_j , para todo $j \leq n_1$, no sentido L^2 . Suponha, por absurdo, que $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_1$. Esta suposição implica em $I := \int_\Sigma (\phi_\varepsilon f_a) \cdot J(\phi_\varepsilon f_a) d\mu \geq 0$. Porém, temos

$$\begin{aligned} I &:= - \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \cdot [\Delta(f_a \phi_\varepsilon) + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) f_a \phi_\varepsilon] d\mu \\ &= - \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \cdot [\phi_\varepsilon J(f_a) + f_a \Delta \phi_\varepsilon + 2\langle \nabla f_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle] d\mu \\ &= - \int_\Sigma \phi_\varepsilon^2 f_a J(f_a) d\mu - \int_\Sigma f_a^2 \phi_\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon d\mu - 2 \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \langle \nabla f_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle d\mu \\ &\leq - \int_B f_a J(f_a) d\mu + C_1 \int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu + C_2 \int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon| d\mu \\ &\leq \delta + C_1 \varepsilon + C_2 \text{vol}(\Sigma)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \delta + C_3(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Uma vez que δ e C_3 são constantes, ao tomarmos ε suficientemente pequeno temos a contradição $I < 0$. Logo, $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_1 + 1$.

De maneira análoga, podemos demonstrar a parte (II). □

Quando $\frac{n_1-1}{r_1^2} \neq \frac{n_2-1}{r_2^2}$, as únicas hipersuperfícies totalmente geodésicas em $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ são

$$\Sigma_1 = \begin{cases} \mathbb{S}^{n_1-1}(r_1) \times \mathbb{S}^1(mr_2) & \text{for } n_1 > n_2 = 1; \\ \mathbb{S}^{n_1-1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) & \text{for } n_1 \geq n_2 \geq 2. \end{cases}$$

e

$$\Sigma_2 = \begin{cases} \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \{q\} & \text{for } n_1 > n_2 = 1; \\ \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2-1}(r_2) & \text{for } n_1 \geq n_2 \geq 2. \end{cases}$$

Para mais detalhes, veja a demonstração de Lema 2.3 e Lema 2.5 em [25]. No restante da

seção suporemos que vale $\frac{n_1-1}{r_1^2} \neq \frac{n_2-1}{r_2^2}$.

Exemplo 3.1.1. *Calcularemos os índices de Σ_1 e Σ_2 , pois tais hipersuperfícies serão importantes nas classificações dadas nas próximas proposições:*

• *Índice de Σ_1 :*

O operador de Jacobi é $J = \Delta + \frac{n_1 - 1}{r_1^2}$, cujos dois primeiros autovalores são $\lambda_1^J = -\frac{n_1 - 1}{r_1^2} < 0$ e $\lambda_2^J = \min\{0, -C_2\}$. De fato, o segundo autovalor de Δ (e de J) está associado a x_1 ou x_2 , sendo que $Jx_1 = 0$ e $Jx_2 = C_2x_2$. Note que o espaço vetorial $V := \{\langle x_2, a \rangle; a \in \mathbb{R}^{n_2+1}\}$ tem dimensão $n_2 + 1$ e está contido no autoespaço associado ao autovalor $-C_2$. Logo,

$\text{Ind}(\Sigma_1) = 1$ quando $C_2 \leq 0$; ou $\text{Ind}(\Sigma_1) \geq n_2 + 2$ quando $C_2 > 0$.

• *Índice de Σ_2 :*

O operador de Jacobi é $J = \Delta + \frac{n_2 - 1}{r_2^2}$, cujos dois primeiros autovalores são $\lambda_1^J = -\frac{n_2 - 1}{r_2^2} \leq 0$ e $\lambda_2^J = \min\{0, -C_1\}$, pois $Jx_1 = C_1x_1$ e $Jx_2 = 0$. Logo, $\text{Ind}(\Sigma_2) = 0$ quando $n_2 = 1$; ou $\text{Ind}(\Sigma_2) = 1$ quando $C_1 \leq 0$; ou $\text{Ind}(\Sigma_2) > n_1 + 2$ quando $C_1 > 0$.

Se $n_2 > 1$, pelo menos um dos toros Σ_1 ou Σ_2 terá índice 1, pois $C_1 + C_2 = -\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} < 0$.

Juntando os resultados na Proposição 3.1.1 com a análise feita no Exemplo 3.1.1, podemos demonstrar o Teorema principal desta seção.

Teorema 3.1.2. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável com $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_1$ em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 \geq n_2 \geq 1$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Valem as seguintes classificações:*

(I): *Se $C_1 = \frac{n_2 - 1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2} > 0$, então $\Sigma = \Sigma_1$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_1) = 1$.*

(II): *Se $C_1 = 0$, então $\Sigma = \Sigma_1$ ou $\Sigma = \Sigma_2$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_1) = \text{Ind}(\Sigma_2) = 1$.*

Demonstração. • A hipótese $C_1 > 0$ implica em $|A|^2 \geq -C_1|N_2|^2$ sobre Σ . De acordo com a Proposição 3.1.1, a única maneira de termos $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_1$ é quando $|A|^2 \equiv 0$ e $|N_2|^2 \equiv 0$; isto é, $\Sigma = \Sigma_1$.

Por outro lado, $C_2 = -\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} - C_1 < 0$ implica que $\text{Ind}(\Sigma_1) = 1$.

• De maneira análoga ao item anterior, a hipótese $C_1 = 0$ implica que $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_1$ é possível somente quando Σ é totalmente geodésica. Além disso, $C_1 = 0$ e $C_2 < 0$ implicam que $\text{Ind}(\Sigma_1) = \text{Ind}(\Sigma_2) = 1$. □

De maneira análoga podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável com $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_2$ em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 \geq n_2 \geq 1$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Valem as seguintes classificações:*

(I): *Se $C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2} > 0$, então $\Sigma = \Sigma_2$.*

(II): *Se $C_2 = 0$, então $\Sigma = \Sigma_1$ ou $\Sigma = \Sigma_2$.*

Um caso particular onde ocorre $C_2 \geq 0$ é quando $n_1 > n_2$ e $r_1 \leq r_2$.

Apresentaremos duas consequências interessantes do Teorema 3.1.2:

- Considere a família sob um parâmetro $M_t = \mathbb{S}^1(t) \times \mathbb{S}^n(r)/G$, onde G é um grupo de isometrias agindo livremente em $\mathbb{S}^n(r)$. Para cada t , sabemos que $\Sigma_1 = \{p\} \times \mathbb{S}^n(r)/G$ é a única hipersuperfície mínima fechada estável em M_t . Conforme o Teorema 3.1.2, se $t > \sqrt{\frac{r^2}{n-1}}$ não haverá hipersuperfície mínima fechada em M_t com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ e $\text{Ind}(\Sigma) = 1$. Enquanto para $t = \sqrt{\frac{r^2}{n-1}}$, temos $\Sigma_2 = \mathbb{S}^1(t) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)/G$ como a única hipersuperfície mínima fechada em M_t com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ e índice 1.
- Considere $M_t = \mathbb{S}^{n_1}(t) \times \mathbb{S}^{n_2}(r)/G$, onde G é um grupo de isometrias agindo livremente em $\mathbb{S}^{n_2}(r)$. Segundo o Teorema 3.1.2, se $t > \sqrt{\frac{n_1 r^2}{n_2 - 1}}$ então $\Sigma_1 = \mathbb{S}^{n_1-1}(t) \times \mathbb{S}^n(r)/G$ será a única hipersuperfície mínima fechada em M_t com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ e $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_1$, sendo que $\text{Ind}(\Sigma_1) = 1$. Enquanto para $t = \sqrt{\frac{n_1 r^2}{n_2 - 1}}$, temos também $\Sigma_2 = \mathbb{S}^{n_1}(t) \times \mathbb{S}^{n-1}(r)/G$ com índice 1.

Observação 3.1.1. *Dada qualquer hipersuperfície $\Sigma \subset M$ não totalmente geodésica satisfazendo as condições nos Teoremas 3.1.2 e 3.1.3, não garantimos que $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_2 + 1$ somente quando ocorre $C_1 = \frac{n_2 - 1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2} < 0$ e $C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2} < 0$; ou seja,*

$$r_1 \sqrt{\frac{n_2 - 1}{n_1}} < r_2 < r_1 \sqrt{\frac{n_2 + 1}{n_1}}.$$

3.1.3 Cilindros no produto de esferas

Nesta subseção introduzimos a noção de cilindro e apresentamos várias estimativas do índice de Morse.

Definição 3.1.1. Dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma \subset M$ é um **cilindro** quando $\Sigma = \Gamma_1 \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ ou $\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \Gamma_2$, onde Γ_i é uma hipersuperfície mínima fechada orientável em $\mathbb{S}^{n_i}(r_i)$, $i \in \{1, 2\}$.

Como foi observado por Urbano e Torralbo em [66], dada uma imersão mínima (possivelmente com codimensão maior que um) $\Phi := \Phi_1 \times \Phi_2 : \Gamma_1 \times \Gamma_2 \rightarrow M_1 \times M_2$ e um campo normal $N \in \mathfrak{X}^\perp(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$, para qualquer $(p, q) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ temos que

$$N(p, q) = (N_1(p, q), N_2(p, q)) := ((N_1)_q(p), (N_2)_p(q)).$$

Note que $(N_1)_q \in \mathfrak{X}^\perp(\Gamma_1)$ para qualquer $q \in \Gamma_2$, e que $(N_2)_p \in \mathfrak{X}^\perp(\Gamma_2)$ para qualquer $p \in \Gamma_1$. Além disso, segue diretamente do Teorema de Fubini que

$$Q(N) = \int_{\Gamma_1} Q_2((N_2)_p) d\mu_1 + \int_{\Gamma_2} Q_1((N_1)_q) d\mu_2$$

onde Q, Q_1 e Q_2 são as formas quadráticas associadas ao índice em Φ, Φ_1 e Φ_2 , respectivamente.

Corolário 3.1.1. Seja Σ um cilindro não totalmente geodésico em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde $n_1 \geq n_2 \geq 2$.

(I): Se $\Sigma = \Gamma_1 \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$, onde Γ_1 é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n_1-3}(\text{sing } \Gamma_1) = 0$, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_1 + 1$.

(II): Se $\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \Gamma_2$, onde Γ_2 é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n_2-3}(\text{sing } \Gamma_2) = 0$, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_2 + 1$.

Demonstração. **(I):** Dada uma função $f \in C^\infty(\Gamma_1)$, podemos definir a função $\tilde{f} \in C^\infty(\Sigma)$ por $\tilde{f}(p, q) := f(p)$. Trazendo a discussão acima para o contexto de hipersuperfícies, obtemos

$$Q(\tilde{f}) = Q_1(f) \cdot \text{vol}(\mathbb{S}^{n_2}(r_2)) \quad \forall f \in C^\infty(\Gamma_1).$$

Logo, o índice de Σ em M é maior ou igual ao índice de Γ_1 em $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$. Concluimos observando que qualquer hipersuperfície mínima fechada orientável não totalmente geodésica Γ em $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ com $\mathcal{H}^{n_1-3}(\text{sing } \Gamma) = 0$ tem índice maior ou igual que $n_1 + 1$.

A demonstração de **(II)** é análoga. □

A próxima proposição nos permite deduzir uma lacuna maior que o Corolário 3.1.1 quando exigimos uma condição a mais no ambiente M .

Proposição 3.1.4. *Suponha que $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ cumpra a condição $C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2} = 0$. Seja Σ um cilindro não totalmente geodésico em M da forma $\Sigma = \Gamma_1 \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ que é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 3$.*

Demonstração. Dado $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^{n_1+1} \times \mathbb{R}^{n_2+1}$, definimos a função teste $f_a : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_a := \langle x, a \rangle = \langle x_1, a_1 \rangle + \langle x_2, a_2 \rangle$. Segue que $Jf_a = (C_1|N_2|^2 + |A|^2) \langle x_1, a_1 \rangle + (C_2|N_1|^2 + |A|^2) \langle x_2, a_2 \rangle = |A|^2 f_a$. Além disso, para cada $\varepsilon > 0$ construímos uma função de corte ϕ_ε satisfazendo $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$ e $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

• $f_a \neq 0$ sobre Σ , $\forall a \in \mathbb{R}^{n+3}$:

Fixado $a = (a_1, a_2)$, escolha $p \in \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ de modo que $\langle x_2(p), a_2 \rangle = 0$. Então: $f_a \equiv 0$ sobre $\Sigma \implies f_a \equiv 0$ em $\Gamma_1 \times \{p\} \implies \langle x_1, a_1 \rangle = 0$ em $\Gamma_1 \implies \Gamma_1$ é um equador totalmente geodésico de $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$. Contradizendo a suposição de que Σ não é totalmente geodésica.

Sejam $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+2}$ as primeiras $n+2$ autofunções de J , considere a transformação linear $\Psi : \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ definida por

$$\Psi(a) = \left(\int_\Sigma \rho_1 \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu, \int_\Sigma \rho_2 \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu, \dots, \int_\Sigma \rho_{n+2} \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu \right).$$

Usando um fato simples da álgebra linear temos $\ker(\Psi) \geq 1$ e então existe $a \in \mathbb{R}^{n+3}$ tal que a função teste $\phi_\varepsilon f_a$ é ortogonal a ρ_j , $\forall j \leq n+2$, no sentido de L^2 . Tomemos um conjunto aberto B em Σ tal que $f_a \neq 0$, $|A|^2 \neq 0$ e $\phi_\varepsilon \equiv 1$ em B .

Suponha, por absurdo, que $\text{Ind}(\Sigma) \leq n+2$. Então $I := - \int_\Sigma (\phi_\varepsilon f_a) \cdot J(\phi_\varepsilon f_a) d\mu \geq 0$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} I &:= - \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \cdot [\phi_\varepsilon J(f_a) + f_a \Delta \phi_\varepsilon + 2\langle \nabla f_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle] d\mu \\ &= - \int_\Sigma |A|^2 \phi_\varepsilon^2 f_a^2 d\mu - \int_\Sigma f_a^2 \phi_\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon d\mu - 2 \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \langle \nabla f_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle d\mu \\ &\leq - \int_B |A|^2 f_a^2 d\mu + C_1 \int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu + C_2 \int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon| d\mu \\ &\leq \delta + C_1 \varepsilon + C_2 \text{vol}(\Sigma)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \delta + C_3(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Tendo em vista que $\delta := - \int_B |A|^2 f_a^2 d\mu < 0$ e C_3 são constantes, podemos tomar ε pequeno o suficiente para haver a contradição $I < 0$. Portanto, $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 3$. \square

Observação 3.1.2. *Observe que a condição $C_2 = 0$ sempre ocorre se $r_1 = r_2$ e $n_1 = n_2 + 1$. Um resultado semelhante ao anterior também vale quando $C_1 = 0$ e $\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \Gamma_2$.*

Observação 3.1.3. *Demonstramos que qualquer cilindro da forma $\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \Gamma_2$ não totalmente geodésico tem índice de Morse maior que $n_2 + 2$. Além disso, vale $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_1 + 1$ sempre que $C_1 \geq 0$. Agora, suponha que $C_1 < 0$ e o operador de forma A_2 de Γ_2 em $\mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ satisfaz a desigualdade $|A_2|^2 > -C_1$. Neste caso, também vale que $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_1 + 1$. De fato,*

$$|A|^2 \geq |A_2|^2 > -C_1 \geq -C_1 |N_2|^2$$

e basta aplicarmos a Proposição 3.1.1. Devido ao resultado de Simons em [62], é bem conhecido que $|A_2|^2 \geq n_2 - 1$ em algum ponto quando Γ_2 não é totalmente geodésica. Em particular, a condição $|A_2|^2 \geq n_2 - 1$ é satisfeita sempre que Γ_2 tem curvatura escalar constante, pois isso equivale a $|A_2|^2$ ser constante. Logo, ocorre $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_1 + 1$ sempre que $C_1 > 1 - n_2$ e Γ_2 tem curvatura escalar constante.

3.1.4 Larguras do produto de duas esferas

Nesta subseção, usamos a lacuna do índice de Morse obtido na subseção anterior para deduzir o valor das larguras do produto de duas esferas para um valor do parâmetro dependendo das dimensões n_1 e n_2 destas esferas.

Seja M^{n+1} uma variedade Riemanniana fechada. A definição da k -largura de M , para cada $k \in \mathbb{N}$, envolve muitas terminologias e notações em teoria geométrica da medida e teoria min-max. Indicamos [63] e [40] para mais detalhes à respeito dos conceitos e definições que usaremos sobre teoria geométrica da medida e topologia algébrica, respectivamente. Também sugerimos os artigos [49], [47], [43] e [72]. Definiremos o conceito de largura analogamente a [50].

Supomos que M é isometricamente mergulhada em algum espaço euclidiano \mathbb{R}^N e consideramos o espaço $\mathcal{I}_l(M; \mathbb{Z}_2)$ das cadeias planas módulo 2 l -dimensionais em \mathbb{R}^N com suporte contido em M . Um elemento típico deste espaço é uma soma finita formal $c = \sum_{i=1}^m S_i$ de C^1 subvariedades compactas S_i (não orientadas) contidas em M . Existe um operador fronteira ∂ , tomando valores no espaço de $(l-1)$ -cadeias mod 2, que no caso acima dá $\partial c = \sum_{i=1}^m \partial S_i$. Claro que $\partial \circ \partial = 0$. Cada elemento $T \in \mathcal{I}_l(M; \mathbb{Z}_2)$ tem

uma massa $M(T)$, que mede a área l -dimensional, e a topologia natural é induzida pela distância plana:

$$\mathcal{F}(T_1, T_2) := \inf\{M(S) + M(U) : T_1 - T_2 = S + \partial U, S \in \mathcal{I}_l, U \in \mathcal{I}_{l+1}\}.$$

Nosso espaço de l -ciclos é então definido como

$$\mathcal{Z}_l(M; \mathbb{Z}_2) := \{T \in \mathcal{I}_l(M; \mathbb{Z}_2) : \partial T = 0\}$$

dotado da topologia plana.

Em 1965, Almgren desenvolveu uma teoria min-max para o funcional área. Dada uma classe de homotopia não trivial Π do espaço $\mathcal{Z}_l(M, \mathbb{Z}_2)$, ele definiu o número min-max

$$L(\Pi) := \inf_{\phi \in \Pi} \sup_{x \in I^k} M(\phi(x)),$$

onde I^k denota o cubo unitário. Dizemos que $L(\Pi)$ é a largura de Π .

Almgren [5] provou o seguinte teorema:

Teorema 3.1.5. *Se Π não é trivial, então $L(\Pi) > 0$. Além disso, existe uma variedade mínima l -dimensional (varifold integral estacionária de dimensão l) V tal que*

$$M(V) = L(\Pi).$$

Definição 3.1.2. *Seja X um complexo simplicial de dimensão finita. Uma aplicação contínua $\Psi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M^{n+1}, \mathbb{Z}_2)$ é chamada de k -varredura se o homomorfismo induzido em homologia*

$$\Psi_* : H_k(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(\mathcal{Z}_n(M^{n+1}, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2)$$

é sobrejetivo.

Esta definição tem uma caracterização equivalente em termos de cohomologia. Seja $\bar{\lambda} \in H^1(\mathcal{Z}_n(M^{n+1}, \mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ o elemento não trivial. A aplicação $\Psi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M^{n+1}, \mathbb{Z}_2)$ será uma k -varredura quando a classe pullback

$$\lambda = \Psi_*(\bar{\lambda}) \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$$

satisfaz

$$\lambda^k \neq 0 \in H^k(X, \mathbb{Z}_2)$$

onde $\lambda^k = \lambda \cup \dots \cup \lambda$ denota o k -ésimo produto cup de λ .

Dizemos que X é k -admissível se existe uma k -varredura $\Psi : X \rightarrow \mathcal{Z}_n(M^{n+1}, \mathbb{Z}_2)$ que não tem concentração de massa, ou seja,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \{M(\Psi(x) \cap B_r(p)) : x \in X, p \in M\} = 0.$$

O conjunto de todas as k -varreduras Ψ que não têm concentração de massa é denotado por \mathcal{P}_k . Observe que dois mapas em \mathcal{P}_k podem ter domínios diferentes.

Aplicando a teoria min-max de Almgren-Pitts à classe \mathcal{P}_k , obtém-se uma sequência de números

$$\omega_k(M) := \inf_{\psi \in \mathcal{P}_k} \sup_{x \in \text{dmn}(\psi)} M(\psi(x)),$$

onde $\text{dmn}(\psi)$ denota o domínio de ψ . O número $\omega_k(M)$ é conhecido como a k -largura de M .

Para apresentar nossa aplicação precisamos do seguinte resultado:

Proposição 3.1.6 (Proposição 2.2 de [43]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana fechada $(n + 1)$ -dimensional com $3 \leq n + 1 \leq 7$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}^+$, existe uma coleção disjunta finita $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_N\}$ de hipersuperfícies mínimas fechadas, suaves e mergulhadas em M , e inteiros $\{m_1, \dots, m_N\}$ tais que*

$$\omega_k(M, g) = \sum_{i=1}^N m_i \text{vol}_g(\Sigma_i),$$

e

$$\sum_{i=1}^N \text{Ind}(\Sigma_i) \leq k.$$

Observação 3.1.4. *Como apontado por X. Zhou em [72, Observação 0.1], sob a suposição de curvatura de Ricci positiva, as multiplicidades são um, ou seja, $m_i = 1$.*

Recordamos também os seguintes resultados:

Proposição 3.1.7 (Teorema 4.7 de [41]). *Uma hipersuperfície fechada e mergulhada de uma variedade simplesmente conexa deve ser orientável.*

e

Proposição 3.1.8 ([35]). *Seja M^{n+1} uma variedade completa e conexa com curvatura de Ricci positiva. Sejam V^n e W^n hipersuperfícies mínimas imersas de M , cada uma imersa como um subconjunto fechado, e seja V compacto. Então V e W devem se intersectar.*

Usando as proposições anteriores e os Teoremas 3.1.2 e 3.1.3 provamos que

Teorema 3.1.9. *Seja $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ dotada da métrica de produto padrão g_0 . Suponha que $n_1 \geq n_2 \geq 2$ e $n_1 + n_2 \leq 7$. Então as larguras $\omega_1(M, g_0) = \dots = \omega_k(M, g_0)$ são iguais a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vol}_{g_0}(\Sigma_1) \quad \text{para} \quad C_1 = \frac{n_2 - 1}{r_2^2} - \frac{n_1}{r_1^2} > 0 \quad \text{e} \quad k = n_1; \\ \text{vol}_{g_0}(\Sigma_2) \quad \text{para} \quad C_2 = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_2}{r_2^2} > 0 \quad \text{e} \quad k = n_2. \end{array} \right.$$

Demonstração. Usando as proposições 3.1.6 e 3.1.8, como M tem curvatura de Ricci positiva, obtemos que

$$\omega_k(M, g_0) = \text{vol}_{g_0}(\Sigma),$$

onde Σ é hipersuperfície fechada, suave e mergulhada em M com $\text{Ind}(\Sigma) \leq k$. Usando a Proposição 3.1.7, Σ também é orientável. Agora o resultado segue dos Teoremas 3.1.2 e 3.1.3. \square

Uma hipersuperfície Σ^n em (M^{n+1}, g) é dita ter regularidade ótima quando seu conjunto de pontos singulares satisfaz $\mathcal{H}^s(\text{sing } \Sigma) = 0$ para todo $s > n - 7$. Em particular, quando $n \leq 6$, Σ é regular.

Para $n \geq 7$, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.10 (Corolário 1 em [46]). *Suponha que (M^{n+1}, g) é uma variedade Riemanniana fechada com curvatura de Ricci positiva. Então para qualquer $k \in \mathbb{N}^+$, existe uma hipersuperfície mínima conexa com regularidade ótima Σ e multiplicidade $m \leq 2$, tal que*

$$\omega_k(M, g) = m \cdot \text{vol}_g(\Sigma) \quad \text{e} \quad \text{Ind}(\Sigma) \leq k.$$

Segundo Y. Li em [46], é esperado que a multiplicidade m seja sempre igual a um. Observamos que a hipótese de Σ ter regularidade ótima é mais forte do que exigir $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$, então o próximo Teorema é uma consequência direta da Proposição 3.1.10 junto aos Teoremas 3.1.2 e 3.1.3,

Teorema 3.1.11. *Seja $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ dotada da métrica de produto padrão g_0 com $n_1 \geq n_2 \geq 2$.*

(I). *Se $C_1 > 0$, então cada uma das larguras $\omega_1(M, g_0), \dots, \omega_{n_1}(M, g_0)$ só pode assumir um dos valores*

$$\text{vol}_{g_0}(\Sigma_1) \text{ ou } 2 \text{vol}_{g_0}(\Sigma_1).$$

(II). *Se $C_2 > 0$, então cada uma das larguras $\omega_1(M, g_0), \dots, \omega_{n_2}(M, g_0)$ só pode assumir um dos valores*

$$\text{vol}_{g_0}(\Sigma_2) \text{ ou } 2 \text{vol}_{g_0}(\Sigma_2).$$

Concluimos esta subseção observando que o cálculo das k -larguras é um problema interessante na literatura e apenas para algumas variedades tais valores são conhecidos. Referenciamos ao leitor as seguintes obras [1], [11] e [30].

3.2 Caso 2: Produto finito de esferas

Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma imersão isométrica da hipersuperfície mínima fechada Σ^n em $M^{n+1} := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$, onde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n + 1$, assumamos que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$. Para simplificar a notação ao longo desta subseção, introduziremos as constantes $m_j := \left(\sum_{i=1}^j n_i\right) + j - 1$ e $R_j := \sum_{i=1}^j r_i^2$.

Lidaremos com a seguinte configuração:

- $x_j : \mathbb{S}^{n_j} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j+1}$ são as imersões triviais; ou seja, x_j é o vetor posição de \mathbb{S}^{n_j} em \mathbb{R}^{n_j+1} , para cada $j \in \{1, \dots, k\}$.
- $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$.
- Imersão isométrica $\Sigma \rightarrow M$ com vetor normal unitário N .
- Imersão isométrica $I_1 : \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \rightarrow \mathbb{S}^{m_2}(\sqrt{R_2})$ com vetor normal unitário $\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{R_2}} \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot x_1 - \frac{1}{\sqrt{R_2}} \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot x_2$.
- Imersão isométrica $I_j : \mathbb{S}^{m_j}(\sqrt{R_j}) \times \mathbb{S}^{n_{j+1}}(r_{j+1}) \rightarrow \mathbb{S}^{m_{j+1}}(\sqrt{R_{j+1}})$ com vetor normal unitário $\eta_j = \frac{1}{\sqrt{R_{j+1}}} \cdot \frac{r_{j+1}}{\sqrt{R_j}} \cdot \sum_{i=1}^j x_i - \frac{1}{\sqrt{R_{j+1}}} \cdot \frac{\sqrt{R_j}}{r_{j+1}} \cdot x_{j+1}$, para cada $j \in \{2, \dots, k-1\}$.
- Imersão isométrica $\mathbb{S}^{m_k}(\sqrt{R_k}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$ com vetor normal unitário $\nu = \frac{1}{\sqrt{R_k}} \cdot x$.

Lema 3.2.1. *Seja Σ uma hipersuperfície mínima de $\mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k) \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$. Dado qualquer vetor $a \in \mathbb{R}^{n+k+1}$ não nulo, o Laplaciano da função $\langle x_k, a \rangle$ é dado*

por

$$\Delta \langle x_k, a \rangle = -\frac{1}{r_k^2} (n_k - |N_k|^2) \langle x_k, a \rangle.$$

Demonstração. Começaremos escolhendo dois referenciais ortonormais apropriados sobre M .

O primeiro referencial é da forma $E = \{e_1, \dots, e_n, N\}$, onde e_1, \dots, e_n são tangentes a Σ .

Para definir o segundo referencial, identificamos os vetores $v \in \mathbb{R}^{n_j+1}$ com $(0, \dots, 0, v, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n_1+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_j+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_k+1} = \mathbb{R}^{n+k+1}$. Depois escolhemos os referenciais ortonormais $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n_1}\}$ sobre $\mathbb{S}^{n_1}(r_1)$ e $\{\bar{e}_{n_1+\dots+n_{j-1}+1}, \dots, \bar{e}_{n_1+\dots+n_j}\}$ sobre $\mathbb{S}^{n_j}(r_j)$, para cada $j \in \{2, \dots, k\}$. Por fim, consideramos o referencial sobre M dado por $\bar{E} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{n_1+\dots+n_k}\}$.

Um cálculo direto nos fornece o gradiente

$$\begin{aligned} \nabla \langle x_k, a \rangle &= a^T = a - \langle N, a \rangle N - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \eta_i, a \rangle \eta_i - \langle \nu, a \rangle \nu \\ &= a - \langle N, a \rangle N - \langle \eta_{k-1}, a \rangle \eta_{k-1} - \frac{1}{R_k} \langle x, a \rangle x. \end{aligned}$$

Lembrando que $\eta_{k-1} = \lambda_1 \sum_{i=1}^{k-1} x_i + \lambda_2 x_k$, onde $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{R_k}} \cdot \frac{r_k}{\sqrt{R_{k-1}}}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{R_k}} \cdot \frac{\sqrt{R_{k-1}}}{r_k}$.

A hessiana de $\langle x_k, a \rangle$ é

$$\begin{aligned} \text{Hess} \langle x_k, a \rangle (X, Y) &= \langle \bar{\nabla}_X a^T, y \rangle \\ &= -\langle N, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle - \langle \eta_{k-1}, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X \eta_{k-1}, Y \rangle - \frac{1}{R_k} \langle x, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X x, Y \rangle \\ &= \langle N, a \rangle \langle AX, Y \rangle - \langle \eta_{k-1}, a \rangle \langle \bar{\nabla}_X \eta_{k-1}, Y \rangle - \frac{1}{R_k} \langle x, a \rangle \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Para obtermos $\Delta \langle x_k, a \rangle$ calcularemos os traços de cada termo acima em relação ao referencial que seja mais apropriado. Desse modo, o primeiro e o terceiro traço serão tomados em relação ao referencial E , enquanto o segundo traço será tomado em relação a \bar{E} .

- $\sum_{i=1}^n \langle Ae_i, e_i \rangle = nH = 0$ e $\sum_{i=1}^n \langle e_i, e_i \rangle = n$.
- $\sum_{i=1}^{n+1} \langle \bar{\nabla}_{\bar{e}_i} \eta_{k-1}, \bar{e}_i \rangle - \langle \bar{\nabla}_N \eta_{k-1}, N \rangle = \lambda_1 (n_1 + \dots + n_{k-1}) + \lambda_2 n_k - \lambda_1 (|N_1|^2 + \dots + |N_{k-1}|^2) - \lambda_2 |N_k|^2$.

