



Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM

Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia



FRANCISCO GILBERTO DE SOUSA CARVALHO

A GEOMETRIA DE DOMÍNIOS EXTREMAIS PARA O p -LAPLACIANO

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

MACEIÓ
AGOSTO DE 2021

Francisco Gilberto de Sousa Carvalho

A Geometria de Domínios Extremais para o p -Laplaciano

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante

Maceió
Agosto de 2021

Catálogo na Fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecário: Marcelino de Carvalho Freitas Neto – CRB-4 – 1767

C331g Carvalho, Francisco Gilberto de Sousa.
 A geometria de domínios extremais para o p -laplaciano / Francisco Gilberto de
 Sousa Carvalho. – 2021.
 96 f. : il.

Orientador: Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto
de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2021.

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da
Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da
Bahia.

Bibliografia: f. 91-96.

1. Domínios extremais. 2. P - laplaciano. 3. Planos móveis, Método dos. 4.
Determinados, Problemas sobre. 5. Princípios do máximo (Matemática). 6.
Autovalores. I. Título.

CDU: 514.764

Folha de Aprovação

AUTOR: FRANCISCO GILBERTO DE SOUSA CARVALHO

A Geometria de Domínios Extremais para o p-Laplaciano

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia e aprovada em 27 de agosto de 2021.



Prof. Dr. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante – UFAL (Orientador)


Banca examinadora:



Prof. Dr. José María Espinar García – Universidad de Cádiz (Examinador Externo)



Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB (Examinador Externo)

Documento assinado digitalmente
 Renan Dantas Medrado
Data: 30/09/2021 19:33:56-0300
Verifique em <https://verificador.iti.br>

Prof. Dr. Renan Dantas Medrado – UFAL (Examinador Interno)



Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva – UFAL (Examinador Interno)

Dedico este trabalho aos meus pais José Carvalho e Silva e Maria de Lourdes de Sousa e Silva, à minha esposa Helenita Muniz Lima, ao meu filho Vinícius Pereira Carvalho e à minha filha Viliane Lima de Carvalho.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de começar agradecendo aos professores José Maria Espinar, Manassés Xavier, Paulo Alexandre, Renan Medrado, Márico Batista e Feliciano Vítório por aceitarem participar da banca de defesa de Tese de Doutorado e pelas valiosas sugestões e correções do texto, que vão contribuir ainda mais para o enriquecimento deste trabalho.

Agradeço de forma especial ao professor Marcos Petrúcio pelo valioso trabalho de orientação durante estes anos de estadia na universidade Federal de Alagoas - UFAL. A sua contribuição foi fundamental nesta trajetória e sem ela nada disso estaria acontecendo. Meu muito obrigado.

Agradeço também aos professores Abraão Mendes, Anderson Lima e Tiarlos Cruz do Instituto de Matemática - IM da UFAL. Gostaria também de estender estes agradecimentos aos demais funcionários do IM: técnicos e servidores, que sempre nos ajudaram na nossa luta diária.

Agradeço aos professores do curso de Matemática da Universidade Federal do Piauí - UFPI, Campus Senador Helvídio Nunes de Barros - CSHNB, da cidade de Picos por permitirem o meu afastamento para cursar a tão sonhada pós-graduação: Cícero, Pedro Paulo, Antônio José, Alex, Bruno, Erik, Anísia, Kláudia e Marcos. Em especial gostaria de agradecer aos professores João Santos e Daniel pela amizade durante esses anos de UFPI, desde a época do Mestrado e por contribuírem para a realização deste momento, com palavras de apoio e incentivo.

Meus agradecimentos aos alunos do doutorado: Rodrigo, Ranilze e Vanessa, que ingressaram comigo no doutorado, no ano de 2017. Agradeço também aos demais amigos e colegas de doutorado: Pedro, Sidney, Iury, Manuel, Wagner, Wagner Oliveira, Darlan, Robson, Moreno e Alexandre.

Agradeço também ao professor Giovanni, da cidade de Oeiras, pelas palavras de incentivo.

Agradeço aos amigos de mais longa data, da cidade de Cajazeiras do Piauí que me ajudaram e sempre acreditaram em mim: professora Eva, professor Assis, professor Manoel Muniz, professor Luciano, Manoel, Budiga, Erivan, Nayara, Robério e Dell. Agradeço também ao grande amigo Ivan que infelizmente foi mais uma vítima precoce da covid-19. Que Deus o tenha em um bom lugar.

Agradeço ao meu sogro seu Manoel e a minha sogra dona Isabel pelo apoio.

Agradeço aos meus irmãos que muito me ajudaram e me incentivaram durante todo este tempo de estudo: João, Valdir, Francisco e Elói. Não poderia deixar de agradecer de forma especial ao meu irmão Arlindo, que também nos deixou precocemente, antes do meu ingresso no Doutorado. Se ele estivesse nos assistindo neste momento, também estaria muito feliz e orgulhoso. Que Deus o tenha em um bom lugar meu irmão.

Gostaria de agradecer imensamente aos meus pais José Carvalho e Silva e Maria De Lourdes de Sousa e Silva por todos os seus ensinamentos de vida, de simplicidade, de gratidão e acima de tudo de superação, pois por mais que as adversidades os tenham atingidos por diversas vezes, nunca desistiram de lutar. Vocês são vencedores. Tenho muito orgulho disso.

Agradeço ao meu filho Vinícius por ter me apoiado e torcido por mim para que eu pudesse alcançar os meus objetivos e por ter compartilhado boa parte dessa jornada aqui conosco em Maceió.

Agradeço também a minha esposa Helenita pelo companheirismo e pelo apoio incondicional em todos os momentos desta caminhada, principalmente os mais difíceis. Sou grato por tudo o que você tem feito por mim.

Não poderia deixar de agradecer a uma pessoa que me fez enxergar o mundo de uma forma diferente e que sofreu tanto quanto eu, desde a época do mestrado e que continua do meu lado me apoiando e me incentivando. Este agradecimento mais do que especial vai para uma pessoa que é mais do que especial, é tudo pra mim. Este agradecimento vai para a minha filha Viliane. Muito obrigado por tudo o que você tem me proporcionado.

Se é a razão que faz o homem, é o sentimento
que o conduz.

Jean-Jacques Rousseau

RESUMO

Neste trabalho de Tese temos como principal objetivo caracterizar domínios (f, p) -extremais do tipo sobre determinado, para o p -Laplaciano, que admitem uma solução positiva, sob alguma condição especial imposta sobre a função f . Para atingir este objetivo investigamos propriedades geométricas e topológicas dos domínios (f, p) -extremais relacionados a problemas sobre determinados envolvendo o operador p -Laplaciano em domínios tanto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n quanto do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Mostramos que quando a função f é Lipschitz e satisfaz a condição que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > 0$ no caso Euclidiano ou $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$ no caso hiperbólico, tais domínios apresentam propriedades de estreitamento. As principais ferramentas empregadas para obtermos nossos resultados são uma aplicação do Método dos Planos Móveis (MPM) juntamente com algumas versões dos princípios do máximo, do máximo forte e de comparação forte e uma adaptação das técnicas utilizadas em (ROS; SICBALDI, 2013) e (ESPINAR; MAO, 2018) para o caso $p = 2$, (COLESANTI, 1994) e (CHORWADWALA et al., 2015) para o caso geral.

Apresentamos também alguns resultados sobre estimativas do primeiro autovalor para o p -Laplaciano com condições de Dirichlet em bolas geodésicas de variedades Riemannianas que admitem uma função f que satisfaz $|\nabla f| \leq b$ e $\Delta_p f \geq a$ para constantes positivas a e b . Neste sentido generalizamos resultados obtidos anteriormente em (VEERAVALLI, 2003).

Palavras-chave: Domínios (f, p) -extremais. p -Laplaciano. Método dos Planos Móveis. Problemas sobre determinados. Princípios do máximo, do máximo forte e de comparação forte. Primeiro autovalor.

ABSTRACT

In this Thesis work, our main objective is to characterize (f, p) -extremal domains of the over-determined type, for the p -Laplacian, which admits a positive solution, under some special condition imposed on the function f . To achieve this goal we investigate geometric and topological properties of (f, p) -extremal domains related to problems about the p -Laplacian operator in domains of both the Euclidean space \mathbb{R}^n and the hyperbolic space \mathbb{H}^n . We show that when a function f is Lipschitz and satisfies the condition that $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ for all $t > 0$ and for some constant $\lambda > 0$ in the Euclidean case or $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$ in the hyperbolic case, such domains have narrowing properties. The main tools used to obtain our results are an application of the Moving Planes Method (MPM) together with some versions of the maximum, strong maximum and strong comparison principles and an adaptation of the techniques used in (ROS; SICBALDI, 2013) and (ESPINAR; MAO, 2018) for the case $p = 2$, (COLESANTI, 1994) and (CHORWADWALA et al., 2015) for the general case.

We also present some results on estimates of the first eigenvalue for the p -Laplacian with Dirichlet conditions in geodesic balls of Riemannian manifolds that admit a function f that satisfies $|\nabla f| \leq b$ and $\Delta_p f \geq a$ for positive constants a and b . In this sense, we generalize results obtained previously in (VEERAVALLI, 2003).

Keywords: (f, p) -extremal domains. p -Laplacian. Moving Planes Method. Overdetermined problems. Principles of maximum, strong maximum and strong comparison. First eigenvalue.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES PARA O p-LAPLACIANO E APLICAÇÕES	22
2.1	Introdução	22
2.2	Estimativa Geral para o Primeiro Autovalor do Operador p -Laplaciano	25
2.3	Aplicações	27
2.3.1	Estimativas do primeiro autovalor do p -Laplaciano em formas espaciais . . .	28
2.3.2	Uma Classe de Variedades Produto	30
2.3.3	Submersões Riemannianas	32
3	A GEOMETRIA DE DOMÍNIOS EXTREMAIS PARA O OPERADOR p-LAPLACIANO	36
3.1	Domínios Extremais para o p -Laplaciano	36
3.2	Princípios de Comparação e do Máximo Fortes	38
3.3	Domínios extremais no \mathbb{R}^n	40
3.4	O Método dos Planos Móveis - MPM	49
3.5	Estreitamento dos fins Planos	66
3.5.1	Demonstração dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2	73
3.5.2	Uma estimativa para a altura em \mathbb{R}^2	76
3.6	Domínios Extremais no Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n	78
3.6.1	Uma Estimativa para a Altura em \mathbb{H}^2	83
3.6.2	Bordo Assintótico de um Domínio Extremal	86
3.6.3	Funções de Busemann e Horoesferas	87
	REFERÊNCIAS	91

1 INTRODUÇÃO

Nesta Tese, investigamos propriedades geométricas de domínios do espaço Euclidiano e do espaço hiperbólico, limitados ou não, que admitem uma solução positiva do seguinte problema sobre determinado:

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha & \text{no } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1)$$

onde f é uma função Lipschitz, ν é o campo unitário normal ao bordo de Ω apontando para o exterior e α é uma constante não nula.

Na década de 1950, Aleksandrov, ao estudar hipersuperfícies mergulhadas de curvatura média constante em formas espaciais, introduziu uma notável ferramenta, que posteriormente ficaria conhecida como Processo de Simetrização de Aleksandrov ou Método dos Planos Móveis (MPM), para mostrar que as únicas hipersuperfícies mergulhadas de curvatura média constante no espaço Euclidiano são as esferas redondas (ALEKSANDROV, 1958). Posteriormente, em 1971, Serrin, no seu célebre trabalho (SERRIN, 1971), fez um refinamento memorável da técnica de Aleksandrov e, juntamente com uma versão mais sofisticada do princípio do máximo de Hopf, resolveu o Problema (1), no caso em que $p = 2$ e $f(u) = 1$. De forma mais precisa, Serrin resolveu o seguinte problema:

Seja Ω um domínio aberto, conexo e limitado do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n com bordo $\partial\Omega$ suave. Suponha que exista uma função $u = u(x) = u(x_1, \dots, x_n) \in C^2$ que seja solução do problema

$$\begin{cases} \Delta u = -1 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{constante} & \text{no } \partial\Omega. \end{cases}$$

Então Ω é uma bola e a função u é radialmente simétrica e tem a forma específica $u(x) = \frac{b^2 - |x|^2}{2n}$, onde b é o raio da bola. No mesmo artigo, Serrin estendeu esse resultado para operadores uniformemente elípticos.

A técnica de Serrin inspirou um grande número de trabalhos e tem sido aprimorada e generalizada em várias direções: para domínios limitados e não limitados e para operadores mais gerais como por exemplo os operadores semilineares, incluindo o p -Laplaciano.

No contexto do problema (1), para o caso linear, Berestycki, Caffarelli e Nirenberg em (BERESTYCKI et al., 1997) consideraram soluções limitadas e positivas em domínios não limita-

dos do espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Sob hipóteses adicionais em f , os autores provaram que os únicos domínios que são epigráficos, ou seja, domínios do tipo $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})\}$, onde $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função globalmente Lipschitz, são os semi-espacos. Motivados pelos seus resultados e pelos trabalhos de Reichel (REICHEL, 1997) e de Aftalion e Busca (AFTALION; BUSCA, 1997), para domínios exteriores, os autores conjecturaram que vale uma certa classificação mais geral. Precisamente, eles enunciaram a seguinte conjectura.

Conjectura BCN (BERESTYCKI et al., 1997) *Seja Ω um domínio suave com $\Omega^c = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ conexo. Suponha que exista uma solução positiva e limitada de (1), $p = 2$, para alguma função Lipschitz f . Então Ω é ou um semi-espaço, ou uma bola, ou o complemento de uma bola ou ainda um cilindro circular do tipo $\mathbb{R}^{n-k} \times B^k$, onde B^k é uma bola de \mathbb{R}^k .*

Desde então a conjectura BCN tem inspirado vários trabalhos e foi verificada em muitos casos (ver (FARINA; VALDINOCI, 2010), (FARINA; VALDINOCI, 2012), (FARINA; VALDINOCI, 2013), (ROS; SICBALDI, 2013), (TRAIZET, 2014), (PINO et al., 2015), (ROS et al., 2017), (ROS et al., 2020)), mas é falsa em geral (ver (SICBALDI, 2010), (HAUSWIRTH et al., 2011), (SCHLENK; SICBALDI, 2012)). Destacamos aqui o trabalho de Ros, Ruiz, e Sicbaldi (ROS et al., 2017), onde os autores mostraram que a Conjectura BCN é verdadeira em domínios do \mathbb{R}^2 que possuem bordos conexos e não limitados. Mais especificamente, os autores provaram que se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio aberto e conexo com bordo de classe $C^{1,\alpha}$ não limitado e conexo, e se u é uma solução do Problema (1), com $p = 2$, para alguma função Lipschitz $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, então Ω é um semiplano e u é paralela, isto é, u depende somente de uma variável.

O estudo dos problemas elípticos sobre determinados do tipo (1) para $p = 2$ mostra que a geometria de tais problemas compartilha profundas semelhanças com a teoria das hipersuperfícies de curvatura média constante, embora a relação entre tais problemas não seja clara. Com base nestas semelhanças, Ros e Sicbaldi em (ROS; SICBALDI, 2013) estudaram o problema elíptico sobre determinado de segunda ordem, fazendo um paralelo com a teoria das hipersuperfícies de curvatura média constante. Neste sentido, inspirados no trabalho de Meeks (MEEKS III, 1988), os autores forneceram condições necessárias sobre a geometria e a topologia de domínios planos que admitem soluções positivas para problemas sobre determinados do tipo (1), no caso linear. Neste mesmo trabalho, os autores deram uma resposta parcial afirmativa à conjectura BCN, quando $n = 2$, em duas direções : no caso em que o domínio Ω está contido num semiplano e $|\nabla u| < \infty$ e no caso em que existe uma constante $\lambda > 0$ tal que $f(t) \geq \lambda t$ para cada $t > 0$.

Motivado por estes trabalhos é natural então se perguntar se a conjectura BCN vale no contexto do operador p -Laplaciano. Com o objetivo de atacar este problema, investigamos

propriedades geométricas e topológicas de domínios que admitem soluções positivas do Problema (1), com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$, $p \neq 2$. Neste sentido, conseguimos estender resultados obtidos em (ROS; SICBALDI, 2013) para o caso do p -Laplaciano. De forma mais precisa obtemos o resultado seguinte:

Teorema 1.0.1 *Seja Ω um domínio de \mathbb{R}^2 com topologia finita, que admite uma solução do Problema (1) para alguma função Lipschitz $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > 0$, com $\frac{3}{2} < p < \infty$, $p \neq 2$. Então valem as seguintes propriedades:*

1. *Se E é um fim de Ω , então E está a uma distância limitada de uma reta.*
2. *Ω não pode ter somente um fim.*
3. *Se Ω tem exatamente dois fins, então existe uma reta L tal que o domínio Ω está a uma distância limitada de L .*

A demonstração deste resultado é uma consequência dos teoremas abaixo.

Teorema 1.0.2 *Seja Ω um domínio aberto e conexo (possivelmente não limitado) do \mathbb{R}^n que admite uma solução positiva $u \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$ para a equação*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega$$

onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para cada $t > 0$, para alguma constante $\lambda > 0$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$, $p \neq 2$. Então Ω não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ .

No teorema acima $R_\lambda = \frac{c(n,p)}{\sqrt[p]{\lambda}}$, onde $c(n,p)$ representa a primeira raiz positiva da função $z(t)$ que é solução do problema

$$\begin{cases} (p-1)|z'(t)|^{p-2}z''(t) + \frac{(n-1)}{t}|z'(t)|^{p-2}z'(t) + |z(t)|^{p-2}z(t) = 0, \\ z'(0) = 0, \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Além disso, se u é uma solução do Problema (1), então Ω também possui propriedades de estreitamento, obtidas no teorema acima. Precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 1.0.3 *Nas hipóteses do teorema acima, se u é solução do Problema*

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha \text{ no } \partial\Omega \end{cases},$$

então ou $\bar{\Omega}$ não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ ou Ω é uma bola de raio R_λ .

No último teorema, caso o domínio Ω seja a bola geodésica de raio R_λ , então a função u é solução do problema

$$\begin{cases} (p-1)|z'(t)|^{p-2}z''(t) + \frac{(n-1)}{t}|z'(t)|^{p-2}z'(t) + \lambda_{1,p}(\Omega)|z(t)|^{p-2}z(t) = 0, \\ z'(0) = z(R) = 0. \end{cases}$$

Em particular u é radial, ou seja, u depende apenas da função distância.

A idéia da demonstração é explorar o princípio de comparação forte em (DAMASCELLI; SCIUNZI, 2006) e o princípio do máximo forte em (VÁZQUEZ, 1984) por meio do Método do Planos Móveis. Além disso, baseado na técnica utilizada por Chorwadwala, Mahadevan e Toledo em (CHORWADWALA et al., 2015) vamos mostrar a existência de um operador linear L uniformemente elíptico associado ao problema (1) numa vizinhança dos pontos do bordo e assim conseguimos aplicar uma versão do Lema de Hopf ao operador L afim de obtermos o resultado por contradição.

Outro resultado fundamental neste trabalho é o teorema a seguir, pois é através dele que serão obtidos os principais resultados de simetria. Vale ressaltar que este problema foi tratado por Colesanti em (COLESANTI, 1994) e por Chorwadwala, Mahadevan e Toledo em (CHORWADWALA et al., 2015). Porém nosso caso difere dos anteriores em alguns aspectos: o primeiro trata o caso em que a função f é continuamente diferenciável e sob a condição de que dado um ponto P no domínio, o gradiente da solução do problema sobre determinado é diferente de zero no conjunto dos pontos que não contém P , enquanto que o segundo trabalho trata o caso onde a solução do problema sobre determinado é uma autofunção. No nosso caso, exigimos apenas a regularidade Lipschitz sobre a função f que aparece no problema. Por meio da técnica aplicada para o caso particular em (CHORWADWALA et al., 2015), conseguimos adaptá-la para mostrar que para cada ponto do bordo do domínio, sempre vai existir uma vizinhança deste ponto, na qual o gradiente da solução do problema não se anula. Vale ressaltar que utilizando a teoria da regularidade para equações elípticas também conseguimos mostrar que tal vizinhança existe. Com isto não precisamos utilizar a hipótese sobre os pontos críticos da solução. De forma mais precisa, temos o seguinte teorema.

Teorema 1.0.4 *Seja Ω um domínio aberto, conexo e limitado de \mathbb{R}^n com bordo de classe $C^{2,\beta}$. Suponha que o Problema (1) admita uma solução $u \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega})$, onde f é uma função Lipschitz. Então Ω é uma bola e u é radialmente simétrica.*

Como citado acima, nosso objetivo neste trabalho de Tese é caracterizar os domínios (f, p) -extremais, do tipo (1), que admitem uma solução, sob alguma hipótese adicional sobre a função f . Neste sentido, o teorema seguinte mostra uma importante caracterização para os domínios (f, p) -extremais do \mathbb{R}^2 quando impomos uma certa condição de positividade sobre a função f . Para $p = 2$, ele representa um caso particular da Conjectura BCN e foi resolvido por Ros e Sicbaldi em (ROS; SICBALDI, 2013).

Teorema 1.0.5 *Seja Ω um domínio (f, p) -extremal do \mathbb{R}^2 , onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$, para cada $t > 0$ e para algum $\lambda > 0$, com $\frac{3}{2} < p < \infty$ e $p \neq 2$, tal que $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ seja conexo. Então Ω é uma bola.*

A demonstração deste teorema consiste em mostrar que o bordo do domínio é formado por um única curva plana e combinar esta propriedade com uma aplicação conjunta dos teoremas citados acima .

Em um artigo recente, Espinar e Mao investigaram a geometria e topologia de domínios extremais em variedades de Hadamard (ESPINAR; MAO, 2018), o que levou os autores a obter propriedades de estreitamento, uma estimativa superior para a dimensão de Hausdorff para o bordo assintótico, além de caracterizar o bordo dos domínios extremais no infinito. No caso hiperbólico, propriedades de estreitamento também foram obtidas. Num certo sentido os autores estenderam um resultado de Levitt-Rosenberg (LEVITT; ROSENBERG, 1985) para problemas elípticos sobre determinados, mostrando portanto uma forte relação entre os domínios extremais e as hipersuperfícies de curvatura média constante.

Para o cenário hiperbólico também conseguimos mostrar que vários dos resultados obtidos em (ESPINAR; MAO, 2018), no caso do Laplaciano clássico, também valem para o operador p -Laplaciano. Neste sentido, nosso primeiro resultado é o teorema seguinte.

Teorema 1.0.6 *Seja Ω um domínio aberto e conexo (limitado ou não) do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Suponha que exista uma função $u > 0$ solução de*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (2)$$

onde a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ para alguma constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Então Ω não contém nenhuma bola geodésica fechada de raio R_λ .

Para o caso hiperbólico, o raio $R_\lambda = \frac{c(n,p)}{\sqrt[p]{\lambda}}$, onde $c(n,p)$ representa a primeira raiz positiva da função $z(t)$ que é solução do problema

$$\begin{cases} (p-1)|z'(t)|^{p-2}z''(t) + (n-1)\coth(t)|z'(t)|^{p-2}z'(t) + |z(t)|^{p-2}z(t) = 0, \\ z'(0) = 0 \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Teorema 1.0.7 *Nas condições do teorema anterior, se u é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle_{\mathbb{H}^n} = \alpha \text{ no } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$, então ou o fecho de Ω , $\bar{\Omega}$, não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ ou Ω é uma bola de raio R_λ .

Semelhante ao caso Euclidiano, se o domínio Ω no último teorema é a bola geodésica de raio R_λ , então a função u é solução do problema

$$\begin{cases} (p-1)|z'(t)|^{p-2}z''(t) + (n-1)\coth(t)|z'(t)|^{p-2}z'(t) + \lambda_{1,p}(\Omega)|z(t)|^{p-2}z(t) = 0, \\ z'(0) = z(R) = 0. \end{cases}$$

Em particular u é radial.

Como aplicação obtemos uma propriedade de estreitamento para as componentes conexas dos domínios (f,p) -extremais tanto do espaço Euclidiano \mathbb{R}^2 quanto do espaço hiperbólico \mathbb{H}^2 . O resultado é o seguinte.

Teorema 1.0.8 *Sejam Ω um domínio (f,p) -extremal aberto e conexo e Ω' uma componente conexa de*

$$\{x \in \Omega : u(x) > h_0\},$$

onde u é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle_{\mathbb{H}^n} = \alpha \text{ no } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ para alguma constante $\lambda > 0$ (no caso Euclidiano) e $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$ (no caso hiperbólico), com $\frac{3}{2} < p < \infty$ e $p \neq 2$, então o diâmetro de Ω' é menor do que $2R_\lambda$.

Ao estudarmos estes problemas no espaço hiperbólico nos deparamos com a necessidade de encontrar boas estimativas para o primeiro autovalor do operador p -Laplaciano em variedades Riemannianas. Mais precisamente, precisamos obter estimativas inferiores para o primeiro autovalor do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega \end{cases}, \quad (3)$$

onde Ω é um domínio limitado de uma variedade Riemanniana M .

O estudo do espectro do operador Laplaciano ($p = 2$) com as condições de bordo de Dirichlet é um problema clássico da Análise Geométrica e mesmo tendo sido extensivamente estudado ao longo dos anos, ainda permanece bastante atual e muito rico em resultados e aplicações, principalmente quando se trata de obter estimativas para o primeiro autovalor. Muitos trabalhos importantes foram realizados ao longo dos anos com o objetivo de provar resultados de existência e unicidade ou até mesmo de encontrar uma melhor estimativa para o primeiro autovalor. Citamos por exemplo os trabalhos de Faber (FABER, 1923) e Krahn (KRAHN, 1925), os quais, de forma independente demonstram uma conjectura devida a Rayleigh, a qual afirma que para domínios de mesmo volume, o que tem menor autovalor é a bola.

Sabe-se que para $p = 2$, o Problema (3) coincide com o problema clássico de Dirichlet para o Laplaciano e que os autovalores formam uma sequência $\{\lambda_{k,2}(\Omega)\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que

$$0 < \lambda_{1,2}(\Omega) < \lambda_{2,2}(\Omega) \leq \lambda_{3,2}(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_{k,2}(\Omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty.$$

Por outro lado, para o operador p -Laplaciano, $1 < p < \infty$, o estudo em busca de uma estimativa para o primeiro autovalor é mais recente. Citamos por exemplo o trabalho (ÔTANI, 1984) de Ôtani, no qual o autor estuda o Problema (3) no caso em que $n = 1$ (unidimensional), $\Omega = (0, 1)$ e mostra que os autovalores formam uma sequência simples que tende para o infinito. De forma mais precisa, o autor mostrou que a sequência $\{\lambda_{k,p}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dos autovalores do Problema (3) é dada por

$$\lambda_{k,p}(\Omega) = k^p \lambda_{1,p}(\Omega) = k^p (p-1) \left[2 \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^p)^{\frac{1}{p}}} \right]^p.$$

Outros resultados para o caso unidimensional podem ser vistos em (ANANE et al., 2002), (PINASCO, 2004), (VALTORTA, 2012), (KOERBER, 2018), (SANHAJI; DAKKAK, 2020), e suas referências.

Para o caso geral, $n \geq 2$, $p > 1$ e $p \neq 2$, sabe-se que existe uma sequência crescente de autovalores $\{\lambda_{k,p}\}_{k \in \mathbb{N}}$ que são caracterizados variacionalmente, tende para o infinito e que o

primeiro autovalor é simples, isto é,

$$0 < \lambda_{1,p}(\Omega) < \lambda_{2,p}(\Omega) \leq \lambda_{3,p}(\Omega) \leq \dots \leq \lambda_{k,p}(\Omega) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} +\infty.$$

Porém, a multiplicidade dos demais autovalores continua sendo desconhecida. Veja por exemplo (AZORERO; ALONSO, 1987) e (ANANE, 1988) para mais detalhes.

Em geral não se conhece $\lambda_{1,p}$ explicitamente. Mesmo no caso de bolas geodésicas, o cálculo exato para $\lambda_{1,p}$ pode se tornar demasiado complicado. Neste sentido, as técnicas de estimativas para $\lambda_{1,p}$ tornam-se relevantes, principalmente para a obtenção de cotas inferiores.

Veeravalli em (VEERAVALLI, 2003), mostrou de uma forma simples e elegante, no caso do Laplaciano clássico, que se $(N, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é uma variedade Riemanniana e f é uma função em N tal que $|\nabla f| \leq a$ e $\Delta f \geq b$ para constantes estritamente positivas, então $\lambda_1(N) \geq \frac{b^2}{4a^2}$.

Nesta Tese, obtemos uma estimativa do tipo Veeravalli para o primeiro autovalor do operador p -Laplaciano em domínios limitados de uma variedade Riemanniana. Como aplicação desta estimativa generalizamos alguns dos resultados obtidos por Cavalcante e Manfio em (CAVALCANTE; MANFIO, 2018), para variedades Riemannianas que admitem uma submersão Riemanniana sobre o espaço hiperbólico. Além disso, reobtemos algumas estimativas clássicas para o primeiro autovalor como as obtidas por Poliquin em (POLIQUIN, 2014).