O Laplaciano assume a forma

$$\begin{aligned}
\Delta \langle x_k, a \rangle &= - \left[\lambda_1 (n_1 + \dots + n_{k-1} - |N_1|^2 - \dots - |N_{k-1}|^2) + \lambda_2 (n_k - |N_k|^2) \right] \lambda_2 \langle x_k, a \rangle \\
&\quad - \frac{n}{R_k} \langle x_k, a \rangle \\
&= - \frac{1}{R_k} \left[-(n_1 + \dots + n_{k-1} - |N_1|^2 - \dots - |N_{k-1}|^2) + \frac{R_{k-1}}{r_k^2} (n_k - |N_k|^2) + n \right] \langle x_k, a \rangle \\
&= - \frac{1}{R_k} \left[(n_k - |N_k|^2) + \frac{R_{k-1}}{r_k^2} (n_k - |N_k|^2) \right] \langle x_k, a \rangle \\
&= - \frac{1}{r_k^2} (n_k - |N_k|^2) \langle x_k, a \rangle.
\end{aligned}$$

□

Nosso próximo passo será calcular o operador de Jacobi aplicado na função teste $\langle x_k, a \rangle$. Uma vez que, a curvatura de Ricci é dada por

$$\text{Ric}(N, N) = \frac{n_1 - 1}{r_1^2} |N_1|^2 + \frac{n_2 - 1}{r_2^2} |N_2|^2 + \dots + \frac{n_k - 1}{r_k^2} |N_k|^2,$$

verifica-se diretamente que

$$\begin{aligned}
J \langle x_k, a \rangle &= \Delta \langle x_k, a \rangle + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) \langle x_k, a \rangle \\
&= \left(- \frac{1}{r_k^2} (n_k - |N_k|^2) + \frac{n_1 - 1}{r_1^2} |N_1|^2 + \frac{n_2 - 1}{r_2^2} |N_2|^2 + \dots + \frac{n_k - 1}{r_k^2} |N_k|^2 + |A|^2 \right) \langle x_k, a \rangle \\
&= \left(\frac{n_k}{r_k^2} (|N_k|^2 - 1) + \frac{n_1 - 1}{r_1^2} |N_1|^2 + \dots + \frac{n_{k-1} - 1}{r_{k-1}^2} |N_{k-1}|^2 + |A|^2 \right) \langle x_k, a \rangle \\
&= \left(|N_1|^2 \left(\frac{n_1 - 1}{r_1^2} - \frac{n_k}{r_k^2} \right) + \dots + |N_{k-1}|^2 \left(\frac{n_{k-1} - 1}{r_{k-1}^2} - \frac{n_k}{r_k^2} \right) + |A|^2 \right) \langle x_k, a \rangle \\
&= (C_{1,k} |N_1|^2 + \dots + C_{k-1,k} |N_{k-1}|^2 + |A|^2) \langle x_k, a \rangle,
\end{aligned}$$

onde cada $C_{i,j} := \frac{n_i - 1}{r_i^2} - \frac{n_j}{r_j^2}$ é constante. De maneira análoga, a menos de uma isometria comutando a ordem dos produtos cartesianos, podemos demonstrar que $\Delta \langle x_j, b \rangle = - \frac{1}{r_j^2} (n_j - |N_j|^2) \langle x_j, b \rangle$ e $J \langle x_j, b \rangle = \left(\sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2 + |A|^2 \right) \langle x_j, b \rangle$, para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ e todo $b \in \mathbb{R}^{n_j+1}$ não nulo.

Proposição 3.2.1. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$, com $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Suponha que $|A|^2 \geq - \sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2$ sobre Σ , para algum $j \in \{1, \dots, k\}$. Se $|A|^2 > - \sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2$ em algum ponto $p \in \Sigma$, então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_j + 1$.*

Demonstração. Dado um vetor $a \in \mathbb{R}^{n_j+1}$ não nulo, consideraremos a função teste f_a definida por $f_a := \langle x_j, a \rangle$.

• $f_a \not\equiv 0$ sobre qualquer bola aberta B em Σ :

$f_a \equiv 0$ em B implica que $\Phi(B)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{S}^1(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_j-1}(t) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$ para algum $0 \leq t \leq r_j$. Pela minimalidade de Σ , deve ocorrer a igualdade $t = r_j$. Segue que Σ é totalmente geodésica com $N_i \equiv 0 \quad \forall i \neq j$, isto gera a contradição $|A|^2 = 0 = -\sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2$ em p .

Note que $\sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2 + |A|^2 > 0$ sobre uma bola aberta $B = B(p, r)$ com r suficientemente pequeno. Como $f_a \not\equiv 0$ sobre B , temos que

$$\int_B \left(\sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2 + |A|^2 \right) f_a^2 d\mu > 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}^{n_j+1}.$$

Agora, podemos definir

$$\delta := \max_{a \in \mathbb{R}^{n_j+1}, |a|=1} - \int_B \left(\sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2 + |A|^2 \right) f_a^2 d\mu < 0.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, considere a função de corte ϕ_ε tal que $\phi_\varepsilon \equiv 1$ em B , $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$ e $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

Sejam $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n_j}$ as n_j primeiras autofunções de J , definimos a transformação linear $\Psi : \mathbb{R}^{n_j+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_j}$ por

$$\Psi(a) := \left(\int_\Sigma \rho_1 \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu, \int_\Sigma \rho_2 \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu, \dots, \int_\Sigma \rho_{n_j} \cdot (\phi_\varepsilon f_a) d\mu \right).$$

Uma vez que $\ker(\Psi) \geq 1$, existe $a \in \mathbb{R}^{n_j+1}$ unitário tal que a função teste $\phi_\varepsilon f_a$ é ortogonal a ρ_i , $\forall i \leq n_1$, no sentido de $L^2(\Sigma)$. Suponha, por absurdo, que $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_j$. Então $I := \int_\Sigma (\phi_\varepsilon f_a) \cdot J(\phi_\varepsilon f_a) \geq 0$. Porém, temos

$$\begin{aligned} I &:= - \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \cdot [\Delta(f_a \phi_\varepsilon) + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2) f_a \phi_\varepsilon] d\mu \\ &= - \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \cdot [\phi_\varepsilon J(f_a) + f_a \Delta \phi_\varepsilon + 2 \langle \nabla f_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle] d\mu \\ &= - \int_\Sigma \phi_\varepsilon^2 f_a J(f_a) d\mu - \int_\Sigma f_a^2 \phi_\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon d\mu - 2 \int_\Sigma f_a \phi_\varepsilon \langle \nabla f_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle d\mu \\ &\leq - \int_B f_a J(f_a) d\mu + C_1 \int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu + C_2 \int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon| d\mu \\ &\leq \delta + C_1 \varepsilon + C_2 \text{vol}(\Sigma)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \delta + C_3(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Como δ e C_3 são constantes, ao tomarmos ε suficientemente pequeno temos a contradição $I < 0$. Logo, $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_j + 1$. \square

Notação: Denotaremos por $\mathbb{T}_s^m(r)$ o produto de s esferas com dimensão m e raio r :

$$\mathbb{T}_s^m(r) := \mathbb{S}^m(r) \times \cdots \times \mathbb{S}^m(r) \quad [s \text{ vezes}].$$

Corolário 3.2.1. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{T}_s^n(r)$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável. Assuma que Σ^{sn-1} é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{sn-3}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Se $|A|^2 > \frac{1}{r^2}$ sobre Σ , então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 1$.*

Exemplo 3.2.1. *Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$, considere a hipersuperfície totalmente geodésica $\Sigma_j := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_j-1}(r_j) \times \cdots \times \mathbb{S}^k(r_k)$. Calcularemos o índice de cada Σ_j , pois estas hipersuperfícies serão importantes nas classificações dadas nas próximas proposições.*

O campo normal unitário sobre Σ_j é $N = N_j$. Logo, o operador de Jacobi sobre Σ_j é $J = \Delta + \frac{n_j - 1}{r_j^2}$, cujos dois primeiros autovalores são $\lambda_1^J = -\frac{n_j - 1}{r_1^2} \leq 0$ e $\lambda_2^J = \min_{i \neq j} \{0, -C_{j,i}\}$, pois $Jx_j = 0$ e $Jx_i = C_{j,i}x_i$. Note que o espaço vetorial $V_i := \{\langle x_i, b \rangle; b \in \mathbb{R}^{n_i+1}\}$ tem dimensão $n_i + 1$ e está contido no autoespaço associado ao autovalor $-C_{j,i}$. Logo:

- $\text{Ind}(\Sigma_j) = 1$ quando $C_{j,i} \leq 0 \quad \forall i \neq j$;
- ou $\text{Ind}(\Sigma_j) \geq (\sum_{i \in I} n_i + 1) + 1$, onde $I := \{i \neq j : C_{j,i} > 0\}$.

Vale observar que, fixados $i, j \in \{1, \dots, k\}$, pelo menos uma das constantes $C_{i,j}$ ou $C_{j,i}$ será negativa, pois $C_{i,j} + C_{j,i} = -\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_j^2} < 0$.

Proposição 3.2.2. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável em $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$. Suponha que para algum $j \in \{1, \dots, k\}$ vale $C_{i,j} > 0 \quad \forall i \neq j$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Se $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_j$, então $\Sigma = \Sigma_j$. Além disso, temos $\text{Ind}(\Sigma_j) = 1$ (quando $n_j \geq 2$) ou $\text{Ind}(\Sigma_j) = 0$ (quando $n_j = 1$).*

Demonstração. A hipótese $C_{i,j} \geq 0 \quad \forall i \neq j$ implica em $|A|^2 \geq -\sum_{i \neq j} C_{i,j} |N_i|^2$ sobre Σ . Segundo a Proposição 3.2.1, a única maneira de termos $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_j$ é quando $|A|^2 \equiv 0$ e $|N_j|^2 \equiv 1$; isto é, $\Sigma = \Sigma_j$.

Por hipótese, temos também $C_{j,i} < 0 \quad \forall i \neq j$. Logo, a conclusão de que $\text{Ind}(\Sigma_j) = 1$ segue diretamente do Exemplo 3.2.1 com $\lambda_2^J = \min_{i \neq j} \{0, -C_{j,i}\} = 0$. \square

Corolário 3.2.2. *Seja $\Phi : \Sigma \rightarrow M$ uma hipersuperfície mínima fechada orientável em $M^{n+1} = \mathbb{S}^m(r) \times \mathbb{T}(r)$, onde $\mathbb{T}(r) = \mathbb{S}^{n_1}(r) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r)$, com $n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq m + 1$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Então:*

- $\Sigma = \mathbb{S}^{m-1}(r) \times \mathbb{T}(r)$ tem índice de Morse igual a um (para $m \geq 2$) ou é estável (para $m = 1$);
- ou $\text{Ind}(\Sigma) \geq m + 1$.

Apresentaremos algumas consequências interessantes da Proposição 3.2.2:

- Considere $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$. Para cada $j \in \{1, \dots, k\}$ defina o conjunto $I_j := \{i \neq j : C_{i,j} < 0\}$. Se Σ é uma hipersuperfície mínima fechada em M com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ tal que $N_i \equiv 0 \ \forall i \in I_j$, então $\text{Ind}(\Sigma) > n_j$.
- Considere $M = \mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$ com $n_j > 1 \ \forall j \neq 1$. Pelo Exemplo 3.2.1, sabemos que $\Sigma_1 = \{p\} \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$ é a única hipersuperfície mínima fechada estável em M . Consoante a Proposição 3.2.2, se r_1 for suficientemente grande não haverá hipersuperfície mínima fechada em M com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ e $\text{Ind}(\Sigma) = 1$.
- Considere $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$ com $n_j > 1 \ \forall j$. Se r_k for suficientemente grande, então $\Sigma_k = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k-1}(r_k)$ será a única hipersuperfície mínima fechada em M com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ tal que $\text{Ind}(\Sigma) \leq n_k$. Além disso, $\text{Ind}(\Sigma_k) = 1$.
- Considere $M = \mathbb{S}^1(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^1(r_k)$. Se Σ é uma hipersuperfície mínima fechada em M com $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$ tal que $|A|^2 > \frac{1}{r_j^2}(1 - |N_j|^2)$ para algum $j \in \{1, \dots, k\}$, então $\text{Ind}(\Sigma) > 1$. Logo, as hipersuperfícies totalmente geodésicas em M são as únicas estáveis e qualquer hipersuperfície com índice 1 deve satisfazer $|A|^2 \leq \frac{1}{r_j^2}(1 - |N_j|^2)$ em uma bola B_j , para cada $j \in \{1, \dots, k\}$.
- Suponha que $M = \mathbb{S}^3(r) \times \mathbb{S}^2(r) \times \mathbb{S}^1(r)$, $M = \mathbb{S}^2(r) \times \mathbb{S}^2(r) \times \mathbb{S}^1(r)$ ou $M = \mathbb{S}^3(r) \times \mathbb{S}^3(r) \times \mathbb{S}^1(r)$, sempre dotada com a métrica produto padrão g_0 . Em todos os casos, a hipersuperfície totalmente geodésica Σ_3 é estável e qualquer outra hipersuperfície mínima tem índice maior ou igual a dois. Aplicando a Proposição 3.1.6, concluímos que a primeira largura de M deve ser $\omega_1(M) = m \text{vol}_{g_0}(\Sigma_3)$, para algum número inteiro m .
- Suponha que $M = \mathbb{S}^2(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2) \times \mathbb{S}^2(r_3)$ dotada com a métrica produto padrão g_0 . Assuma que as constantes $C_{21} = \frac{1}{r_2^2} - \frac{2}{r_1^2}$ e $C_{31} = \frac{1}{r_3^2} - \frac{2}{r_1^2}$ são não negativas. Então a

hipersuperfície totalmente geodésica Σ_1 tem índice um e qualquer outra hipersuperfície mínima tem índice maior ou igual a três. Argumentando como na prova do Teorema 3.1.9, demonstramos que as larguras $\omega_1(M)$ e $\omega_2(M)$ são iguais a $\text{vol}_{g_0}(\Sigma_1)$.

• Suponha que $M = \mathbb{S}^3(r_1) \times \mathbb{S}^2(r_2) \times \mathbb{S}^2(r_3)$ dotada com a métrica produto padrão g_0 . Assuma que as constantes $C_{21} = \frac{1}{r_2^2} - \frac{3}{r_1^2}$ e $C_{31} = \frac{1}{r_3^2} - \frac{3}{r_1^2}$ são não negativas. Então a hipersuperfície totalmente geodésica Σ_1 tem índice um e qualquer outra hipersuperfície mínima tem índice maior ou igual a quatro. Argumentando como na prova do Teorema 3.1.9, demonstramos que $\omega_1(M) = \omega_2(M) = \omega_3(M) = \text{vol}_{g_0}(\Sigma_1)$.

Como aplicação no cálculo de k -larguras quando a dimensão de M é maior ou igual a 8, temos o próximo Teorema que pode ser demonstrado de maneira análoga ao Teorema 3.1.11.

Teorema 3.2.3. *Seja $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$ dotada da métrica de produto padrão g_0 com $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 2$. Se para algum $j \in \{1, \dots, k\}$ vale $C_{i,j} > 0 \forall i \neq j$, então cada uma das larguras $\omega_1(M, g_0), \dots, \omega_{n_j}(M, g_0)$ só pode assumir um dos valores*

$$\text{vol}_{g_0}(\Sigma_j) \text{ ou } 2 \text{vol}_{g_0}(\Sigma_j).$$

Quando $\frac{n_1-1}{r_1^2} \neq \frac{n_2-1}{r_2^2}$, conforme foi discutido na subseção anterior, as únicas hipersuperfícies totalmente geodésicas em $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ são $\Sigma_1 := \mathbb{S}^{n_1-1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2}(r_2)$ e $\Sigma_2 := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \mathbb{S}^{n_2-1}(r_2)$. Porém, a mesma técnica não é suficiente para classificar todas as hipersuperfícies totalmente geodésicas em um produto de três ou mais esferas.

Definição 3.2.1. *Dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma \subset M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \dots \times \mathbb{S}^k(r_k)$ é um **cilindro** quando*

$$\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_{j-1}}(r_{j-1}) \times \Gamma_j \times \mathbb{S}^{n_{j+1}}(r_{j+1}) \times \dots \times \mathbb{S}^k(r_k),$$

onde Γ_j é uma hipersuperfície mínima fechada orientável em $\mathbb{S}^{n_j}(r_j)$, $j \in \{1, \dots, k\}$.

Corolário 3.2.3. *Seja Σ um cilindro não totalmente geodésico em $M = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$, onde $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 2$. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Se*

$$\Sigma = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \dots \times \mathbb{S}^{n_{j-1}}(r_{j-1}) \times \Gamma_j \times \mathbb{S}^{n_{j+1}}(r_{j+1}) \times \dots \times \mathbb{S}^k(r_k),$$

então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n_j + 1$.

Proposição 3.2.4. *Assuma que $M^{n+1} = \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$ satisfaz a condição $C_{i,j} = \frac{n_i - 1}{r_i^2} - \frac{n_j}{r_j^2} = 0$, para algum $i \in \{1, \dots, k\}$ fixado e todo $j \neq i$. Seja Σ um cilindro não totalmente geodésico em M da forma*

$$\Sigma := \mathbb{S}^{n_1}(r_1) \times \cdots \times \mathbb{S}^{n_{i-1}}(r_{i-1}) \times \Gamma_i \times \mathbb{S}^{n_{i+1}}(r_{i+1}) \cdots \times \mathbb{S}^{n_k}(r_k)$$

que é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 2$.

Demonstração. Dado $a = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^{n_1+1} \times \mathbb{R}^{n_2+1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k+1}$, definimos a função teste $f_a : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_a := \langle x, a \rangle = \langle x_1, a_1 \rangle + \langle x_2, a_2 \rangle + \cdots + \langle x_k, a_k \rangle$. Lembrando que o campo vetorial normal unitário sobre o cilindro Σ é dado por $N = N_i$, então:

$$\begin{aligned} \bullet \quad J \langle x_m, a_m \rangle &= \left(\sum_{j \neq m} C_{j,m} |N_j|^2 + |A|^2 \right) \langle x_m, a_m \rangle \\ &= (C_{i,m} + |A|^2) \langle x_m, a_m \rangle = |A|^2 \langle x_m, a_m \rangle, \quad \forall m \neq i. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad J \langle x_i, a_i \rangle = \left(\sum_{j \neq i} C_{j,i} |N_j|^2 + |A|^2 \right) \langle x_i, a_i \rangle = |A|^2 \langle x_i, a_i \rangle.$$

Somando todos os termos acima, obtemos $Jf_a = |A|^2 f_a$. Além disso, para cada $\varepsilon > 0$ considere a função de corte ϕ_ε satisfazendo $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$ e $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

Concluimos a demonstração argumentando de maneira análoga à prova usada na Proposição 3.1.4 □

Corolário 3.2.4. *Seja $\Sigma = \Gamma_1 \times \mathbb{T}_s^n(r)$ um cilindro não totalmente geodésico em $M = \mathbb{S}^{n+1}(r) \times \mathbb{T}_s^n(r)$, suave ou tendo um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n(s+1)-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n(s+1) + 2$.*

3.3 Lacuna do índice na esfera

Nesta seção estenderemos dois resultados sobre lacunas no índice de hipersuperfícies fechadas suaves imersas na esfera \mathbb{S}^{n+1} , enfraquecendo a hipótese de suavidade ao permitir que as hipersuperfícies tenham singularidades. A primeira proposição é inspirada na Proposição 1.3.1, que também pode ser encontrada em [54] e [3].

Proposição 3.3.1. *Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima compacta orientável não totalmente geodésica. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Então $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 2$.*

Demonstração. Dado um vetor $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ não nulo, consideraremos a função teste x_a definida por $x_a := \langle x, a \rangle$. Note que $Jx_a = |A|^2 x_a$ e podemos escolher uma bola B onde $|A|^2 > 0$, visto que Σ não é totalmente geodésica.

• $x_a \not\equiv 0$ em B :

$x_a \equiv 0$ em B implica que B está contida em um grande círculo de \mathbb{S}^{n+1} . Desse modo, Σ é totalmente geodésica, gerando uma contradição.

Desse modo, estamos aptos a definir

$$\delta := \max_{a \in \mathbb{R}^{n+2}, |a|=1} - \int_B |A|^2 x_a^2 d\mu < 0.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, podemos construir uma função de corte ϕ_ε de modo que $\phi_\varepsilon \equiv 1$ em B , $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$ e $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

Sejam $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n+1}$ as $n+1$ primeiras autofunções de J , definimos a transformação linear $\Psi : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$\Psi(a) := \left(\int_\Sigma \rho_1 \cdot (\phi_\varepsilon x_a) d\mu, \int_\Sigma \rho_2 \cdot (\phi_\varepsilon x_a) d\mu, \dots, \int_\Sigma \rho_{n+1} \cdot (\phi_\varepsilon x_a) d\mu \right).$$

Tendo em vista que $\ker(\Psi) \geq 1$, existe $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ unitário tal que a função teste $\phi_\varepsilon x_a$ é ortogonal a $\rho_j, \forall j \leq n+1$, no sentido de $L^2(\Sigma)$. Suponha, por absurdo, que $\text{Ind}(\Sigma) \leq n+1$. Então $I := \int_\Sigma (\phi_\varepsilon x_a) \cdot J(\phi_\varepsilon x_a) d\mu \geq 0$. Porém, temos

$$\begin{aligned} I &:= - \int_\Sigma x_a \phi_\varepsilon \cdot [\Delta(x_a \phi_\varepsilon) + (\text{Ric}(N, N) + |A|^2)x_a \phi_\varepsilon] d\mu \\ &= - \int_\Sigma x_a \phi_\varepsilon \cdot [\phi_\varepsilon J(x_a) + x_a \Delta \phi_\varepsilon + 2\langle \nabla x_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle] d\mu \\ &= - \int_\Sigma \phi_\varepsilon^2 x_a J(x_a) d\mu - \int_\Sigma x_a^2 \phi_\varepsilon \Delta \phi_\varepsilon d\mu - 2 \int_\Sigma x_a \phi_\varepsilon \langle \nabla x_a, \nabla \phi_\varepsilon \rangle d\mu \\ &\leq - \int_B x_a J(x_a) d\mu + C_1 \int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu + C_2 \int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon| d\mu \\ &\leq \delta + C_1 \varepsilon + C_2 \text{vol}(\Sigma)^{1/2} \left(\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu \right)^{1/2} \\ &\leq \delta + C_3(\varepsilon + \varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

Uma vez que δ e C_3 são constantes, ao tomarmos ε suficientemente pequeno temos a contradição $I < 0$. Logo, $\text{Ind}(\Sigma) \geq n + 2$. \square

Agora, apresentaremos nossa segunda proposição desta subseção. Trata-se de uma adaptação para o caso singular do teorema principal de A. Barros e P. Sousa em [10].

Proposição 3.3.2. *Seja $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ uma hipersuperfície mínima compacta orientável não totalmente geodésica. Assuma que Σ é suave ou tem um conjunto de pontos singulares satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing } \Sigma) = 0$. Se $|A|^2 \geq n$ e Σ não é o Toro de Clifford, então $\text{Ind}(M) \geq 2n + 4$. Em particular, o Toro de Clifford é a única hipersuperfície nas condições acima com índice $n + 3$.*

Demonstração. Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$, denotaremos $x_a := \langle x, a \rangle$ e $N_b := \langle N, b \rangle$. Em seguida, definimos a função teste $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_{ab} := x_a + N_b$. Além disso, para cada $\varepsilon > 0$ construímos uma função de corte ϕ_ε satisfazendo $\mathcal{H}^n(\{\phi_\varepsilon \neq 1\}) < \varepsilon$, $\int_\Sigma |\nabla \phi_\varepsilon|^2 d\mu < \varepsilon$ e $\int_\Sigma |\Delta \phi_\varepsilon| d\mu < \varepsilon$.

Passo 1: Para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2}$ não nulo, temos que $f_{ab} \not\equiv 0$ em Σ :

- Dado $a \in \mathbb{R}^{n+2}$ não nulo, $x_a \not\equiv 0$ em Σ :

$x_a \equiv 0$ em $\Sigma \implies \Sigma$ está contida em um grande círculo de $\mathbb{S}^{n+1} \implies \Sigma$ é totalmente geodésica, gerando uma contradição.

- Dado $b \in \mathbb{R}^{n+2}$ não nulo, $N_b \not\equiv 0$ em Σ :

Suponha, por absurdo, que $N_b \equiv 0$ em Σ . Decorre do Lema 1.3.1 que $\text{Hess } x_b(\cdot, \cdot) = -x_b \langle \cdot, \cdot \rangle + N_b \langle A(\cdot), \cdot \rangle = -x_b \langle \cdot, \cdot \rangle$. Como o item anterior implica em $x_b \not\equiv 0$ sobre Σ , o Teorema de Obata afirma que Σ é isométrico a uma esfera unitária. Denotando por II a segunda forma fundamental de Σ e por $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ as curvaturas principais de Σ , segue da Equação de Gauss que $\kappa_i \kappa_j = 0 \forall i, j = 1, \dots, n$. Então existe no máximo um $\kappa_j \neq 0$. Como $H = \sum_{j=1}^n \kappa_j = 0$, deduzimos que $\kappa_1 = \dots = \kappa_n = 0$ e $II \equiv 0$. Isto contradiz a hipótese de Σ não ser totalmente geodésica.

- Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$ não nulos, $f_{ab} \not\equiv 0$ em Σ :

$f_{ab} \equiv 0 \implies x_a = -N_b \implies -nx_a = \Delta x_a = -\Delta N_b = |A|^2 N_b = -|A|^2 x_a \implies (|A|^2 - n)x_a = 0 \implies x_a \equiv 0$, contradizendo o primeiro item.

Passo 2: Dados $a, b \in \mathbb{R}^{n+2}$, vale a igualdade

$$\int_\Sigma \phi_\varepsilon^2 |A|^2 x_a N_b d\mu = \int_\Sigma \phi_\varepsilon^2 n x_a N_b - 2\phi_\varepsilon \langle \nabla \phi_\varepsilon, N_b a^\top + x_a A(b^\top) \rangle d\mu.$$

Aplicando o Lema 2.3 em [73], podemos integrar por partes e obter

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Sigma} (\phi_{\varepsilon} N_b) \Delta(\phi_{\varepsilon} x_a) - (\phi_{\varepsilon} x_a) \Delta(\phi_{\varepsilon} N_b) d\mu \\
&= \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 N_b \Delta x_a + \phi_{\varepsilon} N_b x_a \Delta \phi_{\varepsilon} + 2\phi_{\varepsilon} N_b \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, \nabla x_a \rangle d\mu \\
&\quad - \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 x_a \Delta N_b + \phi_{\varepsilon} x_a N_b \Delta \phi_{\varepsilon} + 2\phi_{\varepsilon} x_a \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, \nabla N_b \rangle d\mu \\
&= \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 (N_b \Delta x_a - x_a \Delta N_b) + 2\phi_{\varepsilon} \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, N_b a^{\top} + x_a A(b^{\top}) \rangle d\mu \\
&= \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 (|A|^2 - n) x_a N_b + 2\phi_{\varepsilon} \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, N_b a^{\top} + x_a A(b^{\top}) \rangle d\mu.
\end{aligned}$$

Passo 3: Para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2}$ não nulo, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 f_{ab} \cdot J(f_{ab}) d\mu &= \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 (x_a + N_b) \cdot (|A|^2 x_a + n N_b) d\mu \\
&= \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 (|A|^2 x_a^2 + n x_a N_b + |A|^2 x_a N_b + n N_b^2) d\mu \\
&= \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 (|A|^2 x_a^2 + 2n x_a N_b + n N_b^2) - 2\phi_{\varepsilon} \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, N_b a^{\top} + x_a A(b^{\top}) \rangle d\mu \\
&\geq \int_{\Sigma} \phi_{\varepsilon}^2 (n x_a^2 + 2n x_a N_b + n N_b^2) - 2\phi_{\varepsilon} \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, N_b a^{\top} + x_a A(b^{\top}) \rangle d\mu \\
&= \int_{\Sigma} n \phi_{\varepsilon}^2 f_{ab}^2 - 2\phi_{\varepsilon} \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, N_b a^{\top} + x_a A(b^{\top}) \rangle d\mu.
\end{aligned}$$

Passo 4: Sejam $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{2n+3}$ as $2n+3$ primeiras autofunções de J , definimos a transformação linear $\Psi : \mathbb{R}^{n+2} \times \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+3}$ por

$$\Psi(a) := \left(\int_{\Sigma} \rho_1 \cdot (\phi_{\varepsilon} f_{ab}) d\mu, \int_{\Sigma} \rho_2 \cdot (\phi_{\varepsilon} f_{ab}) d\mu, \dots, \int_{\Sigma} \rho_{2n+3} \cdot (\phi_{\varepsilon} f_{ab}) d\mu \right).$$

Uma vez que $\ker(\Psi) \geq 1$, existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n+2} \times V^m$ unitário tal que a função teste $\phi_{\varepsilon} f_{\alpha\beta}$ é ortogonal a $\rho_j, \forall j \leq 2n+3$, no sentido de $L^2(\Sigma)$. Tomemos uma bola B tal que $f_{\alpha\beta} \not\equiv 0$ e $\phi_{\varepsilon} \equiv 1$ em B .

Suponha, por absurdo, que $\text{Ind}(\Sigma) \leq 2n+3$. Então $I := - \int_{\Sigma} (\phi_{\varepsilon} f_{\alpha\beta}) \cdot J(\phi_{\varepsilon} f_{\alpha\beta}) d\mu \geq 0$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
I &:= - \int_{\Sigma} f_{\alpha\beta} \phi_{\varepsilon} \cdot [\phi_{\varepsilon} J(f_{\alpha\beta}) + f_{\alpha\beta} \Delta \phi_{\varepsilon} + 2 \langle \nabla f_{\alpha\beta}, \nabla \phi_{\varepsilon} \rangle] d\mu \\
&\leq - \int_B n f_{\alpha\beta}^2 d\mu + \int_{\Sigma} 2\phi_{\varepsilon} \langle \nabla \phi_{\varepsilon}, N_{\beta} \alpha^{\top} + x_{\alpha} A(\beta^{\top}) \rangle d\mu \\
&\quad - \int_{\Sigma} f_{\alpha\beta}^2 \phi_{\varepsilon} \Delta \phi_{\varepsilon} d\mu - 2 \int_{\Sigma} f_{\alpha\beta} \phi_{\varepsilon} \langle \nabla f_{\alpha\beta}, \nabla \phi_{\varepsilon} \rangle d\mu \\
&\leq n\delta + C_1 \int_{\Sigma} |\nabla \phi_{\varepsilon}| d\mu + C_2 \int_{\Sigma} |\Delta \phi_{\varepsilon}| d\mu + C_3 \int_{\Sigma} |\nabla \phi_{\varepsilon}| d\mu \\
&\leq n\delta + C_1 \text{vol}(\Sigma)^{1/2} \left(\int_{\Sigma} |\nabla \phi_{\varepsilon}|^2 d\mu \right)^{1/2} + C_2 \varepsilon + C_3 \text{vol}(\Sigma)^{1/2} \left(\int_{\Sigma} |\nabla \phi_{\varepsilon}|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
&\leq n\delta + C_4 (\varepsilon + 2\varepsilon^{1/2}).
\end{aligned}$$

Já que $\delta := -\int_B f_{\alpha\beta}^2 d\mu < 0$ e C_4 são constantes, podemos escolher ε pequeno o suficiente para haver a contradição $I < 0$. Logo, $\text{Ind}(\Sigma) \geq 2n + 4$. \square

Capítulo 4

LIMITAÇÃO DE ÍNDICE PARA HIPERSUPERFÍCIES f -MÍNIMAS COM FRONTEIRA LIVRE NO ESPAÇO EUCLIDIANO PONDERADO

4.1 Funções teste e cálculos preliminares

Nesta seção definiremos as funções teste que serão utilizadas ao longo do capítulo e calcularemos o operador de Jacobi ponderado aplicado em tais funções teste.