2 ESTIMATIVAS DE AUTOVALORES PARA O p -LAPLACIANO E APLICAÇÕES

2.1 INTRODUÇÃO

Seja Ω um domínio limitado de uma variedade Riemanniana M^n , $n \geq 2$. O primeiro autovalor de Dirichlet para o operador de Laplace-Beltrami em Ω pode ser caracterizado variacionalmente como

$$\lambda_1(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dM}{\int_{\Omega} u^2 dM} : u \in W_0^{1,2}, u \neq 0 \right\},$$

onde $W_0^{1,2}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev com traço no $\partial\Omega$. Se M é não compacta e existe $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ uma exaustão de M , ou seja, $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, então o primeiro autovalor de M é definido como o limite

$$\lambda_1(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_1(\Omega_k).$$

É fácil ver que este limite não depende da escolha da exaustão. Este número é um invariante geométrico muito importante e é chamado também de tom fundamental por alguns autores. Um problema clássico em geometria espectral é determinar condições em M que impliquem $\lambda_1(M) > 0$ (ver (SCHOEN; YAU, 1994), Cap. III). Por exemplo, se M tem volume infinito, a positividade de $\lambda_1(M)$ implica que M é uma variedade hiperbólica (ou não parabólica) (ver (GRIGOR'YAN, 1999) Proposição 10.1), isto é, existem funções de Green positivas em M .

Por outro lado, o problema de encontrar o valor exato do primeiro autovalor do problema de Dirichlet para o operador de Laplace-Beltrami em bolas geodésicas de variedades Riemannianas tem chamado a atenção de vários matemáticos ao longo dos anos. Em (MCKEAN, 1970), Mckean provou que se Ω é um domínio limitado em uma variedade Riemanniana M^n simplesmente conexa com curvatura seccional $K_M \leq -\kappa^2 < 0$, então o primeiro autovalor para o problema de Dirichlet é limitado inferiormente por

$$\lambda_1(\Omega) \geq \frac{(n-1)^2 \kappa^2}{4}.$$

Notemos que este limite inferior é exatamente o primeiro autovalor de $\mathbb{H}^n(-\kappa^2)$, o espaço hiperbólico de curvatura negativa $-\kappa^2$.

A estimativa de Mckean também pode ser vista como um caso particular de um resultado para variedades Riemannianas mais gerais, obtido por Cheeger em (CHEEGER, 1970). Neste trabalho o autor mostra que se Ω é um domínio em uma variedade Riemanniana completa M^n , então

$$\lambda(\Omega) \geq \frac{h(\Omega)^2}{4},$$

onde $h(\Omega) = \inf_{\Omega' \subset \Omega} \frac{|\partial\Omega'|}{|\Omega'|}$ é a constante de Cheeger.

Por outro lado, Veervalli (VEERAVALLI, 2003), usando uma idéia muito simples, provou de forma muito elegante uma estimativa inferior positiva geral para $\lambda_1(M)$ para variedades Riemannianas que admitem uma função especial.

Neste capítulo, vamos generalizar o trabalho de Veervalli para o operador p -Laplaciano em variedades Riemannianas, e vamos apresentar algumas aplicações. Lembremos que o p -Laplaciano Δ_p , $1 < p < \infty$, é o operador definido como

$$\Delta_p u = \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

para funções suaves em M . O operador p -Laplaciano aparece de forma natural na equação de Euler Lagrange associada ao funcional energia

$$\begin{aligned} E_p : W_0^{1,p}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto E_p(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p d\Omega, \end{aligned}$$

onde $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev dado pelo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma de Sobolev

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_{\Omega} |u|^p d\Omega + \int_{\Omega} |\nabla u|^p d\Omega \right)^{\frac{1}{p}}.$$

O p -Laplaciano compartilha muitas propriedades com o operador de Laplace-Beltrami e aparece em muitos problemas na Física e Matemática Aplicada (veja por exemplo (AZORERO; ALONSO, 1987), (HUANG, 1994), (LY, 2005), e suas referências). Além disso ele é um operador não linear se $p \neq 2$ e seu primeiro autovalor é também caracterizado variacionalmente de forma similar como

$$\lambda_{1,p}(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p dM}{\int_{\Omega} |u|^p dM} : u \in W_0^{1,p}(\Omega), u \neq 0 \right\}.$$

Como antes, se M é não compacta, definimos o tom fundamental para o p -Laplaciano em M , $\lambda_{1,p}(M)$, como o limite do primeiro autovalor para alguma exaustão por compactos de M .

Nosso primeiro resultado é um critério para obter uma estimativa inferior positiva para $\lambda_{1,p}$ em domínios que admitem um tipo especial de funções. Mais precisamente, vamos provar:

Teorema 2.1.1 *Seja Ω um domínio limitado em uma variedade Riemanniana M , e suponha que exista uma função suave $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\nabla f| \leq a$ e $\Delta_p f \geq b$ para algumas constantes $a, b > 0$. Então o primeiro autovalor do p -Laplaciano satisfaz*

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}.$$

Similarmente ao caso linear ($p = 2$), a positividade do tom fundamental de Δ_p em uma variedade Riemanniana completa com volume infinito implica p -hiperbolicidade, isto é, existem funções de Green positivas para o p -Laplaciano em M . Veja por exemplo o trabalho de Batista, Cavalcante e Santos em (BATISTA et al., 2014).

Como primeira aplicação de nossa estimativa geral vamos obter de forma simples a seguinte generalização do Teorema de McKean:

Corolário 2.1.1 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa simplesmente conexa tal que a curvatura seccional satisfaz $K_M \leq -\kappa^2$. Se $\Omega \subset M$ é um domínio limitado, então*

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{(n-1)^p \kappa^p}{p^p} \coth^p R,$$

onde $R > 0$ é o raio de uma bola geodésica B_R que contém Ω , isto é, $\Omega \subset B_R$. Em particular,

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(n-1)^p \kappa^p}{p^p}.$$

Mencionamos que a mesma estimativa foi obtida por Poliquin em (POLIQUIN, 2014), usando métodos diferentes.

A seguir, inspirado no trabalho de Veeravalli, apresentamos uma estimativa para uma classe de métricas produto torcido.

Corolário 2.1.2 *Seja (N^{n-1}, g_0) uma variedade Riemanniana e considere $M^n = \mathbb{R} \times N$ munida com a métrica produto torcido $ds^2 = dt^2 + e^{2\rho(t)} g_0$, onde a função de torção satisfaz $\rho'(t) \geq \kappa > 0$. Então o tom fundamental do p -Laplaciano de M é limitado inferiormente*

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(n-1)^p}{p^p} \kappa^p.$$

Esta classe de variedades torcidas contém o espaço hiperbólico, e portanto a estimativa é ótima. Por outro lado, existem também alguns exemplos de variedades Riemannianas nesta classe cuja curvatura seccional é positiva em algumas direções. De fato, basta escolhermos $N = \mathbb{S}^{n-1}$, a esfera redonda, e $\rho(t) = \kappa t$.

Como observado por Cavalcante e Manfio em (CAVALCANTE; MANFIO, 2018), este tipo de estimativa apresentada no Corolário 2.1.2 pode ser levantada para variedades Riemannianas que admitem uma submersão Riemanniana sobre o espaço hiperbólico cujas fibras têm curvatura uniformemente limitada. Neste contexto, temos o seguinte teorema para o p -Laplaciano.

Teorema 2.1.2 *Seja \widetilde{M}^m uma variedade Riemanniana completa que admite uma submersão sobre M^n , onde M^n é dada no Corolário 2.1.2. Se a curvatura média das fibras satisfaz $\|H^{\mathcal{F}}\| \leq \alpha$ para algum $\alpha < (n-1)\kappa$, então*

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{((n-1)\kappa - \alpha)^p}{p^p}.$$

Notemos que esta é a versão dual de resultados similares para imersões isométricas obtidas em (CHEUNG; LEUNG, 2001), (VEERAVALLI, 2003), (BÉRARD et al., 2011), para $p = 2$, e (DU; MAO, 2017), (EVANGELISTA; SEO, 2017), para $p > 1$.

Recentemente, Polymerakis em (POLYMERAKIS, 2020), estabeleceu uma nova estimativa para o tom fundamental do operador de Laplace-Beltrami do espaço total das submersões Riemannianas em termos do espectro do espaço base. É um problema interessante encontrar uma estimativa semelhante para o operador p -Laplaciano.

2.2 ESTIMATIVA GERAL PARA O PRIMEIRO AUTOVALOR DO OPERADOR p -LAPLACIANO

Nesta seção pretendemos apresentar uma estimativa para o primeiro autovalor do operador p -Laplaciano para domínios limitados de uma variedade Riemanniana M que admitem uma função f com propriedades de limitação tanto para a norma do gradiente quanto para o p -Laplaciano de f . Com isto obtemos uma generalização do resultado obtido em (VEERAVALLI, 2003) por Veeravalli para o caso clássico do operador Laplace-Beltrami. Como aplicação deste resultado pretendemos obter estimativas para o primeiro autovalor para domínios limitados das formas espaciais, além de obtermos uma generalização de um resultado de Cavalcante-Manfio (CAVALCANTE; MANFIO, 2018) para o p -Laplaciano no caso de subvariedades Riemannianas.

Neste trabalho, todas as integrações são feitas com respeito à forma de volume dada pela métrica Riemanniana. Para fins de simplicidade, na sequência iremos omitir a forma de volume dM nas integrais. Agora vamos provar nosso primeiro resultado.

Teorema 2.2.1 *Seja Ω um domínio limitado em M e suponha que exista uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $|\nabla f| \leq a$ e $\Delta_p f \geq b$, com $a, b > 0$. Então o primeiro autovalor do p -Laplaciano satisfaz*

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}.$$

Demonstração: Por densidade podemos usar funções suaves na caracterização variacional de

$\lambda_{1,p}(\Omega)$. Em particular, dada uma função $h \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
b \int_{\Omega} |h|^p &\leq \int_{\Omega} |h|^p \Delta_p f \\
&= \int_{\Omega} |h|^p \operatorname{div} (|\nabla f|^{p-2} \nabla f) \\
&= \int_{\Omega} |h|^p \operatorname{div} (|\nabla f|^{p-2} \nabla f) + \int_{\Omega} \langle \nabla |h|^p, |\nabla f|^{p-2} \nabla f \rangle \\
&\quad - \int_{\Omega} \langle \nabla |h|^p, |\nabla f|^{p-2} \nabla f \rangle.
\end{aligned} \tag{4}$$

Como

$$\operatorname{div} (|h|^p |\nabla f|^{p-2} \nabla f) = |h|^p \operatorname{div} (|\nabla f|^{p-2} \nabla f) + \langle \nabla |h|^p, |\nabla f|^{p-2} \nabla f \rangle.$$

Segue, pelo Teorema da divergência, que

$$\begin{aligned}
b \int_{\Omega} |h|^p &\leq \int_{\Omega} \operatorname{div} (|h|^p |\nabla f|^{p-2} \nabla f) - \int_{\Omega} \langle \nabla |h|^p, |\nabla f|^{p-2} \nabla f \rangle \\
&= - \int_{\partial\Omega} \langle |h|^p |\nabla f|^{p-2} \nabla f, \nu \rangle - \int_{\Omega} \langle \nabla |h|^p, |\nabla f|^{p-2} \nabla f \rangle \\
&= - \int_{\partial\Omega} |h|^p |\nabla f|^{p-2} \langle \nabla f, \nu \rangle - p \int_{\Omega} |h|^{p-1} |\nabla f|^{p-2} \langle \nabla |h|, \nabla f \rangle \\
&= -p \int_{\Omega} |h|^{p-1} |\nabla f|^{p-2} \langle \nabla |h|, \nabla f \rangle \\
&\leq p \int_{\Omega} |h|^{p-1} |\nabla h| |\nabla f|^{p-1} \\
&\leq p \int_{\Omega} |h|^{p-1} a^{p-1} |\nabla h|,
\end{aligned} \tag{5}$$

onde ν é o vetor unitário normal ao bordo $\partial\Omega$ apontando para fora.

Aqui vamos encontrar uma estimativa para o lado direito desta desigualdade e para alcançarmos este objetivo, vamos precisar da desigualdade de Young. Com isto em mente introduziremos uma constante positiva θ , que será escolhida posteriormente, de acordo com o nosso objetivo.

Agora, utilizando a desigualdade de Young, note que

$$\begin{aligned}
|h|^{p-1} a^{p-1} |\nabla h| &\leq \frac{\theta^q |h|^{q(p-1)}}{q} + \frac{a^{p(p-1)} |\nabla h|^p}{p\theta^p} \\
&= \frac{(p-1)\theta^{p/(p-1)} |h|^p}{p} + \frac{a^{p(p-1)} |\nabla h|^p}{p\theta^p},
\end{aligned}$$

onde q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Assim,

$$p|h|^{p-1} a^{p-1} |\nabla h| \leq (p-1)\theta^{p/(p-1)} |h|^p + \frac{a^{p(p-1)} |\nabla h|^p}{\theta^p}$$

A escolha de θ será feita de tal forma que

$$b - (p-1)\theta^{p/(p-1)} = \frac{b}{p}.$$

Ou seja,

$$b \left(1 - \frac{1}{p}\right) = (p-1)\theta^{\frac{p}{p-1}}.$$

Logo,

$$\frac{b}{p} = \theta^{\frac{p}{p-1}}.$$

Ou ainda,

$$\theta^p = \frac{b^{p-1}}{p^{p-1}}.$$

Assim,

$$p|h|^{p-1}a^{p-1}|\nabla h| \leq \frac{(p-1)b}{p}|h|^p + \frac{a^{p(p-1)}p^{p-1}|\nabla h|^p}{b^{p-1}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} b \int_{\Omega} |h|^p &\leq \int_{\Omega} \left(\frac{(p-1)b}{p}|h|^p + \frac{a^{p(p-1)}p^{p-1}}{b^{p-1}}|\nabla h|^p \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) b \int_{\Omega} |h|^p + \frac{a^{p(p-1)}p^{p-1}}{b^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla h|^p. \end{aligned}$$

Daí resulta que

$$\frac{b}{p} \int_{\Omega} |h|^p \leq \frac{p^{p-1}a^{p(p-1)}}{b^{p-1}} \int_{\Omega} |\nabla h|^p.$$

Organizando os termos

$$\int_{\Omega} |\nabla h|^p \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}} \int_{\Omega} |h|^p.$$

Então

$$\frac{\int_{\Omega} |\nabla h|^p}{\int_{\Omega} |h|^p} \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}.$$

Portanto

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{b^p}{p^p a^{p(p-1)}}.$$

Com isto terminamos a demonstração. ■

2.3 APLICAÇÕES

Agora apresentaremos algumas aplicações do Teorema 2.2.1 que serão usadas nos resultados do próximo capítulo.

2.3.1 Estimativas do primeiro autovalor do p -Laplaciano em formas espaciais

Uma forma espacial é uma variedade Riemanniana simplesmente conexa com curvatura seccional constante. Pelo Teorema de Cartan (DO CARMO, 2015, Cap. VIII) sabemos que se $M^n(c)$ é a forma espacial com curvatura seccional constante $c \in \{-1, 0, 1\}$ então $M^n(-1) = \mathbb{H}^n$ é o espaço hiperbólico, $M^n(0) = \mathbb{R}^n$ é o espaço Euclidiano e $M^n(1) = \mathbb{S}^n$ é a esfera unitária.

Em formas espaciais temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.1 *Seja Ω um domínio limitado em uma forma espacial $M^n(c)$ de dimensão n . Seja B_R uma bola geodésica tal que $\Omega \subset B_R$. Então*

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \begin{cases} \frac{(n-1)^p(\sqrt{-c})^p}{p^p} \coth^p(\sqrt{-c}R), & \text{se } c < 0 \\ \left(\frac{n-1}{pR}\right)^p, & \text{se } c = 0 \\ \frac{(n-1)^p(\sqrt{c})^p}{p^p} \cot^p(\sqrt{c}R), & \text{se } c > 0 \end{cases} .$$

Demonstração: Considere em $M^n(c)$ a métrica g dada por

$$g = dr^2 + f_c^2(r)d\omega^2, \quad (6)$$

com

$$\frac{1}{n-1}f_c(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-c}} \sinh(\sqrt{-c}r), & \text{se } c < 0 \\ r, & \text{se } c = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{c}} \sin(\sqrt{c}r), & \text{se } c > 0 \end{cases} .$$

Agora vamos denotar r_c a função que mede a distância de um ponto em $M(c)$ ao centro de $B_R \subset M^n(c)$, com respeito à métrica (6). É um resultado bem conhecido que $\Delta r_c = (n-1)\frac{f'_c}{f_c}$.

Em particular,

$$\frac{1}{n-1}\Delta r_c \geq \begin{cases} \sqrt{-c} \coth(\sqrt{-c}R), & \text{se } c < 0 \\ \frac{1}{R}, & \text{se } c = 0 \\ \sqrt{c} \cot(\sqrt{c}R), & \text{se } c > 0 \end{cases} .$$

Por outro lado, sabemos que $|\nabla r_c| = 1$ e assim,

$$\Delta_p r_c = \operatorname{div}(|\nabla r_c|^{p-2}\nabla r_c) = \operatorname{div}(\nabla r_c) = \Delta r_c.$$

Logo

$$\frac{1}{n-1}\Delta_p r_c \geq \begin{cases} \sqrt{-c} \coth(\sqrt{-c}R), & \text{se } c < 0 \\ \frac{1}{R}, & \text{se } c = 0 \\ \sqrt{c} \cot(\sqrt{c}R), & \text{se } c > 0 \end{cases} .$$

Portanto, aplicando o Teorema 2.2.1 o resultado segue. ■

Se $c \leq 0$, sabemos que $M^n(c)$ tem o **cut locus** vazio e existem bolas geodésicas $B_R(q)$ para cada $R > 0$. Neste caso, definimos

$$\lambda : (0, \infty) \rightarrow \left(\frac{(n-1)^p (\sqrt{-c})^p}{p^p}, \infty \right)$$

em que $\lambda(R) = \lambda_{1,p}(B_R)$, ou seja λ é a aplicação que associa cada número positivo R ao primeiro autovalor do operador p -Laplaciano na bola de raio R , B_R .

Proposição 2.3.1 (LY, 2005, Teorema 3.2) *A aplicação $\lambda(R) = \lambda_{1,p}(B_R)$ é contínua para todo $R > 0$.*

Teorema 2.3.1 (ANOOP et al., 2018) *Sejam $p \in (1, \infty)$ e $\lambda_{1,p}(s)$ o primeiro autovalor de Δ_p em $\Omega_s = B_{R_1}(0) \setminus \overline{B_{R_0}(se_1)}$. Então*

$$\lambda'_{1,p}(0) = 0 \text{ e } \lambda'_{1,p}(s) < 0 \quad \forall s \in (0, R_1 - R_0).$$

Em particular, $\lambda(s)$ é estritamente decrescente em $[0, R_1 - R_0]$.

Proposição 2.3.2 *Para cada $\lambda > \frac{(n-1)^p (\sqrt{-c})^p}{p^p}$ dado, com $c \leq 0$, existe um único $R_\lambda > 0$ tal que o primeiro autovalor de Dirichlet para o p -Laplaciano na bola geodésica B_{R_λ} de raio R_λ é precisamente λ . Em particular, para cada $R > 0$ dado, existe $v > 0$ solução para o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta_p v + v^{p-1} = 0 & \text{em } B_R, \\ v = 0, & \text{no } \partial B_R. \end{cases}$$

As formas espaciais são casos particulares de variedades Riemannianas com uma métrica rotacionalmente simétrica. Assim, considere o espaço Euclidiano \mathbb{R}^n munido com a métrica g , dada em coordenadas polares por

$$g = dr^2 + f^2(r)d\theta^2$$

onde $d\theta^2$ representa a métrica canônica em \mathbb{S}^{n-1} . Se $r(x) = d(x, 0)$ representa a função distância de $x \in \mathbb{R}^n$ até a origem, então um cálculo direto mostra que

$$\text{Hess } r(x) = \frac{f'(r)}{f(r)}(g - dr \otimes dr)$$

e portanto

$$\Delta r(x) = (n-1) \frac{f'(r)}{f(r)}.$$

Veja por exemplo (ESCOBAR, 2002) para mais detalhes.

Corolário 2.3.2 *Seja M uma variedade Riemanniana com métrica rotacionalmente simétrica centrada em x_0 . Sejam ρ a função distância em M a x_0 e γ uma geodésica minimizante partindo de x_0 e suponha que as curvaturas seccionais de M sejam limitadas superiormente $K_\gamma \leq \kappa$. Então o Laplaciano de ρ em $\gamma(t)$ satisfaz*

$$\Delta\rho(\gamma(t)) \geq (n-1) \frac{f'_\kappa(t)}{f_\kappa(t)},$$

onde

$$f_\kappa(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}} & \text{se } \kappa > 0 \\ \frac{1}{t} & \text{se } \kappa = 0 \\ \frac{\sinh(\sqrt{\kappa}t)}{\sqrt{\kappa}} & \text{se } \kappa < 0 \end{cases} .$$

2.3.2 Uma Classe de Variedades Produto

Agora considere (N^{k-1}, g) uma variedade Riemanniana qualquer e $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Considere também a variedade Riemanniana

$$M = (N \times \mathbb{R}, h),$$

onde

$$h = e^{2w(s)}g + ds^2.$$

Lema 2.3.1 *Se $\bar{F} : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função definida por $\bar{F}(x, s) = s$, com $x \in N$ e $s \in \mathbb{R}$, então*

$$\begin{cases} \text{Hess } \bar{F} &= w'(s)e^{2w(s)}g \\ \Delta \bar{F} &= w'(s)(k-1) \end{cases} .$$

Demonstração: De fato, sejam (x, s) um ponto de $M = N \times \mathbb{R}$ e $\{v_1, \dots, v_{k-1}, \nabla \bar{F} = \partial_s\}$ uma base ortonormal de $T_{(x,s)}M$. Assim, pelas fórmulas de O'Neill (O'NEILL, 1966), temos

$$\text{Hess } \bar{F}(v_i, v_j) = e^{2w(s)} \langle \nabla_{v_i} \nabla \bar{F}, v_j \rangle = e^{2w(s)} \langle \nabla_{v_i} \partial_s, v_j \rangle = e^{2w(s)} \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{e^{w(s)}}{e^{w(s)}} v_i, v_j \right) \right\rangle,$$

ou seja,

$$\text{Hess } \bar{F}(v_i, v_j) = w'(s)e^{2w(s)} \langle v_i, v_j \rangle = w'(s)e^{2w(s)}g(v_i, v_j),$$

para cada $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ e

$$\text{Hess } \bar{F}(\partial_s, \partial_s) = \langle \nabla_{\partial_s} \nabla \bar{F}, \partial_s \rangle = \langle \nabla_{\partial_s} \partial_s, \partial_s \rangle = \frac{1}{2} \partial_s (|\partial_s|^2) = 0.$$

Segue daí que $\text{Hess } \bar{F} = w'(s)e^{2w(s)}g$. Portanto

$$\Delta \bar{F} = \sum_{i=1}^{k-1} \langle \nabla_{v_i} \partial_s, v_i \rangle + \langle \nabla_{\partial_s} \partial_s, \partial_s \rangle = (k-1)w'(s),$$

como queríamos. ■

Agora vamos provar o Corolário 2.1.1. Antes vamos lembrar alguns fatos. Da caracterização variacional para $\lambda_{1,p}(\Omega)$, observamos que se $\Omega_1 \subset \Omega_2$, então $\lambda_{1,p}(\Omega_1) \geq \lambda_{1,p}(\Omega_2)$. Em particular, só precisamos apresentar uma estimativa para bolas geodésicas.

Agora fixando um raio geodésico γ em $M = N^{n-1} \times \mathbb{R}$, vamos considerar a função de Busemann B associada a γ . Mais precisamente, $B : M \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$B(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(q, \gamma(t)) - t),$$

onde $r(q, \gamma(t))$ denota a distância entre q e $\gamma(t)$ (ver (BESSA et al., 2015) para mais detalhes). Lembramos que as funções de Busemann em variedades de curvatura não positiva são de classe $C^2(M)$ (ver (HEINTZE; HOF, 1977)) e $|\nabla B| = 1$ (ver (BALLMANN et al., 1985, Lema 3.4)). Além disso, da demonstração do Lema 2.3 em (BESSA et al., 2015), temos que $\Delta B \geq (n-1)\kappa \coth(R)$ em cada bola geodésica de raio $R > 0$. Por outro lado, como $|\nabla B| = 1$, segue que

$$\Delta_p B = \text{div} (|\nabla B|^{p-2} \nabla B) = \Delta B.$$

Ou seja,

$$\Delta_p B \geq (n-1)\kappa \coth(R).$$

Aplicando o Teorema 2.2.1 a esta última desigualdade, temos que

$$\lambda_{1,p}(\Omega) \geq \frac{(n-1)^p \kappa^p}{p^p} \coth^p(R).$$

Com isto demonstramos o Corolário 2.1.1.

Proposição 2.3.3 *Seja (N^{n-1}, g_o) uma variedade Riemanniana e considere $M^n = \mathbb{R} \times N$ munida com a métrica produto torcido $ds^2 = dt^2 + e^{2\rho(t)}g_o$, onde a função de torção satisfaz $\rho'(t) \geq \kappa > 0$. Então o tom fundamental do p -Laplaciano de M é limitado inferiormente por*

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(n-1)^p}{p^p} \kappa^p.$$

Demonstração: Seguindo (BÉRARD et al., 2011) e (CAVALCANTE; MANFIO, 2018), consideremos $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x, s) = s$. Esta é a função de Busemann associada ao raio geodésico correspondente ao fator em \mathbb{R} . Por um cálculo direto temos que $|\nabla F| = 1$. Então

$$\Delta_p F = \Delta F.$$

Pelo Lema 2.3.1, temos que

$$\Delta F = (n - 1)\rho'(t).$$

Como $\rho'(t) \geq \kappa > 0$, segue que

$$\Delta_p F \geq (n - 1)\kappa.$$

Aplicando o Teorema 2.2.1, obtemos

$$\lambda_{1,p}(M) \geq \frac{(n - 1)^p}{p^p} \kappa^p.$$

Com isto terminamos a demonstração. ■

2.3.3 Submersões Riemannianas

Sejam \widetilde{M}^n e B^k variedades diferenciáveis de dimensões n e k respectivamente, com $n \geq k$. A aplicação diferenciável $\pi : \widetilde{M} \rightarrow B$ é uma submersão se a sua diferencial $d\pi(q)$ tem posto máximo para cada $q \in \widetilde{M}$, isto é, se $d\pi(q)$ é sobrejetora para cada $q \in \widetilde{M}$.

Como π é uma submersão, sabemos que para todo $x \in B$, a fibra $\mathcal{F}_x = \pi^{-1}(x)$ é uma subvariedade $n - k$ dimensional de \widetilde{M} . Além disso, $T_q \mathcal{F}_x = \ker d\pi(q)$ para cada $q \in \mathcal{F}_x$, ou seja, para cada ponto q na fibra \mathcal{F}_x , o espaço tangente $T_q \mathcal{F}_x$ coincide com o núcleo da diferencial $d\pi(q)$. Se munirmos \widetilde{M} e B de métricas Riemannianas, dizemos que $\pi : \widetilde{M} \rightarrow B$ é uma submersão Riemanniana se para todo $x \in B$ e para todo $q \in \mathcal{F}_x$, a aplicação diferencial $d\pi$ restrita ao subespaço ortogonal $T_q \mathcal{F}_x^\perp$ é uma isometria sobre $T_x B$. Para mais detalhes citamos (O'NEILL, 1966).

Um exemplo particular e importante de submersão Riemanniana é o caso de projeções sobre os fatores de variedades produto: $\pi : (M \times N, g_1 \oplus f g_2) \rightarrow (M, g_1)$, onde (M, g_1) e (N, g_2) são variedades Riemannianas e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e positiva.

Um campo vetorial em \widetilde{M} é chamado vertical se ele for sempre tangente às fibras. Por outro lado, se um campo vetorial em \widetilde{M} for ortogonal às fibras, ele será chamado de horizontal.

Seja $\pi : \widetilde{M} \rightarrow B$ uma submersão Riemanniana. Denotemos por \mathcal{H} e \mathcal{V} as projeções de $T\widetilde{M}$ sobre os subespaços dos vetores horizontais e verticais, respectivamente. Agora considere $\mathcal{D} \subset T\widetilde{M}$ a distribuição suave em \widetilde{M} que consiste dos vetores verticais. A distribuição horizontal \mathcal{D}^\perp é a distribuição suave de posto k em \widetilde{M} que consiste dos vetores horizontais (veja (CAVALCANTE; MANFIO, 2018)). Assim, a segunda forma fundamental das fibras é um tensor métrico $\alpha^{\mathcal{F}} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^\perp$ definido por

$$\alpha^{\mathcal{F}}(v, w) = \left(\widetilde{\nabla}_v W \right)^{\mathcal{H}},$$

onde W é uma extensão vertical de w e \mathcal{H} denota a projeção horizontal. O vetor curvatura média da fibra é o campo vetorial horizontal $H^{\mathcal{F}}$ dado por $H^{\mathcal{F}} = \text{tr } \alpha^{\mathcal{F}}$. Em termos de uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-k}\}$, temos

$$H^{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^{n-k} \alpha^{\mathcal{F}}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n-k} \left(\tilde{\nabla}_{e_i} e_i \right)^{\mathcal{H}}.$$

Se $H^{\mathcal{F}} = 0$ então as fibras são subvariedades mínimas de \widetilde{M} e se $\alpha^{\mathcal{F}} = 0$, então as fibras são subvariedades totalmente geodésicas.