Seja Σ uma hipersuperfície no espaço ponderado $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$. A partir de agora, denotaremos por $\overline{\mathcal{P}}$ o conjunto dos campos vetoriais paralelos sobre \mathbb{R}^{n+1} . Dado $\overline{V} \in \overline{\mathcal{P}}$, temos a decomposição ortogonal

$$\overline{V} = V + \langle V, N \rangle N,$$

onde V é a projeção ortogonal de \overline{V} sobre Σ .

Seja $\overline{\mathcal{U}}$ a família de campos vetoriais paralelos em \mathbb{R}^{n+1} com comprimento unitário; esta família é naturalmente identificada com \mathbb{S}^n se a dotarmos da medida $\tilde{\mu} := \frac{n+1}{\text{vol}(\mathbb{S}^n)} dV_{\mathbb{S}^n}$. O próximo Lema será utilizado na demonstração dos principais resultados deste capítulo.

Lema 4.1.1. [57] *Para quaisquer $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{R}^{n+1}$, vale a igualdade*

$$\int_{\overline{\mathcal{U}}} \langle \overline{V}, \overline{X} \rangle \langle \overline{V}, \overline{Y} \rangle d\overline{V} = \langle \overline{X}, \overline{Y} \rangle.$$

Para cada par de campos vetoriais paralelos $\overline{V}, \overline{W} \in \overline{\mathcal{P}}$, definimos um campo vetorial sobre Σ da forma $X_{\overline{V}, \overline{W}} := \langle \overline{V}, N \rangle W - \langle \overline{W}, N \rangle V$. As funções teste que usaremos ao longo da seção são obtidas através do produto interno de $X_{\overline{V}, \overline{W}}$ com campos vetoriais $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ apropriados:

$$u := \langle X_{\overline{V}, \overline{W}}, \xi \rangle. \quad (4.11)$$

Em geral, ξ será escolhido como um campo vetorial f -harmônico ou um campo de autovetores do f -Laplaciano de Hodge. No restante da seção, nosso objetivo será demonstrar o seguinte Lema:

Lema 4.1.2. [42] *Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície f -mínima. Seja $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ um campo vetorial genérico em Σ e u a função definida em 4.11. Então*

$$J_f u = -u \text{Hess } f(N, N) - \text{Hess } f(X_{\overline{V}, \overline{W}}, \xi) + \langle X_{\overline{V}, \overline{W}}, \Delta_f^{[1]} \xi \rangle + v,$$

onde $v = 2(\langle \nabla_{AV}\xi, W \rangle - \langle \nabla_{AW}\xi, V \rangle) - \langle W, \xi \rangle \text{Hess } f(V, N) + \langle V, \xi \rangle \text{Hess } f(W, N)$.

Nos dois próximos Lemas serão desenvolvidos todos os cálculos necessários para concluir o resultado acima.

Lema 4.1.3. *Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície f -mínima. Denote por N o campo vetorial normal unitário e por A o operador de forma de Σ . Seja $\bar{V} \in \bar{\mathcal{P}}$, e denote por V sua projeção sobre Σ . Se $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$, então*

$$\nabla_X V = \langle \bar{V}, N \rangle AX; \quad (4.12)$$

$$\nabla \langle \bar{V}, N \rangle = -AV; \quad (4.13)$$

$$\nabla_f^* \nabla V = -A^2 V - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N)^\top. \quad (4.14)$$

Demonstração. Denotaremos por D a conexão de Levi-Civita de \mathbb{R}^{n+1} . Uma vez que \bar{V} é um campo vetorial paralelo, temos $D_X \bar{V} = 0$. Então

$$\begin{aligned} \nabla_X V &= (D_X V)^\top = -\left(D_X \langle \bar{V}, N \rangle N\right)^\top \\ &= -\langle \bar{V}, N \rangle (D_X N) = \langle \bar{V}, N \rangle AX. \end{aligned}$$

Logo, também vale

$$\langle \nabla \langle \bar{V}, N \rangle, X \rangle = X \langle \bar{V}, N \rangle = \langle \bar{V}, D_X N \rangle = -\langle AV, X \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

e isto demonstra a equação 4.13.

Segue diretamente da equação 4.12 que $\nabla_{e_i} V = \langle \bar{V}, N \rangle A e_i$. Então

$$\begin{aligned} \nabla^* \nabla V &= \sum_i \left(\nabla_{e_i} (\langle \bar{V}, N \rangle A e_i) - \langle \bar{V}, N \rangle A \nabla_{e_i} e_i \right) \\ &= A \nabla \langle \bar{V}, N \rangle + \langle \bar{V}, N \rangle \text{tr} \nabla A \\ &= -A^2 V + \langle \bar{V}, N \rangle \nabla H. \end{aligned}$$

Além disso, a equação f -mínima $H_f = H + \langle \bar{\nabla} f, N \rangle = 0$ implica que

$$\nabla H = -\nabla \langle \bar{\nabla} f, N \rangle = -\text{Hess } f(N)^\top + A \nabla f. \quad (4.15)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\nabla^* \nabla V &= -A^2 V - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N)^\top + \langle \bar{V}, N \rangle A \nabla f \\
&= -A^2 V - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N)^\top + \nabla_{\nabla f} V \\
\implies \nabla_f^* \nabla V &= -A^2 V - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N)^\top.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.1.4. *Sejam $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ e $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície f -mínima. Sejam $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$, e denote por V, W as suas projeções sobre Σ . Então, para todo $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$*

$$\Delta_f \langle \bar{V}, N \rangle = -|A|^2 \langle \bar{V}, N \rangle + \text{Hess } f(V, N); \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_f \langle V, \xi \rangle &= \text{Hess } f(V, \xi) - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N, \xi) - 2 \langle AV, A\xi \rangle \\
&\quad - 2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle \nabla \xi, A \rangle + \langle \Delta_f^{[1]} \xi, V \rangle;
\end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_f \left(\langle \bar{V}, N \rangle \langle W, \xi \rangle \right) &= -|A|^2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle W, \xi \rangle - 2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle AW, A\xi \rangle - 2 \langle \bar{W}, N \rangle \langle AV, A\xi \rangle \\
&\quad + \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(W, \xi) + \langle W, \xi \rangle \text{Hess } f(V, N) \\
&\quad - \langle \bar{V}, N \rangle \langle \bar{W}, N \rangle \text{Hess } f(N, \xi) - 2 \nabla \xi(AV, W) \\
&\quad + 2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle \bar{W}, N \rangle \langle \nabla \xi, A \rangle - \langle \bar{V}, N \rangle \langle \Delta_f^{[1]} \xi, W \rangle.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Finalmente, se $X_{\bar{V}, \bar{W}} = \langle \bar{V}, N \rangle W - \langle \bar{W}, N \rangle V$ e $u = \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \xi \rangle$, então:

$$\Delta_f u = -|A|^2 u + \text{Hess } f(X_{\bar{V}, \bar{W}}, \xi) - \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \Delta_f^{[1]} \xi \rangle - v, \quad (4.19)$$

onde $v = 2 \left(\langle \nabla_{AV} \xi, W \rangle - \langle \nabla_{AW} \xi, V \rangle \right) - \langle W, \xi \rangle \text{Hess } f(V, N) + \langle V, \xi \rangle \text{Hess } f(W, N)$.

Demonstração. A partir da Equação de Codazzi, iniciamos deduzindo a equação

$$\text{div}(AV) = \langle \bar{V}, N \rangle |A|^2 + \langle \nabla H, V \rangle.$$

Portanto, as equações 4.15 e 4.13 nos permitem concluir que

$$\begin{aligned}
\Delta \langle \bar{V}, N \rangle &= \text{div} \left(\nabla \langle \bar{V}, N \rangle \right) = -\text{div}(AV) \\
&= -\langle \bar{V}, N \rangle |A|^2 + \langle \text{Hess } f(N), V \rangle - \langle A \nabla f, V \rangle \\
&= -\langle \bar{V}, N \rangle |A|^2 + \text{Hess } f(N, V) + \langle \nabla f, \nabla \langle \bar{V}, N \rangle \rangle.
\end{aligned}$$

A equação 4.16 segue diretamente da definição de Δ_f , pois

$$\begin{aligned}\Delta_f \langle \bar{V}, N \rangle &= \Delta \langle \bar{V}, N \rangle - \langle \nabla f, \nabla \langle \bar{V}, N \rangle \rangle \\ &= -|A|^2 \langle \bar{V}, N \rangle + \text{Hess } f(V, N)\end{aligned}$$

Para deduzir a equação 4.17, aplicaremos o Lema 1.6.1 e 4.14:

$$\begin{aligned}\Delta_f \langle V, \xi \rangle &= \langle \nabla_f^* \nabla V, \xi \rangle + \langle V, \nabla_f^* \nabla \xi \rangle + 2 \langle \nabla V, \nabla \xi \rangle \\ &= -\langle AV, A\xi \rangle - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N, \xi) - \langle \Delta_f^{[1]} \xi, V \rangle \\ &\quad + \text{Ric}_f^\Sigma(V, \xi) + 2 \langle \nabla V, \nabla \xi \rangle.\end{aligned}$$

Além disso, para uma hipersuperfície f -mínima no espaço Euclidiano tem-se

$$\text{Ric}_f^\Sigma(\xi) = \text{Hess } f(\xi) - A^2(\xi), \quad \forall \xi \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Desse modo,

$$\Delta_f \langle V, \xi \rangle = \text{Hess } f(V, \xi) - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N, \xi) - 2 \langle AV, A\xi \rangle - \langle \Delta_f^{[1]} \xi, V \rangle + 2 \langle \nabla V, \nabla \xi \rangle.$$

A partir da equação 4.12, segue que

$$\langle \nabla V, \nabla \xi \rangle = \langle \bar{V}, N \rangle \langle A, \nabla \xi \rangle.$$

Substituindo acima, obtemos

$$\Delta_f \langle V, \xi \rangle = \text{Hess } f(V, \xi) - \langle \bar{V}, N \rangle \text{Hess } f(N, \xi) - 2 \langle AV, A\xi \rangle - \langle \Delta_f^{[1]} \xi, V \rangle + 2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle A, \nabla \xi \rangle.$$

Nos resta demonstrar a equação 4.18. Neste intuito, observamos que para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$:

$$\begin{aligned}\langle \nabla \langle W, \xi \rangle, X \rangle &= \langle \nabla_X W, \xi \rangle + \langle W, \nabla_X \xi \rangle \\ &= \langle \bar{W}, N \rangle \langle A\xi, X \rangle + \nabla \xi(X, W),\end{aligned}$$

implicando em

$$\begin{aligned}\langle \nabla \langle \bar{V}, N \rangle, \nabla \langle W, \xi \rangle \rangle &= -\langle AV, \nabla \langle W, \xi \rangle \rangle \\ &= -\langle \bar{W}, N \rangle \langle AV, A\xi \rangle - \nabla \xi(AV, W).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Uma vez que,

$$\Delta_f \left(\langle \bar{V}, N \rangle \langle W, \xi \rangle \right) = \langle \bar{V}, N \rangle \Delta_f \langle W, \xi \rangle + \langle W, \xi \rangle \Delta_f \langle \bar{V}, N \rangle + 2 \langle \nabla \langle \bar{V}, N \rangle, \nabla \langle W, \xi \rangle \rangle,$$

a equação 4.18 é obtida substituindo as equações 4.16, 4.17 e 4.20 na expressão acima.

Finalmente, a equação 4.19 é o resultado de um cálculo direto utilizando a fórmula 4.18 duas vezes. \square

O resultado dado no Lema 4.1.2 é obtido através do seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} J_f u &= \Delta_f u + (|A|^2 + \text{Ric}_f(N, N))u = \Delta_f u + (|A|^2 + \text{Hess } f(N, N))u \\ &= u \text{Hess } f(N, N) + \text{Hess } f(X_{\bar{v}, \bar{w}}, \xi) - \langle X_{\bar{v}, \bar{w}}, \Delta_f^{[1]} \xi \rangle - v. \end{aligned}$$

4.2 Resultados em hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano ponderado

Seja Ω um domínio ponderado, não necessariamente compacto, em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira não vazia. Assuma que $\partial\Omega$ é suave e seja ν o campo vetorial normal unitário de $\partial\Omega$ em Ω apontando para fora. Relembramos que a segunda forma fundamental e a curvatura média de $\partial\Omega$ são definidas, respectivamente, por

$$h^{\partial\Omega}(X, Y) = \langle AX, Y \rangle, \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad H^{\partial\Omega} = \text{tr } h^{\partial\Omega},$$

onde A é o operador de forma com respeito a ν . Ao longo do capítulo diremos que Ω é um domínio convexo quando $h^{\partial\Omega}(X, X) \leq 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\partial\Omega)$. Analogamente, diremos que Ω é um domínio f -média convexo quando $H_f^{\partial\Omega} := H^{\partial\Omega} + \frac{\partial f}{\partial N} \leq 0$.

Antes de enunciar os principais teoremas, provaremos o seguinte lema:

Lema 4.2.1. *Sejam $\Omega \subset \Sigma$ um domínio limitado, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $u \in C^\infty(\Omega)$. Se $L_f = \Delta_f + T$ é um operador de Schrödinger e $T \in C^\infty(\Omega)$ é qualquer potencial, então*

$$\int_{\Omega} \varphi u L_f(\varphi u) e^{-f} d\mu = \int_{\Omega} (\varphi^2 u L_f(u) - u^2 |\nabla \varphi|^2) e^{-f} d\mu + \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} u^2 \varphi \eta(\varphi) e^{-f} d\sigma.$$

Demonstração. Segue diretamente da identidade $\Delta_f(\varphi u) = \varphi \Delta_f(u) + u \Delta_f(\varphi) + 2 \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle$ que

$$\int_{\Omega} \varphi u L_f(\varphi u) e^{-f} d\mu = \int_{\Omega} (\varphi^2 u L_f(u) + u^2 \varphi \Delta_f(\varphi) + 2\varphi u \langle \nabla \varphi, \nabla u \rangle) e^{-f} d\mu.$$

Considere a função $h := f - \ln(u^2)$. O Teorema da Divergência implica que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^2 |\nabla \varphi|^2 e^{-f} d\mu &= \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 e^{-h} d\mu \\ &= \int_{\Omega} -\varphi \Delta_h(\varphi) e^{-h} d\mu + \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} \varphi \eta(\varphi) e^{-h} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} -\varphi (\Delta_f(\varphi) + \langle \nabla \ln(u^2), \nabla \varphi \rangle) u^2 e^{-f} d\mu + \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} \varphi \eta(\varphi) u^2 e^{-f} d\sigma \\ &= \int_{\Omega} - (u^2 \varphi \Delta_f(\varphi) + 2\varphi u \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle) e^{-f} d\mu + \int_{\partial\Sigma \cap \Omega} u^2 \varphi \eta(\varphi) e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

□

Agora estamos prontos para provar o Teorema Principal desta seção.

Teorema 4.2.1. *Seja Ω^{n+1} um domínio ponderado em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, f -mínima, orientável, com fronteira livre em Ω . Suponha que Σ seja suave ou tenha um conjunto singular satisfazendo $\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing}(\Sigma)) = 0$; e que o tensor $\text{Ric}_f^\Omega = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$. Então:*

(I). *Se Ω é um domínio convexo, então para todo $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha + \lambda_{d(k+1)}(\Delta_{fT}^{[1]}),$$

onde $d(k+1) = \binom{n+1}{2}k + 1$ e $\Delta_{fT}^{[1]}$ é o f -Laplaciano de Hodge atuando nas 1-formas $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ satisfazendo a condição absoluta na fronteira e tal que $\omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$.

(II). *Se Ω for um domínio f -média convexo, então para todo $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha + \lambda_{d(k+1)}(\Delta_{fN}^{[1]}),$$

onde $d(k) = \binom{n+1}{2}k + 1$ e $\Delta_{fN}^{[1]}$ é o f -Laplaciano de Hodge atuando sobre as 1-formas $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ satisfazendo a condição relativa na fronteira e tal que $\omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$.

Demonstração. Ao longo da prova, os operadores que atuam sobre 1-formas estarão restritos ao subespaço $\{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)\}$.

Parte (I). Seja $\{\psi_j\}$ uma base ortonormal de $L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$ formada por autofunções do operador de Jacobi J_f , onde ψ_j está associado ao autovalor $\lambda_j(J_f)$. Para cada $d \in \mathbb{N}$, considere a soma direta

$$E^d(\Delta_{fT}^{[1]}) = \bigoplus_{j=1}^d V_{\lambda_j(\Delta_{fT}^{[1]})},$$

onde $V_{\lambda_j(\Delta_{fT}^{[1]})}$ é o espaço das autoformas de $\Delta_{fT}^{[1]}$ associado ao autovalor $\lambda_j(\Delta_{fT}^{[1]})$.

Para cada $\varepsilon > 0$, considere a função de corte ρ_ε dada na proposição 1.4.1. Definimos as funções

$$u = \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega^\sharp \rangle = \langle \bar{V}, N \rangle \langle W, \omega^\sharp \rangle - \langle \bar{W}, N \rangle \langle V, \omega^\sharp \rangle$$

onde $\omega \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$, $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$ e V, W são suas projeções em Σ . Então, para cada $\varepsilon > 0$, considere a família de funções

$$\{v_\varepsilon\} = \{\rho_\varepsilon u\}.$$

Observe que cada função desta família pode ser usada como função teste para o operador de estabilidade.

Inicialmente, para cada $\varepsilon > 0$, queremos encontrar $d = d(k)$ e algum $\omega_\varepsilon \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$, $\omega_\varepsilon \neq 0$, tal que a função $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_\varepsilon^\# \rangle$ cumpra as condições de ortogonalidade

$$\int_\Sigma \rho_\varepsilon \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_\varepsilon^\# \rangle \psi_1 e^{-f} d\mu = \cdots = \int_\Sigma \rho_\varepsilon \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_\varepsilon^\# \rangle \psi_{k-1} e^{-f} d\mu = 0, \quad (4.21)$$

para quaisquer $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$. Observe que $X_{\bar{V}, \bar{W}}$ é uma função bilinear antissimétrica de \bar{V}, \bar{W} e que $\dim \bar{\mathcal{P}} = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1$. Então (4.21) é um sistema composto de $\binom{n+1}{2}(k-1)$ equações lineares homogêneas na incógnita $\omega_\varepsilon \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$.

Assim, se $d = d(k) = \binom{n+1}{2}(k-1) + 1$, podemos encontrar uma 1-forma não trivial $\omega_\varepsilon \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$ tal que $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_\varepsilon^\# \rangle$ é $L^2(\Sigma, e^{-f} d\mu)$ -ortogonal com as primeiras $k-1$ autofunções de J_f para quaisquer $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$. Pelo princípio min-max, segue que

$$\begin{aligned} \lambda_k(J_f) \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 u_\varepsilon^2 e^{-f} d\mu &\leq - \int_\Sigma \rho_\varepsilon u_\varepsilon J_f(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) e^{-f} d\mu \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon u_\varepsilon \left(\eta(\rho_\varepsilon u_\varepsilon) + h^{\partial\Omega}(N, N) \rho_\varepsilon u_\varepsilon \right) e^{-f} d\sigma, \end{aligned}$$

para todo $u_\varepsilon = \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_\varepsilon^\# \rangle$.

Aplicando o Lema 4.2.1 com $\Omega = \Sigma$, $\varphi = \rho_\varepsilon$ e $T = |A|^2 + \text{Hess } f(N, N)$, juntamente com Lema 4.1.1, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_k(J_f) \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 u_\varepsilon^2 e^{-f} d\mu &\leq \int_\Sigma \left(-\rho_\varepsilon^2 u_\varepsilon J_f(u_\varepsilon) + u_\varepsilon^2 |\nabla \rho_\varepsilon|^2 \right) e^{-f} d\mu \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(u_\varepsilon \eta(u_\varepsilon) + h^{\partial\Omega}(N, N) u_\varepsilon^2 \right) e^{-f} d\sigma \\ &= \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 \left(-u_\varepsilon^2 \text{Hess } f(N, N) - u_\varepsilon \text{Hess } f(X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_\varepsilon^\#) \right) e^{-f} d\mu \\ &\quad + \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 \left(u_\varepsilon \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega_\varepsilon)^\# \rangle + u_\varepsilon v_\varepsilon \right) e^{-f} d\mu + \int_\Sigma u_\varepsilon^2 |\nabla \rho_\varepsilon|^2 e^{-f} d\mu \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(u_\varepsilon \eta(u_\varepsilon) + h^{\partial\Omega}(N, N) u_\varepsilon^2 \right) e^{-f} d\sigma, \end{aligned}$$

para quaisquer $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$, onde $v_\varepsilon = 2 \left(\langle \nabla_{AV} \omega_\varepsilon^\#, W \rangle - \langle \nabla_{AW} \omega_\varepsilon^\#, V \rangle \right) - \langle W, \omega_\varepsilon^\# \rangle \text{Hess } f(V, N) + \langle V, \omega_\varepsilon^\# \rangle \text{Hess } f(W, N)$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \eta(u_\varepsilon) &= \eta \left(\langle \bar{V}, N \rangle \langle W, \omega_\varepsilon^\# \rangle - \langle \bar{W}, N \rangle \langle V, \omega_\varepsilon^\# \rangle \right) \\ &= \langle \bar{V}, D_\eta N \rangle \langle W, \omega_\varepsilon^\# \rangle + \langle \bar{V}, N \rangle \left(\langle D_\eta W, \omega_\varepsilon^\# \rangle + \langle W, D_\eta \omega_\varepsilon^\# \rangle \right) \\ &= - \langle \bar{W}, D_\eta N \rangle \langle V, \omega_\varepsilon^\# \rangle - \langle \bar{W}, N \rangle \left(\langle D_\eta V, \omega_\varepsilon^\# \rangle + \langle V, D_\eta \omega_\varepsilon^\# \rangle \right). \end{aligned}$$

Nosso próximo passo será aplicar a técnica de integração dada no Lema 4.1.1 para simplificar as expressões acima. Usando a métrica do produto em $\bar{\mathcal{U}} \times \bar{\mathcal{U}}$ e aplicando o

Lema 4.1.1, obtemos as seguintes igualdades em cada $p \in \Sigma$:

$$\begin{aligned}
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u^2 d\bar{V} d\bar{W} &= 2|\omega^\sharp|^2; \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u \operatorname{Hess} f(X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega^\sharp) d\bar{V} d\bar{W} &= 2 \operatorname{Hess} f(\omega^\sharp, \omega^\sharp); \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u^2 \operatorname{Hess} f(N, N) d\bar{V} d\bar{W} &= 2 \operatorname{Hess} f(N, N) |\omega^\sharp|^2; \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega)^\sharp \rangle d\bar{V} d\bar{W} &= 2 \langle \omega^\sharp, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega)^\sharp \rangle; \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} uv d\bar{V} d\bar{W} &= 0; \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u \langle \bar{V}, D_\eta N \rangle \langle \bar{W}, \omega^\sharp \rangle d\bar{V} d\bar{W} &= 0; \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u \langle \bar{V}, N \rangle \langle D_\eta \bar{W}, \omega^\sharp \rangle d\bar{V} d\bar{W} &= - \int_{\bar{U} \times \bar{U}} u \langle \bar{W}, N \rangle \langle D_\eta \bar{V}, \omega^\sharp \rangle d\bar{V} d\bar{W}; \\
\int_{\bar{U} \times \bar{U}} u \langle \bar{V}, N \rangle \langle \bar{W}, D_\eta \omega^\sharp \rangle d\bar{V} d\bar{W} &= \langle \omega^\sharp, D_\eta \omega^\sharp \rangle = \frac{1}{2} \eta (|\omega^\sharp|^2).
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade min-max anterior em relação a $(\bar{V}, \bar{W}) \in \bar{U} \times \bar{U}$, usando o teorema de Fubini com a substituição pelas equações acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_k(J_f) \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 e^{-f} d\mu &\leq - \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 \left(\operatorname{Hess} f(\omega_\varepsilon^\sharp, \omega_\varepsilon^\sharp) + \operatorname{Hess} f(N, N) |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 \right) e^{-f} d\mu \\
&\quad + \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 \langle \omega_\varepsilon^\sharp, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega_\varepsilon)^\sharp \rangle e^{-f} d\mu + \int_\Sigma |\nabla \rho_\varepsilon|^2 |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 e^{-f} d\mu \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(\eta (|\omega_\varepsilon^\sharp|^2) + 2h^{\partial\Omega}(N, N) |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 \right) e^{-f} d\sigma.
\end{aligned}$$

Finalmente, observe que:

- Cada $\rho_\varepsilon : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ satisfaz $|\nabla \rho_\varepsilon| \leq \varepsilon$.
- $\operatorname{Hess} f(\omega_\varepsilon^\sharp, \omega_\varepsilon^\sharp) + \operatorname{Hess} f(N, N) |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 \geq 2\alpha |\omega_\varepsilon^\sharp|^2$.
- ω_ε ser a combinação linear das primeiras $d(k)$ autoformas de $\Delta_{fN}^{[1]}$ implica que

$$\int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 \langle \omega_\varepsilon^\sharp, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega_\varepsilon)^\sharp \rangle e^{-f} d\mu \leq \lambda_{d(k)}(\Delta_{fN}^{[1]}) \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 e^{-f} d\mu.$$

- Pelo Lema 1.6.3,

$$\int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(\eta (|\omega_\varepsilon^\sharp|^2) + 2h^{\partial\Omega}(N, N) |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 \right) e^{-f} d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(2h^{\partial\Omega}(\omega_\varepsilon^\sharp, \omega_\varepsilon^\sharp) + 2h^{\partial\Omega}(N, N) |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 \right) e^{-f} d\sigma$$

é negativo, pois $h^{\partial\Omega}(Y, Y) < 0$ para cada vetor Y tangente a $\partial\Omega$.

Portanto, para cada $\varepsilon > 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\lambda_k(J_f) \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 e^{-f} d\mu &\leq \left(-2\alpha + \lambda_{d(k)}(\Delta_{fN}^{[1]}) \right) \int_\Sigma \rho_\varepsilon^2 |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 e^{-f} d\mu \\
&\quad + \varepsilon^2 \int_\Sigma |\omega_\varepsilon^\sharp|^2 e^{-f} d\mu.
\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por $\int_{\Sigma} \rho_{\varepsilon}^2 |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu \neq 0$, segue que

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha + \lambda_{d(k)}(\Delta_{fN}^{[1]}) + \varepsilon^2 \frac{\int_{\Sigma} |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu}{\int_{\Sigma} \rho_{\varepsilon}^2 |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu}.$$

Para completar a prova, basta mostrar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2 \int_{\Sigma} |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu}{\int_{\Sigma} \rho_{\varepsilon}^2 |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu} = 0. \quad (4.22)$$

Observe que para cada $\varepsilon > 0$, ao escolher $\omega_{\varepsilon} \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$ satisfazendo (4.22), podemos tomá-la de certa maneira que $\omega_{\varepsilon}^{\sharp}$ é unitário na norma $L^2(M, e^{-f} d\mu)$, ou seja,

$$\int_{\Sigma} |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu = 1.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, considere o conjunto $A_{\varepsilon} := \{x \in \Sigma : \rho_{\varepsilon}(x) \neq 1\}$. As funções de corte ρ_{ε} são construídas de modo que $\mathcal{H}^n(A_{\varepsilon}) < \varepsilon$. Definindo $\Sigma_{\varepsilon} := \Sigma - A_{\varepsilon}$, declaramos a existência de constantes $\delta > 0$ e $R > 0$ tais que

$$\int_{\Sigma_{\delta}} |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu \geq R > 0, \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (4.23)$$

De fato, assumindo por absurdo que (4.23) não ocorre, temos

$$\inf_{\varepsilon > 0} \int_{\Sigma_{1/n}} |\omega_{\varepsilon}^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu = 0, \quad \forall n > 0.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma 1-forma $\omega_n \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$ que satisfaça a desigualdade

$$\int_{\Sigma_{1/n}} |\omega_n^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu < \frac{1}{n}.$$

Logo, existe uma sequência $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ realizando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n}} |\omega_n^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu = 0. \quad (4.24)$$

No entanto, mostraremos que o limite em (4.24) não pode ocorrer. Para isso, considere as normas

$$\|\omega\|_{\Sigma}^2 := \int_{\Sigma} |\omega^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu, \quad \|\omega\|_{\Sigma_{\delta}}^2 := \int_{\Sigma_{\delta}} |\omega^{\sharp}|^2 e^{-f} d\mu.$$

Pela compacidade de $\mathbb{S}^{d-1} := \{\omega \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]}) : \|\omega\|_{\Sigma}^2 = 1\}$, existe uma subsequência $\{\omega_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ convergindo para uma 1-forma $\omega \in \mathbb{S}^{d-1}$ no sentido $L^2(\Sigma, e^{-f} d\mu)$ quando $j \rightarrow \infty$.

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n_j}} |\omega_{n_j}^\#|^2 e^{-f} d\mu &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n_j}} (|\omega_{n_j}^\#|^2 - |\omega^\#|^2) e^{-f} d\mu + \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n_j}} |\omega^\#|^2 e^{-f} d\mu \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n_j}} (|\omega_{n_j}^\#|^2 - |\omega^\#|^2) e^{-f} d\mu + 1. \end{aligned}$$

Além disso, para cada par de vetores unitários v, w em um espaço com produto interno, vale a próxima desigualdade:

$$\left| \|v\|^2 - \|w\|^2 \right| \leq 2 \|v - w\|.$$

Por isso,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \int_{\Sigma_{1/n_j}} (|\omega_{n_j}^\#|^2 - |\omega^\#|^2) e^{-f} d\mu \right| &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left| \|\omega_{n_j}^\#\|_{\Sigma_{1/n_j}}^2 - \|w\|_{\Sigma_{1/n_j}}^2 \right| \\ &\leq 2 \lim_{j \rightarrow \infty} \|\omega_{n_j}^\# - \omega^\#\|_{\Sigma_{1/n_j}}^2 \leq 2 \lim_{j \rightarrow \infty} \|\omega_{n_j}^\# - \omega^\#\|_{\Sigma}^2 = 0. \end{aligned}$$

Desse modo, concluímos que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n_j}} |\omega_{n_j}^\#|^2 e^{-f} d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_{1/n_j}} (|\omega_{n_j}^\#|^2 - |\omega^\#|^2) e^{-f} d\mu + 1 = 1,$$

contradizendo (4.24).

Agora, o limite em (4.22) é uma consequência direta das desigualdades

$$\begin{aligned} R &= \int_{\Sigma_\delta} |\omega_\varepsilon^\#|^2 e^{-f} d\mu \leq \int_{\Sigma} \rho_\varepsilon^2 |\omega_\varepsilon^\#|^2 e^{-f} d\mu \\ &\leq \int_{\Sigma} |\omega_\varepsilon^\#|^2 e^{-f} d\mu \leq 1, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$.

(Parte II). A prova é análoga à parte (I), fazendo as devidas substituições de $\Delta_{fT}^{[1]}$ por $\Delta_{fN}^{[1]}$. Além disso, devemos notar que o Lema 1.6.4 implica em

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(\eta(|\omega_\varepsilon^\#|^2) + 2h^{\partial\Omega}(N, N)|\omega_\varepsilon^\#|^2 \right) e^{-f} d\sigma &= \int_{\partial\Sigma} \rho_\varepsilon^2 \left(2H_f^{\partial\Sigma} + 2h^{\partial\Omega}(N, N) \right) |\omega_\varepsilon^\#|^2 e^{-f} d\sigma \\ &= \int_{\partial\Sigma} 2\rho_\varepsilon^2 H_f^{\partial\Omega} |\omega_\varepsilon^\#|^2 e^{-f} d\sigma < 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.2. *Seja Ω^{n+1} um domínio ponderado em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta, f -mínima, orientável, com fronteira livre em Ω . Suponha que Σ seja suave ou tenha um conjunto singular satisfazendo*

$\mathcal{H}^{n-2}(\text{sing}(\Sigma)) = 0$ e que o tensor $\text{Ric}_f = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$.