Sejam M e N variedades, $\pi : M \rightarrow N$ uma aplicação suave, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ campos suaves em M e N , respectivamente. Dizemos que X e Y são π -relacionados se

$$d\pi_q(X_q) = (Y \circ \pi)(q) = Y(\pi(q)) = Y_{\pi(q)} \quad \forall q \in M.$$

Além disso, dizemos que o campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é básico, se ele está π -relacionado com algum campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$.

Lema 2.3.2 *Seja $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ um campo vetorial básico, π -relacionado a $X \in \mathfrak{X}(B)$. Então para $x \in B$ e $q \in \mathcal{F}_x$, temos*

$$\text{div } \tilde{X}(q) = \text{div } X(x) - \langle \tilde{X}(q), H^{\mathcal{F}}(q) \rangle.$$

Demonstração: Seja $\{\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k, \tilde{X}_{k+1}, \dots, \tilde{X}_n\}$ uma base ortonormal em $T\widetilde{M}$, onde $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_k$ são campos básicos. Agora notemos que

$$\begin{aligned} \text{div } \tilde{X}_j &= \sum_{i=1}^n \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_j, \tilde{X}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\tilde{X}_i \langle \tilde{X}_j, \tilde{X}_i \rangle - \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \rangle \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}_i} \tilde{X}_i, \tilde{X}_j \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^n \langle \alpha(\tilde{X}_i, \tilde{X}_i), \tilde{X}_j \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\tilde{X} = \tilde{X}^{\top} + \sum_{j=k+1}^n \langle \tilde{X}, \tilde{X}_j \rangle \tilde{X}_j,$$

onde \tilde{X}^\top é um campo básico, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \tilde{X} &= \operatorname{div} \tilde{X}^\top + \sum_{j=k+1}^n \langle \tilde{X}, \tilde{X}_j \rangle \operatorname{div} \tilde{X}_j \\
&= \operatorname{div} X - \sum_{j=k+1}^n \sum_{i=1}^n \langle \tilde{X}, \tilde{X}_j \rangle \langle \alpha(\tilde{X}_i, \tilde{X}_i), \tilde{X}_j \rangle \\
&= \operatorname{div} X - \sum_{j=k+1}^n \langle \tilde{X}, \sum_{i=1}^n \langle \alpha(\tilde{X}_i, \tilde{X}_i), \tilde{X}_j \rangle \tilde{X}_j \rangle \\
&= \operatorname{div} X - \langle \tilde{X}, H^{\mathcal{F}} \rangle.
\end{aligned}$$

E desta forma concluímos a demonstração do Lema. ■

Considere $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e seja $\tilde{F} = F \circ \pi$ o seu levantamento. Sabe-se que o gradiente de \tilde{F} é o levantamento horizontal do gradiente de F , isto é,

$$\tilde{\nabla} \tilde{F} = \widetilde{\nabla F}. \quad (7)$$

No próximo lema vamos obter, em \widetilde{M} , uma relação entre o p -Laplaciano de \tilde{F} e de F .

Lema 2.3.3 *Seja $F : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e $\tilde{F} = F \circ \pi$ o seu levantamento. Então para cada $x \in B$ e para todo $q \in \mathcal{F}_x$, temos*

$$\tilde{\Delta}_p \tilde{F}(q) = \Delta_p F(x) - |\tilde{\nabla} \tilde{F}(q)|^{p-2} \langle \tilde{\nabla} \tilde{F}, H^{\mathcal{F}}(q) \rangle.$$

Demonstração: Seja $X = |\nabla F|^{p-2} \nabla F$. Pela identidade (7) e pelo Lema 2.3.2, temos respectivamente que, $\tilde{X} = |\tilde{\nabla} \tilde{F}|^{p-2} \tilde{\nabla} \tilde{F}$ e

$$\begin{aligned}
\tilde{\Delta}_p \tilde{F} &= \operatorname{div} \left(|\tilde{\nabla} \tilde{F}|^{p-2} \tilde{\nabla} \tilde{F} \right) \\
&= \operatorname{div} \left(|\nabla F|^{p-2} \nabla F \right) - \langle |\tilde{\nabla} \tilde{F}|^{p-2} \tilde{\nabla} \tilde{F}, H^{\mathcal{F}} \rangle \\
&= \Delta_p F - |\tilde{\nabla} \tilde{F}|^{p-2} \langle \tilde{\nabla} \tilde{F}, H^{\mathcal{F}} \rangle.
\end{aligned}$$

E o resultado segue. ■

Teorema 2.3.2 *Sejam B^k uma variedade Riemanniana e $\pi : \widetilde{M}^n \rightarrow B^k$ uma submersão Riemanniana tal que $\|H^{\mathcal{F}}\| \leq \alpha$. Suponha que $\bar{F} : B \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma função de Busemann e considere o seu levantamento $\tilde{F} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, $\tilde{F} = \bar{F} \circ \pi$. Então*

$$\tilde{\Delta}_p \tilde{F} \geq (k-1)b - \alpha,$$

onde $b = w'(s)$, como no Lema 2.3.1. Em particular,

$$\lambda_{1,p}(\widetilde{M}) \geq \left(\frac{(k-1)b - \alpha}{p} \right)^p.$$

Demonstração: Pelos Lemas 2.3.3 e 2.3.1, temos que $\Delta \tilde{F} = \Delta \bar{F} + \langle \nabla \tilde{F}, H^{\mathcal{F}} \rangle = (k-1)w'(s) + H^{\mathcal{F}}(\tilde{F})$. Por outro lado, $|\nabla \tilde{F}| = 1$, então $\Delta_p \tilde{F} = \Delta \tilde{F}$. Isto implica que

$$\Delta_p \tilde{F} = (k-1)w'(s) + H^{\mathcal{F}}(\tilde{F}) \geq (k-1)w'(s) - \|H^{\mathcal{F}}\|.$$

Portanto, pelo Teorema 2.2.1, o resultado segue. ■

O Teorema 2.1.2 é obtido como consequência do Teorema 2.3.2.

3 A Geometria de Domínios Extremais para o Operador p -Laplaciano

Neste capítulo vamos apresentar nossos principais resultados sobre domínios (f, p) -extremais Ω que admitem uma solução positiva.

3.1 DOMÍNIOS EXTREMAIS PARA O p -LAPLACIANO

Sejam Ω um domínio aberto e conexo de \mathbb{R}^n com bordo suave e $\lambda_{1,p}(\Omega) > 0$ o primeiro autovalor do operador p -Laplaciano para o problema de Dirichlet em Ω . Dizemos que $\{\Omega_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ é uma deformação de $\Omega := \Omega_0$ se existe um campo X tal que $\Omega_t = \xi_t(\Omega) = \xi(t, \Omega)$, onde $\xi(t, \Omega)$ é o fluxo associado a X , mais precisamente

$$\frac{d\xi}{dt}(t, x) = X(\xi(t, x)) \text{ e } \xi(0, x) = x. \quad (8)$$

A deformação é dita preservar volume, se o volume de Ω_t não depende de t .

Se $\{\Omega_t\}_{t \in (-\epsilon, \epsilon)}$ é uma deformação de Ω , vamos denotar por $\lambda_{1,p}(t) := \lambda_{1,p}(\Omega_t)$ o primeiro autovalor de Δ_p em Ω_t e por u_t a primeira autofunção associada. Consideremos $\xi_t : \bar{\Omega} \rightarrow M$ uma família de difeomorfismos $C^1(\bar{\Omega}, M)$, $t \in \mathbb{R}$, $|t| < \epsilon$, tal que

$$\xi_t(x) = x + tR(x) + S(x, t), \quad x \in \Omega,$$

onde $R, S(\cdot, t) \in C^1(\bar{\Omega}, M)$ e $S(x, t) = o(t)$ quando $t \rightarrow 0$. Notemos que a família ξ_t define uma deformação de Ω com campo vetorial $R(x)$. O teorema a seguir devido a García Melián e Sabina de Lis (MELIÁN; DE LIS, 2001), fornece uma expressão explícita do tipo Hadamard para a primeira variação de $\lambda_{1,p}(t)$ com respeito a t e permite uma caracterização para domínios do tipo sobre determinados para o p -Laplaciano.

Teorema 3.1.1 (MELIÁN; DE LIS, 2001, Teorema 3) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{2,\gamma}$ limitado, $\Omega_t = \xi_t(\Omega)$ a deformação de Ω associada à família de difeomorfismos C^1 , $\xi = \xi_t(x)$, $|t| < \epsilon$, satisfazendo (8). Então o primeiro autovalor $\lambda_{1,p}(t)$ de Δ_p em Ω_t é diferenciável com respeito a t em $t = 0$. Além disso,*

$$\lambda'_{1,p}(0) = -(p-1) \int_{\partial\Omega} \langle R, \nu \rangle \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^p d\sigma,$$

onde ν é o normal unitário exterior e u é a autofunção normalizada em Ω tal que $\int_{\Omega} |u|^p dx = 1$.

A fórmula obtida no Teorema 3.1.1, para a primeira variação do funcional $\lambda_{1,p}(\Omega)$, também foi obtida nos trabalhos (CHORWADWALA; MAHADEVAN, 2015), (ANOOP et al.,

2018), (HUANG et al., 2018), (ANTUNES, 2019) e (BOBKOV; KOLONITSKII, 2020) para $1 < p < \infty$, e generaliza resultados para o caso linear ($p = 2$), obtidos em (GARABEDIAN; SCHIFFER, 1953), (EL SOUFI; ILIAS, 2007), (PACARD; SICBALDI, 2009) e (DELAY; SICBALDI, 2015). Isto nos motiva a estudar o funcional $\lambda_{1,p}(\Omega)$ e, de forma semelhante ao caso linear, o Teorema 3.1.1, nos dá uma caracterização dos domínios que admitem soluções positivas para problemas sobre determinados envolvendo o p -Laplaciano. Mais precisamente, dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é p -extremal para o primeiro autovalor do operador p -Laplaciano, se ele é um ponto crítico para o funcional $\lambda_{1,p}$,

$$\Omega_t \mapsto \lambda_{1,p}(t) = \lambda_{1,p}(\Omega_t)$$

na classe de domínios com o mesmo volume, isto é, Ω é solução para a equação $\lambda'_{1,p}(0) = 0$. Isto significa que se Ω é um domínio p -extremal, então existem uma função positiva u e uma constante λ tais que

$$\begin{cases} \Delta_p u + \lambda |u|^{p-2} u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \text{constante} & \text{no } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde ν é o campo unitário normal e exterior ao longo do bordo de Ω .

Em geral, dizemos que Ω é um domínio (f, p) -extremal (limitado ou não) para o operador p -Laplaciano se o problema

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \text{constante} & \text{no } \partial\Omega, \end{cases}$$

admite uma solução para alguma função f .

Um problema clássico em Análise é caracterizar domínios que admitem soluções para problemas do tipo sobre determinado. Neste sentido, importantes trabalhos foram realizados nas últimas décadas, motivados principalmente pelo célebre trabalho de Serrin (SERRIN, 1971). Desde então, muitos resultados importantes foram obtidos sobre a caracterização dos domínios para os problemas sobre determinados do tipo Serrin em contextos mais gerais envolvendo domínios limitados e não limitados tanto de \mathbb{R}^n como de outras variedades Riemannianas e para operadores não lineares, como o p -Laplaciano.

Relacionado à caracterização de domínios, um problema de grande importância é a conjectura (BCN), proposta por Berestycki, Caffarelli e Nirenberg em (BERESTYCKI et al.,

1997). Baseado nos seus resultados e nos trabalhos de Reichel (REICHEL, 1997) e Aftalion e Busca (AFTALION; BUSCA, 1997), para domínios exteriores, os autores conjecturaram que os possíveis domínios suaves com complemento $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ conexo e que existe uma solução positiva e limitada de

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \text{constante} & \text{no } \partial\Omega, \end{cases}$$

para alguma função Lipschitz f onde ν é o campo unitário normal ao bordo de Ω apontando para o exterior, são: ou um semi-espaço, ou uma bola, ou complemento de uma bola, ou um cilindro circular do tipo $\mathbb{R}^j \times B$ onde B é uma bola.

Como vimos na introdução deste trabalho, a conjectura BCN, se mostra verdadeira em várias situações, mas é falsa em geral. Por exemplo, a conjectura é verdadeira para $n = 2$ quando o domínio possui bordo conexo e não limitado (ver (ROS et al., 2017)), mas contraexemplos foram obtidos em (SICBALDI, 2010), para $n \geq 3$, e em (ROS et al., 2020) para $n = 2$. Portanto, é natural então, investigar problemas desse tipo, tanto para domínios em uma variedade Riemanniana mais geral como para operadores mais gerais como o p -Laplaciano, no caso bidimensional ou até mesmo em dimensões mais altas. Para o caso n -dimensional e para domínios limitados do \mathbb{R}^n , com $1 < p < \infty$, alguns resultados foram obtidos. Citamos por exemplo os trabalhos (COLESANTI, 1994) e (CHORWADWALA et al., 2015), os quais mostram que o domínio é uma bola redonda. Contudo, até onde sabemos, ainda não há uma tentativa de estudar o equivalente da conjectura BCN para o operador p -Laplaciano para casos mais gerais do que estes que aqui citamos. No presente trabalho, com o objetivo de darmos alguns passos nesta direção, também apresentamos um problema equivalente à conjectura BCN para o operador p -Laplaciano. De forma mais precisa, estamos interessados em estudar o seguinte problema: Classificar os domínios de \mathbb{R}^n com bordo suave que admitem uma solução fraca para o Problema (1), para alguma função Lipschitz $f > 0$.

3.2 PRINCÍPIOS DE COMPARAÇÃO E DO MÁXIMO FORTES

Sejam Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, e $u \in C^1(\overline{\Omega})$ uma solução fraca do Problema (1), onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz e positiva em $(0, \infty)$.

Devido a não linearidade do p -Laplaciano, existe uma grande dificuldade em se aplicar o princípio do máximo aos problemas sobre determinados envolvendo este operador. Para contornar estas dificuldades, precisamos de algumas versões do princípio de comparação forte e do máximo

forte, que se adaptem aos nossos objetivos. Neste sentido, o teorema a seguir, que é uma versão do Princípio de Comparação Forte - PCF, para o p -Laplaciano, será útil.

Teorema 3.2.1 (DAMASCELLI; SCIUNZI, 2006, Teorema 1.4) *Sejam $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, Ω um domínio limitado do \mathbb{R}^n com $\frac{2n+2}{n+2} < p < 2$ ou $p > 2$. Suponha que u ou v seja uma solução fraca de (1), com $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e localmente Lipschitz em $(0, \infty)$. Se*

$$-\Delta_p u - f(u) \leq -\Delta_p v - f(v) \text{ e } u \leq v \text{ em } \Omega, \quad (9)$$

então $u \equiv v$ em Ω , a menos que $u < v$ em Ω .

Outro resultado importante é o Princípio do Máximo Forte a seguir:

Proposição 3.2.1 (VÁZQUEZ, 1984, Seção 4) *Sejam Ω um domínio do \mathbb{R}^n e w uma função não negativa satisfazendo*

$$-\operatorname{div} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \geq 0 \text{ em } \Omega,$$

onde $a_{ij} \in W_{loc}^{1,\infty}(\Omega)$ e existe $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2$, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ e para todo $x \in \Omega$. Então

(i) $w \equiv 0$ ou $w > 0$ em Ω .

(ii) *Seja x_0 um ponto do bordo de Ω satisfazendo a condição da esfera interior. Se $w > 0$ em Ω e $w(x_0) = 0$, então*

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

onde ν é o vetor unitário normal ao bordo apontando para fora.

O próximo resultado garante que as primeiras autofunções associadas a $\lambda_{1,p}$ ganham certa regularidade em vizinhanças do bordo.

Proposição 3.2.2 (BARLES, 1988) *Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ uma solução fraca não nula de*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle = \lambda \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi,$$

para cada $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $\lambda = \lambda_{1,p}(\Omega)$ e $\partial\Omega$ é de classe $C^{2,\beta}(\Omega)$ para algum $\beta \in (0, 1)$.

Então existem $\alpha \in (0, 1)$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\beta}(\overline{\Omega}_\varepsilon),$$

onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}.$$

Neste sentido também temos o próximo resultado.

Proposição 3.2.3 (ANOOP et al., 2018, Proposição 2.1) *Sejam Ω um domínio suave em \mathbb{R}^n e u uma primeira autofunção do p -Laplaciano em Ω , com condições de bordo de Dirichlet nulas. Então as seguintes afirmações são satisfeitas*

(i) $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

(ii) *Existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\nabla u| > m > 0$ em $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \varepsilon\}$ para algum m . Além disso, $u \in C^2(\overline{\Omega}_\varepsilon)$.*

De um modo mais geral, é bem conhecido que as soluções do Problema (1) têm apenas uma regularidade parcial $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, $0 < \gamma < 1$, veja por exemplo (DIBENEDETTO, 1983), (TOLKSDORF, 1984) e suas referências. Segue daí que $|\nabla u| \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. Portanto, como $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha < 0$ no $\partial\Omega$, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$|\nabla u| \geq \epsilon > 0 \text{ em } \Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \epsilon\}.$$

Logo, por resultados clássicos de regularidade, veja (GILBARG; TRUDINGER, 2001), segue que $u \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega}_\epsilon)$, $0 < \beta < 1$. Além disso, veja (FLECKINGER-PELLÉ; TAKÁČ, 1994, Lema 5.2), a equação $\Delta_p u + f(u) = 0$ é uniformemente elíptica em Ω_ϵ .

3.3 DOMÍNIOS EXTREMAIS NO \mathbb{R}^n

Estudamos agora algumas propriedades topológicas relacionadas aos fins dos domínios (f, p) -extremais, do tipo (1), seguindo a exposição apresentada em (ROS; SICBALDI, 2013). Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tem topologia finita se existe uma bola B_R^n (de raio $R > 0$ suficientemente grande) tal que

1. $\overline{\Omega} \setminus \overline{B}_R^n = \emptyset$ e então $\overline{\Omega}$ é compacto, ou
2. $\overline{\Omega} \setminus \overline{B}_R^n = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R^n$ e então Ω é o complemento de uma região compacta, ou
3. $\overline{\Omega} \setminus B_R^n$ tem um número finito de componentes não compactas e cada componente não compacta E é difeomorfa a $\overline{B}_1^{n-1} \times [0, \infty)$.

No último caso podemos supor que a esfera ∂B_R^n intersecta $\partial\Omega$ transversalmente e que cada componente de $\partial B_R^n \cap \partial\Omega$ é difeomorfa a ∂B_1^{n-1} . Neste caso, diremos que Ω tem topologia própria finita e E é um fim sólido cilíndrico de Ω se $n \geq 3$ ou um fim planar de Ω se $n = 2$.

Segue daí que Ω tem topologia própria finita se e somente se ele é não compacto, $\partial\Omega$ tem um número finito de componentes limitadas.

Um resultado importante neste trabalho é mostrar que quando o domínio (f, p) -extremal tem topologia finita e a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz propriedade: $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$, para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > 0$, então os fins de Ω estão contidos num semi-cilindro. De forma mais precisa, temos o próximo teorema, que será demonstrado na Seção 3.5.1.

Teorema 3.3.1 *Seja Ω um domínio (f, p) -extremal de \mathbb{R}^2 de topologia finita, onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e satisfaz a propriedade $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para algum $\lambda > 0$, com $\frac{3}{2} < p < \infty$, $p \neq 2$. Então valem as seguintes propriedades:*

1. *Se E é um fim de Ω , então E está a uma distância limitada de uma reta.*
2. *Ω não pode ter somente um fim.*
3. *Se Ω tem exatamente dois fins, então existe uma reta L tal que o domínio Ω está a uma distância limitada de L . Em particular os fins de Ω se encontram em lados opostos de cada reta T ortogonal à reta L .*

O Teorema 3.3.1 diz essencialmente que se o domínio (f, p) -extremal Ω de \mathbb{R}^2 tem topologia finita, então cada fim de Ω tem a topologia de uma semi-faixa. Além disso, se Ω tem dois fins, então ele está contido num cilindro.

Com o próximo resultado conseguimos uma caracterização para os domínios (f, p) -extremais, no caso em que a função f satisfaz uma condição especial, que traduzimos no resultado seguinte, cuja demonstração também se encontra na Seção 3.5.1. Note que o domínio Ω não precisa ser limitado para esse teorema.

Teorema 3.3.2 *Seja Ω um domínio (f, p) -extremal do \mathbb{R}^2 , onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$, para cada $t > 0$ e para algum $\lambda > 0$, com $\frac{3}{2} < p < 2$ e $p \neq 2$, tal que $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ seja conexo. Então Ω é uma bola.*

Pela Proposição 2.3.2, segue que para cada constante positiva λ , existe $R_\lambda > 0$ tal que $\lambda_{1,p}(B_{R_\lambda}) = \lambda$, onde B_{R_λ} é a bola em \mathbb{R}^n de raio $R_\lambda > 0$. Isto significa que para cada $\lambda > 0$ dado, existe uma função v que é solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p v + \lambda |v|^{p-2} v = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q) \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q) \\ v = 0 & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(q) \end{cases}, \quad (10)$$

onde $B_{R_\lambda}(q)$ é a bola em \mathbb{R}^n de raio $R_\lambda > 0$ e centro em $q \in \mathbb{R}^n$.

Agora vamos olhar para $\lambda_{1,p}$ sob os efeitos de uma homotetia sobre domínios de \mathbb{R}^n .

Lema 3.3.1 *O primeiro autovalor do p -Laplaciano em uma bola de raio $R > 0$ é dado por $\lambda_{1,p}(B_R) = \frac{\lambda_{1,p}(B_1)}{R^p}$, onde B_R e B_1 são bolas de \mathbb{R}^n com raios $R > 0$ e $R = 1$, respectivamente, com centros na origem.*

Demonstração: Seja Ω um domínio arbitrário e considere $\mathcal{H}_R : \Omega \rightarrow \Omega_R := \mathcal{H}_R(\Omega)$ tal que $\mathcal{H}_R(x) = Rx$, a homotetia de Ω com respeito ao parâmetro $R > 0$. Suponha que a origem $O \in \Omega$ e vamos definir, para cada função u em Ω , a aplicação $\mathcal{H}_R u(x) = u\left(\frac{x}{R}\right)$. Agora considere u uma autofunção para o p -Laplaciano em Ω e λ um autovalor associado. Seja $\hat{u} = \mathcal{H}_R(u)$ e considere $\hat{\varphi}(x) = \mathcal{H}_R\varphi(x)$, com $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Segue daí que

$$\nabla \hat{u}(x) = \frac{1}{R} \nabla u\left(\frac{x}{R}\right) \quad \text{e} \quad \nabla \hat{\varphi}(x) = \frac{1}{R} \nabla \varphi\left(\frac{x}{R}\right).$$

Então

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}_R(\Omega)} |\nabla \hat{u}(x)|^{p-2} \langle \nabla \hat{u}(x), \nabla \hat{\varphi}(x) \rangle dx &= \frac{1}{R^p} \int_{\mathcal{H}_R(\Omega)} \left| \nabla \left(\frac{u}{R} \right) \right|^{p-2} \left\langle \nabla u \left(\frac{x}{R} \right), \nabla \varphi \left(\frac{x}{R} \right) \right\rangle dx \\ &= \frac{1}{R^p} \int_{\Omega} |\nabla u(y)|^{p-2} \langle \nabla u(y), \nabla \varphi(y) \rangle R^n dy \\ &= -\frac{\lambda}{R^p} \int_{\Omega} |u(y)|^{p-2} u(y) \varphi(y) R^n dy \\ &= -\frac{\lambda}{R^p} \int_{\mathcal{H}_R(\Omega)} \left| u \left(\frac{x}{R} \right) \right|^{p-2} u \left(\frac{x}{R} \right) \varphi \left(\frac{x}{R} \right) dy \\ &= -\frac{\lambda}{R^p} \int_{\mathcal{H}_R(\Omega)} |\hat{u}(x)|^{p-2} \hat{u}(x) \hat{\varphi}(x) dx. \end{aligned}$$

Isto mostra que $\frac{\lambda}{R^p}$ é um autovalor para o p -Laplaciano em $\Omega_R = \mathcal{H}_R(\Omega)$. Segue portanto que $\lambda_{1,p}(\Omega_R) = \frac{\lambda_{1,p}(\Omega)}{R^p}$. Em particular, se $\Omega_R = B_R(O)$ e $\Omega = B_1(O)$, então $\lambda_{1,p}(B_R) = \frac{\lambda_{1,p}(B_1)}{R^p}$, como queríamos. ■

Teorema 3.3.3 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e conexo (limitado ou não). Suponha que exista uma função positiva $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ que seja solução fraca da equação*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega,$$

onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz que satisfaz $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante positiva λ , com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$, $p \neq 2$. Então Ω não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ .

Demonstração: Suponha, por contradição, que exista um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{B_{R_\lambda}(q)} \subset \Omega$, e seja v uma função tal que

$$\begin{cases} \Delta_p v + \lambda|v|^{p-2}v = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q), \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q), \\ v = 0 & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(q). \end{cases} \quad (11)$$

Note que v é uma primeira autofunção correspondente ao primeiro autovalor λ . Além disso, sem perda de generalidade, a função v pode ser tomada de tal forma que sua norma L^p seja igual a 1. Como $u > 0$ em $B_{R_\lambda}(q)$, podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que a função $v_\epsilon = \epsilon v$ satisfaz as seguintes propriedades:

- (1) $v_\epsilon(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \overline{B_{R_\lambda}(q)}$;
- (2) existe $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$ tal que $v_\epsilon(x_0) = u(x_0)$.

Por hipótese, temos que

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \quad \text{em } \Omega$$

e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$. Então

$$0 = \Delta_p u + f(u) \geq \Delta_p u + \lambda u^{p-1}.$$

Por outro lado, v_ϵ é positiva e também é solução de (11). Logo

$$\Delta_p v_\epsilon + \lambda v_\epsilon^{p-1} = 0 \quad \text{em } B_{R_\lambda}(q).$$

Assim,

$$\Delta_p v_\epsilon + \lambda v_\epsilon^{p-1} = 0 \geq \Delta_p u + \lambda u^{p-1},$$

e portanto

$$-\Delta_p v_\epsilon - \lambda v_\epsilon^{p-1} \leq -\Delta_p u - \lambda u^{p-1}.$$

Como $v_\epsilon(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \overline{B_{R_\lambda}(q)}$ e existe $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$ tal que $v_\epsilon(x_0) = u(x_0)$, então pelo Teorema 3.2.1, temos que $v_\epsilon \equiv u$ na bola $B_{R_\lambda}(q)$. Mas isto nos leva a uma contradição pois daí segue que $u = 0$ no bordo da bola $B_{R_\lambda}(q)$, $\partial B_{R_\lambda}(q)$. Porém $\partial B_{R_\lambda}(q) \subset \Omega$ e $u > 0$ em Ω . Portanto Ω não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ . ■

Para o próximo resultado precisamos do seguinte lema técnico:

Lema 3.3.2 *Seja $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por $\Gamma(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}$. Então a matriz $\mathcal{A}(\xi) = \text{Hess}(\Gamma(\xi))$ tem autovalores $(p-1)|\xi|^{p-2}$ e $|\xi|^{p-2}$ com multiplicidades 1 e $n-1$ respectivamente. Em particular $\langle \mathcal{A}(\xi)\eta, \eta \rangle \geq K|\xi|^{p-2}|\eta|^2$, onde $K = \min\{p-1, 1\}$.*

Demonstração: Vamos considerar $A = \nabla \Gamma = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_n} \right)$, o gradiente de Γ . Então $A = (A_1, \dots, A_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação tal que $A(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi$. Com efeito, como

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \xi_i} = |\xi|^{p-2} \xi_i,$$

segue que

$$A(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi. \quad (12)$$

Por outro lado, a matriz Hessiana $\mathcal{A}(\xi) := \left[\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j}(\xi) \right]_{i,j=1}^n := [D_{ij} \Gamma(\xi)]_{i,j=1}^n$ é dada por

$$\mathcal{A}(\xi) = |\xi|^{p-2} Id + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi \otimes \xi,$$

onde Id é a matriz identidade e $\xi \otimes \xi$ é a matriz tal que $(\xi \otimes \xi)_{ij} = \xi_i \xi_j$. Com efeito, dada uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n tal que $e_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$, $i = 1, \dots, n$ temos que

$$\begin{aligned} \text{Hess } \Gamma(e_i, e_j) &= \langle \nabla_{e_i} \nabla \Gamma, e_j \rangle \\ &= \langle \nabla_{e_i} \nabla (|\xi|^{p-2} \xi), e_j \rangle \\ &= |\xi|^{p-2} \langle \nabla_{e_i}(\xi), e_j \rangle + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i \langle \xi, e_j \rangle \\ &= |\xi|^{p-2} \langle e_i, e_j \rangle + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i \xi_j \\ &= |\xi|^{p-2} \delta_{ij} + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i \xi_j, \end{aligned}$$

como queríamos.

Segue portanto daí que $\mathcal{A}(\xi) = (\mathcal{A}(\xi)_{ij})_{n \times n}$, onde $\mathcal{A}(\xi)_{ij} = |\xi|^{p-2} \delta_{ij} + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i \xi_j$. Agora vamos considerar a matriz $B = \mathcal{A}(\xi) - \lambda Id$. Então $B = (b_{ij})_{n \times n}$ é uma matriz quadrada de ordem n tal que

$$b_{ij} = \begin{cases} (|\xi|^{p-2} - \lambda) + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i^2, & \text{se } i = j \\ (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_i \xi_j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Logo o determinante de B , denotado por $\det(B)$, será dado por

$$\det(B) = \begin{vmatrix} (|\xi|^{p-2} - \lambda) + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_1^2 & \cdots & (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_1 \xi_n \\ (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_2 \xi_1 & \cdots & (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_2 \xi_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_n \xi_1 & \cdots & (|\xi|^{p-2} - \lambda) + (p-2) |\xi|^{p-4} \xi_n^2 \end{vmatrix}$$

Por outro lado, vamos considerar M_{ij} o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$, que se origina de B removendo-se a i -ésima linha e a j -ésima coluna. Então se definirmos $D_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ e fixarmos a primeira linha, teremos

$$\det(B) = \sum_{j=1}^n b_{1j} D_{1j}.$$

Podemos notar que

$$\begin{aligned} b_{11}D_{11} &= (|\xi|^{p-2} - \lambda)^n + (p-2)|\xi|^{p-2} (|\xi|^{p-2} - \lambda)^{n-1} \\ &\quad + (p-2)^2 |\xi|^{2p-8} \xi_1^2 (|\xi|^{p-2} - \lambda)^2 \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2. \end{aligned} \quad (13)$$

E para cada $j = 2, \dots, n$

$$b_{1j}D_{1j} = -(p-2)^2 |\xi|^{2p-8} \xi_1^2 \xi_j^2 (|\xi|^{p-2} - \lambda)^2. \quad (14)$$

De (13) e (14), teremos

$$\begin{aligned} \det(B) &= b_{11}D_{11} + \sum_{j=2}^n b_{1j}D_{1j} \\ &= (|\xi|^{p-2} - \lambda)^n + (p-2)|\xi|^{p-2} (|\xi|^{p-2} - \lambda)^{n-1} \\ &\quad + (p-2)^2 |\xi|^{2p-8} \xi_1^2 (|\xi|^{p-2} - \lambda)^2 \sum_{j=1}^{n-1} \xi_j^2 \\ &\quad - (p-2)^2 |\xi|^{2p-8} (|\xi|^{p-2} - \lambda)^2 \sum_{j=2}^n \xi_1^2 \xi_j^2 \\ &= (|\xi|^{p-2} - \lambda)^n + (p-2)|\xi|^{p-2} (|\xi|^{p-2} - \lambda)^{n-1} \\ &= (|\xi|^{p-2} - \lambda + (p-2)|\xi|^{p-2}) (|\xi|^{p-2} - \lambda)^{n-1} \\ &= -(\lambda - (p-1)|\xi|^{p-2}) (|\xi|^{p-2} - \lambda)^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto $(p-1)|\xi|^{p-2}$ e $|\xi|^{p-2}$ são autovalores de multiplicidades 1 e $n-1$ de $\mathcal{A}(\xi)$, respectivamente. Em particular, para cada $\eta \in \mathbb{R}^n$ temos que $\langle \mathcal{A}(\xi)\eta, \eta \rangle \geq K|\xi|^{p-2}|\eta|^2$, onde $K = \min\{p-1, 1\}$. Com isto demonstramos o lema. \blacksquare

Teorema 3.3.4 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio aberto e conexo (limitado ou não) com bordo $C^{2,\beta}$. Suponha que exista uma função $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$ que seja solução fraca de*

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{no } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (15)$$

onde α é uma constante negativa, $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > 0$, $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$, $p \neq 2$, e ν é o vetor unitário normal ao bordo de Ω apontando para fora. Então ou $\overline{\Omega}$, o fecho de Ω , não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ ou Ω é uma bola de raio R_λ .

Demonstração: Seja u uma solução do problema (15). Em particular, $u > 0$ e satisfaz

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega.$$

Então, pelo Teorema 3.3.3, o aberto Ω não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ .

Suponha que exista um ponto $q \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{B_{R_\lambda}(q)} \subset \overline{\Omega}$. Inicialmente, note que $\partial\Omega \cap \overline{B_{R_\lambda}(q)} \neq \emptyset$. De fato, se tivéssemos $\partial\Omega \cap \overline{B_{R_\lambda}(q)} = \emptyset$, então teríamos $\overline{B_{R_\lambda}(q)} \subset \Omega$, que pelo Teorema 3.3.3 é uma contradição. Portanto existe um ponto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $y_0 \in \partial\Omega \cap \overline{B_{R_\lambda}(q)}$.

Seja v uma solução de

$$\begin{cases} \Delta_p v + \lambda v^{p-1} = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q), \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q), \\ v = 0 & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(q), \end{cases} \quad (16)$$

ou seja, v é uma autofunção. Pelo Teorema 1 de (BHATTACHARYA, 1988), temos que v é radialmente simétrica e $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ é constante. Pelas hipóteses sobre v e pelas condições de bordo (15) sobre a função u , podemos escolher uma constante positiva δ_0 tal que a função

$$v_{\delta_0} := \delta_0 v$$

satisfaz as seguintes condições:

- (1) $v_{\delta_0}(x) < u(x)$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$;
- (2) $\langle \nabla v_{\delta_0}, \nu \rangle = \beta$ no $\partial B_{R_\lambda}(q)$, onde β é uma constante tal que $\alpha < \beta < 0$.

Agora vamos aumentar o parâmetro δ_0 até encontrarmos uma constante $\delta > 0$ tal que a função $v_\delta := \delta v$ satisfaça uma das duas situações a seguir:

- (1') $v_\delta(x_0) = u(x_0)$ para algum $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$; ou
- (2') $\langle \nabla v_\delta, \nu \rangle = \alpha$ e $v_\delta(x) < u(x)$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$.

Sabemos que u e v_δ satisfazem, respectivamente, as equações

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\Delta_p v_\delta + \lambda v_\delta^{p-1} = 0 \text{ em } B_{R_\lambda}(q).$$

Então em $B_{R_\lambda}(q)$

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v_\delta|^{p-2}\nabla v_\delta) &= -\Delta_p u + \Delta_p v_\delta \\
&= f(u) - \lambda v_\delta^{p-1} \\
&\geq \lambda u^{p-1} - \lambda v_\delta^{p-1} \\
&= \lambda (u^{p-1} - v_\delta^{p-1}) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Logo

$$-\operatorname{div} (A(\nabla u) - A(\nabla v_\delta)) \geq 0, \quad (17)$$

onde $A(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi$. Segue daí que $A(\xi) = \nabla\Gamma(\xi)$ é o gradiente da aplicação $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Gamma(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}$ como no Lema 3.3.2. Então $A_i(\xi) = |\xi|^{p-2}\xi_i$, $i = 1, \dots, n$ e, para cada $j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} = |\xi|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j.$$

Portanto $D_{ij}\Gamma(\xi) := \frac{\partial A_i}{\partial x_j}(\xi) = |\xi|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|\xi|^{p-4}\xi_i\xi_j$, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Seja $w = u - v_\delta$. Pelo Teorema do Valor Médio para o cálculo multivariacional temos

que

$$\begin{aligned}
A(\nabla u) - A(\nabla v_\delta) &= A(t\nabla u + (1-t)\nabla v_\delta)\Big|_0^1 \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} A(t\nabla u + (1-t)\nabla v_\delta) dt \\
&= \int_0^1 (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) dt \\
&= \left(\int_0^1 \alpha_1 dt, \int_0^1 \alpha_2 dt, \dots, \int_0^1 \alpha_n dt \right),
\end{aligned}$$

onde $\alpha_i = \langle \nabla A_i, \nabla w \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{\partial A_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial w}{\partial \xi_j}$. Portanto

$$\operatorname{div} (A(\nabla u) - A(\nabla v_\delta)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\int_0^1 \frac{\partial A_i}{\partial x_j} (t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v_\delta(x)) dt \right] \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\}.$$

Segue daí e de (17) que

$$-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \geq 0,$$

onde

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 D_{ij}\Gamma(t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v_\delta(x)) dt.$$

Afirmamos que existe uma vizinhança V de y_0 em $\overline{B_{R_\lambda}(q)}$ tal que a matriz $\mathcal{A}(x) := (a_{ij}(x))$ é uniformemente positiva definida.

De fato, como v_δ é uma primeira autofunção de (16) na bola $B_{R_\lambda}(q)$, então, pela Proposição 3.2.3, existem $\varepsilon > 0$ e $m > 0$ tais que $|\nabla v_\delta| > m$ e $u \in C^2(\overline{\Omega_\varepsilon})$, onde

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in B_{R_\lambda}(q) : \text{dist}(x, \partial B_{R_\lambda}(q)) < \varepsilon\}.$$

Agora vamos definir uma aplicação $g : [0, 1] \times \overline{\Omega_\varepsilon} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$g(t, x) = |t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v_\delta(x)|^{p-2}.$$

Podemos notar que

$$g(0, x) = |\nabla v_\delta(x)|^{p-2} > m^{p-2} > 0, \text{ para todo } x \in \overline{\Omega_\varepsilon}.$$

Em particular, $g(0, y_0) > 0$. Como $g(t, x)$ é contínua com respeito a t e a x , existe uma vizinhança $[0, t_0] \times V$, onde V é vizinhança de y_0 em $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset \overline{B_{R_\lambda}(q)}$ e $0 < t_0 \leq 1$ tal que

$$g(t, x) \geq c, \quad \forall (t, x) \in [0, t_0] \times V,$$

para alguma constante positiva c .

Assim,

$$\int_0^1 g(t, x) dt \geq c \int_0^{t_0} dt = ct_0. \quad (18)$$

Seja $K = \min\{1, p-1\}$. Pelo Lema 3.3.2, temos que

$$\langle \mathcal{A}(x)\eta, \eta \rangle \geq \min\{1, p-1\} \left(\int_0^1 |t\nabla u(x) + (1-t)\nabla v_\delta(x)|^{p-2} dt \right) |\eta|^2.$$

Logo,

$$\langle \mathcal{A}(x)\eta, \eta \rangle \geq Kct_0 > 0,$$

e isto prova nossa afirmação.

Agora considere o operador linear L definido por

$$L := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right). \quad (19)$$

Como $w = u - v_\delta$, resulta

$$L(-w) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \geq 0 \quad (20)$$

Agora vamos analisar as situações:

(i) $u(x_0) = v_\delta(x_0)$ para algum $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$.

Segue de (i) da Proposição 3.2.1 que $w \equiv 0$. Assim $u \equiv v_\delta$ e portanto $\Omega = B_{R_\lambda}(q)$.

ou

(ii) $\langle \nabla v_\delta, \nu \rangle = \alpha$ e $v_\delta(x) < u(x)$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$.

Neste caso, pela Proposição 3.2.1 (ii), temos que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(y_0) < 0.$$

Portanto

$$0 > \frac{\partial w}{\partial \nu}(y_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) - \frac{\partial v_\delta}{\partial \nu}(y_0) = \alpha - \alpha = 0.$$

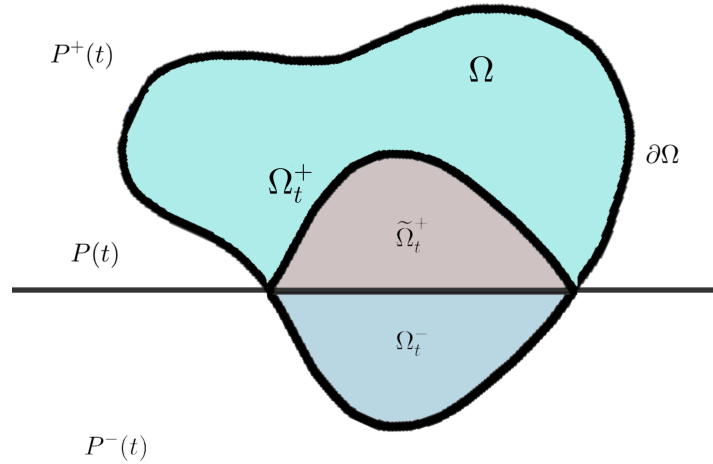
Que é uma contradição. Logo o fecho de Ω não pode conter nenhuma bola fechada de raio R_λ .

Com esta contradição demonstramos o teorema. ■

3.4 O MÉTODO DOS PLANOS MÓVEIS - MPM

O princípio de reflexão introduzido por Aleksandrov em (ALEKSANDROV, 1958), também conhecido como Método dos Planos Móveis (MPM), aplicado para hipersuperfícies compactas, mergulhadas, de curvatura média constante em \mathbb{R}^n , constitui uma ferramenta de fundamental importância na Análise Geométrica, para obtermos resultados de simetria. O MPM foi adaptado por Serrin em (SERRIN, 1971), para domínios limitados que admitem uma solução para certos problemas sobre determinados do tipo (1) quando $p = 2$. Esta constitui uma das ferramentas mais importantes vindas do princípio do máximo e pode ser aplicada para domínios em outras variedades como a esfera e o espaço hiperbólico. Veja por exemplo (KUMARESAN; PRAJAPAT, 1998a) e (KUMARESAN; PRAJAPAT, 1998b). No caso geral do problema (1), com $1 < p < \infty$, o MPM também pode ser aplicado para domínios de \mathbb{R}^n e de \mathbb{H}^n , para obtermos resultados de simetria. Citamos os trabalhos (COLESANTI, 1994), (CHORWADWALA et al., 2015) e (WANG; WEI, 2019) para o caso Euclidiano e (DO Ó; COSTA, 2016) para domínios de \mathbb{H}^n .

Seja $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ a folheação de \mathbb{R}^n dada pelos hiperplanos $P(t)$ tais que para cada $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = t\}$. Consideremos para cada $t \in \mathbb{R}$, os semiespaços determinados por $P(t)$, $P^-(t) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n < t\}$ e $P^+(t) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > t\}$. Note que $\mathbb{R}^n \setminus P(t) = P^-(t) \cup P^+(t)$.

Figura 1 – Reflexão de Ω_t^- sobre $P(t)$.

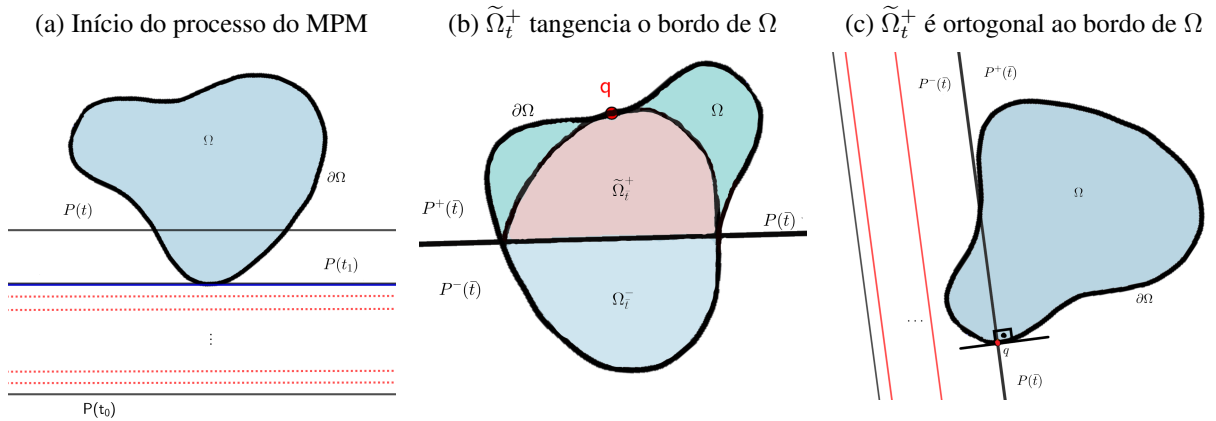
Para cada $t \in \mathbb{R}$, considere $\mathcal{R}_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação que associa cada $x \in \mathbb{R}^n$ a $\mathcal{R}_t(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, 2t - x_n)$. Note que para cada $t \in \mathbb{R}$, \mathcal{R}_t é a reflexão em \mathbb{R}^n com respeito ao hiperplano $P(t)$. Além disso, $P(t)$ é invariante com respeito a \mathcal{R}_t , isto é, $\mathcal{R}_t(P(t)) = P(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Para cada domínio Ω de \mathbb{R}^n , vamos definir os conjuntos $\Omega_t^- := \Omega \cap P^-(t)$ e $\Omega_t^+ := \Omega \cap P^+(t)$ e considerar $\tilde{\Omega}_t^+ := \mathcal{R}_t(\Omega_t^-)$ a reflexão de Ω_t^- com respeito a $P(t)$. A Figura 1 dá uma representação geométrica da aplicação \mathcal{R}_t .

Vamos à descrição do MPM: Considere Ω um domínio aberto, conexo e limitado do \mathbb{R}^n cujo bordo $\partial\Omega$ seja de classe C^2 . Suponha que existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{\Omega} \cap P(t_0) = \emptyset$ e $\Omega \subset P^+(t_0)$, ou seja, $P(t_0)$ não intersecta o fecho de Ω e o domínio Ω se encontra no semiespaço superior determinado por $P(t_0)$. Agora aumentando t , de forma contínua a partir de t_0 , vai existir $t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} : P(t) \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$. Isto significa que $P(t) \cap \Omega = \emptyset$ para todo $t < t_1$ e pela primeira vez se tem $P(t) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ e isto ocorre exatamente quando $t = t_1$. A partir deste momento, em cada estágio do movimento, o hiperplano $P(t)$, com $t > t_1$, determina uma componente conexa limitada em Ω , dada por $\Omega_t^- := \Omega \cap P^-(t)$. Como o bordo de Ω é de classe C^2 , vai existir $\epsilon > 0$ tal que a imagem refletida de Ω_t^- com respeito a $P(t)$, $\tilde{\Omega}_t^+ := \mathcal{R}_t(\Omega_t^-)$, é limitada, conexa e está inteiramente contida em $\Omega_t^+ := \Omega \cap P^+(t)$ para todo $t \in (t_1, t_1 + \epsilon)$. Vamos continuar aumentando t , até que ocorra uma das duas situações a seguir:

- $\tilde{\Omega}_t^+$ tangencia internamente o bordo de Ω em algum ponto q , o qual não pertence ao hiperplano $P(t)$, ou
- $P(t)$ alcança uma posição em que ele é ortogonal ao bordo de Ω em algum ponto q .

A figura (2) abaixo dá uma representação geométrica do MPM em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Figura 2 – MPM



Um dos mais importantes resultados obtidos pelo MPM, para operadores elípticos, é o clássico resultado de Serrin, citado na introdução deste trabalho. Para o caso do operador p -Laplaciano, resultados similares foram obtidos em (COLESANTI, 1994) e (CHORWADWALA et al., 2015). Com base nestes trabalhos provaremos um resultado de simetria para domínios limitados de \mathbb{R}^n . Este constitui o nosso principal resultado nesta seção e desempenha um papel de fundamental importância no decorrer do nosso trabalho. Antes porém, precisamos de alguns resultados auxiliares. Começamos com o seguinte lema para operadores uniformemente elípticos.

Lema 3.4.1 (SERRIN, 1971, Lema 2) *Seja D^* um domínio em \mathbb{R}^n com bordo C^2 e seja T um hiperplano contendo a reta normal ao bordo de D^* em algum ponto Q . Seja D uma porção de D^* que se encontra em um dos lados determinado por T . Suponha que w seja de classe C^2 no fecho de D e satisfaz a inequação diferencial*

$$Lw = \sum_{i,j} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} \leq 0, \text{ em } D,$$

onde os coeficientes $a_{ij}(x)$ são uniformemente limitados. Vamos supor que a matriz (a_{ij}) seja uniformemente definida

$$a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq k |\xi|^2, \quad (k = \text{constante} > 0),$$

e que

$$|a_{ij}(x) \xi_i \eta_j| \leq K (|\langle \xi, \eta \rangle| + |\xi| |d|), \quad (K = \text{constante} > 0)$$

onde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor arbitrário, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ é o campo unitário normal ao hiperplano T e $d = \text{dist}(\cdot, T)$ denota a distância Euclidiana ao hiperplano T . Suponha ainda que $w \geq 0$ em D e $w(Q) = 0$. Então ou

$$\frac{\partial w}{\partial S}(Q) > 0 \text{ ou } \frac{\partial^2 w}{\partial S^2}(Q) > 0,$$

a menos que $w \equiv 0$, onde S denota alguma direção em Q , a qual intersecta D não tangencialmente.

Teorema 3.4.1 (GILBARG; TRUDINGER, 2001, Teorema. 3.3) Seja $Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$, um operador elíptico em Ω com $c \leq 0$. Suponha que u e v são funções $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$. Se $Lu \geq Lv$ em Ω e $u \leq v$ no $\partial\Omega$, então $u \leq v$ em Ω .

Agora vamos mostrar que o operador p -Laplaciano é invariante por isometrias. Sejam M e N duas variedades suaves e $f : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Para cada campo suave X em M , define-se um campo suave em N , chamado de **push-forward** de X sobre f , denotado por f_*X , tal que

$$f_*X(g) = X(g \circ f),$$

para cada função suave $g : N \rightarrow \mathbb{R}$.

Denotemos por $\Omega^k(M)$ o espaço das k -formas em M . Vamos escrever $\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k(M)$ e $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, onde n é a dimensão de M . Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação suave, definimos o **pull back** de f como sendo a aplicação $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ tal que

$$f^*(g) = g \circ f \text{ se } g \in \Omega^0(N) = C^\infty(N, \mathbb{R})$$

e

$$(f^*\omega)_q(X_1, \dots, X_k) = \omega_{f(q)}(f_*X_1, \dots, f_*X_k), \text{ se } \omega \in \Omega^k(N), \text{ com } k \geq 1.$$

Além disso, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ e $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Dados uma n -forma $\omega \in \Omega^n(M)$ e X um campo vetorial em M , definimos a multiplicação interior como sendo a $(n-1)$ -forma

$$\iota_X \omega(X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{n-1}),$$

onde X_1, \dots, X_{n-1} são campos vetoriais em M . Como $d(\iota_X \omega)$ é uma n -forma, então existe um número $\text{div}_\Omega X$ tal que

$$d(\iota_X \omega) = \text{div}_\omega X \cdot \omega.$$

Se ω_g é a forma do volume de (M, g) , então $\text{div}_g X := \text{div}_{\omega_g} X$, é a divergência do campo X . Veja (CANZANI, 2013) para mais detalhes.

Lema 3.4.2 Sejam $(M, g_M), (N, g_N)$ duas variedades e $\Phi : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$ uma isometria. Se $\tilde{u} = u \circ \Phi^{-1}$ em $\Phi(\Omega) = \tilde{\Omega}$, então:

- a) $(\Delta_p u) \circ \Phi^{-1} = \Delta_p(u \circ \Phi^{-1})$, ou seja, o p -Laplaciano é invariante sobre isometrias.
- b) Se u satisfaz a equação $\Delta_p u + f(u) = 0$ em Ω , então \tilde{u} satisfaz a mesma equação em $\tilde{\Omega}$, ou seja, $\Delta_p \tilde{u} + f(\tilde{u}) = 0$ em $\tilde{\Omega}$.
- c) $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(q) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\Phi^{-1}(q))$, onde $q \in \partial\Omega$ e ν é o campo normal ao bordo de Ω em q .

Utilizaremos a seguir a notação Δ_{p,g_M} para representar o operador p -Laplaciano com respeito à métrica da variedade M , g_M .

Demonstração:

- a) Sejam (M, g_M) e (N, g_N) duas variedades e $\Phi : M \rightarrow N$ uma isometria. Nosso objetivo é mostrar que

$$\Delta_{p,g_M} \Phi^* = \Phi^* \Delta_{p,g_N}.$$

Vamos dividir a demonstração em três etapas:

(1) $\Phi_* \nabla_{g_M} \Phi^* = \nabla_{g_N}$.

Sejam $\varphi \in C^1(N)$ e V um campo vetorial em TN . Então

$$\begin{aligned} \langle \Phi_* \nabla_{g_M} \Phi^*(\varphi), V \rangle_{g_N} &= \langle \Phi_* \nabla_{g_M} \Phi^*(\varphi), \Phi_*(\Phi_*)^{-1} V \rangle_{g_N} \\ &= \langle \nabla_{g_M} \Phi_*(\varphi), (\Phi_*)^{-1} V \rangle_{g_M} \\ &= d(\Phi^* \varphi)(\Phi_*^{-1} V) \\ &= \varphi_* \Phi_*(\Phi_*)^{-1} V \\ &= \varphi_*(V) \\ &= d\varphi(V) \\ &= \langle \nabla_{g_N} \varphi, V \rangle_{g_N}. \end{aligned}$$

(2) $\Phi^* \operatorname{div}_{g_N} \Phi_* = \operatorname{div}_{g_M}$.

Se fixarmos algum $X \in \Gamma(TM)$, o resultado segue se provarmos que

$$d(\iota_X \omega_{g_M}) = \Phi^* \operatorname{div}_{g_N} \Phi_* \omega_{g_M},$$

ou seja,

$$(\Phi^*)^{-1} d(\iota_X \omega_{g_M}) = \operatorname{div}_{g_N} \Phi_* \cdot \omega_{g_M}.$$

Mas isto é equivalente a mostrar que

$$d((\Phi^*)^{-1})(\iota_X \omega_{g_M}) = \operatorname{div}_{g_N}(\Phi_* X) \cdot \omega_{g_N}.$$

Mas esta última igualdade é verdade pois

$$(\Phi^*)^{-1}(\iota_X \omega_{g_M}) = \iota_{\Phi_* X} (\Phi^*)^{-1}(\omega_{g_M}).$$

$$(3) \Delta_{p,g_M} \Phi^* = \Phi^* \Delta_{p,g_N}.$$

$$\begin{aligned} \Delta_{p,g_M} \Phi^* &= \operatorname{div}_{g_M} (|\nabla_{g_M} \Phi^*|^{p-2} \nabla_{g_M} \Phi^*) \\ &= \operatorname{div}_{g_M} (|(\Phi_*)^{-1} \Phi_* \nabla_{g_M} \Phi_*|^{p-2} (\Phi_*)^{-1} \Phi_* \nabla_{g_M} \Phi_*) \\ &= \operatorname{div}_{g_M} (|(\Phi_*)^{-1} \nabla_{g_N}|^{p-2} (\Phi_*)^{-1} \nabla_{g_N}) \\ &= \phi^* (\Phi^*)^{-1} \operatorname{div}_{g_M} (|(\Phi_*)^{-1} \nabla_{g_N}|^{p-2} (\Phi_*)^{-1} \nabla_{g_N}) \\ &= \Phi^* \operatorname{div}_{g_N} [\Phi_* (|(\Phi_*)^{-1} \nabla_{g_N}|^{p-2} (\Phi_*)^{-1} \nabla_{g_N})] \\ &= \Phi^* \operatorname{div}_{g_N} (|\nabla_{g_N}|^{p-2} \nabla_{g_N}) \\ &= \Phi^* \Delta_{p,g_N}. \end{aligned}$$

b) Se u é solução da equação $\Delta_p u + f(u) = 0$ em Ω , então $\Delta_p u = -f(u)$ em Ω e

$$\begin{aligned} \Delta_p \tilde{u} &= \Delta_p (u \circ \Phi^{-1}) \\ &= (\Delta_p u) \circ \Phi^{-1} \\ &= -(f(u)) \circ \Phi^{-1} \\ &= -f(u \circ \Phi^{-1}) \\ &= -f(\tilde{u}) \end{aligned}$$

em $\tilde{\Omega}$.

c) Sejam $q \in \partial\Omega$ e $\nu(q)$ o campo normal ao bordo de Ω em q . Seja $\psi = \Phi^{-1}$ e considere γ uma curva em M tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = \nu(q)$. Então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(q) &= \frac{d}{dt} (\tilde{u} \circ \gamma(t))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (u \circ \psi(\gamma'(t)))|_{t=0} \\ &= \nabla u D\psi(q)(\nu). \end{aligned}$$

Como φ é uma isometria, $D\psi(q)\nu$ é normal ao bordo de Ω . Portanto $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu}(q) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(\Phi^{-1}(q))$.