(I). Se Ω é um domínio convexo em \mathbb{R}^{n+1} , então:

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha) + b_1(\Sigma) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fT}^{[1]}$ menores que 2α .

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} b_1(\Sigma) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

(II). Se Ω for um domínio f -média convexo em \mathbb{R}^{n+1} , então:

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H^{n-1}(\Sigma; \mathbb{R}) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fN}^{[1]}$ menor que 2α .

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H^{n-1}(\Sigma; \mathbb{R}) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

Demonstração. Parte (I). Considere o número

$$\beta := \#\{ \text{autovalores de } \Delta_{fT}^{[1]} \text{ que são menores que } 2\alpha \}.$$

Seja k o maior inteiro tal que $d(k) = \frac{n(n+1)}{2}(k-1) + 1 \leq \beta$. Segue diretamente do Teorema 4.2.1 com as definições de β e k que

$$\begin{aligned} \text{Ind}_f(\Sigma) \geq k &\geq \frac{2}{n(n+1)} \beta = \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H_{Tf}^1(\Sigma) \right) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha) + b_1(\Sigma) \right). \end{aligned}$$

Por outro lado, se k é o maior inteiro tal que $d(k) = \frac{n(n+1)}{2}(k-1) + 1 \leq b_1(\Sigma)$, então

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha \text{ e } k \geq \frac{2}{n(n+1)} b_1(\Sigma).$$

A prova da **Parte (II)** é análoga, considerando 1-formas que satisfazem a condição relativa na fronteira. \square

Observação 4.2.1. Se Σ tem $r \geq 1$ componentes de fronteira, então o isomorfismo $H_{Nf}^1(\Sigma) \cong H_1(\Sigma, \partial\Sigma; \mathbb{R})$ junto ao Lema 1.6.5 implicam que $\dim H_{Nf}^1(\Sigma) \geq r - 1$.

O próximo Teorema segue diretamente do Lema 1.6.6 e do Teorema 4.2.2.

Teorema 4.2.3. Seja Ω^3 um domínio ponderado f -média convexo em $(\mathbb{R}^3, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^2 uma superfície compacta, f -mínima, orientável com r componentes de fronteira, gênero g e fronteira livre em Ω . Suponha que o tensor $\text{Ric}_f^\Omega = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$. Então:

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha) + 2g + r - 1 \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fN}^{[1]}$ menores que 2α .

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} (2g + r - 1) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

Finalizaremos esta seção apresentando um exemplo onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha) \geq 1$.

Exemplo 4.2.1. Self-shrinkers no semiespaço euclidiano: Os self-shrinkers do fluxo da curvatura média são definidos como hipersuperfícies conexas, orientáveis, isometricamente imersas $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ cuja função curvatura média satisfaz a equação

$$\langle x, N \rangle = -H.$$

Note que self-shrinkers são hipersuperfícies f -mínimas no espaço ponderado $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com a função peso $f(x) = \frac{|x|^2}{2}$. Logo, $\text{Hess}_f = g_{can}$ e $\alpha = 1$.

Seja $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{n+1} . Definimos o semiespaço euclidiano por $\Omega := \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} \geq 0\}$. Segue que $\eta = e_{n+1}$ e $\partial\Omega = \mathbb{R}^n \times \{0\}$.

Seja Σ um self-shrinker compacto, orientável, com fronteira livre em Ω , é bem conhecido que as funções $\langle \bar{V}, N \rangle$ satisfazem a equação

$$J_f \langle \bar{V}, N \rangle = -\langle \bar{V}, N \rangle, \quad \forall \bar{V} \in \bar{\mathcal{P}}.$$

Para que $\langle \bar{V}, N \rangle$ seja uma autofunção de J_f associada ao autovalor $\lambda = -1 \in (-2\alpha, 0)$, ela deve satisfazer a condição de fronteira

$$\eta \left(\langle \bar{V}, N \rangle \right) + h^{\partial\Omega}(N, N) \langle \bar{V}, N \rangle = 0 \implies e_{n+1} \langle \bar{V}, N \rangle = 0 \text{ sobre } \partial\Sigma.$$

Considere o espaço $Z := \text{span}\{\bar{V} \in \bar{\mathcal{P}} : e_{n+1} \langle \bar{V}, N \rangle = 0 \text{ sobre } \partial\Sigma\}$. A hipótese de Σ ter fronteira livre em Ω implica que $\langle e_{n+1}, N \rangle = 0$ sobre $\partial\Sigma$. Portanto,

$$\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha) \geq \dim Z \geq 1.$$

4.3 Resultados em hipersuperfícies completas não compactas do espaço euclidiano ponderado

Nesta seção suporemos que a imersão $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é completa e não compacta. Fixada uma função peso $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$, nos restringiremos a trabalhar com as 1-formas $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ satisfazendo a condição $\omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$. Considere os seguintes espaços:

$$H_{Tf}^1(\Sigma) = \{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \Delta_f^{[1]}\omega = 0, \omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu) \text{ e } \omega \text{ satisfaz a condição de fronteira absoluta}\},$$

$$H_{Nf}^1(\Sigma) = \{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \Delta_f^{[1]}\omega = 0, \omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu) \text{ e } \omega \text{ satisfaz a condição de fronteira relativa}\}.$$

Nosso propósito é limitar o f -índice de Σ inferiormente com termos envolvendo a dimensão de $H_{Tf}^1(\Sigma)$ ou $H_{Nf}^1(\Sigma)$.

Definimos as seguintes funções de corte: Para cada inteiro positivo r , seja $B(r)$ a bola geodésica (intrínseca) em Σ com raio r e centrada em um ponto fixo $x_0 \in \Sigma$. Como Σ é completa, um argumento dado por [[37], Proposição 2.1] torna possível construir uma família de funções suaves φ_r em Σ tal que $\varphi_r = 1$ em $B(r)$, $\varphi_r \in C_0^\infty(B(2r))$ e

$$|\nabla\varphi_r| \leq \frac{c}{r}$$

para uma constante c dependendo apenas de Σ .

Agora estamos em condições de enunciar o Teorema principal desta seção.

Teorema 4.3.1. *Seja Ω^{n+1} um domínio ponderado ilimitado em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f}d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^n uma hipersuperfície completa não compacta, f -mínima, orientável com fronteira livre em Ω . Assuma que o tensor $\text{Ric}_f^\Omega = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$.*

Então:

(I). *Se Ω é um domínio convexo, então para todo $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha + \lambda_{d(k+1)}(\Delta_{fT}^{[1]}),$$

onde $d(k+1) = \binom{n+1}{2}k + 1$ e $\Delta_{fT}^{[1]}$ é o f -Laplaciano de Hodge atuando sobre as 1-formas $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ satisfazendo a condição absoluta na fronteira e tais que $\omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$.

(II). Se Ω for um domínio f -média convexo, então para todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha + \lambda_{d(k+1)}(\Delta_{fN}^{[1]}),$$

onde $d(k) = \binom{n+1}{2}k + 1$ e $\Delta_{fN}^{[1]}$ é o f -Laplaciano de Hodge atuando sobre as 1-formas $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$ satisfazendo a condição relativa na fronteira e tais que $\omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$.

Demonstração. Ao longo da demonstração, os operadores atuando sobre 1-formas estarão restritos ao subespaço $\{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \omega^\sharp \in L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)\}$.

Parte (I). Seja $\{\psi_j\}$ uma base ortonormal de $L^2(\Sigma, e^{-f}d\mu)$ formada por autofunções do operador de Jacobi J_f , onde ψ_j está associado ao autovalor $\lambda_j(J_f)$. Para cada $d \in \mathbb{N}$, considere a soma direta

$$E^d(\Delta_{fT}^{[1]}) = \bigoplus_{j=1}^d V_{\lambda_j(\Delta_{fT}^{[1]})},$$

onde $V_{\lambda_j(\Delta_{fT}^{[1]})}$ é o espaço das autoformas de $\Delta_{fT}^{[1]}$ associadas ao autovalor $\lambda_j(\Delta_{fT}^{[1]})$.

Seja $\{B(2r)\}$ uma exaustão de Σ por bolas relativamente compactas de raio $2r$ e centradas no mesmo ponto $x_0 \in \Sigma$ fixado. Tome a sequência de funções de corte $\{\varphi_r\}$ definidas conforme discutimos anteriormente.

Assim como no caso compacto, definimos as funções

$$u = \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega^\sharp \rangle = \langle \bar{V}, N \rangle \langle W, \omega^\sharp \rangle - \langle \bar{W}, N \rangle \langle V, \omega^\sharp \rangle$$

onde $\omega \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$, $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$ e V, W são suas projeções em Σ . Então, para cada $r > 0$, considere a família de funções

$$\{v_r\} = \{\varphi_r u\}.$$

Observe que cada função desta família pode ser usada como uma função teste para o operador de estabilidade em $B(2r)$. Por um argumento semelhante ao feito no caso compacto, concluímos que a suposição $d = d(k) = \frac{n(n+1)}{2}(k-1) + 1$ implica na existência de uma 1-forma $\omega_r \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$, para cada $r > 0$, realizando as seguintes relações de ortogonalidade para quaisquer $\bar{V}, \bar{W} \in \bar{\mathcal{P}}$:

$$\int_{\Sigma} \varphi_r \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_r^\sharp \rangle \psi_1 e^{-f} d\mu = \cdots = \int_{\Sigma} \varphi_r \langle X_{\bar{V}, \bar{W}}, \omega_r^\sharp \rangle \psi_{k-1} e^{-f} d\mu = 0. \quad (4.25)$$

O princípio min-max afirma que

$$\begin{aligned} \lambda_k(J_f) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r^2 e^{-f} d\mu &\leq - \int_{B(2r)} \varphi_r u_r J_f(\varphi_r u_r) e^{-f} d\mu \\ &+ \int_{\partial\Sigma \cap B(2r)} \varphi_r u_r \left(\eta(\varphi_r u_r) + h^{\partial\Omega}(N, N) \varphi_r u_r \right) e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

para todo $u_r = \langle X_{\overline{V}, \overline{W}}, \omega_r^\# \rangle$.

Aplicando o Lema 4.2.1 com $\Omega = B(2r)$, $\varphi = \varphi_r$ e $T = |A|^2 + \text{Hess } f(N, N)$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_k(J_f) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r^2 e^{-f} d\mu &\leq \int_{B(2r)} \left(-\varphi_r^2 u_r J_f(u_r) + u_r^2 |\nabla \varphi_r|^2 \right) e^{-f} d\mu \\ &+ \int_{\partial\Sigma \cap B(2r)} \varphi_r^2 \left(u_r \eta(u_r) + h^{\partial\Omega}(N, N) u_r^2 \right) e^{-f} d\sigma, \end{aligned}$$

para quaisquer $\overline{V}, \overline{W} \in \overline{\mathcal{P}}$.

Integrando esta desigualdade em relação a $(\overline{V}, \overline{W}) \in \overline{\mathcal{U}} \times \overline{\mathcal{U}}$ e repetindo cálculos similares ao caso compacto, concluimos que:

$$\begin{aligned} \lambda_k(J_f) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu &\leq - \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \left(\text{Hess } f(\omega_r^\#, \omega_r^\#) + \text{Hess } f(N, N) |\omega_r^\#|^2 \right) e^{-f} d\mu \\ &+ \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \langle \omega_r^\#, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega_r)^\# \rangle e^{-f} d\mu + \int_{B(2r)} |\nabla \varphi_r|^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu \\ &+ \int_{\partial\Sigma \cap B(2r)} \varphi_r^2 \left(2h^{\partial\Omega}(\omega_r^\#, \omega_r^\#) + 2h^{\partial\Omega}(N, N) |\omega_r^\#|^2 \right) e^{-f} d\sigma. \end{aligned}$$

Finalmente, observe que:

- Cada $\varphi_r : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ satisfaz $|\nabla \varphi_r| \leq \frac{c}{r}$.
- $\text{Hess } f(\omega_r^\#, \omega_r^\#) + \text{Hess } f(N, N) |\omega_r^\#|^2 \geq 2\alpha |\omega_r^\#|^2$.
- ω_r ser a combinação linear das primeiras $d(k)$ autoformas de $\Delta_{fN}^{[1]}$ implica que

$$\int_{\Sigma} \varphi_r^2 \langle \omega_r^\#, (\Delta_{fN}^{[1]} \omega_r)^\# \rangle e^{-f} d\mu \leq \lambda_{d(k)}(\Delta_{fN}^{[1]}) \int_{\Sigma} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu.$$

- Pela convexidade de Ω , temos

$$\varphi_r^2 \left(2h^{\partial\Omega}(\omega_r^\#, \omega_r^\#) + 2h^{\partial\Omega}(N, N) |\omega_r^\#|^2 \right) \leq 0.$$

Portanto, para cada $r > 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \lambda_k(J_f) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu &\leq \left(-2\alpha + \lambda_{d(k)}(\Delta_{fN}^{[1]}) \right) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu \\ &+ \frac{c^2}{r^2} \int_{B(2r)} |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu. \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da inequação por $\int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu \neq 0$, vê-se que

$$\lambda_k(J_f) \leq -2\alpha + \lambda_{d(k)}(\Delta_{fN}^{[1]}) + \frac{c^2}{r^2} \frac{\int_{B(2r)} |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu}{\int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 e^{-f} d\mu}.$$

Para completar a demonstração, basta mostrar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^2 \int_{B(2r)} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu}{r^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu} = 0. \quad (4.26)$$

Observe que para cada $r > 0$, ao escolhermos $\omega_r \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$ satisfazendo (4.25), podemos tomá-la de modo que ω_r^\sharp seja unitário na norma $L^2(\Sigma, e^{-f} d\mu)$, ou seja,

$$\int_{\Sigma} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu = 1.$$

Afirmamos a existência de constantes positivas R e r_0 tais que

$$\int_{B(r_0)} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu \geq R > 0, \text{ para todo } r > 0. \quad (4.27)$$

De fato, assumindo por absurdo que (4.27) não ocorre, temos

$$\inf_{r > 0} \int_{B(r)} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu = 0, \quad \forall n > 0.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar uma 1-forma $\omega_n \in E^d(\Delta_{fT}^{[1]})$ satisfazendo a desigualdade

$$\int_{B(n)} |\omega_n^\sharp|^2 e^{-f} d\mu < \frac{1}{n}.$$

Logo, existe uma sequência $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ realizando o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B(n)} |\omega_n^\sharp|^2 e^{-f} d\mu = 0. \quad (4.28)$$

Com um argumento semelhante à prova do Teorema 4.2.1, observa-se que o limite em (4.28) não pode ocorrer.

O limite em (4.26) segue diretamente das desigualdades

$$\begin{aligned} R &\leq \int_{B(r_0)} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu \leq \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu \\ &\leq \int_{B(2r)} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\mu \leq 1, \end{aligned}$$

para qualquer $r > 0$.

(Parte II). A prova é análoga à parte (I), fazendo as devidas substituições de $\Delta_{fT}^{[1]}$ por $\Delta_{fN}^{[1]}$. Além disso, devemos notar que o Lema 1.6.4 implica em

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \varphi_r^2 \left(\eta(|\omega_r^\sharp|^2) + 2h^{\partial\Omega}(N, N)|\omega_r^\sharp|^2 \right) e^{-f} d\sigma &= \int_{\partial\Sigma} \varphi_r^2 \left(2H_f^{\partial\Sigma} + 2h^{\partial\Omega}(N, N) \right) |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\sigma \\ &= \int_{\partial\Sigma} 2\varphi_r^2 H_f^{\partial\Omega} |\omega_r^\sharp|^2 e^{-f} d\sigma < 0. \end{aligned}$$

□

Analogamente a prova do Teorema 4.2.2, obtemos a seguinte versão para hipersuperfícies completas não compactas:

Teorema 4.3.2. *Seja Ω^{n+1} um domínio ponderado ilimitado em $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{can}, e^{-f} d\mu)$ com fronteira não vazia. Seja Σ^n uma hipersuperfície orientável completa não compacta, f -mínima, com fronteira livre em Ω . Assuma que o tensor $\text{Ric}_f^\Omega = \text{Hess } f$ é limitado inferiormente por uma constante $\alpha \geq 0$.*

(I). *Se Ω for um domínio convexo, então:*

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H_{Tf}^1(\Sigma) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fT}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fT}^{[1]}$ menor que 2α .

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{Tf}^1(\Sigma) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

(II). *Se Ω for um domínio f -média convexo, então:*

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \left(\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha) + \dim H_{Nf}^1(\Sigma) \right),$$

onde $\Gamma_{\Delta_{fN}^{[1]}}^+(2\alpha)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_{fN}^{[1]}$ menor que 2α .

$$\text{Ind}_f(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_{Nf}^1(\Sigma) + \Gamma_{J_f}^-(-2\alpha),$$

onde $\Gamma_{J_f}^-(-2\alpha)$ é o número de autovalores negativos de J_f maiores que -2α .

4.4 Resultados em hipersuperfícies completas não compactas de \mathbb{R}^{n+1}

O caso não ponderado ($f = 0$) é de interesse particular e será analisado em detalhes nesta seção.

Com provas análogas aos Teoremas 4.3.1 e 4.3.2, o caso de hipersuperfícies completas não compactas sem fronteira imersas no espaço euclidiano admite os dois seguintes teoremas:

Teorema 4.4.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa não compacta, mínima e orientável em \mathbb{R}^{n+1} . Então para cada $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_k(J) \leq \lambda_{d(k)}(\Delta^{[1]}),$$

onde $d(k) = \binom{n+1}{2}(k-1)+1$ e $\Delta^{[1]}$ é o Laplaciano de Hodge agindo nas 1-formas $\omega \in \Omega^1(\Sigma)$.

Teorema 4.4.2. *Seja Σ^n uma hipersuperfície completa não compacta, mínima e orientável em \mathbb{R}^{n+1} . Então*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H^1(\Sigma),$$

onde $H^1(\Sigma) = \{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \Delta^{[1]}\omega = 0, \omega^\# \in L^2(\Sigma)\}$.

Lembrando que para superfícies temos $\dim H^1(\Sigma) \geq 2g$, onde g denota o gênero de Σ . O Teorema 4.4.2 permite obter a mesma estimativa que Ros em [55], onde foi mostrado que $\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{3}g$. Esta estimativa foi melhorada por Chodosh e Maximo em [28], que estimaram $\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{1}{3}(2g + 4r - 5)$, onde r é a quantidade de fins de Σ .

Em dimensão $n \geq 3$, tomaremos condições nos fins de Σ assim como C. Li em [45], obtendo melhorias de suas estimativas.

Definição 4.4.1. [59] *Suponha $n \geq 3$. Uma hipersuperfície mínima $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é regular no infinito se fora de um conjunto compacto, cada componente conexo de Σ é o gráfico de uma função u sobre um hiperplano P , tal que para todo $x \in P$, vale*

$$|x|^{n-2}|u(x)| + |x|^{n-1}|\nabla u(x)| + |x|^n|\text{Hess } u(x)| \leq C,$$

onde C é alguma constante.

Proposição 4.4.3. [67] *Suponha que $n \geq 3$, Σ^n em \mathbb{R}^{n+1} seja uma hipersuperfície mínima imersa completa com curvatura total finita. Então Σ é regular no infinito.*

Proposição 4.4.4. [45] *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima completa em \mathbb{R}^{n+1} que é regular no infinito. Suponha que Σ tenha t fins. Então existem $t - 1 + b_1(\bar{\Sigma})$ 1-formas harmônicas fechadas linearmente independentes em $L^2(\Sigma)$ com energia de Dirichlet finita.*

O próximo Teorema segue diretamente da junção entre o Teorema 4.4.2 e a Proposição 4.4.4. Observamos que esta cotação inferior para o índice melhora o resultado de C. Li em [45], visto que retiramos o termo envolvendo a nulidade do operador de Jacobi.

Teorema 4.4.5. *Seja Σ^n uma hipersuperfície não compacta, mínima e orientável em \mathbb{R}^{n+1} . Suponha que Σ tenha t fins e curvatura total finita. Então*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)}(t + b_1(\bar{\Sigma}) - 1),$$

onde $b_1(\bar{\Sigma})$ é o primeiro número de Betti da compactação de Σ .

Agora, trataremos o caso em que Σ é uma hipersuperfície mínima com fronteira não vazia. Explicaremos quais são os ajustes a serem feitos para construir formas harmônicas a partir da quantidade dos fins de Σ .

Proposição 4.4.6. *Seja $n \geq 4$ e Σ^n uma hipersuperfície mínima completa em \mathbb{R}^{n+1} com t fins. Então existem t funções harmônicas limitadas linearmente independentes com energia de Dirichlet finita.*

Demonstração. Quando $t = 1$, as funções constantes são harmônicas. Dado $t \geq 2$, tome um domínio compacto K tal que $\Sigma - K = E_1 \cup \dots \cup E_t$, onde E_1, \dots, E_t são os t fins. Para R grande o suficiente, $\Sigma \cap B_R(0)$ tem t componentes de fronteira. Considere as soluções do seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta f_{i,R} = 0 & \text{em } \Sigma \cap B_R(0), \\ f_{i,R} = \frac{1}{t} & \text{sobre } B_R(0) \cap \partial\Sigma, \\ f_{i,R} = \delta_{i,j} & \text{sobre } \partial B_R(0) \cap E_j, j = 1, \dots, t. \end{cases}$$

O Princípio do Máximo afirma que $0 < f_{i,R} < 1$ em $B_R(0) \cap \Sigma$. A teoria de Schauder fornece uma restrição uniforme em $|f_{i,R}|_{C^{2,\alpha}(K)}$ para cada $K \subset B_R(0)$ compacto. Isso nos permite usar Arzela-Ascoli para obter uma subsequência $\{f_{i,R}\}_R$ convergindo para f_i em $C^{2,\beta}$ ($\beta < \alpha$). Seguindo os passos da prova da Proposição 3.1 em [45], mostra-se que as funções f_i são não constantes, linearmente independentes e possuem energia de Dirichlet finita. \square

Lema 4.4.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima completa em \mathbb{R}^{n+1} que é regular no infinito. Suponha que Σ tenha t fins. Então existem $t - 1$ 1-formas $L^2(\Sigma)$ harmônicas fechadas linearmente independentes em Σ , anulando-se em $\partial\Sigma$ e com energia de Dirichlet finita.*

Demonstração. As diferenciais df_1, \dots, df_t das funções construídas acima são 1-formas harmônicas (já que $d \circ \Delta = \Delta^{[1]} \circ d$) que se anulam em $\partial\Sigma$. Observe que a função $f_1 + \dots + f_t$ é o limite de uma sequência de funções harmônicas com valores de contorno 1. O Princípio do Máximo afirma que cada função desta sequência deve ser identicamente 1 e, portanto, a própria função $f_1 + \dots + f_t$ é constante igual a 1. Segue que $df_1 + \dots + df_t = 0$. Suponha, por absurdo, que df_1, \dots, df_j sejam linearmente dependentes para algum $j < t$.

Então $c_1 f_1 + \dots + c_j f_j = c$ para alguma constante c e obtemos a combinação linear não trivial

$$c_1 f_1 + \dots + c_j f_j - c(f_1 + \dots + f_t) = c - c = 0.$$

Contrariando que f_1, \dots, f_t são linearmente independentes. Assim, $\dim \text{span}\{df_1, \dots, df_t\} = t - 1$. \square

O próximo resultado é uma consequência direta do Teorema 4.2.2 junto ao Lema 4.4.1 e apresenta uma versão do Teorema 4.4.2 permitindo que a hipersuperfície mínima Σ tenha fronteira não vazia.

Teorema 4.4.7. *Seja Ω^{n+1} um domínio ilimitado com fronteira não vazia em \mathbb{R}^{n+1} . Seja Σ^n uma hipersuperfície completa não compacta, mínima, orientável com fronteira livre em Ω .*

(I). *Se Ω for um domínio convexo, então:*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_T^1(\Sigma).$$

Além disso, se Σ tem curvatura total finita e t fins, temos $\dim H_T^1(\Sigma) \geq b_1(\bar{\Sigma}) + t - 1$.

(II). *Se Ω for um domínio média convexo, então:*

$$\text{Ind}(\Sigma) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_N^1(\Sigma).$$

Além disso, se Σ tem curvatura total finita e t fins, temos $\dim H_N^1(\Sigma) \geq t - 1$.

4.5 O caso CMC completo não compacto em \mathbb{R}^{n+1}

Iniciaremos a seção relembrando o conceito de índice fraco. Até agora, apenas o problema de Dirichlet usual foi considerado, onde a forma quadrática $Q(u, u) := -\int_{\Sigma} u J u d\mu$ atua sobre todo o espaço das funções suaves $C^\infty(\Sigma)$. Também podemos considerar o chamado problema de Dirichlet torcido, em que a ação de Q é restrita ao subespaço linear das funções $\mathcal{F} = \{u \in C^\infty(\Sigma) : \int_{\Sigma} u d\mu = 0\}$. Foi mostrado em [9] por Barbosa, do Carmo e Eschenburg, que a condição adicional $\int_{\Sigma} u d\mu = 0$ equivale a tomar variações normais preservando o volume. O índice fraco de Σ é definido como a dimensão máxima de qualquer subespaço $V \subset \mathcal{F}$ onde $Q|_{\mathcal{F}}$ é negativa definida; isto é,

$$\text{Ind}_w(\Sigma) = \max\{\dim V : V \subset \mathcal{F}, Q|_{\mathcal{F}}(u, u) < 0 \quad \forall u \in V\},$$

e coincide com o número de autovalores negativos do operador L (ver subseção 1.2.1).

Em geral, decorre facilmente do princípio min-max que o espectro e o espectro torcido estão interligados da maneira

$$\lambda_1(J) < \lambda_1(L) \leq \lambda_2(J) \leq \lambda_2(L) \leq \lambda_3(J) \leq \lambda_3(L) \leq \dots$$

Seguindo as ideias em [24] e [23], apresentamos o Lema:

Lema 4.5.1. *Seja Σ^2 uma superfície CMC orientável em \mathbb{R}^3 . Então temos*

$$Lu = -H^2u + H \langle AV, \omega^\# \rangle - 2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle A, \nabla \omega^\# \rangle + \langle V, \Delta^{[1]} \omega^\# \rangle,$$

e

$$L\bar{u} = -H^2\bar{u} + H \langle AV, (\star\omega)^\# \rangle - 2 \langle \bar{V}, N \rangle \langle A, \nabla (\star\omega)^\# \rangle + \langle V, \Delta^{[1]} (\star\omega)^\# \rangle.$$

Teorema 4.5.1. *Seja Ω^3 um domínio média convexo ilimitado com fronteira não vazia em \mathbb{R}^3 . Seja Σ^2 uma hipersuperfície CMC, completa não compacta, orientável, com fronteira livre em Ω . Então, para cada $k \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda_k(L) \leq -\frac{1}{2}H^2 + \lambda_{d(k+1)}(\Delta_N^{[1]}),$$

onde $d(k+1) = 6k+1$ e $\Delta_N^{[1]}$ é o Laplaciano de Hodge restrito ao espaço $\{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \omega^\# \in L^2(\Sigma), \omega \text{ satisfaz a condição de fronteira absoluta}\}$.

Demonstração. Seja $\{\psi_j\}$ uma base ortonormal de $L^2(\Sigma)$ formada por autofunções do operador de Jacobi J , onde ψ_j está associado ao autovalor $\lambda_j(J)$. Para cada $d \in \mathbb{N}$, considere a soma direta

$$E^d(\Delta_N^{[1]}) = \bigoplus_{j=1}^d V_{\lambda_j(\Delta_N^{[1]})},$$

onde $V_{\lambda_j(\Delta_N^{[1]})}$ é o espaço das autoformas de $\Delta_N^{[1]}$ associadas ao autovalor $\lambda_j(\Delta_N^{[1]})$.

Seja $\{B(2r)\}$ uma exaustão de Σ por bolas relativamente compactas de raio $2r$ e centradas no mesmo ponto fixo $x_0 \in \Sigma$. Tome a sequência de funções de corte $\{\varphi_r\}$ definida anteriormente.

Para cada $r > 0$, nosso primeiro objetivo é encontrar $d = d(k)$ e algum $\omega_r \in E^d(\Delta_N^{[1]})$, $\omega_r \neq 0$, de modo que as funções $v_r := \varphi_r u_r = \varphi_r \langle \bar{V}, \omega_r^\# \rangle$ e $\bar{v}_r := \varphi_r \bar{u}_r = \langle \bar{V}, (\star\omega_r)^\# \rangle$ cumpram as condições de ortogonalidade

$$\int_{\Sigma} \varphi_r \langle \bar{V}, \omega_r^\# \rangle \psi_j d\mu = \int_{\Sigma} \varphi_r \langle \bar{V}, (\star\omega_r)^\# \rangle \psi_j d\mu = 0, \quad (4.29)$$

para quaisquer $\bar{V} \in \bar{\mathcal{P}}$ e $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Como $\dim \bar{\mathcal{P}} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, o sistema 4.29 é composto de $6(k-1)$ equações lineares homogêneas na incógnita $\omega_r \in E^d(\Delta_N^{[1]})$.

Portanto, se $d = d(k) = 6k - 5$, existe pelo menos uma 1-forma não trivial $\omega_r \in E^d(\Delta_N^{[1]})$ tal que v_r e \bar{v}_r são $L^2(\Sigma)$ -ortogonais com as primeiras $k-1$ autofunções de J para todo $\bar{V} \in \bar{\mathcal{P}}$. Assim como na prova do Teorema 4.3.1, o princípio min-max junto ao Lema 4.2.1 implicam que

$$\begin{aligned} \bullet \lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r^2 d\mu &\leq \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r J_f(u_r) + u_r^2 |\nabla \varphi_r|^2 d\mu \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma \cap B(2r)} \varphi_r^2 \left(u_r \eta(u_r) + h^{\partial \Omega}(N, N) u_r^2 \right) d\sigma, \\ \bullet \lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \bar{u}_r^2 d\mu &\leq \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \bar{u}_r J_f(\bar{u}_r) + \bar{u}_r^2 |\nabla \varphi_r|^2 d\mu \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma \cap B(2r)} \varphi_r^2 \left(\bar{u}_r \eta(\bar{u}_r) + h^{\partial \Omega}(N, N) \bar{u}_r^2 \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.5.1:

$$\begin{aligned} \lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r^2 d\mu &\leq -H^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r^2 d\mu + H \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r \langle V, A\omega_r^\# \rangle d\mu \\ &\quad - 2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r \langle \bar{V}, N \rangle \langle A, \nabla \omega_r^\# \rangle d\mu + \int_{B(2r)} \varphi_r^2 u_r \langle V, (\Delta_N^{[1]}\omega_r)^\# \rangle d\mu \\ &\quad + \int_{B(2r)} u_r^2 |\nabla \varphi_r|^2 d\mu + \int_{\partial \Sigma \cap B(2r)} \varphi_r^2 \left(u_r \langle \bar{V}, \nabla_\eta \omega_r^\# \rangle + h^{\partial \Omega}(N, N) u_r^2 \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Integrando em relação a $\bar{V} \in \bar{\mathcal{U}}$:

$$\begin{aligned} \lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu &\leq -H^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu + H \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \langle \omega_r^\#, A\omega_r^\# \rangle d\mu \\ &\quad + \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \langle \omega_r^\#, (\Delta_N^{[1]}\omega_r)^\# \rangle d\mu + \int_{B(2r)} |\nabla \varphi_r|^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu \\ &\quad + \int_{\partial \Sigma \cap B(2r)} \varphi_r^2 \left(\langle \omega_r^\#, \nabla_\eta \omega_r^\# \rangle + h^{\partial \Omega}(N, N) |\omega_r^\#|^2 \right) d\sigma, \end{aligned}$$

A suposição de que Σ tem fronteira livre em Ω implica que $\omega_r^\#$ e N formam uma base ortogonal para o espaço tangente de $\partial \Omega$. Além disso, o Lema 1.6.3 afirma que $\langle \omega_r^\#, \nabla_\eta \omega_r^\# \rangle = h^{\partial \Omega}(\omega_r^\#, \omega_r^\#)$. Logo,

$$\langle \omega_r^\#, \nabla_\eta \omega_r^\# \rangle + h^{\partial \Omega}(N, N) |\omega_r^\#|^2 = H^{\partial \Omega} |\omega_r^\#|^2 \leq 0,$$

já que Ω é média convexo.

Aplicando os mesmos argumentos à função $\bar{v}_r := \varphi_r \bar{u}_r$, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu &\leq -H^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu + H \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \langle (\star\omega_r)^\#, A(\star\omega_r)^\# \rangle d\mu \\ &\quad + \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \langle (\star\omega_r)^\#, (\Delta_N^{[1]} \star\omega_r)^\# \rangle d\mu + \int_{B(2r)} |\nabla\varphi_r|^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu. \end{aligned}$$

Somando essas duas últimas desigualdades, encontramos

$$\begin{aligned} 2\lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu &\leq -2H^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu + 2 \int_{B(2r)} |\nabla\varphi_r|^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu \\ &\quad + H \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \left(\langle \omega_r^\#, A\omega_r^\# \rangle + \langle (\star\omega_r)^\#, A(\star\omega_r)^\# \rangle \right) d\mu \\ &\quad + \int_{B(2r)} \varphi_r^2 \left(\langle \omega_r^\#, (\Delta_N^{[1]}\omega_r)^\# \rangle + \langle (\star\omega_r)^\#, (\Delta_N^{[1]}\star\omega_r)^\# \rangle \right) d\mu \end{aligned}$$

Por fim, observe que:

- Cada φ_r é uma função não negativa com $\varphi_r \equiv 1$ em $B(r)$ e $|\nabla\varphi_r| < \frac{c}{r}$.
- $\langle \omega_r^\#, A\omega_r^\# \rangle + \langle (\star\omega_r)^\#, A(\star\omega_r)^\# \rangle = H|\omega^\#|^2$.
- ω ser a combinação linear das primeiras $d(k)$ autoformas de $\Delta_N^{[1]}$ implica que

$$\int_{\Sigma} \langle \omega^\#, (\Delta_N^{[1]}\omega)^\# \rangle d\mu = \int_{\Sigma} \langle (\star\omega)^\#, (\Delta_N^{[1]}\star\omega)^\# \rangle d\mu \leq \lambda_{d(k)}(\Delta_N^{[1]}) \int_{\Sigma} |\omega^\#|^2 d\mu.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda_k(J) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu &\leq -\frac{1}{2}H^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu + \frac{c^2}{r^2} \int_{B(2r)} |\omega_r^\#|^2 d\mu \\ &\quad + \lambda_{d(k)}(\Delta_N^{[1]}) \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por $\int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu \neq 0$,

$$\lambda_k(J) \leq -\frac{1}{2}H^2 + \lambda_{d(k)}(\Delta_N^{[1]}) + \frac{c^2 \int_{B(2r)} |\omega_r^\#|^2 d\mu}{r^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu}.$$

Assim como na prova do Teorema 4.3.1, podemos provar que vale o limite

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{c^2 \int_{B(2r)} |\omega_r^\#|^2 d\mu}{r^2 \int_{B(2r)} \varphi_r^2 |\omega_r^\#|^2 d\mu} = 0.$$

Para finalizar a prova, basta observar que $\lambda_k(L) \leq \lambda_{k+1}(J)$. □

Analogamente as seções anteriores, a relação entre os autovalores de J e $\Delta_T^{[1]}$ (ou $\Delta_N^{[1]}$) nos permitirá estimar o índice inferiormente, considerando as 1-formas que cumprem a condição absoluta (ou relativa) na fronteira.

Teorema 4.5.2. *Seja Ω^3 um domínio média convexo ilimitado com fronteira não vazia em \mathbb{R}^3 . Seja Σ^2 uma hipersuperfície CMC, completa não compacta, orientável, com fronteira livre em Ω .*

(I).

$$\text{Ind}_w(\Sigma) \geq \left\lfloor \frac{1}{6} \left(\Gamma_{\Delta_T^{[1]}}^+ \left(\frac{1}{2} H^2 \right) + \dim H_T^1(\Sigma) - 1 \right) \right\rfloor,$$

onde $\Gamma_{\Delta_T^{[1]}}^+ \left(\frac{1}{2} H^2 \right)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta_T^{[1]}$ menor que $\frac{1}{2} H^2$ e $H_T^1(\Sigma) = \ker \Delta_T^{[1]}$.

(II).

$$\text{Ind}_w(\Sigma) \geq \left\lfloor \frac{1}{6} \left(\dim H_T^1(\Sigma) - 1 \right) \right\rfloor + \Gamma_L^- \left(-\frac{1}{2} H^2 \right),$$

onde $\Gamma_L^- \left(-\frac{1}{2} H^2 \right)$ é o número de autovalores negativos de L maiores que $-\frac{1}{2} H^2$.

Demonstração. Parte (I). Considere o número

$$\beta := \# \left\{ \text{autovalores de } \Delta_T^{[1]} \text{ que são menores que } \frac{1}{2} H^2 \right\}.$$

Seja k o maior inteiro tal que $d(k+1) = 6k+1 \leq \beta$. Segue diretamente do Teorema 4.5.1 com as definições de β e k que

$$\text{Ind}_w(\Sigma) \geq k = \left\lfloor \frac{\beta - 1}{6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{6} \left(\Gamma_{\Delta_T^{[1]}}^+ \left(\frac{1}{2} H^2 \right) + \dim H_T^1(\Sigma) - 1 \right) \right\rfloor.$$

Parte (II). Seja k o maior inteiro tal que $d(k+1) = 6k+1 \leq \dim H_T^1(\Sigma)$. Então

$$\lambda_k(L) \leq -\frac{1}{2} H^2.$$

Existem pelo menos k autovalores de L menores ou iguais a $-\frac{1}{2} H^2$. Finalmente, observe que

$$k = \left\lfloor \frac{1}{6} \left(\dim H_T^1(\Sigma) - 1 \right) \right\rfloor.$$

□

As técnicas usadas nas provas anteriores também se aplicam de forma análoga ao caso em que uma hipersuperfície Σ tem fronteira vazia. Finalizamos esta seção com o seguinte resultado:

Teorema 4.5.3. *Seja Σ^2 uma hipersuperfície CMC, completa não compacta, orientável em \mathbb{R}^3 . Então:*

(I). Para cada $k \in \mathbb{N}$:

$$\lambda_k(L) \leq -\frac{1}{2} H^2 + \lambda_{d(k+1)}(\Delta^{[1]}),$$

onde $d(k+1) = 6k+1$ e $\Delta^{[1]}$ é o Laplaciano de Hodge restrito ao espaço $\{\omega \in \Omega^1(\Sigma) : \omega^\sharp \in L^2(\Sigma)\}$.

(II).

$$\text{Ind}_w(\Sigma) \geq \left\lfloor \frac{1}{6} \left(\Gamma_{\Delta^{[1]}}^+ \left(\frac{1}{2} H^2 \right) + \dim H^1(\Sigma) - 1 \right) \right\rfloor,$$

onde $\Gamma_{\Delta^{[1]}}^+ \left(\frac{1}{2} H^2 \right)$ é o número de autovalores positivos de $\Delta^{[1]}$ menores que $\frac{1}{2} H^2$ e $H^1(\Sigma) = \ker \Delta^{[1]}$.

(III).

$$\text{Ind}_w(\Sigma) \geq \left\lfloor \frac{1}{6} \left(\dim H^1(\Sigma) - 1 \right) \right\rfloor + \Gamma_L^- \left(-\frac{1}{2} H^2 \right),$$

onde $\Gamma_L^- \left(-\frac{1}{2} H^2 \right)$ é o número de autovalores negativos de L maiores que $-\frac{1}{2} H^2$.

Capítulo 5

ÍNDICE DE MORSE DE HIPERSUPERFÍCIES EM ESPAÇOS PONDERADOS

Ao longo deste capítulo, serão considerados os seguintes tipos de crescimento de volume:

Definição 5.0.1. *Sejam $x \in M$ e $V(r)$ o volume da bola geodésica $B(x, r)$ na métrica g . Dizemos que (M, g) tem crescimento subexponencial se*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln V(r)}{r} = 0.$$

Dizemos que (M, g) tem crescimento de volume polinomial de grau no máximo k se

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{r^k} < \infty.$$

Dizemos que (M, g) tem crescimento de volume k -subpolinomial se

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{V(r)}{r^k} = 0.$$

Estas definições não dependem da escolha do ponto $x \in M$. Note que se (M, g) tem crescimento de volume polinomial de grau no máximo k , então ela tem crescimento de volume k' -subpolinomial para qualquer $k' > k$.

5.1 Resultados em superfícies fechadas f -estáveis

Nesta seção classificaremos quais são as possíveis superfícies fechadas J_f -estáveis com curvatura média ponderada constante H_f , satisfazendo uma desigualdade integral. Começaremos fazendo alguns cálculos simples que nos permitem reescrever J_f de maneira adequada.

Seja $\Sigma \subset M$ uma hipersuperfície orientável e considere N um campo vetorial normal unitário globalmente definido sobre Σ . Denotaremos por A o operador de forma associado a N e por H a curvatura média de Σ ; isto é, o traço de A . Também denotaremos por K a curvatura Gaussiana de Σ e por \overline{Sect}_Σ a curvatura seccional de M restrita a Σ .

Sejam $\{E_1, E_2\}$ um referencial ortonormal em $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e $\{a_{ij}\}$ os coeficientes de A neste referencial. Aplicando a equação de Gauss

$$K = \overline{Sect}_\Sigma - g(A(X), Y)^2 + g(A(X), X)g(A(Y), Y),$$

obtemos

$$K - \overline{Sect}_\Sigma = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{1}{2} \left((a_{11} + a_{22})^2 - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^2 \right) = \frac{1}{2} (H^2 - |A|^2).$$

Logo,

$$\overline{Sect}_\Sigma = K - \frac{H^2}{2} + \frac{|A|^2}{2}.$$

Além disso, sabemos que

$$\frac{S}{2} = \overline{Sect}_\Sigma + \text{Ric}(N, N).$$

Relembrando que $S_\infty = S + 2\bar{\Delta}f - |\bar{\nabla}f|^2$ e $H_f = H + g(N, \bar{\nabla}f)$, podemos reescrever o potencial do operador de estabilidade da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} |A|^2 + \text{Ric}_f(N, N) &= \frac{S}{2} - K + \frac{H^2}{2} + \frac{|A|^2}{2} + \text{Hess } f(N, N) \\ &= \frac{1}{2} S_\infty - \Delta_M f + \frac{1}{2} |\bar{\nabla}f|^2 - K + \frac{H^2}{2} + \frac{|A|^2}{2} + \text{Hess } f(N, N) \\ &= \frac{1}{2} S_\infty - \left(\Delta_\Sigma f - Hg(\bar{\nabla}f, N) + \text{Hess } f(N, N) \right) + \frac{1}{2} \left(|\nabla f|^2 + g(\bar{\nabla}f, N)^2 \right) \\ &\quad - K + \frac{H^2}{2} + \frac{|A|^2}{2} + \text{Hess } f(N, N) \\ &= \frac{1}{2} S_\infty - \Delta_\Sigma f - K + \frac{1}{2} \left(|\nabla f|^2 + |A|^2 + H_f^2 \right). \end{aligned}$$

A próxima proposição melhora o interessante Teorema 2.1 de E.M. Fan em [34], que por sua vez generalizou um resultado devido a Schoen e Yau. Este último, enuncia que se (M^3, g) é orientada e tem curvatura escalar positiva, então não existe superfície mínima imersa estável compacta com gênero positivo.

Proposição 5.1.1. *Seja $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma variedade Riemanniana ponderada, e seja $\Sigma \subset M$ uma superfície fechada f -estável, com curvatura média ponderada H_f constante e satisfazendo*

$$\int_\Sigma S_\infty + \frac{1}{2} |\nabla f|^2 d\mu \geq 0. \quad (5.30)$$

Então Σ é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 ou ao toro plano \mathbb{T}^2 . Além disso,

(a) Se vale a desigualdade estrita, então Σ é homeomorfa a \mathbb{S}^2 ;

(b) Se Σ é homeomorfo a \mathbb{T}^2 , então Σ é f -mínima, totalmente geodésica e vale $\int_{\Sigma} S_{\infty} + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 d\mu = 0$.

Demonstração. A hipótese de Σ ser f -estável nos diz que o operador de estabilidade $L = \Delta + \frac{1}{2}S_{\infty} - \Delta_{\Sigma}f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 - K$ é não negativo. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int_{\Sigma} \varphi \cdot \left(\Delta + \frac{1}{2}S_{\infty} - \Delta_{\Sigma}f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 - K \right) (\varphi) d\mu_f \\ &\implies \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2}S_{\infty} - \Delta_{\Sigma}f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 \right) \varphi^2 d\mu_f \leq \int_{\Sigma} (|\nabla \varphi|^2 + K\varphi^2) d\mu_f \end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma)$. Tomando $\varphi = e^{f/2}$ e aplicando o Teorema de Gauss-Bonnet junto ao Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\Sigma} \left(\frac{1}{2}S_{\infty} - \Delta_{\Sigma}f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 \right) e^f d\mu_f \leq \int_{\Sigma} |\nabla(e^{f/2})|^2 d\mu_f + \int_{\Sigma} K e^f d\mu_f \\ &\implies \int_{\Sigma} \frac{1}{2}S_{\infty} - \Delta_{\Sigma}f + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu \leq \int_{\Sigma} \left| \frac{1}{2}e^{f/2} \cdot \nabla f \right|^2 d\mu_f + \int_{\Sigma} K d\mu \\ &\implies \int_{\Sigma} \frac{1}{2}S_{\infty} - \Delta_{\Sigma}f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu \leq \int_{\Sigma} K d\mu \leq 2\pi\chi(\Sigma) \\ &\implies \int_{\Sigma} \frac{1}{2}S_{\infty} + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2}H_f^2 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu \leq 2\pi\chi(\Sigma). \end{aligned}$$

A condição 5.30 implica que o lado esquerdo da desigualdade é não negativo, portanto, só pode ocorrer $\chi(\Sigma) = 2$ ou $\chi(\Sigma) = 0$. Sendo assim, Σ é homeomorfa, respectivamente, a esfera \mathbb{S}^2 ou ao toro plano \mathbb{T}^2 . Em particular, a desigualdade estrita implica em $\chi(\Sigma) = 2$. Além disso, $\chi(\Sigma) = 0$ só ocorre quando $|A|^2 \equiv 0$, $H_f^2 \equiv 0$ e $\int_{\Sigma} S_{\infty} + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 d\mu = 0$. \square

Corolário 5.1.1. *Seja (M^3, g) uma variedade orientada e $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície CMC imersa estável compacta. Se a curvatura escalar S de M satisfaz $\int_{\Sigma} S d\mu \geq 0$, então Σ tem gênero um ou zero. Além disso, se o gênero de Σ é um, então Σ é totalmente geodésica e $\int_{\Sigma} S d\mu = 0$.*

Observação 5.1.1. *Um caso particular interessante em que se aplica a Proposição 5.1.1 é quando ocorre a desigualdade pontual $S_{\infty} + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \geq 0$. Neste caso, se Σ é homeomorfo a \mathbb{T}^2 , então Σ é f -mínima, totalmente geodésica e $S_{\infty} + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 \equiv 0$.*

5.2 Operadores com f -índice zero em superfícies completas não compactas

Dado um operador L sobre $C_0^{\infty}(\Sigma)$, definimos as duas seguintes formas quadráticas associadas a L :

- **Forma quadrática sem peso:** $Q(L)(\varphi, \varphi) := -\int_{\Sigma} \varphi L\varphi d\mu$.

• **Forma quadrática ponderada:** $Q_f(L)(\varphi, \varphi) := - \int_{\Sigma} \varphi L \varphi d\mu_f$.

Ambas definidas sobre $C_0^\infty(\Sigma)$.

Dado um operador do tipo Schrodinger $L_f = \Delta_f + W$, onde W é uma função localmente integrável, o intuito desta seção é associar o índice ponderado $Q_f(L_f)$ com o índice sem peso $Q(\tilde{L})$ de um operador $\tilde{L} = \Delta + W + W_f$, onde a função W_f depende da função peso f . A partir dessa associação entre os índices, poderemos estudar como a f -estabilidade de L_f sobre Σ tem implicações na topologia de Σ , através da estabilidade do operador associado \tilde{L} .

Proposição 5.2.1. *Seja $(\Sigma, g, e^{-f}d\mu)$ uma variedade Riemanniana ponderada e W uma função localmente integrável em Σ . Então valem as duas seguintes relações:*

(I): $\Delta_f + W$ ter f -índice zero implica que $\Delta + W + \left(\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right)$ tem índice zero.

(II): Para cada $0 < \varepsilon < 1$, $\Delta_f + W$ ter f -índice zero implica que $\Delta + (1 - \varepsilon)W - \frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}|\nabla f|^2$ tem índice zero.

Demonstração. (I): Dada qualquer $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$, temos

$$\nabla(\varphi \cdot e^{f/2}) = \varphi \nabla e^{f/2} + e^{f/2} \nabla \varphi = e^{f/2} \left(\nabla \varphi + \frac{\varphi}{2} \nabla f \right).$$

Suponha que o operador $\Delta_f + W$ tem f -índice zero. Tome a função teste $e^{f/2} \cdot \varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$, então

$$\begin{aligned} 0 &\leq - \int_{\Sigma} (e^{f/2} \cdot \varphi) \cdot (\Delta_f + W)(e^{f/2} \cdot \varphi) d\mu_f & (5.31) \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla(e^{f/2} \cdot \varphi)|^2 - W \varphi^2 e^f d\mu_f \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla \varphi + \frac{\varphi}{2} \nabla f|^2 - W \varphi^2 d\mu \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 + \varphi g(\nabla \varphi, \nabla f) + \frac{\varphi^2}{4} |\nabla f|^2 - W \varphi^2 d\mu. \end{aligned}$$

Segue diretamente do Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\varphi^2 \cdot \nabla f) d\mu = \int_{\Sigma} \varphi^2 \Delta f + g(\nabla \varphi^2, \nabla f) d\mu \\ &= \int_{\Sigma} \varphi^2 \Delta f + 2\varphi g(\nabla \varphi, \nabla f) d\mu \\ \implies \int_{\Sigma} \varphi g(\nabla \varphi, \nabla f) d\mu &= -\frac{1}{2} \int_{\Sigma} \varphi^2 \Delta f d\mu. & (5.32) \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade 5.32 na desigualdade 5.31, temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 + \varphi g(\nabla\varphi, \nabla f) + \frac{\varphi^2}{4} |\nabla f|^2 - W\varphi^2 d\mu \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - \frac{\varphi^2}{2} \Delta f + \frac{\varphi^2}{4} |\nabla f|^2 - W\varphi^2 d\mu \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - \left(W + \frac{1}{2} \Delta f - \frac{1}{4} |\nabla f|^2 \right) \varphi^2 d\mu.
\end{aligned}$$

Note que toda função suave com suporte compacto em Σ pode ser escrita na forma $\varphi \cdot e^{f/2}$ para alguma função φ com suporte compacto em Σ . Portanto, o operador $\Delta + W + \left(\frac{1}{2} \Delta f - \frac{1}{4} |\nabla f|^2 \right)$ tem índice zero.

(II):

Utilizando a técnica anterior e a Desigualdade de Cauchy com ε , obtemos:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Sigma} |(\nabla e^{-f/2} \cdot \varphi)|^2 - (1 - \varepsilon) \left(W - \frac{1}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 \right) \varphi^2 e^{-f} d\mu \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi - \frac{\varphi}{2} \nabla f|^2 - (1 - \varepsilon) \left(W - \frac{1}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 \right) \varphi^2 d\mu_f \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - \varphi g(\nabla\varphi, \nabla f) + \frac{\varphi^2}{4} |\nabla f|^2 - (1 - \varepsilon) \left(W - \frac{1}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 \right) \varphi^2 d\mu_f \\
&\geq \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - \varepsilon |\nabla\varphi|^2 - \frac{\varphi^2}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 + \frac{\varphi^2}{4} |\nabla f|^2 - (1 - \varepsilon) \left(W - \frac{1}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 \right) \varphi^2 d\mu_f \\
&= \int_{\Sigma} (1 - \varepsilon) |\nabla\varphi|^2 - \frac{(1 - \varepsilon)\varphi^2}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 - (1 - \varepsilon) \left(W - \frac{1}{4\varepsilon} |\nabla f|^2 \right) \varphi^2 d\mu_f \\
&= (1 - \varepsilon) \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - W\varphi^2 d\mu_f \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Observação 5.2.1. A curvatura escalar de Perelman em $(M, g, e^{-f} d\mu)$ é definida por $S_{\infty} = S + 2\bar{\Delta}f - |\bar{\nabla}f|^2$. Então a curvatura de Perelman S_{∞}^{Σ} restrita a superfície Σ é dada por $S_{\infty}^{\Sigma} = S_{\Sigma} + 2\Delta f - |\nabla f|^2$. Note que $\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 = \frac{1}{4}(S_{\infty}^{\Sigma} - S_{\Sigma})$.

Motivados pela Proposição 5.2.1, para cada operador de Schrodinger $L_f = \Delta_f + W$, associamos o operador $\tilde{L} := \Delta + W + \left(\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 \right)$ e a família de operadores $\tilde{L}_{\varepsilon} := \Delta + (1 - \varepsilon)W - \frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}|\nabla f|^2$, onde $0 < \varepsilon < 1$. Com esta notação, a Proposição 5.2.1 afirma que $Q(\tilde{L})(\varphi, \varphi) = Q_f(L_f)(\varphi \cdot e^{f/2}, \varphi \cdot e^{f/2})$ e $Q(\tilde{L}_{\varepsilon})(\varphi \cdot e^{-f/2}, \varphi \cdot e^{-f/2}) \geq Q_f(L_f)(\varphi, \varphi)$, para qualquer função suave φ com suporte compacto em Σ . Em particular, os índices de $Q_f(L_f)$ e $Q(\tilde{L})$ são iguais, enquanto o índice de $Q(\tilde{L}_{\varepsilon})$ é menor ou igual que o índice de $Q_f(L_f)$. A ideia principal desta seção é associar essas relações com os resultados obtidos

por Bérard e Castillon em [14] para deduzir implicações topológicas em (Σ, g) quando a forma $Q_f(L_f)$ for não negativa.

Teorema 5.2.2. [14] *Seja (Σ, g) uma superfície Riemanniana completa não compacta, e seja W uma função localmente integrável sobre Σ , com W_- integrável. Assuma que o operador $\Delta + W - aK$ é não negativo sobre Σ , e ocorre alguma das condições*

(i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou

(ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou

(iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.

Então,

(A) *A superfície (Σ, g) tem topologia finita, e no máximo crescimento de volume quadrático. Em particular, (Σ, g) é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos.*

(B) *A função W é integrável em (Σ, g) , e*

$$\int_{\Sigma} W d\mu \leq 2\pi a \chi(\Sigma).$$

(C) *Se $\int_{\Sigma} W d\mu = 2\pi a \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático, e $aK + W \equiv 0$ em q.t.p. de Σ .*

As próximas proposições resultam imediatamente de uma junção dos resultados na proposição 5.2.1 e Teorema 5.2.2. Enunciaremos as versões em que o operador $L_f = \Delta_f + W - aK$ estará associado ao operador $\tilde{L} := \Delta + W + \left(\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right) - aK$, onde a é uma constante positiva. É importante ressaltar que também existem versões semelhantes quando associamos $L_f = \Delta_f + W - aK$ com a família de operadores $\tilde{L}_{\varepsilon} := \Delta + (1 - \varepsilon)W - \frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}|\nabla f|^2 - aK$, onde $0 < \varepsilon < 1$. As devidas alterações nos enunciados são postas na próxima observação.

Observação 5.2.2. *As segundas versões das seguintes proposições são obtidas trocando-se os termos $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ por $(1 - \varepsilon)W - \frac{1-\varepsilon}{4\varepsilon}|\nabla f|^2$.*

Proposição 5.2.3. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa não compacta, e seja W uma função localmente integrável em Σ , com $\left(W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right)_-$ integrável com respeito a $d\mu$. Assuma que o operador $\Delta_f + W - aK$ tem f -índice zero sobre Σ , e que ocorre alguma das condições*

(i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou

- (ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou
 (iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.
 Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático. Em particular, (Σ, g) é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana fechada com um número finito de pontos removidos.

(B) A função $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 d\mu \leq 2\pi a \chi(\Sigma).$$

(C) If $\int_{\Sigma} W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 d\mu = 2\pi a \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 - aK \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .

Como consequência da Proposição 5.2.3, tomando $W = K$ e $a = 1$, conseguimos uma variação do Teorema de Huber para superfícies Riemannianas ponderadas.

Proposição 5.2.4. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa. Suponha que a parte negativa $(\frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_{\Sigma}^{\infty})_-$ seja integrável em Σ . Então,*

(i) (Σ, g) tem topologia finita e é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana fechada com um número finito de pontos removidos.

(ii) $\frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_{\Sigma}^{\infty}$ é integrável e obtemos uma variação da Desigualdade de Cohn-Vossen

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_{\Sigma}^{\infty} d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

Demonstração. A partir das identidades $S_{\Sigma}^{\infty} = S_{\Sigma} + 2\Delta f - |\nabla f|^2$ e $S_{\Sigma} = 2K$, segue que $K + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}K + \frac{1}{4}S_{\Sigma}^{\infty}$. \square

Observação 5.2.3. *A parte (ii) da Proposição 5.2.4 versão 2 (fazendo a troca dita na Observação 5.2.2) afirma que*

$$\int_{\Sigma} K d\mu \leq \frac{2\pi}{1-\varepsilon} \chi(\Sigma) + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Sigma} |\nabla f|^2 d\mu,$$

para cada $0 < \varepsilon < 1$.

Vale destacar o caso em que $W_- \equiv 0$, onde temos o seguinte resultado:

Proposição 5.2.5. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa não compacta, e seja q uma função localmente integrável em Σ com $q + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 \geq 0$. Assuma que o*

operador $\Delta_f + q - aK$ tem f -índice zero sobre Σ , e ocorre alguma das condições

(i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou

(ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou

(iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.

Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem, no máximo, crescimento de volume quadrático e é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou \mathbb{C}^\bullet com métricas padrão.

(B) A função $q + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} q + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 d\mu \leq 2\pi a \chi(\Sigma)$$

(C) Se Σ é um cilindro, então (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume linear e $q + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 \equiv 0$.

O próximo resultado é devido a Da Silveira em [61] e também pode ser adaptado para obter informações em variedades Riemannianas ponderadas.

Proposição 5.2.6. [61] *Seja (Σ, g) uma variedade Riemanniana completa não compacta conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos e seja $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua sobre Σ . Assuma que $q \geq 0$. Então o operador $L = \Delta + q$ é positivo semi-definido em Σ se, e somente se, $q \equiv 0$.*

Proposição 5.2.7. *Seja Σ uma superfície completa não compacta de uma variedade Riemanniana tridimensional ponderada $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos. Seja $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua sobre Σ tal que $q + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 \geq 0$. Então o operador $L_f = \Delta_f + q$ tem f -índice zero se, e somente se, $q + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 \equiv 0$.*

5.3 Operador de estabilidade

Nesta seção obteremos um resultado de classificação análogo aos anteriores, sendo aplicado ao operador de estabilidade. A próxima proposição estende o Teorema 3.3 de Espinar em [33], onde foi tomado $c = \frac{1}{4}$. Lembramos que na subseção 4.2 reescrevemos o operador de estabilidade como

$$J_f = \Delta_f + \frac{1}{2}S_\infty - \Delta_\Sigma f - K + \frac{1}{2}(|\nabla f|^2 + |A|^2 + H_f^2).$$

Proposição 5.3.1. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa não compacta f -estável com curvatura média ponderada constante H_f , onde $S_\infty + c|\nabla f|^2 > 0$ para algum $c \in (0, \frac{1}{2})$. Suponha que*

(i) $c \in (0, \frac{1}{3})$, ou

(ii) $c = \frac{1}{3}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou

(iii) $c \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$, onde $a = \frac{1}{1+\varepsilon_0}$ para algum $\varepsilon_0 > 3$ tal que $c < \frac{\varepsilon_0-1}{2\varepsilon_0} < \frac{1}{2}$.

Então a superfície (Σ, g) tem, no máximo, crescimento de volume quadrático e é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou \mathbb{C}^\bullet com métricas padrão.

Demonstração. Seja $W := \frac{1}{2}(S_\infty + H_f^2 + |A|^2) - K$. Partindo da suposição de que Σ é f -estável, a Proposição 5.2.1 garante que o operador $\Delta - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 - W$ é não negativo. Uma aplicação direta do Teorema da Divergência e da Desigualdade de Cauchy com ε nos fornece

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 + \frac{\varphi^2}{2}\Delta f - \frac{\varphi^2}{4}|\nabla f|^2 - W\varphi^2 d\mu \\ &= \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 - \varphi g(\nabla \varphi, \nabla f) - \frac{\varphi^2}{4}|\nabla f|^2 - W\varphi^2 d\mu \\ &\leq \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 + |\nabla \varphi| \cdot |\varphi \nabla f| - \frac{\varphi^2}{4}|\nabla f|^2 - W\varphi^2 d\mu \\ &\leq \int_{\Sigma} (1 + \varepsilon)|\nabla \varphi|^2 + \frac{(1 - \varepsilon)\varphi^2}{4\varepsilon}|\nabla f|^2 - W\varphi^2 d\mu \\ &= (1 + \varepsilon) \int_{\Sigma} |\nabla \varphi|^2 - \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(W + \frac{\varepsilon - 1}{4\varepsilon}|\nabla f|^2 \right) \varphi^2 d\mu. \end{aligned}$$

Logo, o operador

$$\begin{aligned} L_\varepsilon &:= \Delta + \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(W + \frac{\varepsilon - 1}{4\varepsilon}|\nabla f|^2 \right) \\ &= \Delta + \frac{1}{2 + 2\varepsilon} (S_\infty + H_f^2 + |A|^2) + \frac{\varepsilon - 1}{4\varepsilon(1 + \varepsilon)}|\nabla f|^2 - \frac{1}{1 + \varepsilon}K \\ &= \Delta + q_\varepsilon - \frac{1}{1 + \varepsilon}K \end{aligned}$$

é não negativo, onde $q_\varepsilon := \frac{1}{2 + 2\varepsilon} \left(S_\infty + H_f^2 + |A|^2 + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}|\nabla f|^2 \right)$. Nosso objetivo é tornar q_ε não negativo, para isso basta que $S_\infty + \frac{\varepsilon - 1}{2\varepsilon}|\nabla f|^2 \geq 0$. Esta condição permitirá a aplicação da parte (A) na Proposição 5.2.5 (versão sem peso), que coincide com o Teorema 1.2 em [14].