Com isto finalizamos a demonstração do lema. ■

A teorema a seguir é o nosso principal resultado nesta seção. Ele é uma versão para o p -Laplaciano do resultado de Serrin obtido em (SERRIN, 1971) para o caso do Laplaciano

clássico. Este teorema desempenha um papel fundamental neste trabalho, pois é através dele que vamos demonstrar vários resultados que serão importantes para o bom desenvolvimento das próximas seções.

Teorema 3.4.2 *Seja Ω um domínio aberto, conexo e limitado de \mathbb{R}^n com bordo de classe $C^{2,\beta}$. Suponha que o Problema (1) admita uma solução $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, onde f é uma função Lipschitz. Então Ω é uma bola e u é radialmente simétrica.*

Demonstração: A idéia da demonstração está baseada na aplicação do MPM. Para isto, considere $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ a folheação de \mathbb{R}^n dada no início desta seção. Como Ω é limitado, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{\Omega} \cap P(t_0) = \emptyset$ e $\Omega \subset P^+(t_0)$. Aumentando t , de forma contínua a partir de t_0 , vai existir $t_1 = \inf\{t \in \mathbb{R} : P(t) \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$. Por construção, segue que Ω_t^- é formado por componentes conexas limitadas. Vamos escolher uma de tais componentes, que continuaremos denotando por Ω_t^- . Como o bordo de Ω é de classe $C^{2,\beta}$, vai existir $\epsilon > 0$ tal que a reflexão de Ω_t^- com respeito a $P(t)$, $\tilde{\Omega}_t^+ := \mathcal{R}_t(\Omega_t^-)$, é limitada, conexa e está inteiramente contida em $\Omega_t^+ := \Omega \cap P^+(t)$ para todo $t \in (t_1, t_1 + \epsilon)$. O MPM continua até que ocorra uma das duas situações a seguir:

- (a) existe $\bar{t} > t_1$ tal que $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+$ tangencia internamente o bordo de Ω em algum ponto q , o qual não pertence ao hiperplano $P(\bar{t})$, ou
- (b) existe $\bar{t} > t_1$ tal que $P(\bar{t})$ é ortogonal ao bordo de Ω em algum ponto q .

Nosso objetivo é mostrar que Ω é simétrico com respeito ao hiperplano $P(\bar{t})$ para o qual uma das duas situações acima, descrita pelo MPM aconteça, ou seja, devemos mostrar que $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+ = \Omega \cap P^+(\bar{t})$ ou de forma equivalente que $\mathcal{R}_{\bar{t}}(\Omega) = \Omega$. Se provarmos isto, devemos concluir que Ω é simétrico com respeito a qualquer direção de \mathbb{R}^n , bastando para isto, definir $\mathcal{R}_i(x) = (x_1, \dots, 2t - x_i, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, a reflexão com respeito ao hiperplano $P_i(t) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = t\}$. Isto significa que para cada direção dada em \mathbb{R}^n vai existir um hiperplano de simetria para Ω . Mas os únicos domínios em \mathbb{R}^n que são simétricos com respeito a todas as direções são as bolas Euclidianas. Com isto nosso teorema estará provado.

Vamos introduzir uma nova função v_t em $\tilde{\Omega}_t^+$ definida por $v_t(x) = u(\mathcal{R}_t(x))$, para todo $t \in (t_1, \bar{t})$, onde \mathcal{R}_t é a aplicação reflexão com respeito ao hiperplano $P(t)$. Perceba que a função u satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+, \\ u > 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+, \\ u = 0 \text{ no } \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P^+(t), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha, \text{ no } \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P^+(t), \end{array} \right.$$

enquanto a função v_t , pelo Lema 3.4.2, satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_p v_t + f(v_t) = 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+, \\ v_t > 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+, \\ v_t = 0 \text{ em } \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P^+(t), \\ v_t = u \text{ no } \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P(t), \\ \frac{\partial v_t}{\partial \nu} = \alpha \text{ no } \partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P^+(t), \end{array} \right.$$

no sentido fraco.

Agora note que em $\tilde{\Omega}_t^+$,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v_t|^{p-2} \nabla v_t) &= \Delta_p u - \Delta_p v_t \\ &= -f(u) + f(v_t). \end{aligned}$$

Logo

$$\operatorname{div} (A(\nabla u) - A(\nabla v_t)) + c(u - v_t) = 0, \quad (21)$$

onde $A(\xi) = |\xi|^{p-2} \xi$ e

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f(u(x)) - f(v_t(x))}{u(x) - v_t(x)} & \text{se } u(x) \neq v_t(x) \\ 0 & \text{se } u(x) = v_t(x) \end{cases}.$$

Note que c é uma função uniformemente limitada, uma vez que f é Lipschitz. Segue daí que $A(\xi) = \nabla \Gamma(\xi)$ é o gradiente da aplicação $\Gamma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Gamma(\xi) = \frac{|\xi|^p}{p}$ como no Lema 3.3.2.

Como na demonstração do Teorema 3.3.4 podemos mostrar que a função $w_t := u - v_t$ satisfaz a seguinte equação variacional

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial w_t}{\partial x_j} \right) + c(x) w_t(x) = 0,$$

no sentido fraco, onde

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 D_{ij} \Gamma(t \nabla u(x) + (1-t) \nabla v_t(x)) dt.$$

De forma equivalente

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 w_t}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial w_t}{\partial x_i} + c(x) w_t(x) = 0, \quad (22)$$

onde $b_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}(x)$.

Introduzindo o operador linear $L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$, resulta que a função $w_t = u - v_t$ satisfaz a equação $Lw_t(x) + c(x)w_t(x) = 0$ no sentido fraco em $\tilde{\Omega}_t^+$. Pela observação feita no final da seção anterior, sabemos que $u \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega}_\epsilon)$ e que a Equação (22) é uniformemente elíptica em Ω_ϵ . Em particular, a matriz $\mathcal{A}(x) := (a_{ij}(x))$ é uniformemente positiva definida em Ω_ϵ .

O próximo passo consiste em mostrar que $w_t \geq 0$ em $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ para algum $t_1 < t < \bar{t}$. Com efeito, como $u > 0$ em Ω , $v_t = 0 < u$ no $\partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P^+(t)$ e $v_t = u$ no $\partial\tilde{\Omega}_t^+ \cap P(t)$, resulta que $u \geq v_t$ no $\partial\tilde{\Omega}_t^+$, para todo $t_1 < t < \bar{t}$. Notemos também que $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon \neq \emptyset$ para todo $t_1 < t < \bar{t}$. Desta forma temos que $u \in C^{1,\gamma}(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\beta}(\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon)$. Aplicando o Teorema 3.4.1, obtemos o resultado desejado.

Fazendo a substituição de Hopf $\tilde{w}_t = w_t e^{\beta x_1}$, $\beta \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_j} = \frac{\partial w_t}{\partial x_j} e^{\beta x_1} + \beta w_t \frac{\partial x_1}{\partial x_j} e^{\beta x_1}.$$

Logo

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_t}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 w_t}{\partial x_i \partial x_j} e^{\beta x_1} + \beta \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \frac{\partial w_t}{\partial x_j} e^{\beta x_1} + \beta \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_j} e^{\beta x_1} + \beta^2 w_t \frac{\partial x_1}{\partial x_j} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} e^{\beta x_1}.$$

Por outro lado,

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{w}_t}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_j} \right).$$

Como $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial w_t}{\partial x_j} \right) + c w_t = 0$ e $\frac{\partial w_t}{\partial x_j} e^{\beta x_1} = \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_j} - \beta \tilde{w}_t \frac{\partial x_1}{\partial x_j}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_j} \right) + c \tilde{w}_t &= \sum_{i,j=1}^n \left[a_{ij} \left(\frac{\partial^2 w_t}{\partial x_i \partial x_j} + \beta \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \frac{\partial w_t}{\partial x_j} + \beta \frac{\partial w_t}{\partial x_i} \frac{\partial x_1}{\partial x_j} + \beta^2 w_t \frac{\partial x_1}{\partial x_j} \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \right) e^{\beta x_1} \right] \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w_t}{\partial x_j} + \beta w_t \frac{\partial x_1}{\partial x_j} \right) e^{\beta x_1} + c w_t e^{\beta x_1} \\ &= e^{\beta x_1} \left[\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial w_t}{\partial x_j} \right) + c w_t \right] + 2\beta \sum_{i=1}^n a_{1i} \frac{\partial w_t}{\partial x_i} e^{\beta x_1} \\ &\quad + \beta^2 a_{11} \tilde{w}_t + \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \tilde{w}_t \\ &= 2\beta \sum_{i=1}^n a_{1i} \frac{\partial w_t}{\partial x_i} e^{\beta x_1} + \beta^2 a_{11} \tilde{w}_t + \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \tilde{w}_t \\ &= 2\beta \sum_{i=1}^n a_{1i} \left(\frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_i} - \beta \tilde{w}_t \frac{\partial x_1}{\partial x_i} \right) + \beta^2 a_{11} \tilde{w}_t + \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \tilde{w}_t \\ &= 2\beta \sum_{i=1}^n a_{1i} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_i} - \beta^2 a_{11} \tilde{w}_t + \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \tilde{w}_t. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_j} \right) + c \tilde{w}_t = 2\beta \sum_{i=1}^n a_{1i} \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_i} - \beta^2 a_{11} \tilde{w}_t + \beta \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \tilde{w}_t. \quad (23)$$

Daí resulta que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{w}_t}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_i} + \tilde{c} \tilde{w}_t = 0, \quad (24)$$

onde $\tilde{b}_i = b_i - 2\beta a_{1i}$, $\tilde{c} = a_{11}\beta^2 - b_1\beta + c$ e $b_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_j}$.

Como a matriz $\mathcal{A}(x) := (a_{ij}(x))$ é uniformemente positiva definida em Ω_ϵ , segue que $a_{11}(x) > 0$ para todo $x \in \tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$. Então escolhendo β suficientemente grande, temos que $\tilde{c}(x) \geq 0$ no domínio considerado.

Afirmamos que existe $t > t_1$, suficientemente próximo de t_1 , tal que $w_t > 0$ sobre $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$. De fato, como w_t satisfaz $Lw_t + cw_t = 0$, $w_t \geq 0$ sobre $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ para $t > t_1$ suficientemente próximo de t_1 , podemos aplicar novamente a substituição de Hopf $\tilde{w}_t = w_t e^{\beta x_1}$, $\beta \in \mathbb{R}$, e escolhermos β suficientemente grande tal que $\tilde{c} \geq 0$. Como $w_t \geq 0$ então $\tilde{w}_t = w_t e^{\beta x_1} \geq 0$ em $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$. Isto mostra que $\tilde{w}_t \geq 0$ em $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ para algum t suficientemente próximo de t_1 . Segue daí e da Equação (24) que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{w}_t}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \frac{\partial \tilde{w}_t}{\partial x_i} \leq 0, \quad (25)$$

em $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ para algum t . Como o hiperplano $P(t)$ não é de simetria para o t encontrado acima, temos que $\tilde{w}_t \not\equiv 0$ e, portanto, pela Proposição 3.2.1, $\tilde{w}_t > 0$ em $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ para algum t suficientemente próximo de t_1 . Como $\tilde{w}_t > 0$, então $w_t > 0$ em $\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$.

Para este t temos que

$$\left\{ \begin{array}{l} Lw_t + cw_t = 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon, \\ w_t > 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon, \\ w_t \geq 0 \text{ em } \partial(\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap P^+(t), \\ w_t = 0 \text{ no } \partial(\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap P(t), \\ \frac{\partial w_t}{\partial \nu} = \alpha \text{ no } \partial(\tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap P^+(t). \end{array} \right.$$

Segue da afirmação acima que podemos definir $t^* = \sup\{t > t_1 : w_t > 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_t^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon, \forall t \in (t_1, \bar{t})\}$. Como consequência temos que $t^* = \bar{t}$. Para provarmos a consequência, primeiro notamos que $t^* \leq \bar{t}$. Depois, por contradição, suponha que $t^* < \bar{t}$. Por continuidade resulta que

$$w_{t^*} \geq 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon.$$

Por outro lado, como Ω é não simétrico com respeito a $P(t^*)$, resulta que $w_{t^*} \not\equiv 0$ em $\tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$. Assim, dado $x_0 \in \partial(\tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap \overline{P^+(t^*)}$, sabemos que existe uma vizinhança V em $\bar{\Omega}$ de x_0 tal que o operador $L + c$ é linear e uniformemente elíptico em V . Definindo $N = V \cap (\tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon)$, recorremos mais uma vez à substituição de Hopf, para concluirmos que $w_{t^*} > 0$ em N . Assim, podemos aplicar novamente a Proposição 3.2.1 à função w_{t^*} em cada ponto de $\partial(\tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap \overline{P^+(t^*)}$ (note que $w_{t^*} = 0$ em $\bar{\Omega} \cap P(t^*)$) e obtemos

$$\frac{\partial w_{t^*}}{\partial x_n} < 0 \text{ em } \partial(\tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap \overline{P^+(t^*)}, \quad (26)$$

onde estamos supondo, sem perda de generalidade, que a direção normal ao bordo de Ω se encontra na direção do eixo x_n . Como $P(t^*)$ não é normal ao bordo de Ω em nenhum ponto, então segue da desigualdade (26) e das condições de bordo da derivada normal de u que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} < 0 \text{ no } \partial(\tilde{\Omega}_{t^*}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon) \cap \overline{P^+(t^*)}. \quad (27)$$

Pela definição de t^* , existe uma sequência $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x_k \in \tilde{\Omega}_{t^* + \frac{1}{k}}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ e

$$w_{t^* + \frac{1}{k}}(x_k) \leq 0. \quad (28)$$

Seja \bar{x} um ponto tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \bar{x}$. Por continuidade resulta que $w_{t^*}(\bar{x}) = 0$. De fato,

$$0 \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} w_{t^* + \frac{1}{k}}(x_k) = w_{t^*}(\bar{x}) \geq 0.$$

Portanto $\bar{x} \in \partial P^+(t^*) \cap \overline{P^+(t^*)}$. Pela desigualdade (28) e pelo Teorema do Valor Médio, obtemos

$$\frac{\partial w_{t^*}}{\partial x_n}(\bar{x}) \geq 0$$

e isto contradiz a desigualdade (26). Com esta contradição concluímos que $t^* = \bar{t}$, como queríamos.

Agora vamos mostrar que u é simétrica com respeito a $P(\bar{t})$. Para esta última etapa da demonstração seguiremos uma idéia similar àquela utilizada por Serrin em (SERRIN, 1971). Antes porém, devemos lembrar que para o ponto q obtido no início da demonstração também existe uma vizinhança V em $\bar{\Omega}$ contendo q tal que o operador $L + c$ é uniformemente elítico. Dito isto, note que para finalizar a demonstração do resultado é suficiente mostrar que $w_{\bar{t}} \equiv 0$ em $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$. Para isso, vamos supor, por contradição que $w_{\bar{t}} > 0$ em $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$.

Suponha então que a situação (a) decorrente da aplicação do MPM aconteça, ou seja, $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+$ tangencia internamente o bordo de Ω em algum ponto q , o qual não pertence ao hiperplano $P(\bar{t})$.

Como existe uma vizinhança V de q tal que $L + c$ é uniformemente elíptico, podemos aplicar a Proposição 3.2.1 à função $w_{\bar{t}}$ no ponto q para obtermos

$$\frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial \nu} < 0$$

no ponto q . Por outro lado, pelas condições sobre u e v_t , temos que

$$\frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial \nu}(q) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(q) - \frac{\partial v_{\bar{t}}}{\partial \nu}(q) = \alpha - \alpha = 0,$$

que é uma contradição.

Podemos supor então que (b) ocorre, ou seja $P(\bar{t})$ alcança uma posição em que ele é ortogonal ao bordo de Ω em algum ponto q . Nesta situação, embora a condição da esfera interior seja satisfeita com respeito ao domínio Ω , o mesmo não ocorre com respeito a $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+ \cap \bar{\Omega}_\epsilon$ pois o bordo do mesmo é ortogonal a $P(\bar{t})$ no ponto q . Por este motivo ficamos impedidos de aplicar a Proposição 3.2.1 neste caso. Porém, para contornarmos esta dificuldade técnica, vamos utilizar a estratégia de Serrin para equações não lineares uniformemente elípticas e vamos mostrar que as derivadas de segunda ordem de $w_{\bar{t}}$ no ponto q são todas nulas e com isto, aplicando uma versão mais delicada do Princípio do Máximo, obtida de Serrin, obtemos uma contradição.

Para tornar os cálculos mais simples, vamos considerar em \mathbb{R}^n um sistema de coordenadas de tal forma que a sua origem se encontra no ponto q , o eixo x_n se encontra ao longo da direção normal ao bordo de Ω em q e o eixo x_1 normal a $P(\bar{t})$. Como o bordo de Ω é de classe $C^{2,\beta}$, então em uma vizinhança U suficientemente pequena de q , o bordo de Ω pode ser visto como o gráfico de uma função de classe $C^{2,\beta}$ sobre o hiperplano $x_n = 0$. Isto significa que vai existir uma função $\varphi \in C^{2,\beta}$ nesta pequena vizinhança U tal que o bordo de Ω pode ser representado por

$$x_n = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Portanto, como $u \in C^{2,\beta}(\bar{\Omega})$, então numa vizinhança de q , a condição de bordo de Dirichlet $u = 0$ pode ser reescrita como

$$u(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0. \quad (29)$$

Agora considere uma curva $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^2 tal que

$$\beta(t) = (x_1(t), \dots, x_{n-1}(t), \varphi(x_1(t), \dots, x_{n-1}(t))).$$

Segue portanto que $u(\beta(t)) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo

$$\langle \nabla u(\beta(t)), \beta'(t) \rangle = 0.$$

Pelas escolhas de u , de β e pela ortogonalidade acima temos que

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}}, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{dt} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{dt} \right) = 0.$$

Segue daí que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \frac{dx_i}{dt} = 0.$$

Logo

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Então

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x_n} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}, 1 \right) = \frac{\partial u}{\partial x_n} \vec{N},$$

onde

$$\vec{N} = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_{n-1}}, 1 \right),$$

é o campo normal ao bordo que aponta para o interior de Ω .

Assim, o campo unitário normal ao bordo apontando para o exterior de Ω é dado por

$$\nu = -\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2}} \vec{N}.$$

Como $\langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha$, segue que

$$-\alpha = \langle \nu, \nabla u \rangle = \left\langle -\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|_{\mathbb{R}^n}}, \nabla u \right\rangle = \frac{\vec{N}(u)}{\|\vec{N}\|}.$$

Logo

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2}} \vec{N}(u) = -\alpha,$$

ou seja,

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial u}{\partial x_n} = -\alpha \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

ou ainda

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} - \frac{\partial u}{\partial x_n} = \alpha \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (30)$$

Derivando a equação (29) com relação à variável x_i , $1 \leq i \leq n-1$, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0. \quad (31)$$

Pela definição da função φ temos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(q) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n-1$. Logo $\frac{\partial u}{\partial x_i}(q) = 0$, para cada $1 \leq i \leq n-1$. Substituindo estes valores em (30) encontramos

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(q) = -\alpha \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(q) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (32)$$

Agora vamos derivar a equação (31) com respeito à variável x_i , $1 \leq i \leq n-1$. Segue que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}.$$

Logo, escolhendo $x = q$, encontramos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(q) = -\frac{\partial u}{\partial x_n}(q) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(q).$$

Que pela equação (32)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(q) = -\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(q). \quad (33)$$

Derivando a equação (30) com respeito a x_i , encontramos

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i} = \alpha \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (34)$$

Como $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$, segue que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(q) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x_i}(q)$, para cada $1 \leq i \leq n-1$.

Portanto fazendo $x = q$ em (34) obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial x_i}(q) = \alpha \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(q) \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i}(q) \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(q) \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = 0 \quad (35)$$

Suponha, sem perda de generalidade, que a reflexão $\mathcal{R}_{\bar{t}}$ utilizada na técnica do MPM, pode ser dada por $\mathcal{R}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ e que o normal ao bordo apontando para o exterior de Ω encontra-se ao longo do eixo x_n e a função $v_{\bar{t}}$ correspondente pode ser expressa da forma seguinte

$$\begin{aligned} v_{\bar{t}}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) &= u(\mathcal{R}(x_1, x_2, \dots, x_n)) \\ &= u(-x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Portanto, para $1 \leq i \leq n-1$, pela igualdade acima e pela equação (33) vamos obter no ponto q os resultados seguintes:

$$\frac{\partial v_{\bar{t}}}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial v_{\bar{t}}}{\partial x_n} = \frac{\partial u}{\partial x_n}, \quad \frac{\partial^2 v_{\bar{t}}}{\partial x_i \partial x_n} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \frac{\partial^2 v_{\bar{t}}}{\partial x_n^2}$$

e

$$\frac{\partial^2 v_{\bar{t}}}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(q) = 0.$$

Uma vez que $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_n$ é duas vezes diferenciável, o campo normal ao bordo apontando para o interior de Ω se encontra ao longo do eixo x_n e a componente refletida $\tilde{\Omega}_{\bar{t}}^+$ está contida em $\Omega_{\bar{t}}^+$, temos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0$, logo $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2}(q) = 0$ para cada $1 \leq i \leq n-1$, ao aplicarmos o Teorema de Taylor aos termos restantes. Segue portanto que as derivadas primeiras e segundas de u e $v_{\bar{t}}$ coincidem no ponto q . Agora perceba que a equação diferencial $Lw_{\bar{t}} + cw_{\bar{t}} = 0$, para $w_{\bar{t}} = u - v_{\bar{t}}$, não está exatamente na forma que o Lema 3.4.1 se aplica. Façamos então, como acima, a substituição de Hopf $\tilde{w}_{\bar{t}} = w_{\bar{t}}e^{\beta x_1}$ para obtermos

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \frac{\partial \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial x_i} + \tilde{c} \tilde{w}_{\bar{t}} = 0.$$

Como $w_{\bar{t}} = u - v_{\bar{t}} \geq 0$, segue que $\tilde{w}_{\bar{t}} = w_{\bar{t}}e^{\beta x_1} \geq 0$ e para β suficientemente grande, $\tilde{c} \geq 0$.

Como consequência

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n \tilde{b}_i \frac{\partial \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial x_i} \leq 0.$$

Portanto estamos nas hipóteses do Lema 3.4.1 e podemos aplicá-lo diretamente à função $\tilde{w}_{\bar{t}}$.

Como $\tilde{w}_{\bar{t}} \not\equiv 0$, segue do Lema 3.4.1 que

$$\frac{\partial \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S}(q) > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S^2}(q) > 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S} &= \langle \nabla \tilde{w}_{\bar{t}}, S \rangle \\ &= e^{\beta x_1} \langle \nabla w_{\bar{t}}, S \rangle + \beta s_1 \tilde{w}_{\bar{t}} \\ &= e^{\beta x_1} \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S} + \beta s_1 \tilde{w}_{\bar{t}}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S^2} &= \frac{\partial}{\partial S} \left(e^{\beta x_1} \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S} + \beta s_1 \tilde{w}_{\bar{t}} \right) \\ &= e^{\beta x_1} \frac{\partial^2 w_{\bar{t}}}{\partial S^2} + \frac{\partial}{\partial S} (e^{\beta x_1}) \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S} + \beta s_1 \frac{\partial \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S} \\ &= e^{\beta x_1} \frac{\partial^2 w_{\bar{t}}}{\partial S^2} + \beta s_1 e^{\beta x_1} \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S} + \beta s_1 \left(e^{\beta x_1} \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S} + \beta s_1 \tilde{w}_{\bar{t}} \right) \\ &= e^{\beta x_1} \frac{\partial^2 w_{\bar{t}}}{\partial S^2} + 2\beta s_1 e^{\beta x_1} \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S} + \beta^2 s_1^2 \tilde{w}_{\bar{t}}. \end{aligned}$$

Lembrando que neste sistema de coordenadas que estamos trabalhando, o ponto q se encontra na origem e $\tilde{w}_{\bar{t}}(q) = 0$. Então

$$\frac{\partial \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S}(q) = \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S}(q) = \frac{\partial (u - v_{\bar{t}})}{\partial S}(q)$$

e

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S^2}(q) = \frac{\partial^2 w_{\bar{t}}}{\partial S^2}(q) + 2\beta s_1 \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S}(q).$$

Daí resulta que

$$\frac{\partial^2(u - v_{\bar{t}})}{\partial S^2}(q) = \frac{\partial^2 \tilde{w}_{\bar{t}}}{\partial S^2}(q) - 2\beta s_1 \frac{\partial w_{\bar{t}}}{\partial S}(q), \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\frac{\partial(u - v_{\bar{t}})}{\partial S}(q) > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2(u - v_{\bar{t}})}{\partial S^2}(q) > 0.$$

Com isto obtemos uma contradição pois todas as derivadas parciais de $w_{\bar{t}} = u - v_{\bar{t}}$ coincidem no ponto q , logo as desigualdades $\frac{\partial(u - v_{\bar{t}})}{\partial S}(q) > 0$ e $\frac{\partial^2(u - v_{\bar{t}})}{\partial S^2}(q) > 0$ não podem ocorrer para qualquer campo vetorial $\frac{\partial}{\partial S}$ tal que $\frac{\partial}{\partial S}(q)$ seccione o bordo de Ω não tangencialmente em q .

Com esta contradição, finalizamos a demonstração do teorema. ■

O MPM também pode ser aplicado em domínios não limitados para obtermos resultados de simetria. Considere Ω um domínio aberto e não limitado de \mathbb{R}^n cujo bordo seja de classe C^2 . Consideremos também um hiperplano P em \mathbb{R}^n tal que $\Omega \cap P \neq \emptyset$ e sejam P^+ e P^- as componentes conexas de $\mathbb{R}^n \setminus P$ tais que $\mathbb{R}^n \setminus P = P^+ \cup P^-$. Uma das primeiras aplicações do MPM para domínios não limitados que iremos obter é a proposição seguinte.

Proposição 3.4.1 *Sejam Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^n e P um hiperplano em \mathbb{R}^n tal que $\Omega \cap P \neq \emptyset$. Suponha que $\Omega \cap P^+$ tenha uma componente conexa limitada C . Então o fecho de $\partial C \cap P^+$ é um gráfico sobre $\partial C \cap P$.*

Demonstração: A demonstração será feita via MPM. Considere $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma folheação de \mathbb{R}^n dada por hiperplanos tal que $P(t) // P$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Como a componente conexa $C \subset \Omega \cap P^+$ é limitada, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $P(t_0) \cap C = \emptyset$. Diminuindo o parâmetro t de forma contínua, vai existir $t_1 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_0$, tal que $\partial C \cap P(t_1) \neq \emptyset$ e isto ocorre pela primeira vez. Diminuindo t , a partir de t_1 , temos que para cada $\epsilon > 0$ dado, suficientemente pequeno, vai existir, para cada $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$, uma componente conexa limitada $C_t^+ := C \cap T_t^+$. Para cada componente conexa limitada C_t^+ , considere a sua reflexão $\mathcal{R}_t(C_t^+)$ sobre o hiperplano $P(t)$. No início do processo, $\mathcal{R}_t(C_t^+) \subset \Omega$ para cada $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$ e para algum $\epsilon > 0$ dado. Neste caso, $\partial C_t^+ \cap P^+(t)$ é um gráfico sobre $\partial C_t^+ \cap T_t$, para cada $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$. Vamos continuar diminuindo o parâmetro t até o momento que umas das situações abaixo ocorra:

- (1) $\mathcal{R}_t(C_t^+)$ tangencia internamente o bordo de Ω em algum ponto que não esteja em $P(t)$, ou
- (2) $P(t)$ chega em uma posição onde ele é ortogonal ao bordo de Ω em algum ponto ou

(3) $P(t)$ coincide com P .

Se (1) ou (2) ocorre, então pelo Teorema 3.4.2, temos que Ω é simétrico sobre $P(t)$ e assim Ω seria limitado. Obteríamos portanto uma contradição. Se (3) ocorre, ou seja, $P(t_2) = P$ para algum $t_2 < t_1$, então para cada $t_2 < t < t_1$, $\mathcal{R}_t(C_t^+)$ está contido em Ω e assim, o fecho de $\partial C_t^+ \cap P^+(t)$ é um gráfico sobre $\partial C_t^+ \cap P(t)$, para cada $t_2 < t \leq t_1$. Em particular, o fecho de $\partial C_{t_2}^+ \cap P^+(t_2) = \partial C \cap P$ é um gráfico sobre $\partial C \cap P$, como queríamos. ■

Como consequência da Proposição 3.4.1, temos o próximo corolário.