Caso (i): A hipótese $S_\infty + c|\nabla f|^2 \geq 0$ para alguma constante $c < \frac{1}{3}$, implica que existe $\varepsilon_0 < 3$, suficientemente próximo de 3, tal que $c < \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} < \frac{1}{3}$. Desse modo, a função

$$q_0 = \frac{1}{2 + 2\varepsilon_0} \left(S_\infty + H_f^2 + |A|^2 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 \right)$$

é não negativa e o operador $L_0 = \Delta + q_0 - \frac{1}{1+\varepsilon_0}K$ é não negativo. O resultado do enunciado segue aplicando a Proposição 5.2.5 com $a = \frac{1}{1+\varepsilon_0} > \frac{1}{4}$.

Caso (ii): Supondo que $S_\infty + \frac{1}{3}|\nabla f|^2 \geq 0$, basta tomar $\varepsilon = 3$ e teremos o operador $L_0 = \Delta + q_0 - \frac{1}{4}K$, onde a função $q_0 = \frac{1}{8} \left(S_\infty + H_f^2 + |A|^2 + \frac{1}{3}|\nabla f|^2 \right)$ é não negativa. Para obtermos o resultado desejado, aplicamos a Proposição 5.2.5 com $a = \frac{1}{1+\varepsilon_0} = \frac{1}{4}$.

Caso (iii): A hipótese $S_\infty + c|\nabla f|^2 \geq 0$ para alguma constante $\frac{1}{3} < c < \frac{1}{2}$, implica que existe $\varepsilon_0 > 3$ suficientemente grande, tal que $c < \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} < \frac{1}{2}$. Então o operador $L_0 = \Delta + q_0 - \frac{1}{1+\varepsilon_0}K$ é não negativo, onde a função $q_0 = \frac{1}{2 + 2\varepsilon_0} \left(S_\infty + H_f^2 + |A|^2 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 \right)$ é não negativa. Concluimos o resultado do enunciado ao aplicar a Proposição 5.2.5 com $0 < a = \frac{1}{1+\varepsilon_0} < \frac{1}{4}$. \square

Observação 5.3.1. Com as hipóteses da Proposição 5.3.1, segue diretamente da parte (B) da Proposição 5.2.5, que para cada caso na demonstração acima, temos $\int_\Sigma q_0 d\mu \leq 2\pi a \chi(\Sigma)$; ou seja,

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \frac{1}{2 + 2\varepsilon_0} \left(S_\infty + H_f^2 + |A|^2 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 \right) d\mu &\leq 2\pi \frac{1}{1 + \varepsilon_0} \chi(\Sigma) \\ \implies \int_\Sigma S_\infty + H_f^2 + |A|^2 + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 d\mu &\leq 4\pi \chi(\Sigma). \end{aligned}$$

Ressaltamos que em todos os casos, ocorre a desigualdade $S_\infty + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 \geq 0$.

Em particular, podemos concluir que:

- Se Σ é homeomorfo ao plano complexo \mathbb{C} e $S_\infty + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 \geq k > 0$, então Σ tem área finita.
- Se Σ é homeomorfo ao cilindro \mathbb{C}^\bullet , então Σ é f -mínima, totalmente geodésica e $S_\infty + \frac{\varepsilon_0 - 1}{2\varepsilon_0} |\nabla f|^2 \equiv 0$.

5.4 f -índice finito

O objetivo desta seção é estender alguns resultados obtidos na seção 5.2, que trata de hipersuperfícies f -estáveis, enfraquecendo a hipótese ao exigir apenas f -índice finito. O primeiro passo é mostrar que todo operador com f -índice finito pode ser transformado em um operador f -estável somando uma função localmente integrável e com suporte compacto. A prova feita por H. Alencar, G.S. Neto e D. Zhou pode ser encontrada em [2].

Proposição 5.4.1. [2] *Seja $(\Sigma, g, e^{-f}d\mu)$ uma variedade Riemanniana ponderada e W uma função localmente integrável em Σ . O operador $L = \Delta_f + W$ tem f -índice finito se e somente se existe uma função localmente integrável P com suporte compacto tal que o operador $L + P = \Delta_f + W + P$ é não negativo.*

A Proposição 5.4.1 será uma ferramenta útil para estender os resultados das Proposições 5.2.1 e 5.2.3 aos operadores com f -índice finito.

Proposição 5.4.2. *Seja $(\Sigma, g, e^{-f}d\mu)$ uma variedade Riemanniana ponderada e W uma função localmente integrável em Σ . Se o operador $L_f := \Delta_f + W$ tem f -índice finito, então $L + \left(\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right) = \Delta + W + \left(\frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2\right)$ tem índice finito.*

Demonstração. A proposição 5.4.1 garante a existência de uma função localmente integrável P com suporte compacto em Σ tal que $\Delta_f + W + P$ é não negativo. Por isso,

$$\begin{aligned}
0 &\leq - \int_{\Sigma} (e^{f/2} \cdot \varphi) \cdot (\Delta_f + W + P)(e^{f/2} \cdot \varphi) d\mu_f \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla(e^{f/2} \cdot \varphi)|^2 - (W + P)\varphi^2 e^f d\mu_f \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi + \frac{\varphi}{2}\nabla f|^2 - (W + P)\varphi^2 d\mu \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 + \varphi g(\nabla\varphi, \nabla f) + \frac{\varphi^2}{4}|\nabla f|^2 - (W + P)\varphi^2 d\mu \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - \frac{\varphi^2}{2}\Delta f + \frac{\varphi^2}{4}|\nabla f|^2 - (W + P)\varphi^2 d\mu \\
&= \int_{\Sigma} |\nabla\varphi|^2 - \left(W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + P\right) \varphi^2 d\mu \\
&= - \int_{\Sigma} \varphi \cdot \left(\Delta + W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + P\right) (\varphi) d\mu
\end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)$. Como o operador $\Delta + W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + P$ é não negativo, segue que $\Delta + W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ tem índice finito. \square

Proposição 5.4.3. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f}d\mu)$ uma superfície completa não compacta, e seja W uma função localmente integrável em Σ , com $(W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2)_-$ integrável com respeito a $d\mu$. Assuma que o operador $\Delta_f + W - aK$ tem f -índice finito sobre Σ , e que ocorre alguma das condições*

- (i) $a \in (\frac{1}{4}, \infty)$, ou
- (ii) $a = \frac{1}{4}$, e (Σ, g) tem crescimento de volume subexponencial, ou
- (iii) $a \in (0, \frac{1}{4})$, e (Σ, g) tem crescimento de volume k_a -subpolinomial, com $k_a = 2 + \frac{4a}{1-4a}$.

Então,

- (A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.
- (B) A função $W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ é integrável em (Σ, g) .

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 5.2.3 ao operador $\Delta_f + W + P - aK$. A função P é localmente integrável com suporte compacto em Σ , isso implica que a integral $\int_{\Sigma} P d\mu$ é finita. Logo,

$$\int_{\Sigma} W + \frac{1}{2}\Delta f - \frac{1}{4}|\nabla f|^2 d\mu \leq 2\pi a\chi(\Sigma) - \int_{\Sigma} P d\mu < +\infty.$$

□

Finalizaremos esta seção com uma versão ponderada do bem conhecido Teorema de Fischer-Colbrie em [36]:

Proposição 5.4.4. *Seja Σ uma superfície completa não compacta com f -índice finito e curvatura média ponderada constante H_f da variedade Riemanniana ponderada $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, onde $S_{\infty} + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 > 0$. Então a superfície (Σ, g) tem topologia finita, e no máximo crescimento de volume quadrático. Em particular, (Σ, g) é conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos.*

Demonstração. Aplicando a Proposição 5.4.1 e seguindo as ideias no início da demonstração da Proposição 5.3.1, obtemos para cada $\varepsilon > 0$, que o operador

$$L_{\varepsilon} = \Delta + q_{\varepsilon} - \frac{1}{1+\varepsilon}K$$

é não negativo, onde $q_{\varepsilon} := \frac{1}{2+2\varepsilon} \left(S_{\infty} + H_f^2 + |A|^2 + \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} |\nabla f|^2 + 2P \right)$ e P é uma função localmente integrável com suporte compacto em Σ . Fixado um $\varepsilon < 3$ tal que $\frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon} > \frac{1}{4}$, a

hipótese $S_\infty + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 \geq 0$ implica que a parte negativa de q_ε é integrável. Concluimos aplicando a Proposição 5.2.3 com $a = \frac{1}{1+\varepsilon} > \frac{1}{4}$.

□

5.5 Primeiro autovalor do operador de estabilidade

Nesta seção, técnicas semelhantes às aplicadas nas seções anteriores serão usadas para classificar superfícies com H_f constante cujo primeiro autovalor do operador de estabilidade é maior que uma constante apropriada.

Seja $\Sigma \subset (M, g, e^{-f} d\mu)$ uma superfície f -mínima. É bem conhecido que o primeiro autovalor do operador de estabilidade $J_f := \Delta_f + (\overline{\text{Ric}}_f(N, N) + |A|^2)$ é dado pelo quociente de Rayleigh

$$\lambda_1 = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)} \frac{-\int_\Sigma \varphi J_f \varphi d\mu_f}{\int_\Sigma \varphi^2 d\mu_f} = \inf_{\varphi \in C_0^\infty(\Sigma)} \frac{\int_\Sigma [|\nabla \varphi|^2 - (\overline{\text{Ric}}_f(N, N) + |A|^2) \varphi^2] d\mu_f}{\int_\Sigma \varphi^2 d\mu_f}.$$

• Superfícies fechadas:

Proposição 5.5.1. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f} d\mu)$ uma superfície fechada com curvatura média ponderada constante H_f . Suponha que a constante*

$$\delta = \frac{1}{2|\Sigma|} \int_\Sigma S_\infty + \frac{1}{2} |\nabla f|^2 d\mu$$

é não negativa. Se o primeiro autovalor do operador de estabilidade satisfaz $\lambda_1 \geq -\delta$, então Σ é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 ou ao toro plano \mathbb{T}^2 . Além disso,

(a) Se a desigualdade estrita vale, então Σ é homeomorfa a \mathbb{S}^2 ;

(b) Se Σ é homeomorfo a \mathbb{T}^2 , então Σ é f -minimal, totalmente geodésica e $\lambda_1 = -\delta$.

Demonstração. Segue diretamente do quociente de Rayleigh que

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\int_\Sigma \varphi \cdot \left(\Delta + \frac{1}{2} S_\infty - \Delta_\Sigma f + \frac{1}{2} |\nabla f|^2 + \frac{1}{2} H_f^2 + \frac{1}{2} |A|^2 - K + \lambda_1 \right) (\varphi) d\mu_f \\ \implies \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} S_\infty - \Delta_\Sigma f + \frac{1}{2} |\nabla f|^2 + \frac{1}{2} H_f^2 + \frac{1}{2} |A|^2 + \lambda_1 \right) \varphi^2 d\mu_f &\leq \int_\Sigma (|\nabla \varphi|^2 + K \varphi^2) d\mu_f \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$. Tomando $\varphi = e^{f/2}$ e seguindo os mesmos passos da prova da Proposição 5.1.1, obtemos

$$\int_\Sigma \frac{1}{2} S_\infty + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 + \frac{1}{2} H_f^2 + \frac{1}{2} |A|^2 + \lambda_1 d\mu \leq \int_\Sigma K d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

A hipótese que $\lambda_1 \geq -\delta$ implica que

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2} S_{\infty} + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 + \lambda_1 d\mu \geq 0.$$

Portanto, apenas $\chi(\Sigma) = 2$ ou $\chi(\Sigma) = 0$ podem ocorrer. Em particular, a desigualdade estrita implica $\chi(\Sigma) = 2$. Além disso, $\chi(\Sigma) = 0$ só é possível quando $|A|^2 \equiv 0$, $H_f^2 \equiv 0$ e $\int_{\Sigma} \frac{1}{2} S_{\infty} + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 + \lambda_1 d\mu = 0$, ou seja, $\lambda_1 = -\delta$. \square

Observação 5.5.1. *Quando há uma desigualdade pontual do tipo $\frac{1}{2} S_{\infty} + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 \geq c$ em $(M, g, e^{-f} d\mu)$, podemos escolher $\delta = c$ na Proposição 5.5.1. O próximo corolário é uma consequência direta dessa observação.*

Corolário 5.5.1. *Seja (M^3, g) uma variedade orientada e $\Sigma^2 \subset M^3$ uma superfície CMC imersa fechada. Suponha que a curvatura escalar S de M satisfaça $S \geq 2c$, para alguma constante positiva c . Se $\lambda_1 \geq -c$, então Σ tem gênero um ou zero. Além disso, se o gênero de Σ é um, então Σ é totalmente geodésica e $\lambda_1 = -c$.*

• Superfícies Completas não compactas:

Proposição 5.5.2. *Seja $\Sigma \subset (M^3, g, e^{-f} d\mu)$ uma superfície completa não compacta com curvatura média ponderada constante H_f , tal que $\frac{1}{2} S_{\infty} - \frac{1}{2} \Delta f + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 \geq \delta$, para alguma constante $\delta \in \mathbb{R}$.*

(A) *Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 \geq -\delta$, então:*

(A.1) *A superfície (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume quadrático e é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou \mathbb{C}^{\bullet} com as métricas padrão.*

(A.2) *A função $\frac{1}{2} (|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2} S_{\infty} - \frac{1}{2} \Delta f + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e*

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2} (|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2} S_{\infty} - \frac{1}{2} \Delta f + \frac{1}{4} |\nabla f|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

(A.3) *Se Σ é um cilindro, então (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume linear, é f -mínima, totalmente geodésica e $-\frac{1}{2} S_{\infty} + \frac{1}{2} \Delta f - \frac{1}{4} |\nabla f|^2 \equiv \lambda_1$.*

(A.4) *Se existe $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_1 \geq -\delta + \varepsilon$, então Σ é conformemente equivalente a \mathbb{C} e tem área finita.*

(B) *Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 < -\delta$ e Σ tem área finita, então:*

(B.1) *A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.*

(B.2) A função $\frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi\chi(\Sigma).$$

(B.3) Se $\int_{\Sigma} \frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 d\mu = 2\pi\chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $\frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 - K \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .

Em ambos os casos (A) e (B), temos

$$\int_{\Sigma} |A|^2 d\mu < \infty.$$

Demonstração. Tendo em vista que o operador $J_f + \lambda_1 = \Delta_f + \frac{1}{2}S_\infty - \Delta f - K + \frac{1}{2}(|\nabla f|^2 + |A|^2 + H_f^2) + \lambda_1$ tem f -índice zero, concluímos a partir da Proposição 5.2.1 que o operador

$$\Delta + \frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 - K$$

tem índice zero.

(A): A desigualdade $-\lambda_1 \leq \delta \leq \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2$ é satisfeita. Logo, (A.1) e (A.2) seguem diretamente da Proposição 5.2.5 com a hipótese $\frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 \geq 0$. Observe que (A.3) e (A.4) são consequências da desigualdade em (A.2).

(B): Assumindo que Σ tem uma área finita, a função $(\delta + \lambda_1)_-$ é integrável e

$$\left(\frac{1}{2}(|A|^2 + H_f^2) + \frac{1}{2}S_\infty - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 + \lambda_1 \right)_- \leq (\delta + \lambda_1)_-.$$

Como o lado esquerdo da desigualdade é integrável, o resultado desejado é obtido pela Proposição 5.2.3. \square

5.6 Estabilidade de solitons em produtos warped

Considere $M^3 = I \times P^2$, onde (P, g_P) é uma variedade Riemanniana compacta bidimensional e $I = (t_0, +\infty)$, com $t_0 \geq 0$. A métrica warped em M é definida como $g = dt^2 + h^2(t) \pi_P^*(g_P)$, onde π_P é a projeção no fator P e $h : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função suave fixada. O produto warped (M, g) é frequentemente denotado por $I \times_h P$.

Definição 5.6.1. Uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^2 \rightarrow M^3$ é um **soliton** para o fluxo da curvatura média em relação ao campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ se

$$c \cdot g(X, N) = H$$

em Σ , para alguma constante c .

Um fato bem conhecido sobre produtos warped $I \times_h P$ é a existência de um campo vetorial conforme fechado $X = h(t) \cdot \partial_t$, onde o fator de conformidade é dado por $h'(\pi_I(x)) = h'(t)$. Então, $\widetilde{\nabla}_Y X = h'(t)Y$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.

No restante da seção consideraremos o produto warped ponderado $(M, g, e^{-f} d\mu)$, onde $M = I \times P^2$, $g = dt^2 + h^2(t) \pi_P^*(g_P)$ e a função peso satisfaz $\overline{\nabla} f = X = h(t) \cdot \partial_t$.

Fixado o valor $c = -1$, os sólitons para o fluxo de curvatura média no produto warped $I \times_h P$, em relação ao campo conforme X , têm a curvatura média ponderada H_f dada por

$$H_f = H + g(N, \overline{\nabla} f) = -g(X, N) + g(N, X) = 0.$$

Os sólitons em $(M, g) = I \times_h P$ são caracterizados como superfícies f -mínimas no produto warped ponderado $(M, g, e^{-f} d\mu)$. Assim, faz sentido estudar a estabilidade desses sólitons. Nosso objetivo é classificar quais sólitons podem ser estáveis.

Um cálculo direto nos fornece que:

- $\overline{\Delta} f = \overline{\text{div}}(\overline{\nabla} f) = \overline{\text{div}}(h(t) \partial_t) = \sum_{i=1}^3 g(\overline{\nabla}_{e_i} h(t) \partial_t, e_i) = \sum_{i=1}^3 g(h'(t) e_i, e_i) = 3h'(t)$.
- $S_\infty = S + 2\overline{\Delta} f - |\overline{\nabla} f|^2 = S + 6h'(t) - h^2(t)$.
- $\nabla f = h(t) \partial_t^\perp = h(t)(\partial_t - g(\partial_t, N)N) = h(t) \partial_t + HN$.
- $|\nabla f|^2 = |X|^2 + 2Hg(X, N) + H^2 = h^2(t) - H^2$.
- $\Delta f = \text{div}(h(t) \partial_t + HN) = 2h'(t) - H^2$.

Agora, estamos prontos para aplicar as proposições das seções anteriores.

Proposição 5.6.1. *Seja Σ uma superfície fechada, f -estável, f -mínima no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f} d\mu)$ satisfazendo*

$$\int_{\Sigma} S + 6h'(t) - \frac{1}{2}h^2(t) - \frac{1}{2}H^2 d\mu \geq 0.$$

Então Σ é homeomorfo à esfera \mathbb{S}^2 ou ao toro plano \mathbb{T}^2 . Além disso,

(a) Se a desigualdade estrita vale, então Σ é homeomorfo a \mathbb{S}^2 ;

(b) Se Σ é homeomorfo a \mathbb{T}^2 , então Σ é totalmente geodésico e $\int_{\Sigma} S + 6h'(t) - \frac{1}{2}h^2(t) - \frac{1}{2}H^2 d\mu = 0$,

Demonstração. Basta observar que $S_\infty + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 = S + 6h'(t) - \frac{1}{2}h^2(t) - \frac{1}{2}H^2$ e aplicar a Proposição 5.1.1. □

Proposição 5.6.2. *Seja Σ uma superfície completa não compacta, f -estável, f -mínima no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f} d\mu)$, tal que $\left(\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2\right)_-$ é integrável em Σ . Então:*

(A) *A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.*

(B) *A função $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2$ é integrável em (Σ, g) , e*

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

(C) *Se $\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu = 2\pi \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 - K \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .*

Demonstração. Ressaltamos que o operador de estabilidade no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f} d\mu)$ é dado por

$$J_f = \Delta_f + \frac{1}{2}(S_{\infty} + |A|^2 + |\nabla f|^2) - \Delta f - K.$$

Pela Proposição 5.2.1, a f -estabilidade de Σ implica que o seguinte operador é não negativo em Σ :

$$\begin{aligned} J &= \Delta + \frac{1}{2}(S_{\infty} + |A|^2 - \Delta f) + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 - K. \\ &= \Delta + \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 - K. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Portanto, basta aplicar a Proposição 5.2.3 com $W = \frac{1}{2}(S_{\infty} + |A|^2 + |\nabla f|^2) - \Delta f$ e $a = 1$. \square

A próxima proposição é uma consequência da Proposição 5.2.7.

Proposição 5.6.3. *Seja Σ uma superfície completa não compacta no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f} d\mu)$, sendo conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos. Seja $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em Σ tal que $q \geq \frac{1}{4}h^2(t) - h'(t) + \frac{1}{4}H^2$. Então o operador $L_f = \Delta_f + q$ tem f -índice zero se e somente se $q = \frac{1}{4}h^2(t) - h'(t) + \frac{1}{4}H^2$.*

Quando o sóliton Σ tem f -índice finito, podemos aplicar a Proposição 5.4.3 no operador de estabilidade ponderado e obter o seguinte resultado:

Proposição 5.6.4. *Seja Σ uma superfície f -mínima completa não compacta com f -índice finito no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f} d\mu)$, tal que $\left(\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2\right)_-$*

é integrável em Σ .

Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.

(B) A função $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2$ é integrável em (Σ, g) .

Nas próximas proposições, λ_1 denotará o primeiro autovalor do operador de estabilidade $J_f = \Delta_f + \frac{1}{2}(S_\infty + |A|^2 + |\nabla f|^2) - \Delta f - K$.

Proposição 5.6.5. *Seja Σ uma superfície fechada f -mínima no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$. Suponha que a constante*

$$\delta = \frac{1}{2|\Sigma|} \int_{\Sigma} S + 6h'(t) - \frac{1}{2}h^2(t) - \frac{1}{2}H^2 d\mu$$

é não negativa. Se o primeiro autovalor do operador de estabilidade satisfaz $\lambda_1 \geq -\delta$, então Σ é homeomorfa a esfera \mathbb{S}^2 ou ao toro plano \mathbb{T}^2 . Além disso,

(a) Se ocorrer a desigualdade estrita, então Σ é homeomorfa a \mathbb{S}^2 ;

(b) Se Σ é homeomorfa a \mathbb{T}^2 , então Σ é totalmente geodésica e $\lambda_1 = -\delta$.

Demonstração. Basta observar que $S_\infty + \frac{1}{2}|\nabla f|^2 = S + 6h'(t) - \frac{1}{2}h^2(t) - \frac{1}{2}H^2$ e repetir a prova da Proposição 5.5.1. \square

Proposição 5.6.6. *Seja Σ uma superfície f -mínima completa não compacta no produto warped ponderado $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, tal que $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 \geq \delta$, para algum $\delta \in \mathbb{R}$.*

(A) Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 \geq -\delta$, então:

(A.1) A superfície (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume quadrático e é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou \mathbb{C}^\bullet com as métricas padrão.

(A.2) A função $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

(A.3) Se Σ é um cilindro, então (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume linear, é totalmente geodésica e $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 \equiv \lambda_1$.

(A.4) Se existir $\varepsilon > 0$ tal que $\lambda_1 \geq -\delta + \varepsilon$, então Σ é conformemente equivalente a \mathbb{C} e tem área finita.

(B) Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 < -\delta$ e Σ tem área finita, então:

(B.1) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.

(B.2) A função $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

(B.3) Se $\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 d\mu = 2\pi\chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $\frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) + \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 - K \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .

Em ambos os casos (A) e (B), temos

$$\int_{\Sigma} |A|^2 d\mu < \infty.$$

Demonstração. Note que $\frac{1}{2}S_{\infty} - \frac{1}{2}\Delta f + \frac{1}{4}|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}S + 2h'(t) - \frac{1}{4}h^2(t) + \frac{1}{4}H^2$ e repita a prova da Proposição 5.5.2. \square

Exemplo 5.6.1. Considere o espaço do produto $M^3 = I \times P^2$ com a métrica padrão g . A função warped é $h(t) \equiv 1$ enquanto a função peso é $f(x) = \pi_I(x) = t$. Além disso, a curvatura escalar S de (M, g) é igual à curvatura escalar S_P da base (P^2, g_P) . Com esta configuração, os resultados desta seção podem ser aplicados diretamente. Para simplificar os enunciados, usaremos a desigualdade

$$H = -g(\partial_t, N) \implies H^2 \leq 1.$$

Os corolários mais interessantes serão listados abaixo.

Corolário 5.6.1. (da Proposição 5.6.2): Seja Σ um sólito completo não compacto f -estável em $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, tal que $\left(\frac{1}{2}S_P - 1\right)_-$ é integrável em Σ . Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.

(B) $\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S_P - 1 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma)$.

(C) Se $\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S_P - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu = 2\pi \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $\frac{1}{2}S_P - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 - K \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .

Corolário 5.6.2. (da Proposição 5.6.3): Seja Σ um sólito completo não compacto em $(M^3, g, e^{-f}d\mu)$, sendo conformemente equivalente a uma superfície Riemanniana compacta com finitos pontos removidos. Seja $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em Σ tal que $q \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}H^2$. Então, o operador $L_f = \Delta_f + q$ tem f -índice zero se e somente se $q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}H^2$.

Corolário 5.6.3. (da Proposição 5.6.4): Seja Σ um sóliton completo não compacto com f -índice finito em $(M^3, g, e^{-f} d\mu)$, tal que $\left(\frac{1}{2}S_P - 1\right)_-$ é integrável em Σ . Então,

(A) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.

(B) $\int_{\Sigma} \frac{1}{2}S_P - 1 + \frac{1}{2}|A|^2 d\mu < +\infty$.

Para simplificar o enunciado, no próximo corolário lidaremos com o espaço homogêneo $M_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$.

Corolário 5.6.4. (da Proposição 5.6.6): Seja Σ um sóliton completo não compacto em M_1 .

(A) Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 \geq 0$, então:

(A.1) A superfície (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume quadrático e é conformemente equivalente a \mathbb{C} ou \mathbb{C}^\bullet com as métricas padrão.

(A.2) A função $\frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

(A.3) Se Σ é um cilindro, então (Σ, g) tem no máximo crescimento de volume linear, é totalmente geodésica e $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$.

(A.4) Se $\lambda_1 > 0$, então Σ é conformemente equivalente a \mathbb{C} e tem área finita.

(B) Se o primeiro autovalor de J_f satisfaz $\lambda_1 < 0$ e Σ tem área finita, então:

(B.1) A superfície (Σ, g) tem topologia finita e, no máximo, crescimento de volume quadrático.

(B.2) A função $\frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1$ é integrável em (Σ, g) , e

$$\int_{\Sigma} \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 d\mu \leq 2\pi \chi(\Sigma).$$

(B.3) Se $\int_{\Sigma} \frac{3}{4} - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 d\mu = 2\pi \chi(\Sigma)$, então (Σ, g) tem crescimento de volume subquadrático e $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}H^2 + \frac{1}{2}|A|^2 + \lambda_1 - K \equiv 0$ em q.t.p. da superfície Σ .

Em ambos os casos (A) e (B), temos

$$\int_{\Sigma} |A|^2 d\mu < \infty.$$

Capítulo 6

ESTIMATIVAS DE CRESCIMENTO, DENSIDADE E ESTABILIDADE EM PRODUTOS WARPED

6.1 Resultados de monotonicidade

Considere um produto do tipo $M^{n+1} = I \times P^n$, onde (P, g_P) é uma variedade Riemanniana compacta n -dimensional e $I = [t_0, +\infty)$ com $t_0 > 0$. Dizemos que (M, g) é um produto warped quando M é dotado com uma métrica warped $g = dt^2 + h^2(t)\pi_P^*(g_P)$, onde π_P é a projeção em P e $h : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função suave. O produto warped (M, g) é frequentemente denotado por $I \times_h P$.

É bem conhecido que o campo $X = h(t)\partial_t$ é um campo conforme fechado e vale $\widetilde{\nabla}_v X = fv$ para todo $v \in \mathfrak{X}(M)$, onde o fator de conformidade é dado por $f(x) := h'(\pi_I(x)) = h'(t)$.

Ao longo da seção, consideraremos que $h(t_0) \neq 0$ e fixaremos as notações $B_\rho = \{(t, x) \in M : t_0 \leq t < \rho\}$ e $\Sigma_\rho = \Sigma \cap B_\rho$. Dizemos que uma hipersuperfície Σ é propriamente mergulhada em (M, g) quando a fronteira $\partial\Sigma$ coincide com $\Sigma \cap \partial M$.

Nosso primeiro objetivo será estudar condições nas quais a função $\varphi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(\rho) := \frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu$$

seja monótona não decrescente.

Proposição 6.1.1. *Se Σ é uma hipersuperfície propriamente mergulhada em $(M, g) = I \times_h P$, então*

$$\begin{aligned} \frac{n}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu &= \int_{\Sigma_\rho} \left(\frac{1}{h(t)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) h(t) Hg(\partial_t, N) d\mu + \int_{\Sigma_\rho} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu \\ &\quad - h(t_0) \left(\frac{1}{h(t_0)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Onde ∂_t^\top e ∂_t^\perp denotam, respectivamente, as componentes tangente e normal de ∂_t em relação a $\mathfrak{X}(\Sigma)$ e ν é o campo conormal a $\mathfrak{X}(\partial\Sigma)$ com respeito a $\mathfrak{X}(\Sigma)$.