Corolário 3.4.1 *Sejam Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^n e P um hiperplano em \mathbb{R}^n tal que $\Omega \cap P \neq \emptyset$. Suponha que $\Omega \cap P^+$ tenha uma componente conexa limitada C , então $\partial C \cap P$ é conexo.*

Demonstração: Seja C uma componente conexa e limitada de $\Omega \cap P^+$. Se $\partial C \cap P$ é não conexo, então o fecho de $\partial C \cap P^+$ não pode ser um gráfico sobre $\partial C \cap P$, que é uma contradição pela Proposição 3.4.1. Portanto $\partial C \cap P$ é conexo e o resultado segue. ■

Corolário 3.4.2 *Sejam Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^n e P um hiperplano em \mathbb{R}^n tal que $\Omega \cap P \neq \emptyset$. Suponha que $\Omega \cap P^+$ tenha uma componente conexa limitada C . Então o fecho de $\partial C \cap P^+$ não é ortogonal a P em nenhum ponto.*

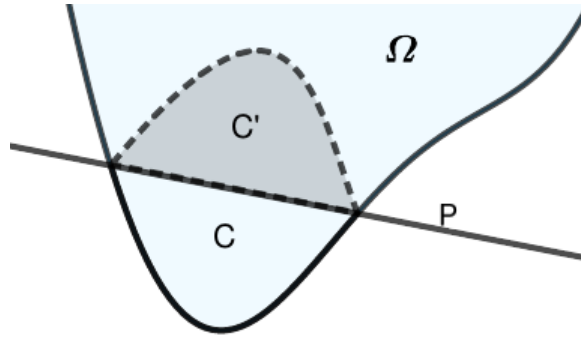
Demonstração: De fato, se existisse algum ponto q tal que $\partial C \cap P^+$ fosse ortogonal a P no ponto q , então teríamos, pelo Teorema 3.4.2, que Ω seria simétrico com respeito a P e portanto seria limitado. Como por hipótese, Ω é não limitado, chegamos a uma contradição. Portanto, com esta contradição, concluímos que $\partial C \cap P^+$ não é ortogonal a P em nenhum ponto. ■

Corolário 3.4.3 *Sejam Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^n e P um hiperplano em \mathbb{R}^n tal que $\Omega \cap P \neq \emptyset$. Suponha que $\Omega \cap P^+$ tenha uma componente conexa limitada C . Se C' denota a reflexão de C sobre o hiperplano P , então o fecho de $C \cup C'$ está contido no fecho de Ω , ou seja, $\overline{C \cup C'} \subset \overline{\Omega}$. (Veja Figura 3).*

Demonstração: Seja $\{P(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma família de hiperplanos paralelos tal que $P = P(t_0)$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Como C é um conjunto conexo e limitado, podemos escolher um elemento da família de hiperplanos, digamos $P(t_1)$ com $t_1 > t_0$ tal que $P(t_1) \cap \partial C = \emptyset$. Diminuindo t a partir de t_1 , vai existir $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que $P(t) \cap \partial C = \emptyset$ para todo $t \in (t_2, t_1)$ e $P(t_2) \cap \partial C \neq \emptyset$ e isto ocorre pela primeira vez. A partir deste momento, para cada $t \in (t_0, t_2)$, o hiperplano $P(t)$ determina uma componente conexa limitada $C_t^+ = C \cap P^+(t)$. Seja C' a reflexão de C_t^+ sobre o

hiperplano $P(t)$. Se o fecho de Ω não contém o fecho de $C \cup C'$, então vai existir $t \in (t_0, t_2]$ tal que C' tangencia internamente o bordo de Ω em algum ponto q , que não se encontra em $P(t)$. Segue do Teorema 3.4.2 que Ω é simétrico sobre $P(t)$, logo limitado. Isto nos leva a uma contradição. Portanto o fecho de $C \cup C'$ está contido no fecho de Ω , como queríamos. ■

Figura 3 – Componente conexa C e sua reflexão C' sobre o hiperplano P



Corolário 3.4.4 *Sejam Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^n e P um hiperplano em \mathbb{R}^n tal que $\Omega \cap P \neq \emptyset$. Suponha que $\Omega \cap P^+$ tenha uma componente conexa limitada C e que a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ seja Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > 0$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Então não é possível construir uma semi-bola de raio R_λ , com centro em $\partial C \cap P$ e inteiramente contida em C .*

Demonstração: Suponha, por contradição, que possamos construir uma semi-bola de raio R_λ , inteiramente contida na componente conexa C , cujo centro se encontra sobre $\partial C \cap P$. Considere C' a reflexão de C com respeito ao hiperplano P . Neste caso, temos que a bola de raio R_λ e centro em $\partial C \cap P$ se encontra em $C \cup C'$. Sabemos, pelo Corolário 3.4.3, que o fecho de $C \cup C'$ está contido no fecho de Ω e portanto a bola fechada \overline{B}_λ está contida no fecho de Ω , que pelo Teorema 3.3.4 é uma contradição. Portanto é impossível construir uma semi-bola de raio R_λ com as condições dadas. ■

3.5 ESTREITAMENTO DOS FINS PLANOS

Os resultados obtidos até aqui foram trabalhados no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , com $n \geq 2$. Pretendemos nesta seção obter propriedades geométricas e topológicas para os fins planares de domínios (f, p) -extremais não limitados do plano Euclidiano \mathbb{R}^2 , uma vez que entendemos que neste caso obtemos propriedades mais interessantes para estes domínios. Neste sentido estendemos resultados obtidos por Ros e Sicbaldi em (ROS; SICBALDI, 2013) para o caso do

p -Laplaciano. Como Ros e Sicbaldi nós também utilizamos idéias geométricas similares às aquelas utilizadas por Meeks em (MEEKS III, 1988) e por Espinar-Galvez-Rosenberg em (ESPINAR et al., 2009) no contexto das superfícies de curvatura média constante.

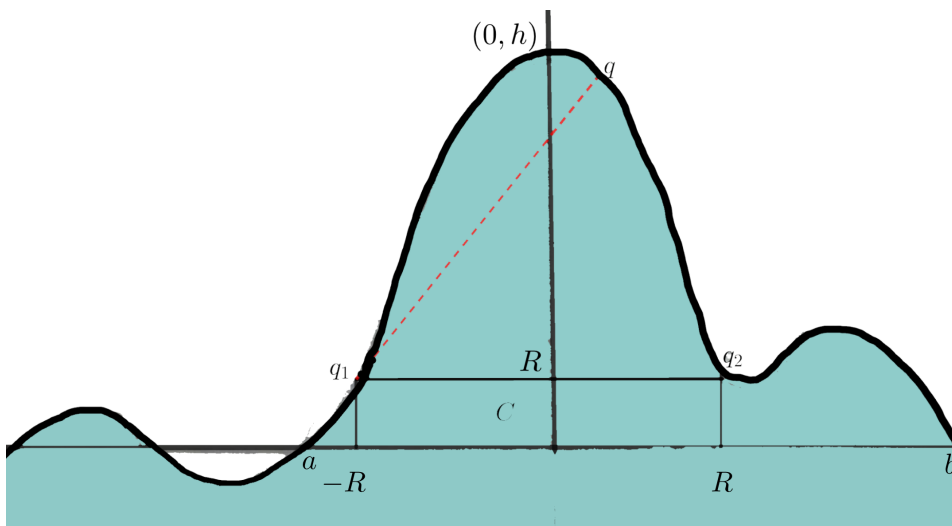
Seja Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^2 tal que $\partial\Omega$ seja de classe $C^{2,\beta}$ e que exista uma função $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ solução do Problema (1). Suponha que a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaça a propriedade $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante positiva λ . Isto significa que o domínio Ω é estreito no sentido de que Ω não contém bolas de raios $R_\lambda > 0$. Agora considere L uma reta de \mathbb{R}^2 e sejam L^+ e L^- as duas componentes conexas determinadas por L em \mathbb{R}^2 tais que $\mathbb{R}^2 \setminus L = L^+ \cup L^-$.

Lema 3.5.1 *Seja Ω um domínio (f, p) -extremal, aberto, conexo e não limitado de \mathbb{R}^2 , com $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante positiva λ , com $\frac{3}{2} < p < \infty$, $p \neq 2$. Seja C uma componente conexa limitada de $\Omega \cap L^+$, e seja $h(C)$ a distância máxima do ∂C a L . Então $h(C) \leq 3R_\lambda$.*

Demonstração: A demonstração será feita por contradição. Considere $h := h(C)$ a distância máxima do bordo de C à reta L e suponha que $h > 3R$, em que $R := R_\lambda$. Sem perda de generalidade, podemos supor, a menos de um movimento rígido, que $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ seja o eixo x e $L^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ é o semi-espaço superior.

Pela Proposição 3.4.1, existe uma função $g : [a, b] \subset L \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(a) = 0 = g(b)$ e $g(x) > 0$ para cada $x \in (a, b)$ e o fecho de $\partial C \cap L^+$ é o gráfico de g sobre o segmento $[a, b]$ de L , ou seja, $\overline{\partial C \cap L^+} = \{(x, g(x)) : a \leq x \leq b\}$. A menos de uma translação, podemos supor que a função g atinge o seu valor máximo quando $x = 0$ e que $g(0) = h$. Veja a Figura 4.

Figura 4 – Gráfico da função g em $[a, b]$



Considere $R = R_\lambda > 0$ uma constante que depende de λ , e $\lambda > 0$ é a constante tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$. Dada a reta $L_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = R\}$, afirmamos que $C \cap L_R$ é um conjunto formado por intervalos abertos cujos comprimentos são menores que $2R$. De fato, como por hipótese, C é aberto e L_R é uma reta, então o conjunto $C \cap L_R$ é formado por intervalos abertos. Considere $\{(x, R) \in \mathbb{R}^2 : a' < x < b'\}$ um de tais intervalos e suponha que $b' - a' \geq 2R$. Segue-se daí que a semi-bola de centro $\frac{a' + b'}{2}$ e de raio R está contida no retângulo $(a', b') \times (0, R)$. Por outro lado, temos por construção, que $(a', b') \times (0, R) \subset C$ e portanto a componente conexa e limitada C contém uma semi-bola de raio R com centro em $\partial C \cap L$, que pelo Corolário 3.4.4 é uma contradição. Com esta contradição concluímos a demonstração da afirmação e portanto $C \cap L_R$ é formado por intervalos abertos de comprimentos menores que $2R$.

Seja \tilde{C} uma componente conexa de $C \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > R\}$ tal que o ponto $(0, h)$ esteja no bordo de \tilde{C} , ou seja, $(0, h) \in \partial \tilde{C}$. Considere Γ o fecho do bordo de \tilde{C} em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > R\}$ e sejam q_1 e q_2 os pontos extremos de Γ . Como $\tilde{C} \subset C$, segue que \tilde{C} é uma componente conexa e limitada de $\Omega \cap L_R^+$ e, pela Proposição 3.4.1 temos que $\Gamma = \overline{\partial \tilde{C} \cap L_R}$ é um gráfico sobre $\partial \tilde{C} \cap L_R$, cuja altura máxima é dada por $h_1 := h - R$. Além disso, pela afirmação acima, o segmento $\overline{q_1 q_2}$ que liga os pontos q_1 e q_2 tem comprimento $|\overline{q_1 q_2}| \leq 2R$. Como $h > 3R$ e $h_1 = h - R$, segue que $h_1 > 2R$. Portanto existe um ponto $q \in \Gamma$ diferente de q_2 que maximiza a distância a q_1 e assim $|\overline{q_1 q}| > h_1 > 2R \geq |\overline{q_1 q_2}|$.

Denote por L_* a reta que passa pelos pontos q_1 e q e considere L_*^+ e L_*^- as componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus L_*$ escolhidas de tal forma que $q_2 \in L_*^-$. Por outro lado temos que $\tilde{C} \cap L_*^+$ é uma componente conexa limitada de $\Omega \cap L_*^+$ e por construção temos que L_* é ortogonal ao bordo de \tilde{C} no ponto q . Pelo Corolário 3.4.2 temos uma contradição. Portanto, com esta contradição, obtemos que $h \leq 3R$ como queríamos. ■

Para o que segue vamos considerar Ω um domínio (f, p) -extremal com topologia finita e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante positiva λ . Para nossos objetivos precisamos de um tipo mais simples de fim, dado da seguinte forma: um fim (faixa plana) de Ω é um subdomínio não limitado $E \subset \overline{\Omega}$ com um homeomorfismo $F : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow E$ tal que

1. $F(0, s) \in \partial \Omega$ para todo $s \in [0, \infty)$.
2. $F(1, s) \in \partial \Omega$ para todo $s \in [0, \infty)$.
3. $F(t, s)$ pertence ao interior de Ω para todo $(t, s) \in (0, 1) \times [0, \infty)$.

Além disso, definimos também as curvas transversais de E como sendo as curvas que unem os pontos de bordos opostos de E , isto é, unem um ponto de $F(\{0\} \times [0, \infty))$ com um ponto de $F(\{1\} \times [0, \infty))$ e o interior da mesma se encontra no interior de E .

Lema 3.5.2 *Sejam E um fim de um domínio (f, p) -extremal Ω , com as propriedades descritas acima e L uma reta de \mathbb{R}^2 tal que $E \cap L$ contém uma componente conexa não limitada. Se L' é uma reta paralela a L que se encontra suficientemente distante de L , então $L' \cap E$ contém somente componentes conexas limitadas.*

Demonstração: Suponha, sem perda de generalidade, que a reta L seja dada por $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = a\}$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e que a componente conexa não limitada de $E \cap L$ seja dada por $\{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : b \leq x < \infty\}$ para algum $b \in \mathbb{R}$.

Agora considere uma reta L' paralela à reta L tal que a distância d entre elas seja maior que $2R$, ou seja $d = \text{dist}(L', L) > 2R$. Note que $L' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = k\}$ para algum $k \in \mathbb{R}$ tal que $|k - a| > 2R$.

Suponha, por contradição, que exista uma componente conexa não limitada C em $L' \cap E$. Segue daí que existe uma constante $\rho \in \mathbb{R}$ tal que a componente conexa não limitada C de $L' \cap E$ seja dada por

$$\{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty, \rho]\} \text{ ou } \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\rho, \infty)\}.$$

Além disso, existe uma curva suave $\gamma \in \mathbb{R}^2$ que une os pontos (b, a) e (ρ, k) tal que o interior de γ se encontra no interior de E . Agora temos que a curva

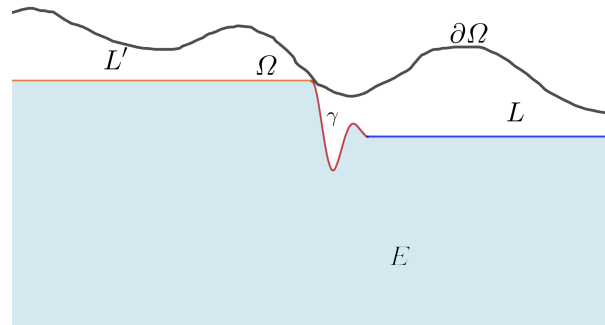
$$\sigma := \{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, \infty)\} \cup \gamma \cup C$$

separa \mathbb{R}^2 em duas componentes conexas, uma das quais se encontra em E . De fato, como $C = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty, \rho]\}$ ou $C = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\rho, \infty)\}$, temos claramente que σ divide \mathbb{R}^2 em duas componentes conexas. No primeiro caso onde $C = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty, \rho]\}$, temos que

$$\sigma = \{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, \infty)\} \cup \gamma \cup \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in (-\infty, \rho]\}$$

e a mesma se estende na direção do eixo- x de $-\infty$ a $+\infty$. Como $\sigma \subset E$, o mesmo ocorre com E . Mas como E é um fim de Ω , segue que o mesmo é um fim “degenerado” de Ω e neste caso, uma das componentes de \mathbb{R}^2 determinadas por σ está contida em E e por conseguinte, em Ω . Em particular, E contém um semi-plano e portanto contém bolas de raios arbitrariamente grandes que, pelo Teorema 3.3.4, é uma contradição. Veja Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Fim degenerado E do domínio Ω de \mathbb{R}^2 (Primeiro caso)

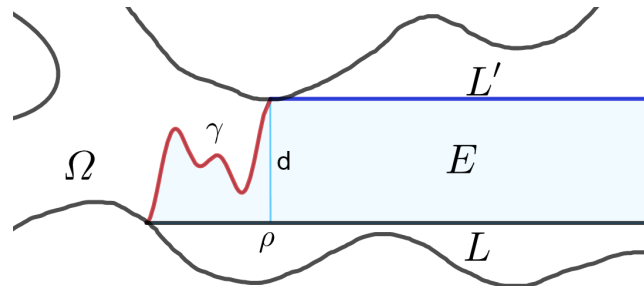


No segundo caso, veja Figura 6, $C = \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\rho, \infty)\}$ e então

$$\sigma = \{(x, a) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, \infty)\} \cup \gamma \cup \{(x, k) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\rho, \infty)\}.$$

Mais uma vez temos que σ divide \mathbb{R}^2 em duas componentes conexas e uma das quais se encontra em E . Segue, por construção, que a componente que se encontra em E contém bolas de raio R . Aplicando novamente o Teorema 3.3.4, chegamos a uma contradição. Com estas contradições, concluímos a demonstração do lema.

Figura 6 – O fim E contém uma componente conexa não limitada L (Segundo caso)



■

Proposição 3.5.1 *Seja E um fim de um domínio (f, p) -extremal Ω , com $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante positiva λ , com $\frac{3}{2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Então E se encontra a uma distância limitada de uma semirreta.*

Demonstração: Seja $F : [0, 1] \times [0, \infty) \rightarrow E$ o homeomorfismo que associa a faixa $[0, 1] \times [0, \infty)$ ao fim E . Seja ainda $\beta := F([0, 1] \times \{0\})$ uma curva transversal, que identificaremos como sendo o início de E . Vamos escolher uma bola $B = B_r(0)$ de raio r e centro em $0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\beta \subset B$. Considere também uma sequência divergente $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de pontos de E , de tal

forma que, a menos de um movimento rígido, a sequência normalizada $q_i = \frac{p_i}{|p_i|}$ convirja para um ponto q , que sem perda de generalidade, pode ser escolhido como sendo $q = (1, 0)$.

O primeiro estágio da demonstração consiste em mostrar que E se encontra a uma distância limitada do eixo x , para em seguida, utilizarmos este fato para podermos mostrar que existe uma semirreta que se encontra a uma distância limitada de E . Para alcançarmos nosso objetivo, vamos proceder por contradição e supor que tal afirmação seja falsa, ou seja, que a distância máxima de E ao eixo x tende para o infinito. Se tomarmos isto como verdade, então é evidente que $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \neq \emptyset$. Juntando isto com o fato de que a sequência $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se encontra em E e $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = (1, 0)$, com $q_i = \frac{p_i}{|p_i|}$, significa que E intersecta qualquer reta horizontal $y > 0$. Com isto, vamos escolher uma reta $l_\alpha := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \alpha\}$, com $\alpha > r + 1$, que intersecta o bordo de E transversalmente.

Afirmamos que a região $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$ possui uma componente conexa não limitada. De fato, suponha, por contradição, que tal afirmação seja falsa, ou seja, que o conjunto $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$ só possui componentes conexas limitadas. Agora vamos escolher, de forma arbitrária, uma destas componentes conexas limitadas e vamos denotá-la por C . Sem perda de generalidade podemos supor que C esteja contida em $E \cap l_\alpha^+$, onde l_α^+ é uma das componentes conexas de \mathbb{R}^2 determinadas pela reta l_α . Como por hipótese, a distância máxima do eixo x ao bordo de E é arbitrariamente grande, o mesmo acontece com qualquer reta horizontal, em particular, a distância máxima de l_α ao bordo de E também satisfaz tal propriedade. Por outro lado, como C é uma componente conexa limitada de E e portanto de Ω , segue da Proposição 3.4.1 que o fecho de $\partial C \cap l_\alpha^+$ é um gráfico sobre $\partial C \cap l_\alpha$ e, pelo Lema 3.5.1, a distância máxima do bordo de C à reta l_α é menor ou igual do que $3R$, onde $R = R_\lambda$. Pelo que foi dito acima, a escolha da componente C pode ser feita de forma que uma das duas situações a seguir ocorrem: ou o fecho de $C \cup C'$ está contido no fecho de Ω , onde C' é a reflexão de C sobre l_α , e neste caso temos que o máximo de $\text{dist}(\partial C, l_\alpha) \leq 3R$, ou o $\partial C \cap l_\alpha$ é um conjunto não conexo e desta forma, o fecho de $C \cup C'$ não está contido no fecho de Ω e portanto o fecho de $\partial C \cap l_\alpha^+$ não pode ser um gráfico sobre $\partial C \cap l_\alpha$. As duas situações nos levam a uma contradição, utilizando que $\max \text{dist}(\partial \Omega, l_\alpha)$ é arbitrariamente grande e a Proposição 3.4.1, respectivamente. Esta contradição vem do fato de supormos que $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$ contém somente componentes conexas limitadas de E . Portanto $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$ contém uma componente conexa não limitada de E , e assim demonstramos a nossa afirmação.

Seja C uma componente conexa não limitada de $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$. Então existe uma curva transversal γ de E contida em C . De fato, como C é não limitada e intersecta cada reta

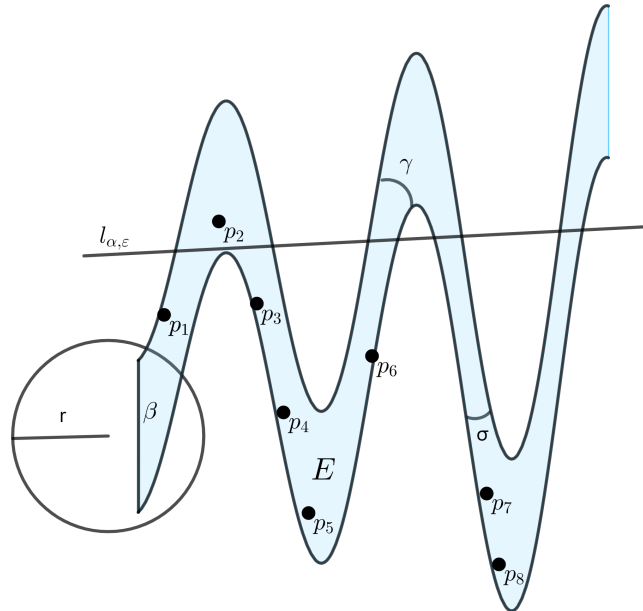
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$ e a sequência divergente $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ está em E e $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{p_i}{|p_i|} = (1, 0)$, podemos escolher uma semirreta l' em C , paralela a l_α e suficientemente distante de l_α . Pelo Lema 3.5.2 temos que $E \cap l_\alpha$ é um conjunto formado somente por componentes conexas limitadas. Portanto existe uma curva transversal γ de E contida em C .

Da forma como as curvas transversais β e γ foram obtidas, segue que as mesmas se encontram em lados opostos com relação à reta l_α , ou seja, $\beta \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \alpha\}$ e $\gamma \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \alpha\}$.

Para cada $\epsilon > 0$ dado, considere a reta definida por $l_{\alpha, \epsilon} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \epsilon x + \alpha\}$. Logo, para ϵ positivo suficientemente próximo de zero ainda conseguimos obter as mesmas propriedades, ou seja, $\beta \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \epsilon x + \alpha\}$ e $\gamma \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \epsilon x + \alpha\}$.

Seja E^* o sub fim de E , obtido de tal maneira que sua curva transversal inicial seja o arco γ . Note que E^* é o fecho da componente conexa não limitada de $E \setminus \gamma$. Como o arco γ está acima da reta $l_{\alpha, \epsilon}$, temos que a menos de uma quantidade finita de termos, a sequência $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ pertence à região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \alpha\}$ e $\text{dist}(p_i, l_{\alpha, \epsilon}) \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Agora, aplicando a E^* o mesmo argumento aplicado acima para E , obtemos uma curva transversal σ de E^* e portanto de E , tal que $\sigma \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < \epsilon x + \alpha\}$. Veja a Figura 7.

Figura 7 – Reta $l_{\alpha, \epsilon}$ e as curvas β , γ e σ



A existência das curvas transversais γ e σ nos levam a uma contradição pois a componente \tilde{C} de $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \epsilon x + \alpha\}$ contendo o arco γ é limitada e, pela Proposição 3.4.1, temos que o fecho de $\partial \tilde{C} \cap l_{\alpha, \epsilon}^+$ é um gráfico sobre $\partial \tilde{C} \cap l_{\alpha, \epsilon}$. Porém, por construção, segue que $\partial \tilde{C} \cap l_{\alpha, \epsilon}$ é um conjunto não conexo e o fecho de $\tilde{C} \cup \tilde{C}'$ não está contido no fecho Ω . Portanto

E está a uma distância limitada do eixo x .

Agora nos resta mostrar que existe uma semirreta tal que E se encontra a uma distância limitada da mesma e em particular, de qualquer outra reta paralela a esta reta. Portanto, sem perda de generalidade vamos mostrar que E se encontra a uma distância limitada da semirreta $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Considere $\Gamma := \partial E \cap \partial \Omega$ e escolha uma constante $b > 0$ tal que $B \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -b\} = \emptyset$ e que a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -b\}$ seja transversal a Γ . Segue portanto que $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -b\}$ é formado por uma quantidade finita de arcos propriamente mergulhados cujos extremos pertencem a Γ .

Seja $k = \max_{x \in \mathbb{R}} \text{dist}(E, (x, 0))$. Como a sequência divergente $\{p_i\}$ está em E , então $p_i \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, |y| < k\}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Portanto $E \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < -b\}$ é formado unicamente por componentes conexas limitadas. Pelo Lema 3.5.1 temos que a distância máxima da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -b\}$ ao bordo de E é menor ou igual a $3R$. Logo, podemos concluir que $E \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -(b + 3R), |y| < k\}$, ou seja, E está contido em uma semi-faixa. Portanto existe uma semirreta tal que E se encontra a uma distância limitada, como queríamos. ■

3.5.1 Demonstração dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2

Com os resultados vistos acima, já temos as ferramentas necessárias para demonstrarmos os Teoremas 3.3.1 e 3.3.2.

Demonstração do Teorema 3.3.1

1. É uma consequência direta da Proposição 3.5.1.
2. Primeiro afirmamos que Ω não pode estar contido numa semi-faixa (veja Figura 8). De fato, suponha, para efeitos de contradição, que Ω se encontra em uma semi-faixa, e que a menos de um movimento rígido, pode ser escolhida da seguinte forma

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -A < x < A, y > 0\},$$

para alguma constante positiva A .

Para qualquer $k > 0$, cada componente conexa C de $\Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < k\}$ é limitada. Logo, para cada $R > 0$ fixado, podemos escolher k suficientemente grande, tal que $\text{dist}(\partial C, l_k) > 3R$, onde l_k é a reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = k\}$ e portanto, pelo Lema 3.5.1, temos uma contradição. Isto mostra que Ω não pode estar contido em uma semi-faixa.

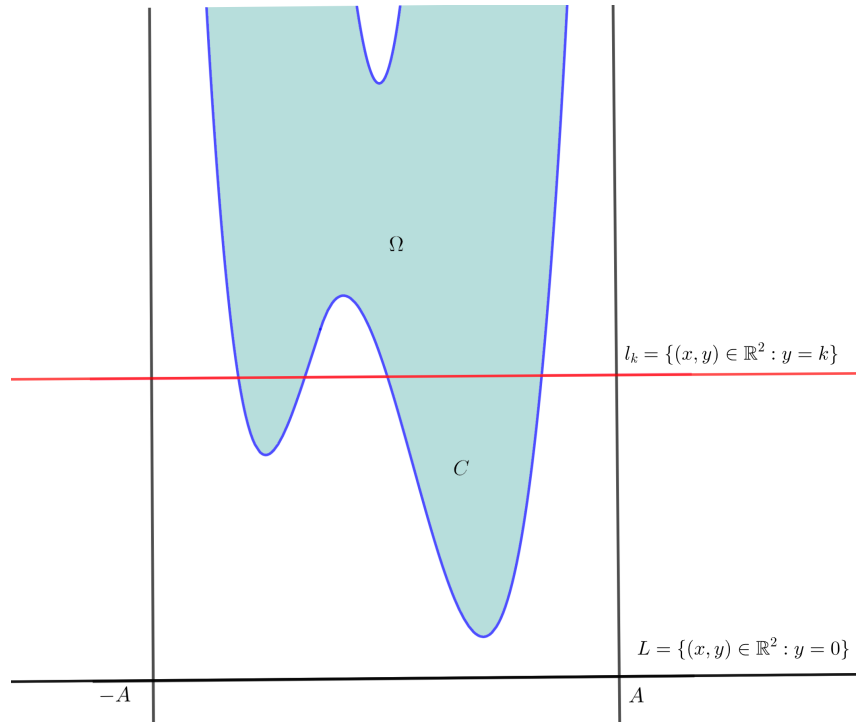
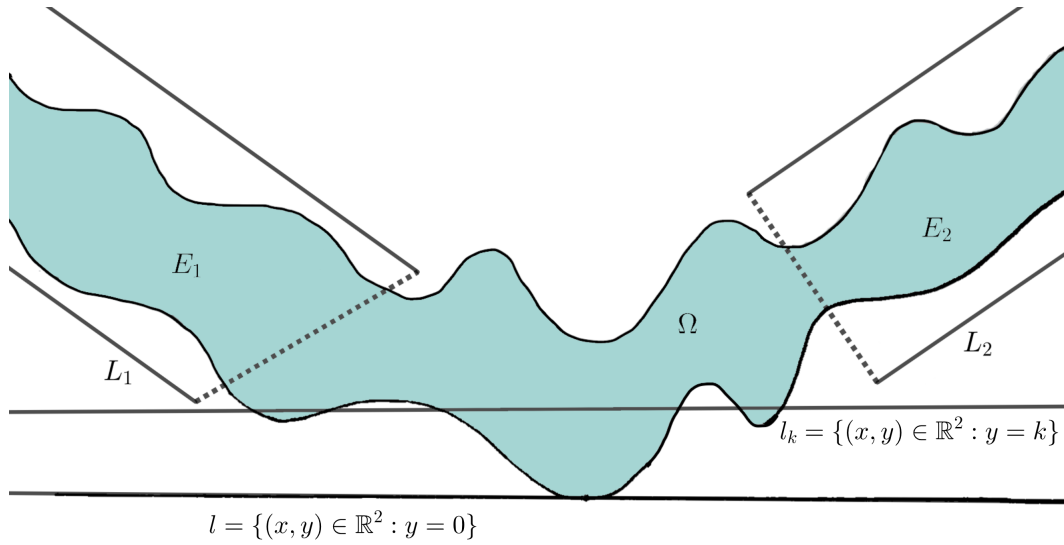


Figura 8 – Domínio Ω em uma semi-faixa.