Demonstração. Primeiro, observe que $\widetilde{\nabla}_v X = f(t)v$, para todo $v \in \mathfrak{X}(M)$, implica em

$\operatorname{div}_\Sigma X = nf(t)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_\Sigma \frac{X}{h(t)^n} &= h(t)^{-n} \operatorname{div}_\Sigma X + g(\nabla h(t)^{-n}, X) \\ &= h(t)^{-n} nf(t) - nh(t)^{-n-1} h'(t) g(\nabla t, X) \\ &= nh(t)^{-n} f(t) - nh(t)^{-n} f(t) g(\partial_t^\top, \partial_t) \\ &= nh(t)^{-n} f(t) g(\partial_t^\perp, \partial_t^\perp). \end{aligned}$$

Em seguida, fixado algum $\gamma \in (t_0, \rho)$, definimos o seguinte campo vetorial sobre Σ :

$$W(x) := \begin{cases} \left(\frac{1}{h(\gamma)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) X(x) & \text{se } t_0 \leq t = \pi_I(x) \leq \gamma, \\ \left(\frac{1}{h(t)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) X(x) & \text{se } \gamma \leq t = \pi_I(x) \leq \rho, \\ 0 & \text{se } t = \pi_I(x) > \rho. \end{cases}$$

Segue diretamente da definição acima que

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma W \, d\mu &= \left(\frac{1}{h(\gamma)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\Sigma_\gamma} nf(t) \, d\mu - \frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho - \Sigma_\gamma} nf(t) \, d\mu \\ &\quad + \int_{\Sigma_\rho - \Sigma_\gamma} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 \, d\mu \\ &= \frac{1}{h(\gamma)^n} \int_{\Sigma_\gamma} nf(t) \, d\mu - \frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} nf(t) \, d\mu \\ &\quad + \int_{\Sigma_\rho - \Sigma_\gamma} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 \, d\mu. \end{aligned}$$

Uma vez que $\operatorname{div}_\Sigma(W) = \operatorname{div}_\Sigma(W^\top) - Hg(W, N)$, o Teorema da Divergência nos permite concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} g(W^\top, \nu) \, d\sigma &= -\frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} nf(t) \, d\mu + \frac{1}{h(\gamma)^n} \int_{\Sigma_\gamma} nf(t) \, d\mu \\ &\quad + \int_{\Sigma_\rho - \Sigma_\gamma} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 \, d\mu + \int_\Sigma Hg(W, N) \, d\mu. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Observando novamente a definição do campo W , o lado esquerdo e o último termo do lado direito na equação acima assumem, respectivamente, as formas

$$\begin{aligned} \bullet \int_{\partial\Sigma} g(W^\top, \nu) \, d\sigma &= h(t_0) \left(\frac{1}{h(\gamma)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) \, d\sigma. \\ \bullet \int_\Sigma Hg(W, N) \, d\mu &= \frac{1}{h(\gamma)^n} \int_{\Sigma_\gamma} Hg(X, N) \, d\mu - \frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} Hg(X, N) \, d\mu \\ &\quad + \int_{\Sigma_\rho - \Sigma_\gamma} h(t)^{-n} Hg(X, N) \, d\mu. \end{aligned}$$

Substituindo em 6.35:

$$\begin{aligned} h(t_0) \left(\frac{1}{h(\gamma)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma &= -\frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} nf(t) + h(t)Hg(\partial_t, N) d\mu \\ &+ \frac{1}{h(\gamma)^n} \int_{\Sigma_\gamma} nf(t) + h(t)Hg(\partial_t, N) d\mu \\ &+ \int_{\Sigma_\rho - \Sigma_\gamma} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 + h(t)^{-n+1} Hg(\partial_t, N) d\mu. \end{aligned}$$

Fazendo $\gamma \rightarrow t_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{n}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu &= -\frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} h(t)Hg(\partial_t, N) d\mu + \int_{\Sigma_\rho} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 + h(t)^{-n+1} Hg(\partial_t, N) d\mu \\ &- h(t_0) \left(\frac{1}{h(t_0)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. □

Observação 6.1.1. *Suponha que Σ é uma hipersuperfície (sem fronteira) mergulhada em $(M, g) = (t_0, \infty) \times_h P$, onde Σ está situada fora de B_ε para algum $\varepsilon > t_0$. Seguindo a prova da Proposição 6.1.1 obtém-se*

$$\frac{n}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu = \int_{\Sigma_\rho} \left(\frac{1}{h(t)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) h(t)Hg(\partial_t, N) d\mu + \int_{\Sigma_\rho} \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu. \quad (6.36)$$

Segue diretamente da equação 6.34 que $h(t)$ ser monótona, $Hg(\partial_t, N) \geq 0$ em Σ e $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$ implicam que $\varphi(\rho)$ tem o mesmo tipo de monotonicidade que $h(t)$. De fato, temos os corolários:

Corolário 6.1.1. *Seja $(M, g) = I \times_h P$ um produto warped cuja função warped $h(t)$ é não decrescente. Se Σ é uma hipersuperfície propriamente mergulhada em (M, g) tal que $Hg(\partial_t, N) \geq 0$ em Σ e $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$, então a função $\varphi(\rho)$ é monótona não decrescente.*

Corolário 6.1.2. *Seja $(M, g) = I \times_h P$ um produto warped cuja função warped $h(t)$ é não crescente. Se Σ é uma hipersuperfície propriamente mergulhada em (M, g) tal que $Hg(\partial_t, N) \geq 0$ em Σ e $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$, então a função $\varphi(\rho)$ é monótona não crescente.*

Observação 6.1.2. Nos corolários acima, a única hipótese imposta ao ambiente $I \times_h P$ é que a função warped $h(t)$ seja monótona. Ao longo desta seção, nos referiremos a esta hipótese como "condição de monotonicidade".

Observação 6.1.3. Considere a variedade $M = I \times P^n$ com a métrica conforme $g = \psi(t)^2(dt^2 + \rho(t)^2 d\theta^2)$. Ao fazermos a mudança de parâmetro $s = F(t) = \int_{t_0}^t \psi(y) dy$, esta métrica assume a forma $g = ds^2 + [\psi(t)\rho(t)]^2 d\theta^2$.

A hipótese de $\psi(t)$ ser positiva implica que $s(t)$ e $t(s) = F^{-1}(s)$ são crescentes, pois $F'(t) = \psi(t) > 0$ e $(F^{-1})'(s) = \frac{1}{\psi(t)} > 0$.

Se $\psi(t)$ e $\rho(t)$ são não decrescentes, então $h(s) = \psi(t(s))\rho(t(s))$ é não decrescente e vale a condição de monotonicidade definida na Observação 6.1.2.

Observação 6.1.4. Ocorre $g(\partial_t, \nu) = 0$ se, e somente se, $\Sigma = \partial M$.

6.1.1 Exemplos

Nesta subseção serão introduzidas classes de hipersuperfícies nas quais poderemos aplicar os corolários 6.1.1 e 6.1.2.

Definição 6.1.1. Dizemos que uma hipersuperfície Σ propriamente mergulhada em (M, g) tem **fronteira capilar** quando Σ intersecta ∂M formando ângulos constantes; isto é; $g(\partial_t, N)$ é constante sobre $\partial\Sigma$. Em particular, Σ é dita ter **fronteira livre** em (M, g) se $g(\partial_t, N) = 0$.

Note que a definição de fronteira capilar dada acima equivale a dizer que $g(\partial_t^\top, \nu)$ é constante sobre $\partial\Sigma$, enquanto ter fronteira livre equivale a $g(\partial_t^\top, \nu) = -1$. Logo, ambas as definições descrevem maneiras de Σ intersectar ∂M satisfazendo a condição $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$.

Definição 6.1.2. Seja Γ uma hipersuperfície fechada em P . O **cone** com base em Γ é a hipersuperfície de $(M, g) = I \times_h P$ dada por $C_\Gamma = \{(t, p) \in M : t \in I \text{ e } p \in \Gamma\}$.

Em todos os pontos de um cone C_Γ , temos $g(\partial_t, N) = 0$. Em particular, todo cone tem fronteira livre e segue de 6.34 que

$$\varphi(\rho) = \frac{h(t_0)}{n} \left(\frac{1}{h(t_0)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) |\partial\Sigma|.$$

Agora, considere $M = I \times P$ munida com a métrica $g = \psi(t) dt^2 + \phi(t)^2 \pi_P^*(g_P)$, onde as funções $\psi(t)$ e $\phi(t)$ são positivas e $\phi(t)$ é não decrescente. Podemos definir uma

função contínua $F : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como sendo a única solução da EDO $F'(t) = \sqrt{\psi(t)}$ com a condição inicial $F(t_0) = 0$. Ao fazermos a mudança $s = F(t)$, a métrica g é reescrita sob a forma warped $ds^2 + \phi^2 \circ h(s) \pi_P^*(g_P)$, onde $h : [0, \infty) \rightarrow [t_0, \infty)$ denota a inversa de F . Neste modelo, a função warped $\phi \circ h(s)$ é não decrescente, pois $h'(s) = \frac{1}{\sqrt{\psi(t)}}$ é positivo. Desse modo, o ambiente (M, g) satisfaz a "condição de monotonicidade". Logo, a função $\varphi(\rho) := \frac{1}{h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f(t) d\mu$ será monótona não decrescente quando $Hg(\partial_t, N) \geq 0$ em Σ e $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$.

Diante da vasta família de produtos warped satisfazendo a "condição de monotonicidade", destacaremos os espaços que descrevem modelos físicos para o exterior ao horizonte de eventos em um buraco negro com massa ADM igual a m , satisfazendo as equações de campo escritas por Einstein. Seguem alguns exemplos onde ocorre o que discutimos acima:

- **deSitter Schwarzschild:** $M = (\underline{t}, \bar{t}) \times \mathbb{S}^{n-1}$ com $(\underline{t}, \bar{t}) = \{t > 0 : 1 - mt^{2-n} - \kappa t^2 > 0\}$ e

$$g = \frac{1}{1 - mt^{2-n} - \kappa t^2} dt^2 + t^2 d\theta^2.$$

- **Schwarzschild:** $M = (t_0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ com $t_0 = m^{\frac{1}{n-2}}$ e

$$g = \frac{1}{1 - mt^{2-n}} dt^2 + t^2 d\theta^2.$$

- **Anti-deSitter Schwarzschild:** $M = (t_0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, onde t_0 é a única solução positiva de $1 + t_0^2 - mt_0^{2-n} = 0$, com a métrica

$$g = \frac{1}{1 - mt^{2-n} + t^2} dt^2 + t^2 d\theta^2.$$

- **Reissner-Nordstrom:** $M = (t_0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, onde t_0 é a maior entre as duas soluções de $1 - mt_0^{2-n} + q^2 t_0^{4-2n} = 0$ com $m > 2q > 0$ constantes, e a métrica

$$g = \frac{1}{1 - mt^{2-n} + q^2 t^{4-2n}} dt^2 + t^2 d\theta^2.$$

Em todos os modelos definidos acima, a fronteira $\partial M = \{t_0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$ é chamada horizonte de eventos. Além disso, a função potencial estático satisfaz $f(t_0) = 0$.

6.1.2 Solitons

Definição 6.1.3. Uma imersão isométrica $\psi : \Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$ é um soliton para o fluxo da curvatura média com respeito a $X \in \mathfrak{X}(M)$ se

$$c \cdot g(X, N) = H$$

ao longo de ψ , para alguma constante c , que denotaremos por constante soliton.

No produto warped $(M, g) = I \times_h P$ é natural estudarmos os solitons para o fluxo da curvatura média com respeito ao campo conforme fechado $X = h(t) \partial_t$. Outro caso interessante são os chamados **translations solitons**, quando se toma o campo paralelo $X = \partial_t$.

Considere a **função soliton** $\zeta(t) := nf(t) + ch^2(t)$ introduzida por Alias, Lira e Rigoli em [4]. Esta função desempenha um papel importante no desenvolvimento do Princípio do Máximo Fraco em solitons. Uma bela aplicação em que aparece a função soliton é o fato que uma folha $P_s = \{s\} \times P$ é um soliton com respeito a $X = h(t) \partial_t$ tendo constante soliton igual a c se, e somente se,

$$\zeta(s) = nf(s) + ch^2(s) = 0.$$

Segue diretamente da equação 6.34 com a definição 6.1.3 que a função

$$\begin{aligned} n\varphi(\rho) &= \int_{\Sigma_\rho} \left(\frac{\zeta(t)}{h(t)^n} - \frac{ch^2(t)}{h(\rho)^n} \right) |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu \\ &\quad - h(t_0) \left(\frac{1}{h(t_0)^n} - \frac{1}{h(\rho)^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma \end{aligned}$$

é monótona não decrescente sempre que $c \geq 0$ e $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$.

• Um exemplo interessante onde se aplica a fórmula acima são os Self-expanders (solitons com respeito ao campo $X = t \partial_t$ e $c > 0$) no espaço euclidiano menos a bola unitária $\mathbb{R}^{n+1} - B(1) = [1, \infty) \times_t \mathbb{S}^n$. Neste caso, temos a seguinte estimativa para o crescimento de volume:

$$\frac{n}{\rho^n} |\Sigma_\rho| = \int_{\Sigma_\rho} \left(\frac{n + ct^2}{t^n} - \frac{ct^2}{\rho^n} \right) |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu - \left(1 - \frac{1}{\rho^n} \right) \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma$$

é monótona não decrescente sempre que $g(\partial_t^\top, \nu) \leq 0$ sobre $\partial\Sigma$.

Seja $\xi(t)$ uma primitiva da função warped $h(t)$. Considere o produto $M = I \times P^n$ com a métrica conforme $\bar{g} = e^{2c\xi(t)} \cdot \delta$, onde $\delta = dt^2 + h(t)^2 d\theta^2$ é a métrica warped. Dada qualquer hipersuperfície isometricamente imersa em $\Sigma \subset (M, \bar{g})$, podemos relacionar as curvaturas médias de Σ com respeito as métricas \bar{g} e δ por

$$\begin{aligned} H_{\bar{g}} &= e^{-c\xi(t)} \cdot H_\delta - e^{-2c\xi(t)} \cdot \delta(N, \nabla e^{c\xi(t)}) = e^{-c\xi(t)} (H_\delta - c \cdot \delta(N, \nabla \xi(t))) \\ &= e^{-c\xi(t)} (H_\delta - c\xi'(t)\delta(N, \nabla t)) = e^{-c\xi(t)} (H_\delta - c \cdot \delta(N, X)), \end{aligned}$$

para mais detalhes veja [15].

Logo, Σ é mínima em (M, \bar{g}) se, e somente se, $c \cdot \delta(N, X) = H_\delta$. Então podemos caracterizar os solitons em (M, δ) como hipersuperfícies mínimas em (M, \bar{g}) . Assim como foi discutido anteriormente, para valer a condição de monotonicidade no ambiente (M, \bar{g}) basta que a função $e^{c\xi(t)} \cdot h(t)$ seja não decrescente. Para $c > 0$, temos que $e^{c\xi(t)}$ é não decrescente, pois $\xi'(t) = h(t) \geq 0$. Portanto, vale a condição de monotonicidade em (M, \bar{g}) , sempre que $h(t)$ for não decrescente.

No caso de translations solitons ($X = \partial_t$), com um argumento análogo ao anterior (com $\xi(t) = t$) concluímos que a condição de monotonicidade também vale quando a constante soliton c é positiva e $h(t)$ é não decrescente.

Casos particulares de produtos warped $I \times_h P$ com $h(t)$ não decrescente são:

- (1) Espaço Euclidiano (menos uma bola): $I = [t_0, \infty)$, $P = \mathbb{S}^n$ e $h(t) = t$.
- (2) Espaços produto com a métrica produto (com fronteira): $I = [t_0, \infty)$ e $h(t) = 1$.
- (3) Espaço Hiperbólico (menos uma bola): $I = [t_0, \infty)$, $P = \mathbb{S}^n$ e $h(t) = \sinh(t)$.
- (4) deSitter Schwarzschild, Schwarzschild, Anti-deSitter Schwarzschild, Reissner-Nordstrom.

6.2 Densidade

Nosso objetivo nesta seção é determinar uma maneira de entender o crescimento do volume de hipersuperfícies Σ propriamente mergulhadas em um produto warped $M = I \times_h \mathbb{S}^n$, onde \mathbb{S}^n está munida com a métrica redonda. Para isso, vamos comparar o crescimento do volume $|\Sigma|$ com o crescimento do volume de um cone fixado. Ao longo da seção, consideraremos que a função potencial $f(t) = h'(t)$ cumpre a condição $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = k$ para alguma constante $k > 0$. Denotaremos esta hipótese sob o ambiente por "condição de densidade".

Casos particulares de produtos warped $I \times_h P$ satisfazendo a condição de densidade são:

- (1) Espaço Euclidiano (menos uma bola): $I = [t_0, \infty)$, $P = \mathbb{S}^n$ e $h(t) = t$.
- (2) Schwarzschild, Reissner-Nordstrom.

Definição 6.2.1. Seja Γ uma hipersuperfície fechada em \mathbb{S}^n . O cone com base Γ é a hipersuperfície de M dada por $C_\Gamma = \{(t, p) \in M : t \in I \text{ e } p \in \Gamma\}$.

Definição 6.2.2. Definimos a Γ -densidade no infinito de uma hipersuperfície propriamente

mergulhada Σ em M , com relação ao cone C_Γ fixado, por

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma \cap B_\rho|}{|C_\Gamma \cap B_\rho|}$$

sempre que o limite existe.

Podemos verificar que $|C_\Gamma \cap B_\rho| = |\Gamma| \int_{t_0}^\rho h^{n-1}(t) dt$. Nosso propósito é relacionar a densidade no infinito com o limite da função φ analisada na seção anterior.

Proposição 6.2.1. *Seja Σ uma hipersuperfície propriamente mergulhada em M . Então,*

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma|} \varphi(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma| h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f d\mu = \Theta_\Gamma(\Sigma).$$

Demonstração. A hipótese de $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = k$ implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f(t) - k| < \frac{1}{n}$, para todo $t > r_n$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Sigma_\rho|} \int_{\Sigma_\rho} |f - k| d\mu &\leq \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Sigma_\rho|} \int_{\Sigma_{r_n}} |f - k| d\mu + \frac{1}{n} \frac{|\Sigma_\rho - \Sigma_{r_n}|}{|\Sigma_\rho|} = \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \\ &\implies \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Sigma_\rho|} \int_{\Sigma_\rho} f - k d\mu = 0 \\ &\implies \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Sigma_\rho|} \int_{\Sigma_\rho} f d\mu = k. \end{aligned}$$

Desse modo, podemos deduzir que

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma| h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} f d\mu = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n|\Sigma_\rho|}{|\Gamma| h(\rho)^n} \frac{1}{|\Sigma_\rho|} \int_{\Sigma_\rho} f d\mu = k \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n|\Sigma_\rho|}{|\Gamma| h(\rho)^n}.$$

Por outro lado, temos

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma| h(\rho)^n}{n|C_\Gamma \cap B_\rho|} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{|\Gamma| h(\rho)^n}{n|\Gamma| \int_{t_0}^\rho h(t)^{n-1} dt} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{h(\rho)^{n-1} h'(\rho)}{h(\rho)^{n-1}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} f(\rho) = k.$$

Então, se $\Theta_\Gamma(\Sigma)$ existe, ele pode ser escrito da forma

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_\rho|}{|C_\Gamma \cap B_\rho|} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n|\Sigma_\rho|}{|\Gamma| h(\rho)^n} \frac{|\Gamma| h(\rho)^n}{n|C_\Gamma \cap B_\rho|} = k \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n|\Sigma_\rho|}{|\Gamma| h(\rho)^n},$$

e a igualdade está provada. □

Suponhamos que Σ tem curvatura média limitada e crescimento de volume satisfazendo

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{|\Sigma_\rho|}{h(\rho)^{n-1}} = 0.$$

Aplicando as Proposições 6.1.1 e 6.2.1, concluímos que a densidade satisfaz

$$\begin{aligned}\Theta_\Gamma(\Sigma) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{n}{|\Gamma|} \varphi(\rho) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{1}{h(t)^{n-1}} Hg(\partial_t, N) d\mu - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Gamma| h(\rho)^n} \int_{\Sigma_\rho} h(t) Hg(\partial_t, N) d\mu \\ &\quad + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{nf}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu - \frac{1}{|\Gamma| h(t_0)^{n-1}} \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{1}{h(t)^{n-1}} Hg(\partial_t, N) d\mu - \frac{1}{|\Gamma| h(t_0)^{n-1}} \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma.\end{aligned}$$

Valendo a igualdade quando Σ é um cone. Nesse caso, a densidade é dada por

$$\Theta_\Gamma(C_\Omega) = \frac{1}{h(t_0)^{n-1}} \frac{|\Omega|}{|\Gamma|}.$$

Se Σ tem fronteira livre, a desigualdade acima assume a forma

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) \geq \frac{1}{|\Gamma|} \left(\frac{1}{h(t_0)^{n-1}} |\partial\Sigma| + \int_\Sigma \frac{1}{h(t)^{n-1}} Hg(\partial_t, N) d\mu \right).$$

Quando Σ é uma hipersuperfície mínima propriamente mergulhada em (M, g) , conseguimos limitar inferiormente a densidade por um termo que só depende da fronteira de Σ e da maneira como Σ intersecta ∂M , tal limitação é dada por

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) \geq -\frac{1}{|\Gamma| h(t_0)^{n-1}} \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma.$$

Em particular, se forem cumpridas as condições de fronteira livre e $H = 0$, a densidade admite a simples limitação inferior

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{nf(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu + \frac{1}{h(t_0)^{n-1}} \frac{|\partial\Sigma|}{|\Gamma|} \geq \frac{1}{h(t_0)^{n-1}} \frac{|\partial\Sigma|}{|\Gamma|}.$$

• No caso de solitons para o fluxo da curvatura média com respeito a $X = h(t) \partial_t$, temos

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) = \frac{1}{|\Gamma|} \left(\int_\Sigma \frac{\zeta(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu - \frac{1}{h(t_0)^{n-1}} \int_{\partial\Sigma} g(\partial_t^\top, \nu) d\sigma \right).$$

Observação 6.2.1. Suponha que Σ é um soliton (sem fronteira) com respeito a $X = h(t) \partial_t$ mergulhado em $(M, g) = (t_0, \infty) \times_h P$, onde Σ está situado fora de B_ε para algum $\varepsilon > t_0$. Seguindo os mesmos passos desta seção, obtemos

$$\Theta_\Gamma(\Sigma) = \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Sigma \frac{\zeta(t)}{h(t)^n} |\partial_t^\perp|_g^2 d\mu.$$

6.3 Estabilidade de cones totalmente geodésicos

Considere uma variedade Riemanniana 3-dimensional $M = I \times P$, onde $I = [t_0, \infty)$ e (P, δ_P) denota \mathbb{R}^2 com a métrica euclidiana ou \mathbb{S}^2 com a métrica redonda. Podemos munir M com a métrica warped $\delta = dt^2 + h^2(t) \cdot \pi_P^*(\delta_P)$, onde π_P é a projeção no fator P , $t = \pi_I$ e $h : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ é uma função suave dada. Suporemos que (M, δ) tem curvatura de Ricci constante igual a r . No restante da seção, g denotará uma métrica conforme da forma $g = e^{2\varphi(t)} \cdot \delta$, onde $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave positiva. Note que todo cone totalmente geodésico $\Sigma_0 \subset (M, g)$ da forma $\Sigma_0 = I \times \gamma$, onde γ é uma geodésica de P , tem fronteira livre devido ao campo ∂_t ser tangente a Σ_0 . A hipótese de g ser conforme a métrica warped δ implica que Σ_0 tem fronteira livre em (M, g) , logo suas variações normais são admissíveis para o estudo de estabilidade.

O propósito desta subseção é desenvolver um método que permita estimar a região em M onde Σ_0 é estável. A principal dificuldade na execução deste método em exemplos concretos reside na resolução de determinadas EDO's que surgem durante o processo.

O índice de Morse em $\Sigma_0(R)$ coincide com o número de autovalores negativos, contados com multiplicidade, do operador de Jacobi

$$J_{\Sigma_0} = \Delta_{\Sigma_0} u + Ric_g(N, N)u$$

com as condições de fronteira

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sobre } \Sigma_0 \cap \{|x| = R\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_0. \end{cases}$$

Seguindo os resultados em [16], o Laplaciano sobre uma superfície Σ isometricamente imersa em um produto warped (M, δ) é dado por

$$\Delta_{\Sigma}^{\delta} u(t, p) = \frac{1}{h^2(t)} \Delta u_t(p) + \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

com $u_t(p) := u(t, p)$. Baseado na conformidade das métricas g e δ , junto as fórmulas em [15], obtemos as relações:

$$(I): Ric_g = Ric_{\delta} - Hess_{\delta} \varphi(t) + d\varphi(t) \otimes d\varphi(t) + (\Delta_{\delta} \varphi(t) - |d\varphi(t)|^2) \delta.$$

$$(II): \Delta_{\Sigma_0}^g u = e^{-2\varphi(t)} \Delta_{\Sigma_0}^{\delta} u.$$

Um cálculo direto usando os fatos de que a função φ só depende do fator $t = \pi_I$ e $\delta(\partial_t, N) = 0$ nos fornece:

- $\nabla^\delta \varphi(t) = \varphi'(t) \nabla^\delta t = \varphi'(t) \partial_t$.
- $d\varphi(t) \otimes d\varphi(t)(N, N) = (N\varphi(t))^2 = \delta(\nabla^\delta \varphi(t), N)^2 = 0$.
- $|d\varphi(t)|^2 = |\nabla^\delta \varphi(t)|^2 = \varphi'(t)^2$.

Por fim, temos também a relação

$$\begin{aligned} \Delta^\delta \varphi &= \sum_{j=1}^2 \delta(\widetilde{\nabla}_{e_j} \nabla^\delta \varphi, e_j) + e^{2\varphi} \delta(\widetilde{\nabla}_N \nabla^\delta \varphi, N) \\ &= \Delta_{\Sigma_0}^\delta \varphi - H\delta(\nabla^\delta \varphi, N) + e^{2\varphi} \text{Hess}_\delta \varphi(N, N) \\ &= \Delta_{\Sigma_0}^\delta \varphi + e^{2\varphi} \text{Hess}_\delta \varphi(N, N). \end{aligned}$$

Portanto, o operador de Jacobi assume a forma

$$\begin{aligned} J_{\Sigma_0} u &= \Delta_{\Sigma_0}^g u + \text{Ric}_g(N, N)u \\ &= e^{-2\varphi(t)} \Delta_{\Sigma_0}^\delta u + ru - \text{Hess}_\delta \varphi(N, N)u \\ &\quad + e^{-2\varphi(t)} \left(\varphi''(t) + \frac{h'(t)}{h(t)} \varphi'(t) + e^{2\varphi(t)} \text{Hess}_\delta \varphi(N, N) - \varphi'(t)^2 \right) u \\ &= e^{-2\varphi(t)} \Delta_{\Sigma_0}^\delta u + e^{-2\varphi(t)} \left(\varphi''(t) + \frac{h'(t)}{h(t)} \varphi'(t) - \varphi'(t)^2 \right) u + ru. \end{aligned}$$

Definindo a função $G(t) := \varphi''(t) + \frac{h'(t)}{h(t)} \varphi'(t) - \varphi'(t)^2 + e^{2\varphi(t)} r$, o problema de autovalores do operador de Jacobi assume a forma

$$J_{\Sigma_0} u + \lambda u = 0 \implies \Delta_{\Sigma_0}^\delta u + G(t)u + e^{2\varphi(t)} \lambda u = 0 \quad \text{em } \Sigma_0(R),$$

com as condições de fronteira

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sobre } \Sigma_0 \cap \{t = R\}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial \Sigma_0. \end{cases}$$

Uma vez que $h(t)$ e $\varphi(t)$ são suaves, com $h(t)$ positiva, concluímos que $G(t)$ não tem singularidades em $(t_0, +\infty)$. O sistema acima passará a ser denotado por (\star) .

Nosso objetivo é transformar o sistema (\star) em equações de Riccati envolvendo funções que só dependem do fator t . Para isso, consideramos a separação de variáveis

$$u(t, p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) \cdot e^{ikp}.$$

Dessa maneira, as soluções do sistema (\star) devem satisfazer, para cada $k \in \mathbb{Z}$, o problema

$$u_k''(t) + \frac{h'(t)}{h(t)} u_k'(t) - \frac{k^2}{h^2(t)} u_k(t) + G(t)u_k + e^{2\varphi(t)} \lambda u_k = 0 \quad (6.37)$$

com as condições de fronteira $u_k(R) = 0$ e $u'_k(r_0) = 0$.

Agora, faremos mudanças de variáveis que permitam escrever as EDOs acima na forma de equações de Ricatti.

Primeira mudança: $v_k(t) = \sqrt{h(t)} \cdot u_k(r)$.

$$\begin{aligned} v_k = \sqrt{h} u_k &\implies v'_k = \frac{1}{2} h^{-1/2} h' u_k + h^{1/2} u'_k = \frac{1}{2} h^{-1} h' v_k + h^{1/2} u'_k \\ &\implies v''_k = \left(-\frac{1}{4} h^{-3/2} (h')^2 + \frac{1}{2} h^{-1/2} h'' \right) u_k + \frac{1}{2} h^{-1/2} h' u'_k + \frac{1}{2} h^{-1/2} h' u'_k + h^{-1/2} u''_k \\ &= -\frac{1}{4} h^{-2} (h')^2 v_k + \frac{1}{2} h^{-1} h'' v_k + h^{-1/2} h' u'_k + h^{-1/2} u''_k. \end{aligned}$$

Segue que

$$\sqrt{h} \left(u''_k + \frac{h'}{h} u'_k \right) = v''_k + \left(\frac{(h')^2 - 2hh''}{4h^2} \right) v_k. \quad (6.38)$$

Ao multiplicarmos ambos os lados da equação 6.37 por $\sqrt{h(t)}$ e substituir a expressão na equação 6.38, concluímos que $v_k(t)$ deve resolver o problema

$$v''_k(t) + v_k(t) \cdot \left(\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - \frac{k^2}{h^2(t)} + G(t) + e^{2\varphi(t)} \lambda \right) = 0$$

com as condições de fronteira $v_k(R) = 0$ e $v'_k(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2f(t_0)} v_k(t_0)$.

Pela unicidade de soluções, quando u_k não é identicamente nula, verificamos que $v'_k(t) \neq 0$ sempre que $v_k(t) = 0$. Assim, os zeros de $v_k(t)$ são isolados.

Segunda mudança: Longe dos zeros de v_k , definimos

$$\gamma_k(t) = \frac{v'_k(t)}{v_k(t)} \implies \gamma'_k(t) + \gamma_k(t)^2 = \frac{v''_k(t)}{v_k(t)}.$$

Logo, $\gamma_k(t)$ deve resolver a equação de Ricatti

$$\gamma'_k(t) + \gamma_k(t)^2 = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + \frac{k^2}{h^2(t)} - G(t) - e^{2\varphi(t)} \lambda \quad (6.39)$$

com as condições de fronteira

$$\lim_{t \rightarrow R^-} \gamma_k(t) = -\infty \quad e \quad \gamma_k(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}. \quad (6.40)$$

A primeira condição em 6.40 pode ser deduzida diretamente da equação 6.39. De fato, a condição na fronteira $v_k(R) = 0$ implica que $\gamma_k(t)^2$ cresce para o infinito

quando t se aproxima de R , no entanto, o lado direito de 6.39 é limitado em $(t_0, +\infty)$. Analogamente, concluímos que em toda raiz s de $v_k(t)$ deve valer $\lim_{t \rightarrow s^-} \gamma_k(t) = -\infty$ e $\lim_{t \rightarrow s^+} \gamma_k(t) = +\infty$.

Estamos interessados em estudar a equação de Riccati 6.39 com λ negativo e soluções definidas no intervalo $[t_0, R]$, exceto nas singularidades de $v_k(t)$, que são pontos isolados e incluem $t = R$.

Proposição 6.3.1. *Se para cada $k \neq 0$ existe uma função $F_k : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_k(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + \frac{k^2}{h^2(t)} - G(t)$ e a solução $\psi_k : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ do problema*

$$\begin{cases} \psi_k'(t) + \psi_k(t)^2 = F_k(t) \\ \psi_k(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)} \end{cases}$$

não tem singularidades, então:

- (a) As soluções do problema (★) com $\lambda \leq 0$ são funções da forma $u = u(t)$.
- (b) Os autovalores não positivos associados ao problema (★) tem multiplicidade um.

Demonstração. Mostraremos que, para cada $k \neq 0$, não existe solução para o problema 6.39, com $\lambda < 0$, satisfazendo as condições de fronteira em 6.40. Suponha, por absurdo, que existe tal solução γ_k . Então

$$\begin{aligned} \gamma_k'(t) + \gamma_k(t)^2 &= -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + \frac{k^2}{h^2(t)} - G(t) - e^{2\varphi(r)}\lambda \\ &\geq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + \frac{k^2}{h^2(t)} - G(t) \geq F_k(t) = \psi_k'(t) + \psi_k(t)^2 \end{aligned}$$

com a igualdade na fronteira $\gamma_k(t_0) = \psi_k(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}$.