Agora suponha que Ω tenha um único fim E . Segue daí que $\Omega \setminus E$ é limitado e portanto, pela Proposição 3.5.1, existe uma semi-faixa que contém Ω , que é uma contradição, pelo que terminamos de fazer acima. Isto mostra que Ω deve ter mais de um fim. ■

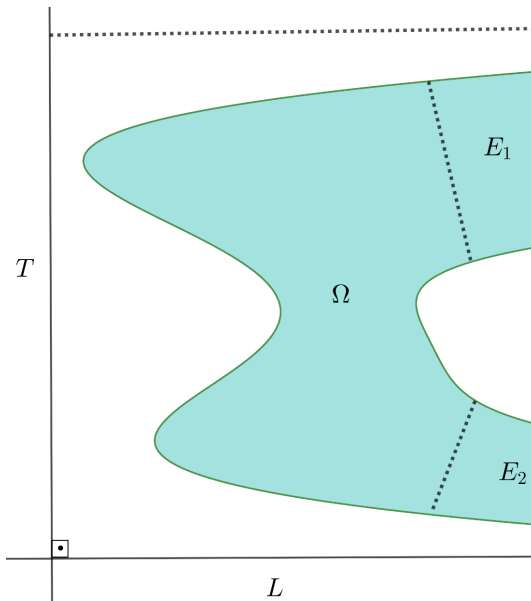
3. Suponha que Ω tenha exatamente dois fins, denotados por E_1 e E_2 , respectivamente. Então, pela Proposição 3.5.1, existem duas retas L_1 e L_2 tais que os fins E_1 e E_2 se encontram a uma distância limitada de L_1 e L_2 , respectivamente. Como $\Omega \setminus (E_1 \cup E_2)$ é limitado, segue-se que se as retas L_1 e L_2 são paralelas, então existe uma reta L , paralela a L_1 e a L_2 tal que Ω se encontra a uma distância limitada de L , em particular, de L_1 e de L_2 e portanto, o resultado segue. Porém, se as retas L_1 e L_2 não forem paralelas, então existe uma reta l tangente a $\partial\Omega$ e que o domínio Ω se encontra em uma das componentes conexas de $\mathbb{R}^2 \setminus l$, determinadas por l . Podemos supor, sem perda de generalidade que l seja $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ e que Ω se encontra em $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, ou seja, l é o eixo x e Ω se encontra no semi plano superior. Dada a reta $l_k := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = k, k > 0\}$, considere a região $\Omega_k^- := \Omega \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < k\}$. Segue da Proposição 3.5.1 que para cada $k > 0$, Ω_k^- só possui componentes conexas limitadas. Além disso, $\max \text{dist}(\partial\Omega_k^-, l) = k$ e portanto, para cada $R > 0$ dado, podemos escolher k suficientemente grande tal que $k > 3R$ e, desta forma, $\max \text{dist}(\partial\Omega_k^-, l) > 3R$, que contradiz o Lema 3.5.1. Portanto as retas L_1 e L_2 são paralelas e assim demonstramos a primeira afirmação. Veja Figura 9.

Figura 9 – Domínio Ω no semiplano superior.



Seja T uma reta ortogonal à reta L e suponha que E_1 e E_2 se encontram do mesmo lado com respeito à reta T (veja Figura 10). Então Ω está contido numa semi faixa, que é uma contradição. Como a reta T é arbitrária, temos portanto que E_1 e E_2 se encontram em lados opostos com relação a qualquer reta ortogonal à reta L .

Figura 10 – E_1 e E_2 do mesmo lado com respeito à reta T .



Demonstração do Teorema 3.3.2

Considere Ω um domínio de \mathbb{R}^2 tal que $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ seja conexo. Como consequência temos que Ω tem a topologia de um disco e o seu bordo consiste de uma única curva plana. Portanto o

bordo de Ω , $\partial\Omega$, separa \mathbb{R}^2 em duas componentes conexas. Assim, existem três possibilidades: ou Ω é limitado, ou o complemento de um domínio compacto ou um domínio com topologia própria finita com um único fim. No primeiro caso, pelo Teorema 3.4.2, temos que Ω é uma bola. No segundo caso, podemos escolher $R > 0$ suficientemente grande de tal forma que a bola B_R de raio R esteja inteiramente contida em Ω , isto é, $B_R \subset \Omega$, que é uma contradição, pelo Teorema 3.3.4. No último caso, pelo Teorema 3.3.1, temos uma contradição, pois Ω não pode um único fim. Portanto Ω é uma bola e com isto terminamos a demonstração. ■

3.5.2 Uma estimativa para a altura em \mathbb{R}^2

Agora vamos mostrar uma aplicação interessante relacionada com os domínios (f, p) -extremais de \mathbb{R}^2 , quando $f \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > 0$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio (aberto e conexo) não limitado cujo bordo seja $C^{2,\beta}$ e suponha que exista uma função $u \in C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$ solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u > 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle = \alpha & \text{no } \partial\Omega, \end{cases} \quad (36)$$

onde f é uma função Lipschitz, α uma constante negativa e ν é o campo unitário normal ao bordo de Ω apontando para fora.

Sejam $q \in \mathbb{R}^2$ e $R_\lambda > 0$, respectivamente, o centro e o raio da bola $B_{R_\lambda}(q)$ em \mathbb{R}^2 , cujo primeiro autovalor para o p -Laplaciano seja λ e a primeira autofunção associada ao primeiro autovalor λ seja v . Então v é uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p v + \lambda v^{p-1} = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q) \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(q), \\ v = 0 & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(q), \\ \langle \nabla v, \nu \rangle = \alpha & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(q). \end{cases} \quad (37)$$

Defina

$$h_0 := h_0(\lambda, \alpha) = \max_{B_{R_\lambda}(q)} v = v(q).$$

Proposição 3.5.2 *Sejam $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para algum $\lambda > 0$, com $\frac{3}{2} < p < \infty$, $p \neq 2$, e $\alpha \neq 0$. Seja Ω' uma componente conexa de*

$$\{x \in \Omega : u(x) > h_0\}.$$

Então o diâmetro de Ω' é menor que $2R_\lambda$.

Demonstração: Vamos fazer a demonstração do resultado separando nos dois casos possíveis: Ω' limitado ou ilimitado.

Primeiro caso: Ω' limitado.

Considere d como sendo o diâmetro de Ω' . Suponha, por contradição, que $d \geq 2R_\lambda$. Agora considere dois pontos q_1 e q_2 no fecho de Ω' tais que $d(q_1, q_2) \geq 2R_\lambda$. Denotemos por C a curva em $\overline{\Omega'}$ que une os pontos q_1 e q_2 . Se Ω' for regular, a curva C pode ser tomada como sendo o seu bordo, isto é, $C = \partial\Omega'$. Tome $\overline{q_1q_2}$ como sendo o segmento de reta que une os pontos q_1 e q_2 e seja m o seu ponto médio, ou seja, $m = \frac{q_1 + q_2}{2}$. Denotaremos por L_1 a reta que contém o segmento $\overline{q_1q_2}$ e por L_2 a reta que passa por m e é ortogonal ao segmento $\overline{q_1q_2}$. Defina $\Gamma := (L_1 \setminus \overline{q_1q_2}) \cup C$. Podemos notar claramente que Γ divide $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ em duas componentes conexas que denotaremos por H_1 e H_2 respectivamente. Seja $\Omega_1 = \Omega' \cap H_1$ e considere $q \in L_2 \cap H_2$ um ponto bem distante de Ω_1 . Agora considere G o gráfico da função v definida na bola $B_{R_\lambda}(q)$ de tal forma que v seja solução do Problema (37). Agora vamos mover o ponto q ao longo da reta L_2 na direção do domínio Ω_1 . Como sabemos, o comprimento do segmento $\overline{q_1q_2}$ é d e $d \geq 2R_\lambda$. Além disso, $C \subset \overline{\Omega'}$, logo $u(C) \geq h_0 > 0$. Por outro lado, $u = 0$ no bordo de Ω . Assim, vai existir um primeiro ponto de contato entre o gráfico móvel G e o gráfico de u sobre Ω_1 . Este primeiro ponto de contato se encontra no interior de Ω ou no bordo de Ω .

Pelas hipóteses sobre u e v temos que $u \geq v$ e

$$-\Delta_p v - \lambda v^{p-1} \leq -\Delta_p u - \lambda u^{p-1},$$

em $\overline{B_{R_\lambda}(q)}$.

Se $w := u - v$, então

$$Lw = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \geq 0,$$

onde a_{ij} e L são como na demonstração do Teorema 3.3.4. Como antes, temos que L é linear e uniformemente elíptico em uma vizinhança V de pontos do bordo de Ω .

Se o primeiro ponto de contato entre os gráficos das funções u e v se encontra no interior de Ω , então por (i) da Proposição 3.2.1 temos que $u = v$ em $B_{R_\lambda}(q)$, que é uma contradição.

Do mesmo modo, se o primeiro ponto de contato y_0 entre os gráficos de u e v se encontra no bordo de Ω , então por (ii) da Proposição 3.2.1 temos que $\frac{\partial w}{\partial \nu}(y_0) < 0$, que é uma contradição pois, por hipótese, $\frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) = \frac{\partial v}{\partial \nu}(y_0) = \alpha$.

Segundo Caso: Ω' é ilimitado.

Neste caso, existem uma curva divergente $\gamma(t) \subset \Omega'$ e um arco $C \subset \gamma$ cujos pontos do bordo, digamos q_1 e q_2 estão a uma distância maior ou igual a $2R_\lambda$. Agora repetimos o argumento acima para obtermos uma contradição. Com isto a demonstração está completa. ■

3.6 DOMÍNIOS EXTREMAIS NO ESPAÇO HIPERBÓLICO \mathbb{H}^n

Seja \mathbb{H}^n o espaço hiperbólico de curvatura -1 . Nesta seção faremos a identificação de \mathbb{H}^n com modelo da bola (\mathbb{B}, g_{-1}) , munida com a métrica de Poincaré $g_{-1} = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}g_0$, em que g_0 denota a métrica Euclidiana. Considerando U uma vizinhança coordenada em \mathbb{H}^n e $G = (g_{-1})_{ij}$ a matriz associada à métrica g_{-1} , temos que

$$\begin{aligned} \Delta_p u &= \operatorname{div} (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det G}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[g_{ij}^{-1} \sqrt{\det G} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] \\ &= \frac{(1-|x|^2)^n}{2^n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{(1-|x|^2)^2}{2^2} \frac{2^n}{(1-|x|^2)^n} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] \\ &= \frac{(1-|x|^2)^n}{2^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(1-|x|^2)^{2-n} |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] \\ &= \left(\frac{1-|x|^2}{2} \right)^2 |\nabla u|^{p-2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + (p-2) \left(\frac{1-|x|^2}{2} \right)^2 |\nabla u|^{p-4} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \\ &\quad + (n-2) \frac{1-|x|^2}{2} |\nabla u|^{p-2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Lema 3.6.1 *Se u e v são soluções para a equação $\Delta_p u + f(u) = 0$ em Ω , onde f é uma função Lipschitz, então a função $w = u - v$ satisfaz uma equação uniformemente elíptica de segunda ordem da forma*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial w}{\partial x_i} + c(x)w = 0 \text{ em } \Omega_\epsilon,$$

para algum $\epsilon > 0$, onde os coeficientes a_{ij} , b_i e c são funções que pertencem a L^∞ .

Na demonstração deste lema, vamos omitir a notação de somatório e vamos utilizar $D_i u$ e $D_{ij} u$ para representar $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, respectivamente.

Demonstração: Como vimos antes, toda solução de $\Delta_p u + f(u) = 0$ pertence à classe $C^{2,\beta}(\overline{\Omega_\epsilon})$ e, em um sistema de coordenadas locais, as funções u e v satisfazem

$$\begin{cases} A[u] \Delta u + H[u] D_i u D_j u D_{ij} u = F[u], \\ A[v] \Delta v + H[v] D_i v D_j v D_{ij} v = F[v], \end{cases}$$

onde os coeficientes são dados por

$$A[u] = \left(\frac{1-|x|^2}{2} \right)^2 |\nabla u|^{p-2}, \quad H[u] = (p-2) \left(\frac{1-|x|^2}{2} \right)^2 |\nabla u|^{p-4}$$

e

$$F[u] = (2 - n) \frac{1 - |x|^2}{2} |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, x \rangle - f(u).$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned} (A[u] + A[v]) \Delta w + (H[u] D_i u D_j u + H[v] D_i v D_j v) D_{ij} w + (A[u] - A[v]) \Delta(u + v) \\ + (H[u] D_i u D_j u - H[v] D_i v D_j v) D_{ij} u = 2(F[u] - F[v]). \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio para o cálculo multivariacional, segue que

$$A[u] - A[v] = \left(\frac{\partial A}{\partial u} \right)_\theta w + \left(\frac{\partial A}{\partial z_i} \right)_\theta D_i w,$$

para algum θ entre u e v , e $z_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Expressões similares são obtidas para $H[u] D_i u D_j u - H[v] D_i v D_j v$ e $F[u] - F[v]$, respectivamente. Logo, definindo

$$a_{ij}(x) = (A[u] + A[v]) \delta_{ij} + (H[u] D_i u D_j u - H[v] D_i v D_j v),$$

segue que

$$a_{ij}(x) w_{ij} + b_i(x) w_i + c(x) w = 0,$$

onde os coeficientes a_{ij} , b_i e c são limitados e os a_{ij} 's definem uma matrix uniformemente elíptica em Ω_ϵ , como queríamos. ■

As idéias aqui desenvolvidas são baseadas no trabalho de (ESPINAR; MAO, 2018) e são voltadas para o estudo das propriedades geométricas e topológicas de certos problemas sobre determinados envolvendo domínios (f, p) -extremais do espaço hiperbólico envolvendo o operador p -Laplaciano.

Como sabemos, pela Proposição 2.3.2, para cada constante λ satisfazendo $\lambda \geq \left(\frac{n-1}{p} \right)^p$, existe $R_\lambda > 0$ tal que

$$\lambda_{1,p}(R_\lambda) = \lambda$$

onde B_{R_λ} é uma bola geodésica de raio R_λ em \mathbb{H}^n . Como consequência, existe uma função v tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_p v + \lambda |v|^{p-2} v = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(x_0) \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(x_0) \\ v = 0 & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(x_0) \end{array} \right. , \quad (38)$$

Teorema 3.6.1 *Seja Ω um domínio aberto e conexo (limitado ou não) do espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Suponha que exista uma função $u > 0$, de classe $C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$, solução de*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \quad (39)$$

onde a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ para alguma constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Então Ω não contém nenhuma bola geodésica fechada de raio R_λ .

Demonstração: Seja $u > 0$ solução de (39) em Ω com a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ para alguma constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Suponha, para fins de contradição, que exista um ponto x_0 em \mathbb{H}^n tal que $\overline{B_{R_\lambda}(x_0)} \subset \Omega$.

Sabemos que para cada $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, existe um único $R_\lambda > 0$ tal que o problema

$$\begin{cases} \Delta_p v + \lambda |v|^{p-2} v = 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(x_0) \\ v > 0 & \text{em } B_{R_\lambda}(x_0) \\ v = 0 & \text{no } \partial B_{R_\lambda}(x_0) \end{cases}, \quad (40)$$

admite uma solução v , que sem perda de generalidade, podemos supor normalizada, de tal forma que sua norma L^p seja igual a 1.

Como $u > 0$ em Ω e v é limitada em $B_{R_\lambda}(x_0)$, existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que a função

$$v_\epsilon = \epsilon v$$

satisfaz as seguintes propriedades

1. $v_\epsilon(x) \leq u(x)$ para cada $x \in \overline{B_{R_\lambda}(x_0)}$.
2. Existe algum $y_0 \in B_{R_\lambda}(x_0)$ tal que $v_\epsilon(y_0) = u(y_0)$.

Por hipótese, temos que

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$f(t) \geq \lambda t^{p-1} \text{ para todo } t \geq 0.$$

Então

$$0 = \Delta_p u + f(u) \geq \Delta_p u + \lambda u^{p-1}.$$

Por outro lado, v é positiva e é solução de (40) em $B_{R_\lambda}(x_0)$. Então v_ϵ é positiva e também é solução de (40). Logo

$$\Delta_p v_\epsilon + \lambda v_\epsilon^{p-1} = 0 \text{ em } B_{R_\lambda}(x_0).$$

Assim,

$$\Delta_p v_\epsilon + \lambda v_\epsilon^{p-1} = 0 \geq \Delta_p u + \lambda u^{p-1}.$$

Logo,

$$-\Delta_p v_\epsilon - \lambda v_\epsilon^{p-1} \leq -\Delta_p u - \lambda u^{p-1}.$$

Como $v_\epsilon(x) \leq u(x)$ para todo $x \in \overline{B_{R_\lambda}(q)}$ e existe $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$ tal que $v_\epsilon(x_0) = u(x_0)$, então pelo Teorema 3.2.1, temos que $v_\epsilon \equiv u$ na bola $B_{R_\lambda}(q)$. Mas isto nos leva a uma contradição pois daí segue que $u = 0$ no bordo da bola $B_{R_\lambda}(q)$, $\partial B_{R_\lambda}(q)$. Porém $\partial B_{R_\lambda}(q) \subset \Omega$ e $u > 0$ em Ω . Portanto Ω não contém nenhuma bola de raio R_λ . ■

Teorema 3.6.2 *Nas condições do Teorema 3.6.1, se u é solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega, \\ u > 0 \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega, \\ \langle \nabla u, \nu \rangle_{\mathbb{H}^n} = \alpha \text{ no } \partial\Omega, \end{cases}$$

com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$, então ou o fecho de Ω , $\overline{\Omega}$, não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ ou Ω é uma bola de raio R_λ .

Demonstração: Seja u uma solução do nosso problema. Em particular, $u > 0$ e satisfaz $\Delta_p u + f(u) = 0$ em Ω . Então, pelo Teorema 3.6.1, Ω não contém nenhuma bola fechada de raio R_λ .

Suponha que exista um ponto $q \in \mathbb{H}^n$ tal que $\overline{B_{R_\lambda}(q)} \subset \overline{\Omega}$. Inicialmente note que $\partial\Omega \cap \overline{B_{R_\lambda}(q)} \neq \emptyset$. De fato, se tivéssemos $\partial\Omega \cap \overline{B_{R_\lambda}(q)} = \emptyset$, então teríamos $\overline{B_{R_\lambda}(q)} \subset \Omega$, que pelo Teorema 3.3.3 é uma contradição. Isto significa que existe um ponto $y_0 \in \mathbb{H}^n$ tal que $y_0 \in \partial\Omega \cap \overline{B_{R_\lambda}(q)}$.

Agora, dado que a constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, podemos considerar v solução do problema

$$\begin{cases} \Delta_p v + \lambda v^{p-1} = 0 \text{ em } B_{R_\lambda}(q) \\ v > 0 \text{ em } B_{R_\lambda}(q) \\ v = 0 \text{ no } \partial B_{R_\lambda}(q) \end{cases} \quad (41)$$

Então v é uma primeira autofunção associada ao primeiro autovalor $\lambda = \lambda_{1,p}$ em $B_{R_\lambda}(q)$.

Pelas hipóteses sobre v e pelas condições de bordo sobre a função u , podemos escolher uma constante positiva δ_0 tal que a função

$$v_{\delta_0} := \delta_0 v$$

satisfaz as seguintes condições:

- (1) $v_{\delta_0}(x) < u(x)$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$;
- (2) $\langle \nabla v_{\delta_0}, \nu \rangle = \beta$ no $\partial B_{R_\lambda}(q)$, onde β é uma constante tal que $\alpha < \beta < 0$.

Agora vamos variar (aumentar) o parâmetro δ a partir de δ_0 até encontrarmos uma contante $\delta > 0$ tal que a função $v_\delta := \delta v$, satisfaça uma das duas situações abaixo:

- (1') $v_\delta(x_0) = u(x_0)$ para algum $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$;
- (2') $\langle \nabla v_\delta, \nu \rangle = \alpha$ e $v_\delta(x) < u(x)$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$.

Sabemos que u e v_δ satisfazem, respectivamente, as equações

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega$$

e

$$\Delta_p v_\delta + \lambda v_\delta^{p-1} = 0 \text{ em } B_{R_\lambda}(q).$$

Segue daí que

$$-\Delta_p u + \Delta_p v_\delta \geq 0. \tag{42}$$

Pelo Lema 3.6.1 e pela desigualdade (42), a função $w_\delta = u - v_\delta$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 w_\delta}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial w_\delta}{\partial x_i} + c(x)w_\delta \leq 0.$$

Por um argumento semelhante ao aplicado no Teorema 3.3.4, pode-se mostrar que os coeficientes a_{ij} , b_i e $c(x)$ são uniformemente limitados em uma vizinhança $V \subset \overline{B_{R_\lambda}(q)}$ de y_0 . Além disso, o operador $L + c(x)$, em que $L = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ é linear e uniformemente elíptico em V . Como na demonstração do Teorema 3.4.2, podemos mostrar que $Lw_\delta \leq 0$. De forma equivalente

$$L(-w_\delta) = - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 w_\delta}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial w_\delta}{\partial x_i} \geq 0.$$

Agora vamos analisar as situações:

(1) $u(x_0) = v_\delta(x_0)$ para algum $x_0 \in B_{R_\lambda}(q)$.

Segue da Proposição 3.2.1 (i) que $w \equiv 0$. Assim $u \equiv v_\delta$ e portanto $\Omega = B_{R_\lambda}(q)$.

ou

(2) $\langle \nabla v_\delta, \nu \rangle = \alpha$ e $v_\delta(x) < u(x)$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$.

Temos que $-L(w_\delta) \geq 0$, $w_\delta(x) > 0$ para todo $x \in B_{R_\lambda}(q)$ e a matriz $A(x) = (a_{ij}(x))$ é uniformemente positiva definida numa vizinhança V de $\overline{B_{R_\lambda}(q)}$. Portanto pela Proposição 3.2.1, segue que

$$\frac{\partial w_\delta}{\partial \nu}(y_0) < 0.$$

Então

$$0 > \frac{\partial w_\delta}{\partial \nu}(y_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(y_0) - \frac{\partial v_\delta}{\partial \nu}(y_0) = \alpha - \alpha = 0.$$

Que é uma contradição. Com isto demonstramos o teorema. ■

3.6.1 Uma Estimativa para a Altura em \mathbb{H}^2

Similar ao caso Euclidiano, também podemos encontrar uma estimativa para o diâmetro das componentes conexas dos domínios (f, p) -extremais, no caso bidimensional. Por isso vamos considerar nesta seção o conjunto Ω como sendo um domínio (f, p) -extremal aberto, conexo e não limitado de \mathbb{H}^2 , com bordo de classe $C^{2,\beta}$, no qual o problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega \\ u > 0 \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega \\ \langle \nabla u, \nu \rangle_{\mathbb{H}^2} = \alpha \text{ no } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (43)$$

tem uma solução $u \in C^{2,\beta}(\Omega_\epsilon) \cap C^{1,\gamma}(\overline{\Omega})$.

Seja R_λ , determinado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_p v + \lambda v^{p-1} = 0 \text{ em } B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda) \\ v > 0 \text{ em } B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda) \\ v = 0 \text{ no } \partial B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda) \\ \langle \nabla v, \nu \rangle_{\mathbb{H}^2} = \alpha \text{ no } \partial B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda) \end{array} \right. , \quad (44)$$

onde $B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda)$ é a bola geodésica de centro $q \in \mathbb{H}^2$ e raio $R_\lambda > 0$, $\lambda = \lambda_{1,p}(B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda))$ é o primeiro autovalor do p -Laplaciano na bola $B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda)$ e α é uma constante negativa.

Considere

$$h_0 := \max_{B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda)} v = v(q).$$

Note que h_0 depende de α e de λ e de fato, está bem determinado, pois a função v é radial e decrescente na direção radial.

Teorema 3.6.3 *Seja Ω um domínio (f, p) -extremal aberto e conexo do problema (43) e seja Ω' uma componente conexa de*

$$\{x \in \Omega : u(x) > h_0\},$$

onde u é solução de (43). Se a função $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > \left(\frac{1}{p}\right)^p$, com $\frac{3}{2} < p < \infty$ e $p \neq 2$, então o diâmetro de Ω' é menor do que $2R_\lambda$

Demonstração: Como na demonstração do teorema correspondente ao caso Euclidiano, vamos dividir a prova em dois casos: Ω' limitado e Ω' não-limitado.

Primeiro caso: Ω' é limitado

Neste caso, considere d como sendo o diâmetro de Ω' e suponha, por contradição que $d \geq 2R_\lambda$. Aqui vamos identificar $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ com $\{(\xi_1, \xi_2, t) \in \mathbb{R}^3 : \xi_1^2 + \xi_2^2 < 1\}$ munido com a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle = g_{-1} + dt^2$ e considere a projeção estereográfica Π como a correspondência entre \mathbb{H}^2 e o disco de Poincaré \mathbb{D} . Assim, a aplicação Π aplica um domínio limitado de \mathbb{H}^2 em um domínio limitado de \mathbb{D} sem intersectar o bordo infinito $\partial\mathbb{D} = \mathbb{S}_\infty^1$. Como, por hipótese, Ω é um domínio não-limitado, então a imagem de Ω pela projeção estereográfica Π ($\pi(\Omega)$) que, por simplicidade, continuaremos denotando por Ω , deve ter pelo menos um ponto q^* no infinito, ou seja, $q^* \in \mathbb{S}_\infty^1 \cap \Omega$. Agora considere q_1 e q_2 dois pontos em $\overline{\Omega'}$ tais que a distância hiperbólica entre eles seja $d = \text{dist}(q_1, q_2)$. Seja l uma curva em $\overline{\Omega'}$ que une os pontos q_1 e q_2 (note que se Ω for regular, a curva l pode ser escolhida como sendo o bordo $\partial\Omega$). Sendo d a distância hiperbólica entre os pontos q_1 e q_2 , então existe uma geodésica completa que chamaremos de L_1 que passa por q_1 e q_2 e cuja parte que une q_1 a q_2 , que denotaremos por $\widehat{q_1 q_2}$, está contida em $\overline{\Omega'}$. Além disso, o comprimento de $\widehat{q_1 q_2}$ é igual a d . Seja m o ponto médio da curva $\widehat{q_1 q_2}$ e considere L_2 a geodésica completa que é ortogonal à geodésica L_1 e que passa pelo ponto m .

Defina

$$\Gamma = (L_1 \setminus \widehat{q_1 q_2}) \cup l.$$

Então Γ divide $M \setminus \Gamma$ em duas componentes conexas que denotaremos por H_1 e H_2 , respectivamente. Agora vamos escolher um ponto $q \in \mathbb{H}^2$ que esteja bem distante de Ω' no sentido da métrica hiperbólica g_{-1} e que pertença à geodésica L_2 , isto é, $q \in L_2 \cap H_2$. Como sabemos, fixada uma constante positiva λ satisfazendo a propriedade \mathbb{P}_2 , existem uma constante positiva R_λ e uma função v solução do problema (44), definida na bola $B_{\mathbb{H}^2}(q, R_\lambda)$ tal que a

condição de Newmann seja dada por $\langle \nabla v, \nu \rangle_{\mathbb{H}^2} = \alpha$. Considere G como sendo o gráfico da função v dada pelo Problema (44).

Agora vamos transladar o ponto q na direção de Ω' ao longo da geodésica completa L_2 .

Como

$$\begin{cases} d \geq 2R_\lambda \\ u(x) > h_0, \quad x \in \Omega' \\ u = 0 \text{ no } \partial\Omega \end{cases},$$

onde d é o comprimento hiperbólico de $\widehat{q_1 q_2}$ e u é solução do problema (43). Então vai existir um ponto $x_0 \in \mathbb{H}^2$, que será o primeiro ponto de contato entre o gráfico móvel G e o gráfico da função u sobre Ω . Este ponto x_0 está localizado no interior ou no bordo de Ω .