O nosso objetivo é usar ψ_k como uma barreira que impeça a suposta solução γ_k de cumprir a condição $\lim_{t \rightarrow R^-} \gamma_k(t) = -\infty$. Neste sentido, é importante notar que $\gamma_k' + \gamma_k^2 \geq \psi_k' + \psi_k^2$ e $\gamma_k(t_0) = \psi_k(t_0)$ implicam que $\gamma_k(t) \geq \psi_k(t)$ para todo $t \in [t_0, s_0)$, onde s_0 é a primeira singularidade de ψ_k . Como ψ_k não tem singularidades, vale $\gamma_k(t) \geq \psi_k(t)$ para todo $t \geq r_0$. Logo, a condição $\lim_{t \rightarrow R^-} \gamma_k(t) = -\infty$ implicaria em ψ_k ter singularidade, gerando uma contradição.

Logo, toda solução u do problema (★) é da forma

$$u(t, p) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(t) \cdot e^{ikp} = u_0(t)$$

e isto demonstra a parte (a).

Dado qualquer autovalor $\lambda \leq 0$ para o problema (\star) , a parte (a) implica que as autofunções associadas a λ só dependem do fator $t = \pi_I$ e estão biunivocamente relacionadas as soluções $\gamma_0 : [r_0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ do problema

$$\gamma_0'(t) + \gamma_0(t)^2 = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + \frac{k^2}{h^2(t)} - G(t) - e^{2\varphi(r)}\lambda$$

com as condições de fronteira

$$\lim_{t \rightarrow R^-} \gamma_0(t) = -\infty \quad \text{e} \quad \gamma_0(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}.$$

Portanto, a parte (b) segue diretamente do teorema de existência e unicidade de soluções para EDO's com condições de fronteira determinadas. \square

A próxima proposição apresenta uma maneira direta de verificar a possível estabilidade de Σ_0 em (M, g) analisando a existência de singularidades da solução de uma EDO determinada pela função warped $f(t)$ e pela função conforme $\varphi(t)$ da métrica g .

Proposição 6.3.2. *Se existe uma função $F : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t)$ e a solução $\psi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ do problema*

$$\begin{cases} \psi'(t) + \psi(t)^2 = F(t) \\ \psi(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)} \end{cases}$$

não tem singularidades, então Σ_0 é estável.

Demonstração. Podemos seguir os passos da demonstração anterior, desta vez sendo válido para todo $k \in \mathbb{Z}$. \square

Agora, suponhamos que vale a proposição 6.3.1 e que existe uma função $F(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t)$, tal que a solução da EDO anterior tem uma única singularidade. No intuito de analisar as autofunções radiais associadas aos autovalores negativos do problema (\star) , consideraremos a família de funções $\phi_c : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que são soluções da EDO

$$(**) \begin{cases} \phi'(t) + \phi(t)^2 = F(t) \\ \phi(t_0) = c. \end{cases}$$

Em particular, denotaremos por $\phi_{\bar{c}}(t)$ a solução tal que $\phi_{\bar{c}}(t_0) = \bar{c} = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}$. Além disso, adicionaremos a hipótese de que cada ϕ_c tem uma única singularidade em $t = R_c$ e

tais singularidades formam uma seqüência crescente. Note que tal hipótese concorda com o fato que $\lim_{t \rightarrow R_c^-} \phi_c(t) = -\infty$. Desse modo, conseguiremos mostrar que Σ_0 tem no máximo índice um.

Proposição 6.3.3. Para todo $\lambda < 0$, a solução $\gamma_\lambda(t)$ da equação de Ricatti

$$\begin{cases} \gamma'(t) + \gamma(t)^2 = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) - e^{2\varphi(t)}\lambda \\ \gamma(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)} \end{cases}$$

tem no máximo uma singularidade.

Demonstração. **Parte 1:** $\gamma_\lambda(t)$ não tem singularidade em $[t_0, R_{\bar{c}})$:

Inicialmente, observe que

$$\begin{cases} \gamma'_\lambda(t) + \gamma_\lambda(t)^2 = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) - e^{2\varphi(t)}\lambda > -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) \geq \phi'_{\bar{c}}(t) + \phi_{\bar{c}}(t)^2 \\ \gamma_\lambda(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)} = \phi_{\bar{c}}(t_0) \end{cases}$$

implica em $\gamma_\lambda(t) \geq \phi_{\bar{c}}(t)$, para todo $t \in [t_0, R_{\bar{c}}]$. Uma vez que $\lim_{t \rightarrow s^-} \gamma_\lambda(t) = -\infty$ para toda singularidade s de γ_λ , a barreira $\phi_{\bar{c}}(t)$ impede $\gamma_\lambda(t)$ de atingir qualquer ponto de singularidade em $[t_0, R_{\bar{c}})$.

Parte 2: $R_{\bar{c}}$ não é uma singularidade de $\gamma_\lambda(t)$:

Suponha, por contradição, que $\gamma_\lambda(t)$ tem uma singularidade em $R_{\bar{c}}$. Fixemos um ponto $p = (t_p, \gamma_\lambda(t_p))$ no gráfico de $\gamma_\lambda(t)$, tal que $\gamma_\lambda(t_p) > \phi_{\bar{c}}(t_p)$. Seja $\phi_c(t)$ a solução da EDO (**) passando por p . Como $\phi_c(t_p) = \gamma_\lambda(t_p) > \phi_{\bar{c}}(t_p)$, ocorre a monotonicidade $c > \bar{c}$ e $R_c > R_{\bar{c}}$. Por outro lado,

$$\begin{cases} \gamma'_\lambda(t) + \gamma_\lambda(t)^2 > \phi'_c(t) + \phi_c(t)^2 \\ \gamma_\lambda(t_p) = \phi_c(t_p) \end{cases}$$

implica em $\gamma_\lambda(t) \geq \phi_c(t)$, para todo $t \in [t_p, R_c]$. Então a barreira $\phi_c(t)$ impede $\gamma_\lambda(t)$ de atingir qualquer ponto de singularidade em $[t_0, R_c)$. Isto gera uma contradição, visto que $R_{\bar{c}} \in [t_0, R_c)$.

Parte 3: $\gamma_\lambda(t)$ tem no máximo uma singularidade em $(R_{\bar{c}}, +\infty)$:

Seja R_λ a primeira singularidade de $\gamma_\lambda(t)$, sabemos que $R_\lambda > R_{\bar{c}}$ e

$$\lim_{t \rightarrow R_\lambda^+} \gamma_\lambda(t) = +\infty.$$

Dado que a única singularidade de $\phi_{\bar{c}}$ ocorre antes de R_λ , vale a desigualdade $\gamma_\lambda(t) > \phi_{\bar{c}}(t)$ no intervalo (R_λ, \bar{t}) com \bar{t} suficientemente próximo de R_λ . Esta desigualdade nos permite usar $\phi_{\bar{c}}$ como uma barreira que impede γ_λ de ter a segunda singularidade em $(R_\lambda, +\infty)$. \square

Proposição 6.3.4. *O índice de Morse de Σ_0 é no máximo um.*

Demonstração. Fixado qualquer $R > t_0$, mostraremos que $\Sigma_0(R)$ tem índice de Morse no máximo um.

Seja λ um autovalor negativo da forma quadrática associada a segunda derivada do funcional área em $\Sigma_0(R)$ restrito aos campos vetoriais que se anulam em $\Sigma \cap \{t = R\}$ e são tangenciais ao longo de ∂M . Por consequência da Proposição 6.3.1, λ deve ter multiplicidade um e sua autofunção $u = u(t)$ só depende do fator $t = \pi_I$.

O problema (★)

$$\begin{cases} J_{\Sigma_0} u(t) + \lambda u(t) = \Delta_{\Sigma_0}^\delta u(t) + G(t)u(t) + e^{2\varphi(t)} \lambda u(t) = 0, \\ u(R) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(t_0) = 0 \end{cases}$$

é equivalente aos problemas

$$\begin{cases} v''(t) + v(t) \cdot \left(\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} + G(t) + e^{2\varphi(t)} \lambda \right) = 0 \\ v(R) = 0 \quad \text{e} \quad v'(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}. \end{cases}$$

com $v(t) = \sqrt{h(t)} \cdot u(t)$ e

$$\begin{cases} \gamma'(t) + \gamma(t)^2 = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) - e^{2\varphi(t)} \lambda \\ \gamma(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)} \end{cases}$$

com $\gamma(t) = v'(t) \cdot v(t)^{-1}$. Sabemos que as raízes de $v(t)$ são pontos isolados nos quais $\gamma(t)$ não está definido, ao longo da seção temos nos referido a estas raízes como singularidades de $\gamma(t)$. Segundo a Proposição 6.3.3, $\gamma(t)$ tem no máximo uma singularidade. Além disso, $v(R) = u(R) = 0$. Logo, $u(t) > 0$ para todo $t \in [t_0, R)$. A única autofunção com um sinal bem definido é aquela associada ao primeiro autovalor, isto implica que o único autovalor associado ao problema (★) que pode ser negativo é o primeiro. Desse modo, o índice de Morse de $\Sigma_0(R)$ é no máximo um. \square

6.3.1 Exemplos

Assim como na subseção anterior, estudaremos os solitons em produtos warped $I \times_h P^2$. Vimos que os solitons podem ser caracterizados como superfícies mínimas em um espaço conforme ao produto warped, com um fator conforme apropriado. Note que os cones totalmente geodésicos são superfícies mínimas para qualquer espaço conforme ao produto warped inicial. Logo, faz sentido estudarmos a sua estabilidade como um soliton.

Caso 1: Σ_0 visto como um soliton em relação ao campo conforme fechado $X = h(t) \cdot \partial_t$:

Σ_0 é uma superfície mínima em $M = I \times P^2$ com a métrica conforme $g = e^{2\varphi(t)} \cdot \delta$, onde $\delta = dt^2 + h(t)^2 d\theta^2$ é a métrica warped e $\varphi(t)$ é uma primitiva de $h(t)$. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned} G(t) &:= \varphi''(t) + \frac{h'(t)}{h(t)}\varphi'(t) - \varphi'(t)^2 + e^{2\varphi(t)}r = h'(t) + \frac{h'(t)}{h(t)}h(t) - h(t)^2 + e^{2\varphi(t)}r \\ &= 2h'(t) - h(t)^2 + e^{2\varphi(t)}r. \end{aligned}$$

- Segundo a Proposição 6.3.2, dada uma função $F : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - 2h'(t) + h(t)^2 - e^{2\varphi(t)}r,$$

$\Sigma_0(R)$ será estável para todo $R \in (t_0, s)$, onde s é a primeira singularidade da solução da seguinte EDO:

$$(*) \begin{cases} \psi'(t) + \psi(t)^2 = F(t) \\ \psi(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}. \end{cases}$$

Exemplo 6.3.1. δ é a métrica produto [$h(t) = 1$]:

- $-\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - 2h'(t) + h(t)^2 - e^{2\varphi(t)}r = -e^{2t}r + 1.$

- Se $r \leq 0$, tome a função $F(t) \equiv 0$. A EDO (*) assume a forma

$$\begin{cases} \psi'(t) + \psi(t)^2 = 0 \\ \psi(t_0) = 0, \end{cases}$$

cuja solução $\psi(t) \equiv 0$ não tem singularidades, portanto, Σ_0 é estável.

- Quando $0 < r < 1$, a estabilidade de $\Sigma_0(R)$ é garantida para $R \in (t_0, -\frac{\ln r}{2})$, onde vale $-e^{2t}r + 1 \geq 0$.

Exemplo 6.3.2. O Exemplo 6.3.1 pode ser generalizado para qualquer função suave positiva $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a desigualdade $h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 8h(t)^2h'(t) - 4h(t)^4 \leq 0$.

Exemplo 6.3.3. $h(t) = t$ e $t_0 > 0$:

• $-\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - 2h'(t) + h(t)^2 - re^{2\varphi(t)} = -\frac{1}{4t^2} - 2 + t^2 - re^{t^2}$. Note que a função $t^2 - \frac{1}{4t^2} - 2$ é crescente quanto t é positivo.

• Se $r \leq 0$ e $t_0^2 - \frac{1}{4t_0^2} - 2 \geq 0$, basta escolher a função $F(t) \equiv 0$ para concluirmos que Σ_0 estável. Para $r = 0$, tome $t_0 > 1,46$.

Quando $P = \mathbb{S}^2$, a variedade (M, δ) é o espaço euclidiano menos uma bola aberta de raio t_0 centrada na origem.

Exemplo 6.3.4. Espaço Hiperbólico:

O espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 pode ser escrito como um produto warped $I \times_h \mathbb{S}^2$, onde $I = (0, +\infty)$ e $h(t) = \sinh(t)$. Neste modelo temos $r = -2$, $\varphi(t) = \cosh(t)$ e

$$-\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - 2h'(t) + h(t)^2 - e^{2\varphi(t)}r = -\frac{\cosh^2(t) - 2\sinh^2(t)}{4\sinh^2(t)} - 2\cosh(t) + \sinh^2(t) + 2e^{2\cosh(t)}$$

é crescente quando t é positivo. Além disso, a expressão acima é positiva para $t \geq 0,21$.

Logo, Σ_0 é estável na região $[t_0, +\infty) \times_f \mathbb{S}^2$ com $t_0 = 0,21$.

Exemplo 6.3.5. Espaço Hiperbólico:

O espaço \mathbb{H}^3 também pode ser escrito como o produto warped $\mathbb{R} \times_h \mathbb{R}^2$ com $h(t) = e^t$. Desse modo temos $r = -2$, $\varphi(t) = e^t$ e

$$-\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - 2h'(t) + h(t)^2 - e^{2\varphi(t)}r = \frac{1}{4} - 2e^t + e^2t + 2e^{2e^t}$$

é positivo para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, a escolha da função $F(t) \equiv 0$ nos permite concluir que Σ_0 é estável.

Caso 2: Σ_0 visto como um translation soliton com respeito ao campo $X = \partial_t$:

Σ_0 é uma superfície mínima em $M = I \times P^2$ com a métrica conforme $g = e^{2t} \cdot \delta$, onde $\delta = dt^2 + h(t)^2 d\theta^2$ é a métrica warped. Nesse caso, temos $G(t) = \frac{h'(t)}{h(t)} + e^{2t}r - 1$.

• Segundo a Proposição 6.3.2, dada uma função $F : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) = -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 4h(t)h'(t)}{4h^2(t)} - e^{2t}r + 1$$

temos que $\Sigma_0(R)$ é estável para $R \in (t_0, s)$, onde s é a primeira singularidade da solução da seguinte EDO:

$$(*) \begin{cases} \psi'(t) + \psi(t)^2 = F(t) \\ \psi(t_0) = \frac{h'(t_0)}{2h(t_0)}. \end{cases}$$

Exemplo 6.3.6. δ é a métrica produto $[h(t) = 1]$.

Coincide com o Exemplo 6.3.1.

Exemplo 6.3.7. Podemos generalizar o Exemplo 6.3.6 para qualquer função suave positiva $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a desigualdade $h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 4h(t)h'(t) \leq 0$. Uma classe particular são as funções da forma $h(t) = e^{g(t)}$, onde $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é suave com $g'(t)^2 - 4g'(t) + 2g''(t) \geq 0$.

Basta observar que

$$\begin{aligned} h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 4h(t)h'(t) &= g'(t)^2 e^{2g(t)} - 2g''(t)e^{2g(t)} - 2g'(t)^2 e^{2g(t)} + 4g'(t)e^{2g(t)} \\ &= -e^{2g(t)} (g'(t)^2 - 4g'(t) + 2g''(t)) \leq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 6.3.8. $h(t) = t$ e $t_0 > 0$:

• $-\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 4h(t)h'(t)}{4h^2(t)} + 1 = -\frac{4t + 1}{4t^2} + 1$ é uma função crescente quando t é positivo.

• Se $r \leq 0$ e $-\frac{4t_0 + 1}{4t_0^2} + 1 \geq 0$, tome $F(t) \equiv 0$ para obter a estabilidade de Σ_0 . Em particular, quando $r = 0$ basta impor a condição $t_0 > 1,21$ e Σ_0 será estável.

• Quando $0 < r < \ln \frac{4t_0^2 + 4t_0 + 1}{4t_0^2}$, podemos garantir a estabilidade de $\Sigma_0(R)$ para $R \in (t_0, \frac{1}{2} \ln \frac{4t_0^2 + 4t_0 + 1}{4t_0^2})$, onde vale $\frac{4t_0 + 1}{4t_0^2} - e^{2t}r + 1 \geq 0$.

Exemplo 6.3.9. Espaço Hiperbólico:

Analogamente ao Exemplo 6.3.4, temos

$$\begin{aligned} -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 4h(t)h'(t)}{4h^2(t)} - e^{2t}r + 1 &= -\frac{\cosh^2(t) - 2\sinh^2(t) + 4\sinh(t)\cosh(t)}{4\sinh^2(t)} \\ &\quad + 2e^{2t} + 1 \end{aligned}$$

crescente quando t é positivo. Além disso, a expressão acima é positiva para $t \geq 0$, 34. Logo, Σ_0 é estável na região $[t_0, +\infty) \times_h \mathbb{S}^2$ com $t_0 = 0$, 34.

Exemplo 6.3.10. *Espaço Hiperbólico:*

Analogamente ao Exemplo 6.3.5, temos

$$-\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t) + 4h(t)h'(t)}{4h^2(t)} - e^{2t}r + 1 = \frac{1}{4} + 2e^{2t}$$

positivo para todo $t \in \mathbb{R}$. Então Σ_0 é estável.

Exemplo 6.3.11. *Variedade conforme a um produto canônico:*

Supondo a função warped $h(t) \equiv 1$, o fator $G(t)$ assume a forma

$$G(t) = \varphi''(t) - \varphi'(t)^2 + re^{2\varphi(t)}.$$

• Segundo a Proposição 6.3.2, dada uma função $F : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(t) \leq -\frac{h'(t)^2 - 2h(t)h''(t)}{4h^2(t)} - G(t) = -\varphi''(t) + \varphi'(t)^2 - re^{2\varphi(t)},$$

temos que $\Sigma_0(R)$ é estável para $R \in (t_0, s)$, onde s é a primeira singularidade da solução da seguinte EDO:

$$(*) \begin{cases} \psi'(t) + \psi(t)^2 = F(t) \\ \psi(t_0) = 0. \end{cases}$$

Em particular, se $re^{2\varphi(t)} + \varphi''(t) \leq 0$, então a escolha $F(t) \equiv 0$ implica na estabilidade de Σ_0 .

Referências

- 1 Aïex, N.S. *The width of ellipsoids*. *Comm. Anal. Geom.*, 27(2):251–285, 2019. Citado na página 77.
- 2 Alencar, H.; Neto, G.S.; Zhou, D. *Stability properties of complete self-shrinking surfaces in \mathbb{R}^3* . *arXiv:2106.09165*, (2021). Citado na página 124.
- 3 Alías, L.J. *On the stability index of minimal and constant mean curvature hypersurfaces in spheres*, *Revista de la Unión Matemática Argentina* 47, 39–61 (2006). Citado 2 vezes nas páginas 32 e 84.
- 4 Alías, L.J.; de Lira, J.H.; Rigoli, M. *Mean curvature flow solitons in the presence of conformal vector fields*. *J Geom Anal* 30, 1466–1529 (2020). <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00186-3>. Citado na página 139.
- 5 Almgren, F. *The theory of varifolds*, *Mimeographed notes*, Princeton (1965). Citado na página 74.
- 6 Ambrozio, L.; Carlotto, A.; Sharp, B. *Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces*, *J. Differ. Geom.* 108 (2018), 379–410. Citado na página 10.
- 7 Ambrozio, L.; Carlotto, A.; Sharp, B. *Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces*, *Math. Ann.* 370 (2018), 1063–1078. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 50.
- 8 Barbosa, E.; Espinar, J.M. *On free boundary minimal hypersurfaces in the Riemannian Schwarzschild space*. *J. Geom. Anal.* 31, 12548–12567 (2021). Citado na página 21.
- 9 Barbosa, J.L.; do Carmo, M.; Eschenburg, J. *Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds*. *Math. Z.* 197 (1988), no. 1, 123 - 138. Citado 3 vezes nas páginas 27, 38 e 108.
- 10 Barros, A.; Sousa, P. *Estimate for index of closed minimal hypersurfaces in spheres*, *Kodai Mathematical Journal* 32 , 442-449 (2009). Citado 2 vezes nas páginas 64 e 86.
- 11 Batista, M.; Lima, A. *Min-max widths of the real projective 3-space*. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(7):5239–5258, 2022. Citado na página 77.

- 12 Batista, M.; Martins, M.B. *Minimal hypersurfaces with low index in the real projective space*. *Nonlinear Anal.*, 218:Paper No. 112776, 11, 2022. Citado na página 10.
- 13 Batista, M.; Santos, J.I. *Upper bounds for the first stability eigenvalue of surfaces in 3-Riemannian manifolds*. *Potential Anal* 49, 91–103 (2018). <https://doi.org/10.1007/s11118-017-9649-3>. Citado na página 17.
- 14 Bérard, P.; Castillon, P. *Inverse spectral positivity for surfaces*. *Rev. Mat. Iberoam.* 30 (2014), no. 4, 1237–1264, DOI 10.4171/RMI/813. MR3293432. Citado 3 vezes nas páginas 17, 119 e 122.
- 15 Besse, A. *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag, Berlin, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 140 e 143.
- 16 Bezerra, K.S.; Caminha, A.; Lima, B.P. *On the stability of minimal cones in warped products*. *Bull Braz Math Soc, New Series* 45, 485–503 (2014). Citado na página 143.
- 17 Bueler, E.L. *The heat kernel weighted Hodge Laplacian on noncompact manifolds*, *Trans. Amer. Math.Soc.* 351 (1999), 683–713. Citado na página 49.
- 18 Cañete, A.; Rosales, C. *Compact stable hypersurfaces with free boundary in convex solid cones with homogeneous densities*. *Calc. Var.* 51, 887–913 (2014). Citado na página 36.
- 19 do Carmo, M. *Geometria riemanniana-2a edição*. Projeto Euclides–IMPA, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- 20 do Carmo, M.; Ritoré, M.; Ros, A. *Compact minimal hypersurfaces with index one in the real projective space*, *Comment. Math. Helv.* 75 (2000), 247–254. Citado 3 vezes nas páginas 10, 54 e 55.
- 21 Carron, G. *L^2 harmonics forms on non compact Riemannian manifolds*. <http://arxiv.org/abs/0704.3194v1>. Citado na página 50.
- 22 Castro, K.; Rosales, C. *Free boundary stable hypersurfaces in manifolds with density and rigidity results*, *J. Geom. Phys.* 79 (2014), 14–28. Citado 3 vezes nas páginas 15, 37 e 38.

- 23 Cavalcante, M.P.; de Oliveira, D.F. Index estimates for free boundary constant mean curvature surfaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 305 (2020), no. 1, 153–163. Citado na página 109.
- 24 Cavalcante, M.P.; de Oliveira, D.F. Lower bounds for the index of compact constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 and \mathbb{S}^3 . *Rev. Mat. Iberoam.* 36 (2020), no. 1, pp. 195–206. Citado na página 109.
- 25 Chen, H. Minimal hypersurfaces in the product of two spheres with index one. *Calc. Var.* 60, 134 (2021). Citado 2 vezes nas páginas 11 e 68.
- 26 Chern, S.S.; do Carmo, M.; Kobayashi, S. Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. *1970 Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968)* pp. 59 - 75 Springer, New York. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 62.
- 27 Chodosh, O.; Maximo, D. On the topology and index of minimal surfaces, *J. Differential Geom.* 104 (2016), no. 3, 399–418. Citado na página 13.
- 28 Chodosh, O.; Maximo, D. On the topology and index of minimal surfaces II <https://arxiv.org/abs/1808.06572> (2018). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 106.
- 29 Devyver, B. On the finiteness of the Morse index for Schrödinger operators, *Manuscripta Math.* 139 (2012), no. 1-2, 249–271, DOI 10.1007/s00229-011-0522-1. MR2959680. Citado na página 17.
- 30 Donato, S. The first p -widths of the unit disk. *J. Geom. Anal.*, 32(6):Paper No. 177, 38, 2022. Citado na página 77.
- 31 El Soufi, A. Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphère, *Compositio Math.* 85 (1993), 281 - 298. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 53.
- 32 Espinar, J.M. Finite index operators on surfaces. *J. Geometric Analysis* 23 (2013), no. 1, 415–437. Citado na página 17.
- 33 Espinar, J.M. Gradient Schrödinger operators, manifolds with density and applications. *J. Math. Anal. Appl.* 455, (2017), 1505–1528. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 121.

- 34 Fan, E.M. *Topology of three-manifolds with positive P-scalar curvature*. *Proc. Amer. Math. Soc.* 136, no. 9, 3255 - 3261 (2008). Citado na página 115.
- 35 Frankel, T. *On the fundamental group of a compact minimal submanifold*. *Ann. of Math. (2)*, 83:68–73, 1966. Citado na página 76.
- 36 Fischer-Colbrie, D. *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds*. *Invent Math.*, 82: 121-132, (1985). Citado 2 vezes nas páginas 17 e 125.
- 37 Greene, R.E.; Wu, H. *C^∞ approximations of convex, subharmonic, and plurisubharmonic functions*, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 12 (1979), no.1, 47-84. Citado na página 101.
- 38 Gromov, M. *Isoperimetric of waists and concentration of maps*, *Geom. Funct. Anal.*, 13 no. 1, 178 - 215 (2003). Citado na página 36.
- 39 Guadalupe, I.; Brasil, Aldir, Jr.; Delgado, J.A. *A characterization of the Clifford torus*. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* 48 (1999), no. 3, 537 - 540. Citado na página 9.
- 40 Hatcher, A. *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2005. Citado na página 73.
- 41 Hirsch, M.W. *Differential topology*. *Graduate Texts in Mathematics*, No. 33. Springer-Verlag, New York/Heidelberg, 1976. Citado na página 75.
- 42 Impera, D.; Rimoldi, M.; Savo, A. *Index and first Betti number of f -minimal hypersurfaces and self-shrinkers*, *Rev. Mat. Iberoam.* 36 (2020), 817–840. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 43, 49 e 89.
- 43 Irie, K.; Marques, F.C.; Neves, A. *Density of minimal hypersurfaces for generic metrics*. *Ann. of Math. (2)*, 187(3):963–972, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.
- 44 Jost, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- 45 Li, C. *Index and topology of minimal hypersurfaces of \mathbb{R}^n* , *Calc. Var. Partial Diff. Eq.* (2017) 56:180. Citado 3 vezes nas páginas 14, 106 e 107.
- 46 Li, Y. *An Improved Morse Index Bound of Min-Max Minimal Hypersurfaces*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.14506> (2020). Citado na página 76.

- 47 Liokumovich, Y.; Marques, F.C.; Neves, A. Weyl law for the volume spectrum. *Ann. of Math. (2)*, 187(3):933–961, 2018. Citado na página 73.
- 48 Lott, J. L^2 -cohomology of geometrically infinite hyperbolic 3-manifold. *Geom. Funct. Anal.* 7 (1997), 81–119. Citado na página 51.
- 49 Marques, F.C.; Neves, A. Existence of infinitely many minimal hypersurfaces in positive Ricci curvature. *Invent. Math.*, 209(2):577–616, 2017. Citado na página 73.
- 50 Marques, F.C.; Neves, A. Topology of the space of cycles and existence of minimal varieties. *Surveys in differential geometry*, 21, 165–177, 2016. Citado na página 73.
- 51 Montezuma, R. On free boundary minimal surfaces in the Riemannian Schwarzschild manifold. To appear in *Bull. Braz. Math. Soc.* Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.
- 52 Morgan, F.; Ritoré, M. Isoperimetric regions in cones. *Trans. Amer. Math. Soc.* 354(6), 2327–2339 (2002). Citado na página 35.
- 53 Obata, M. Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere, *J. Math. Soc. Japan* 14(1962), 333–340. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 61.
- 54 Perdomo, O. Low index minimal hypersurfaces of spheres. *Asian J. Math.* 5 (2001), no. 4, 741 - 749. Citado 3 vezes nas páginas 10, 32 e 84.
- 55 Ros, A. One-sided complete stable minimal surfaces, *J. Differential Geom.* 74 (2006), no. 1, 69–92. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 106.
- 56 Ross, M. The second variation of nonorientable minimal submanifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(8):3093–3104, 1997. Citado na página 34.
- 57 Sargent, P. Index bounds for free boundary minimal surfaces of convex bodies, *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017), no. 6 2467–2480. Citado 4 vezes nas páginas 14, 15, 49 e 89.
- 58 Savo, A. Index bounds for minimal hypersurfaces of spheres, *Indiana Univ. Math. J.* 59 (2010), 823–837. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 49.
- 59 Schoen, R. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. Differ. Geom.* 18(4), 791–809 (1983). Citado na página 106.

- 60 Schoen, R.; Yau, S.T. *On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. Comm. Math. Phys.* 65, 45–76 (1979). Citado na página 20.
- 61 Silveira, A.M. *Stability of complete noncompact surfaces with constant mean curvature, Math. Ann.*, 277, 629-638, (1987). Citado 2 vezes nas páginas 17 e 121.
- 62 Simons, J. *Minimal varieties in Riemannian manifolds, Ann. of Math.* 88 (1968), 62-105. Citado 4 vezes nas páginas 9, 33, 64 e 73.
- 63 Simon, L. *Lectures on geometric measure theory, volume 3 of Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra 6 (1983). Citado na página 73.*
- 64 Smith, G.; Zhou, D. *The Morse index of the critical catenoid. Geom Dedicata* 201, 13–19 (2019). Citado 2 vezes nas páginas 21 e 23.
- 65 Struwe, M. *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Springer, Berlin, 4th ed., 2008. Citado na página 58.*
- 66 Torralbo, F.; Urbano, F. *On stable compact minimal submanifolds. Proc. Amer. Math. Soc.* 142(2), 651–658 (2014). Citado 2 vezes nas páginas 10 e 71.
- 67 Tysk, J. *Finiteness of index and total scalar curvature for minimal hypersurfaces. Proc. Am. Math. Soc.* 105(2), 429–435 (1989). Citado na página 106.
- 68 Urbano, F. *Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere, Proc. America Math. Soc.*, 108 (1990), 989 - 992. Citado na página 9.
- 69 Viana, C. *Isoperimetry and volume preserving stability in real projective spaces. J. Differential Geom.* (2022) arXiv:1907.09445 [math.DG], in press. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 56.
- 70 Visentini, E. *Lectures on Levi convexity of complex manifolds and cohomology vanishing theorems. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967). Citado na página 51.*
- 71 Zhou, X. *Min-max hypersurface in manifold of positive Ricci curvature. J. Differ. Geom.* 105(2), 291–343 (2017). Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

72 Zhou, X. *On the multiplicity one conjecture in min-max theory.* *Ann. of Math. (2)*, 192(3):767–820, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 73 e 75.

73 Zhu, J. *First stability eigenvalue of singular minimal hypersurfaces in spheres.* *Calc. Var. Partial Differ. Equat.* 57(5), 1–13 (2018). Citado 2 vezes nas páginas 35 e 87.