Por outro lado, pelas hipóteses sobre u e v temos que $u \geq v$ e portanto

$$-\Delta_p v - \lambda v^{p-1} \leq -\Delta_p u - \lambda u^{p-1},$$

em $\overline{B_{R_\lambda}(q)}$.

Se $w := u - v$, então

$$Lw = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) \geq 0,$$

onde a_{ij} e L são como no Teorema 3.6.2 e portanto L é um operador linear e uniformemente elíptico numa vizinhança de x_0 . Se o primeiro ponto de contato entre os gráficos das funções u e v se encontra no interior de Ω , então pelo Teorema 3.2.1 temos que $u = v$ em $B_{R_\lambda}(q)$, que é uma contradição.

Do mesma forma, se o primeiro ponto de contato entre os gráficos de u e v se encontra no bordo de Ω , então pela Proposição 3.2.1 temos que

$$0 > \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \alpha - \alpha = 0,$$

que é uma contradição.

Segundo Caso: Ω' é ilimitado.

Neste caso, podemos escolher uma curva divergente $\gamma(t) \subset \Omega'$ tal que $\lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = q^*$. Seja $l \subset \gamma(t)$ um arco cujos pontos do bordo, que denotaremos por q_1 e q_2 , estão a uma distância hiperbólica maior ou igual a $2R_\lambda$. Agora repetimos o argumento acima para obtermos uma contradição. Com isto a prova do teorema está completa. ■

A versão do Teorema 3.6.3 pra o caso $p = 2$, no espaço hiperbólico, foi demonstrada por Espinar-Mao em (ESPINAR; MAO, 2018).

3.6.2 Bordo Assintótico de um Domínio Extremal

Aqui temos por objetivo mostrar algumas propriedades do bordo assintótico (ou bordo no infinito) de um domínio (f, p) -extremal no espaço hiperbólico \mathbb{H}^n . Vamos seguir as idéias desenvolvidas em (ESPINAR; MAO, 2018). Para mais detalhes sobre os tópicos trabalhados nesta seção indicaremos também a leitura de (EBERLEIN, 1996) e suas referências.

Considere \mathbb{H}^n o espaço hiperbólico, de curvatura seccional -1 . É um fato bastante conhecido que o **cut locus** de cada ponto em \mathbb{H}^n é vazio. Isto significa que para quaisquer dois pontos distintos $q_1, q_2 \in \mathbb{H}^n$, sempre existe uma (única) geodésica completa unindo os pontos q_1 e q_2 .

Para desenvolvermos os resultados principais desta seção, vamos precisar das propriedades das geodésicas assintóticas e dos vetores assintóticos, que serão ferramentas fundamentais no desenvolvimento da teoria. Para isto, precisamos da definição destes elementos: sejam v_1 e v_2 dois vetores unitários em $T\mathbb{H}^n$, $\gamma_{v_1}(t)$ e $\gamma_{v_2}(t)$ duas geodésicas de velocidade 1 em \mathbb{H}^n tais que $\gamma'_{v_1}(0) = v_1$ e $\gamma'_{v_2}(0) = v_2$. Dizemos que duas geodésicas γ_{v_1} e γ_{v_2} em \mathbb{H}^n são assintóticas se existe uma constante positiva c tal que $d(\gamma_{v_1}(t), \gamma_{v_2}(t)) \leq c$ para todo $t \geq 0$. Da mesma forma, dizemos que os vetores unitários v_1 e v_2 em $T\mathbb{H}^n$ são assintóticos se suas geodésicas correspondentes têm esta propriedade.

Lema 3.6.2 *Ser assintótico é uma relação de equivalência para as geodésicas unitárias em \mathbb{H}^n ou para os vetores unitários em $T\mathbb{H}^n$.*

Definimos um ponto no infinito de \mathbb{H}^n como a classe de equivalência das geodésicas assintóticas. Já o conjunto de todos os pontos no infinito de \mathbb{H}^n será denotado por \mathbb{H}_∞ , enquanto a classe de equivalência representada pela geodésica γ será denotada por $\gamma(+\infty)$ e a classe de equivalência representada pela geodésica de direção oposta $\gamma^{-1} : t \rightarrow \gamma(-t)$ será denotada por $\gamma(-\infty)$.

Proposição 3.6.1 (EBERLEIN, 1996, Proposição 1.7.3) *Seja γ uma geodésica em \mathbb{H}^n . Então para cada ponto $q \in \mathbb{H}^n$ existe uma geodésica σ em \mathbb{H}^n tal que $\sigma(0) = q$ e σ é assintótica a γ .*

Seja $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^n \cup \mathbb{H}_\infty$ a compactificação de \mathbb{H}^n . Para cada ponto $q \in \mathbb{H}^n$ considere \mathcal{U} um conjunto aberto da esfera unitária do espaço tangente $T_q\mathbb{H}^n$. Para cada $r > 0$ defina

$$T(\mathcal{U}, r) := \{\gamma_v(t) \in \mathbb{H}^* : v \in \mathcal{U}, r < t \leq +\infty\}.$$

Proposição 3.6.2 (EBERLEIN, 1996; ESPINAR; MAO, 2018) *Existe uma única topologia τ em $\mathbb{H}^* = \mathbb{H}^n \cup \mathbb{H}_\infty$ tal que*

(A1) $\tau|_M$ coincide com a topologia induzida pela distância Riemanniana.

(A2) Para cada $q \in \mathbb{H}^n$ e cada homomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$, a função $\varphi : \overline{B}_1 \rightarrow \mathbb{H}^*$, da bola unitária fechada \overline{B}_1 de $T_q\mathbb{H}$ em \mathbb{H}^* , definida por $\varphi(v) = \exp_q(h(\|v\|)v)$ é um homeomorfismo. Além disso, φ identifica \mathbb{H}_∞ com a esfera unitária.

(A3) Para cada $q \in \mathbb{H}^n$, a aplicação $v \rightarrow v(\infty)$ é um homeomorfismo da esfera unitária de $T_q\mathbb{H}$ sobre \mathbb{H}_∞ .

Esta topologia é denominada de topologia do cone de \mathbb{H}^* .

Seja A um subconjunto de \mathbb{H}^n . O bordo assintótico (ou bordo no infinito) de A , denotado por $\partial_\infty A$, é o conjunto

$$\partial_\infty A = \partial A \cap \mathbb{H}_\infty,$$

onde ∂A é o bordo de A na topologia do cone. Em particular, $\partial_\infty \mathbb{H}^n = \mathbb{H}_\infty \cap \mathbb{H}^n \cong \mathbb{S}^{n-1}$, ou seja, o bordo assintótico de \mathbb{H}^n pode ser identificado com a esfera unitária \mathbb{S}^{n-1} .

3.6.3 Funções de Busemann e Horoesferas

Definiremos a seguir as funções de Busemann e Horoesferas, que terão um papel importante na obtenção de alguns resultados. Para algumas referências sobre este tópico, citamos (EBERLEIN, 1996) e (ESPINAR; MAO, 2018).

Definição 3.6.1 *Sejam v um vetor unitário de $T\mathbb{H}$ e $\gamma_v(t)$ a geodésica em \mathbb{H}^n tal que $\gamma'_v(0) = v$. A função de Busemann $B_v : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{R}$, associada a v é definida por*

$$B_v(q) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (d(q, \gamma_v(t)) - t).$$

Proposição 3.6.3 ((EBERLEIN, 1996)) *Seja v um vetor unitário correspondente à função de Busemann B_v . Então*

(B1) B_v é uma função de classe C^2 e convexa em \mathbb{H}^n .

(B2) $\nabla B_v(q) = -w(q)$, onde $w(q)$ é o único vetor unitário em q que é assintótico a v .

(B3) Se $w = v(q)$ para algum ponto $q \in \mathbb{H}^n$, então $B_v - B_w$ é uma função constante em \mathbb{H}^n .

(B4) $|B_v(q_1) - B_v(q_2)| \leq d(q_1, q_2)$ para quaisquer $q_1, q_2 \in \mathbb{H}^n$ e a igualdade vale se e somente se a geodésica que une q_1 e q_2 for assintótica a γ_v .

Considere $x \in \mathbb{H}_\infty$ e seja $v \in T\mathbb{H}$ um vetor unitário que se encontra na classe assintótica x . As horoesferas determinadas por um ponto $x \in \mathbb{H}_\infty$ são os conjuntos de níveis da função de Busemann B_v . Vamos denotar por $H_x(t)$ a horoesfera de base x e distância t , isto é,

$$H_x(t) := \{q \in \mathbb{H}^n : B_v(q) = t, v(+\infty) = x\}.$$

Geometricamente uma horoesfera H_x é o limite de esferas métricas $\{S_j\}$ que passam por q com os centros $\{q_j\}$ de $\{S_j\}$ convergindo para x (veja (EBERLEIN, 1996)). Por outro lado temos que à medida que t aumenta, a horoesfera $H_x(t)$ vai convergindo para o ponto x , isto é, $H_x(t) \rightarrow x$ quando $t \rightarrow +\infty$.

Corolário 3.6.1 *As horoesferas com base em x determinam uma folheação de \mathbb{H}^n . Além disso, a interseção entre uma geodésica γ e uma horoesfera em $\gamma(+\infty)$ é sempre ortogonal e não depende da escolha do vetor v .*

Demonstração: As afirmações são uma consequência imediata da definição e das propriedades (B1), (B2) e (B3), respectivamente. ■

Cada elemento da folheação de \mathbb{H}^n gerada pelas horoesferas com base em x , determina um domínio convexo em \mathbb{H}^n , denominado de horobola e denotado por D_x .

Lema 3.6.3 *Seja Ω um domínio aberto e conexo (limitado ou não) de \mathbb{H}^n . Se existir um função positiva u solução da equação*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega,$$

onde $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Então $\text{int}(\partial_\infty \Omega) = \emptyset$.

Demonstração:

Suponha, por contradição, que $\text{int}(\partial_\infty \Omega) \neq \emptyset$. Deste modo, podemos escolher um ponto $x \in \text{int}(\partial_\infty \Omega) \subseteq \mathbb{H}_\infty$. Pelo Corolário 3.6.1 temos que as horoesferas $H_x(t)$ com base em x determinam uma folheação de \mathbb{H}^n .

Considere $\{H_x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ uma folheação de \mathbb{H}^n por horoesferas com base no ponto x . Como sabemos, a sequência $\{H_x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ converge para x quando $t \rightarrow +\infty$.

Por outro lado, por hipótese, x está no interior do conjunto $\partial_\infty\Omega$, logo vai existir um parâmetro T , com $|T| < \infty$ tal que $H_x(t) \subsetneq \Omega \subseteq \mathbb{H}^n$, para cada $t > T$.

Agora considere t um número real fixado tal que $t > T$. Seja $q \in \Omega$ e considere β a única geodésica completa em \mathbb{H}^n que une os pontos q e x , ou seja, $\beta(+\infty) = x$ e $\beta(0) = q \in H_x(t)$. Note que $\beta((0, +\infty)) \subset D_x(t)$, onde $D_x(t)$ denota a horobola limitada por $H_x(t)$. Notemos que $d(\beta(s), H_x(t)) \rightarrow +\infty$ quando $s \rightarrow +\infty$. Assim, podemos escolher $s_0 > 0$ tal que a bola geodésica de centro em $\beta(s_0)$ e raio R_λ está completamente contida na horobola $D_x(t) \subset \Omega$, que pelo Teorema 3.6.1, é uma contradição. Portanto, com esta contradição, concluímos que $\text{int}(\partial_\infty\Omega) = \emptyset$. ■

Seja $x \in \mathbb{H}_\infty$. O cone no infinito de base x e parâmetros $y \in \mathbb{H}_\infty \setminus \{x\}$, $r > 0$ e $s \in \mathbb{R}$ é definido como sendo o conjunto

$$\mathcal{C}_x(y, r, s) = \{q \in \mathbb{H}^n : d(\gamma(\bar{s}), q) \leq r, \forall \bar{s} \geq s\},$$

onde γ é a única geodésica completa que une os pontos x e y , isto é, $\gamma(+\infty) = x$ e $\gamma(-\infty) = y$.

Seja Ω um domínio conexo de \mathbb{H}^n tal que $\partial_\infty\Omega \neq \emptyset$. Dizemos que $x \in \partial_\infty\Omega$ é um ponto cônico de raio r se existem $y_0 \in \mathbb{H}_\infty$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\mathcal{C}_x(y_0, r, s_0) \subset \Omega$. Além disso, dizemos que x é um ponto horoesférico se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $D_x(t) \subset \Omega$. Em particular, um ponto horoesférico é um ponto cônico de raio infinito.

Antes de enunciarmos o próximo teorema devemos lembrar alguns resultados vindos da Teoria Geométrica da Medida sobre medida e dimensão de Hausdorff. Para isto considere X um espaço métrico com métrica d . Para cada $m \geq 0$ e para cada subconjunto A de X , a medida m -dimensional de Hausdorff do conjunto A , denotada por $\mathcal{H}^m(A)$ é definida por

$$\mathcal{H}^m(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(A), \quad A \subset X,$$

onde, para cada $\delta > 0$, $\mathcal{H}_\delta^m(A)$ é definido tomando $\mathcal{H}_\delta^m(\emptyset) = 0$ e para cada $A \subset X$, com $A \neq \emptyset$,

$$\mathcal{H}_\delta^m(A) = \omega_m \inf \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } C_j}{2} \right)^m,$$

onde $\omega_m := \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2} + 1)}$ e o ínfimo é tomado sobre todas as coleções enumeráveis $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X tais que $\text{diam } C_j < \delta$ e $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$.

A dimensão de Hausdorff de um conjunto $A \subset X$ denotada por $\dim_{\mathcal{H}}(A)$ é dada por

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{0 \leq s < \infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Para mais detalhes sobre o assunto recomendamos as referências (SIMON, 2014, Cap. 1) e (EVANS; GARIEPY, 2015, Cap. 2).

Teorema 3.6.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio aberto e conexo com bordo $C^{2,\beta}$. Suponha que exista uma função positiva $u \in C^{1,\gamma}(\Omega)$ que seja solução fraca da equação*

$$\Delta_p u + f(u) = 0 \text{ em } \Omega,$$

onde $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$. Então não existe ponto cônico $x \in \partial_\infty \Omega$ de raio $r > R_\lambda$. Em particular, a dimensão de Hausdorff de $\partial_\infty \Omega$ satisfaz $\dim_{\mathcal{H}}(\partial_\infty \Omega) < n - 1$.

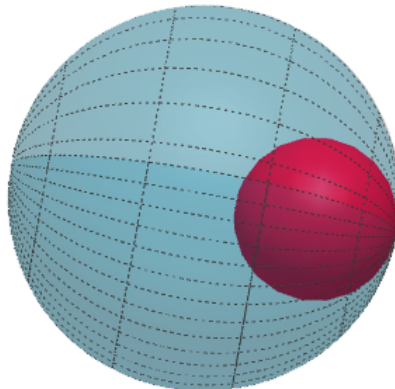
Demonstração: Suponha, para fins de contradição, que exista $x \in \partial_\infty \Omega$ um ponto cônico de raio $r > 0$, tal que $r > R_\lambda$. Deste modo, pela definição de ponto cônico, existem $y_0 \in \mathbb{H}_\infty \setminus \{x\}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ tais que o cone de base em x e parâmetros y, r e s_0 dado por $\mathcal{C}_x(y_0, r, s_0)$, está inteiramente contido em Ω , ou seja, $\mathcal{C}_x(y_0, r, s_0) \subseteq \Omega$.

Agora considere γ a única geodésica completa em \mathbb{H}^n que une os pontos x e y , isto é, $\gamma(+\infty) = x$ e $\gamma(-\infty) = y$. Então, para cada número real $s > s_0 + R_\lambda$, $B_{R_\lambda}(\gamma(s)) \subset \mathcal{C}_x(y_0, r, s_0)$, ou seja, a bola centrada em $\gamma(s)$ de raio R_λ está contida em $\mathcal{C}_x(y_0, r, s_0)$. Mas isto contradiz o Teorema 3.6.1. Assim, com esta contradição demonstramos a primeira afirmação do teorema.

Agora, se $\dim_{\mathcal{H}}(\partial_\infty \Omega) = n - 1$, então $\partial_\infty \Omega$ contém um conjunto aberto e portanto $\partial_\infty \Omega$ contém um ponto horoesférico. Isto contradiz o Lema 3.6.3. ■

Corolário 3.6.2 *Se $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz e $f(t) \geq \lambda t^{p-1}$ para todo $t > 0$ e para alguma constante $\lambda > \left(\frac{n-1}{p}\right)^p$, com $\frac{2n+2}{n+2} < p < \infty$ e $p \neq 2$, então uma horobola não pode ser um domínio (f, p) -extremal em \mathbb{H}^n .*

Figura 11 – Horobola em \mathbb{H}^n , no modelo da bola de Poincaré



REFERÊNCIAS

- AFTALION, A.; BUSCA, J. Symétrie radiale pour des problèmes elliptiques surdéterminés posés dans des domaines extérieurs. **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.**, v. 324, n. 6, p. 633–638, 1997. ISSN 0764-4442. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(97\)86980-7](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(97)86980-7)>.
- ALEKSANDROV, A. D. Uniqueness theorems for surfaces in the large. V. **Vestnik Leningrad. Univ.**, v. 13, n. 19, p. 5–8, 1958. ISSN 0146-924x.
- ANANE, A. Etude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p -laplacien. Université libre de Bruxelles, 1988.
- ANANE, A.; CHAKRONE, O.; MOUSSA, M. Spectrum of one dimensional p -Laplacian operator with indefinite weight. **Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.**, p. No. 17, 11, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.14232/ejqtde.2002.1.17>>.
- ANOOP, T. V.; BOBKOV, V.; SASI, S. On the strict monotonicity of the first eigenvalue of the p -Laplacian on annuli. **Trans. Amer. Math. Soc.**, v. 370, n. 10, p. 7181–7199, 2018. ISSN 0002-9947. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/tran/7241>>.
- ANTUNES, P. R. S. Extremal p -Laplacian eigenvalues. **Nonlinearity**, v. 32, n. 12, p. 5087–5109, 2019. ISSN 0951-7715. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/1361-6544/ab47c5>>.
- AZORERO, J. P. G.; ALONSO, I. P. Existence and nonuniqueness for the p -Laplacian: nonlinear eigenvalues. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 12, n. 12, p. 1389–1430, 1987. ISSN 0360-5302. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03605308708820534>>.
- BALLMANN, W.; GROMOV, M.; SCHROEDER, V. **Manifolds of nonpositive curvature**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. v. 61. vi+263 p. ISBN 0-8176-3181-X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9159-3>>.
- BARLES, G. Remarks on uniqueness results of the first eigenvalue of the p -Laplacian. **Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5)**, v. 9, n. 1, p. 65–75, 1988. ISSN 0240-2955. Disponível em: <http://www.numdam.org/item?id=AFST_1988_5_9_1_65_0>.
- BATISTA, M.; CAVALCANTE, M. P.; SANTOS, N. L. The p -hyperbolicity of infinity volume ends and applications. **Geom. Dedicata**, v. 171, p. 397–406, 2014. ISSN 0046-5755. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10711-013-9905-7>>.
- BÉRARD, P.; CASTILLON, P.; CAVALCANTE, M. Eigenvalue estimates for hypersurfaces in $\mathbb{H}^m \times \mathbb{R}$ and applications. **Pacific J. Math.**, v. 253, n. 1, p. 19–35, 2011. ISSN 0030-8730. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140/pjm.2011.253.19>>.
- BERESTYCKI, H.; CAFFARELLI, L. A.; NIRENBERG, L. Monotonicity for elliptic equations in unbounded Lipschitz domains. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 50, n. 11, p. 1089–1111, 1997. ISSN 0010-3640. Disponível em: <[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0312\(199711\)50:11<1089::AID-CPA2>3.0.CO;2-6](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(199711)50:11<1089::AID-CPA2>3.0.CO;2-6)>.
- BESSA, G. P.; LIRA, J. H. de; PIGOLA, S.; SETTI, A. G. Curvature estimates for submanifolds immersed into horoballs and horocylinders. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 431, n. 2, p. 1000–1007, 2015. ISSN 0022-247X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.06.010>>.

BHATTACHARYA, T. Radial symmetry of the first eigenfunction for the p -Laplacian in the ball. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 104, n. 1, p. 169–174, 1988. ISSN 0002-9939. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2047480>>.

BOBKOV, V.; KOLONITSKII, S. On qualitative properties of solutions for elliptic problems with the p -Laplacian through domain perturbations. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 45, n. 3, p. 230–252, 2020. ISSN 0360-5302. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03605302.2019.1670674>>.

CANZANI, Y. Analysis on manifolds via the laplacian. **Lecture Notes available at: <http://www.math.harvard.edu/canzani/docs/Laplacian.pdf>**, 2013.

CAVALCANTE, M. P.; MANFIO, F. On the fundamental tone of immersions and submersions. **Proc. Amer. Math. Soc.**, v. 146, n. 7, p. 2963–2971, 2018. ISSN 0002-9939. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/proc/13969>>.

CHEEGER, J. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In: **Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)**. [S.l.: s.n.], 1970. p. 195–199.

CHEUNG, L.-F.; LEUNG, P.-F. Eigenvalue estimates for submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space. **Math. Z.**, v. 236, n. 3, p. 525–530, 2001. ISSN 0025-5874. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/PL00004840>>.

CHORWADWALA, A. M. H.; MAHADEVAN, R. An eigenvalue optimization problem for the p -Laplacian. **Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A**, v. 145, n. 6, p. 1145–1151, 2015. ISSN 0308-2105. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0308210515000232>>.

CHORWADWALA, A. M. H.; MAHADEVAN, R.; TOLEDO, F. On the Faber-Krahn inequality for the Dirichlet p -Laplacian. **ESAIM Control Optim. Calc. Var.**, v. 21, n. 1, p. 60–72, 2015. ISSN 1292-8119. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/cocv/2014017>>.

COLESANTI, A. A symmetry result for the p -Laplacian equation via the moving planes method. **Appl. Anal.**, v. 55, n. 3-4, p. 207–213, 1994. ISSN 0003-6811. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00036819408840300>>.

DAMASCELLI, L.; SCIUNZI, B. Harnack inequalities, maximum and comparison principles, and regularity of positive solutions of m -Laplace equations. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 25, n. 2, p. 139–159, 2006. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-005-0337-6>>.

DELAY, E.; SICBALDI, P. Extremal domains for the first eigenvalue in a general compact Riemannian manifold. **Discrete Contin. Dyn. Syst.**, v. 35, n. 12, p. 5799–5825, 2015. ISSN 1078-0947. Disponível em: <<https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.5799>>.

DIBENEDETTO, E. $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. **Nonlinear Anal.**, v. 7, n. 8, p. 827–850, 1983. ISSN 0362-546X. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0362-546X\(83\)90061-5](https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90061-5)>.

DO CARMO, M. P. **Geometria Riemanniana**. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015. ix+335 p. Fifth edition, second printing of [MR0651516]. ISBN 978-85-244-0036-0.

DO Ó, J. a. M.; COSTA, R. da. Symmetry properties for nonnegative solutions of non-uniformly elliptic equations in the hyperbolic space. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 435, n. 2, p. 1753–1771, 2016. ISSN 0022-247X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.11.031>>.

DU, F.; MAO, J. Estimates for the first eigenvalue of the drifting Laplace and the p -Laplace operators on submanifolds with bounded mean curvature in the hyperbolic space. **J. Math. Anal. Appl.**, v. 456, n. 2, p. 787–795, 2017. ISSN 0022-247X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.07.044>>.

EBERLEIN, P. B. **Geometry of nonpositively curved manifolds**. [S.l.]: University of Chicago Press, Chicago, IL, 1996. vii+449 p. ISBN 0-226-18197-9; 0-226-18198-7.

EL SOUFI, A.; ILIAS, S. Domain deformations and eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in a Riemannian manifold. **Illinois J. Math.**, v. 51, n. 2, p. 645–666, 2007. ISSN 0019-2082. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1258138436>>.

ESCOBAR, J. F. **Topics in PDE's and differential geometry**. [S.l.]: Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2002. viii+88 p. ISBN 85-902605-4-2.

ESPINAR, J. M.; GÁLVEZ, J. A.; ROSENBERG, H. Complete surfaces with positive extrinsic curvature in product spaces. **Comment. Math. Helv.**, v. 84, n. 2, p. 351–386, 2009. ISSN 0010-2571. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/CMH/165>>.

ESPINAR, J. M.; MAO, J. Extremal domains on Hadamard manifolds. **J. Differential Equations**, v. 265, n. 6, p. 2671–2707, 2018. ISSN 0022-0396. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.04.044>>.

EVANGELISTA, I.; SEO, K. p -fundamental tone estimates of submanifolds with bounded mean curvature. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 52, n. 3, p. 269–287, 2017. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10455-017-9557-1>>.

EVANS, L. C.; GARIEPY, R. F. **Measure theory and fine properties of functions**. Revised. [S.l.]: CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. xiv+299 p. ISBN 978-1-4822-4238-6.

FABER, G. Beweis, dass unter allen homogenen membranen von gleicher fläche und gleicher spannung die kreisförmige den tiefsten grundton gibt. Verlagd. Bayer. Akad. d. Wiss., 1923.

FARINA, A.; VALDINOCI, E. Flattening results for elliptic PDEs in unbounded domains with applications to overdetermined problems. **Arch. Ration. Mech. Anal.**, v. 195, n. 3, p. 1025–1058, 2010. ISSN 0003-9527. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00205-009-0227-8>>.

FARINA, A.; VALDINOCI, E. Partially and globally overdetermined problems of elliptic type. **Adv. Nonlinear Anal.**, v. 1, n. 1, p. 27–45, 2012. ISSN 2191-9496. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/ana-2011-0002>>.

FARINA, A.; VALDINOCI, E. On partially and globally overdetermined problems of elliptic type. **Amer. J. Math.**, v. 135, n. 6, p. 1699–1726, 2013. ISSN 0002-9327. Disponível em: <<https://doi.org/10.1353/ajm.2013.0052>>.

FLECKINGER-PELLÉ, J.; TAKÁČ, P. Uniqueness of positive solutions for nonlinear cooperative systems with the p -Laplacian. **Indiana Univ. Math. J.**, v. 43, n. 4, p. 1227–1253, 1994. ISSN 0022-2518. Disponível em: <<https://doi.org/10.1512/iumj.1994.43.43053>>.

GARABEDIAN, P. R.; SCHIFFER, M. Variational problems in the theory of elliptic partial differential equations. **J. Rational Mech. Anal.**, v. 2, p. 137–171, 1953. ISSN 1943-5282. Disponível em: <<https://doi.org/10.1512/iumj.1953.2.52008>>.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 2001. xiv+517 p. Reprint of the 1998 edition. ISBN 3-540-41160-7.

GRIGOR'YAN, A. Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds. **Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)**, v. 36, n. 2, p. 135–249, 1999. ISSN 0273-0979. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/S0273-0979-99-00776-4>>.

HAUSWIRTH, L.; HÉLEIN, F.; PACARD, F. On an overdetermined elliptic problem. **Pacific J. Math.**, v. 250, n. 2, p. 319–334, 2011. ISSN 0030-8730. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140/pjm.2011.250.319>>.

HEINTZE, E.; HOF, H.-C. I. Geometry of horospheres. **J. Differential Geometry**, v. 12, n. 4, p. 481–491 (1978), 1977. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214434219>>.

HUANG, Y.; SONG, C.; XU, L. Hadamard variational formulas for p -torsion and p -eigenvalue with applications. **Geom. Dedicata**, v. 197, p. 61–76, 2018. ISSN 0046-5755. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10711-018-0318-5>>.

HUANG, Y. X. Existence of positive solutions for a class of the p -Laplace equations. **J. Austral. Math. Soc. Ser. B**, v. 36, n. 2, p. 249–264, 1994. ISSN 0334-2700. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/S0334270000010390>>.

KOERBER, T. Sharp estimates for the principal eigenvalue of the p -operator. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 57, n. 2, p. Paper No. 49, 30, 2018. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-018-1331-0>>.

KRAHN, E. Über eine von rayleigh formulierte minimaleigenschaft des kreises. **Mathematische Annalen**, Springer, v. 94, n. 1, p. 97–100, 1925.

KUMARESAN, S.; PRAJAPAT, J. Analogue of Gidas-Ni-Nirenberg result in hyperbolic space and sphere. **Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste**, v. 30, n. 1-2, p. 107–112 (1999), 1998. ISSN 0049-4704.

KUMARESAN, S.; PRAJAPAT, J. Serrin's result for hyperbolic space and sphere. **Duke Math. J.**, v. 91, n. 1, p. 17–28, 1998. ISSN 0012-7094. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/S0012-7094-98-09102-5>>.

LEVITT, G.; ROSENBERG, H. Symmetry of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space. **Duke Math. J.**, v. 52, n. 1, p. 53–59, 1985. ISSN 0012-7094. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/S0012-7094-85-05204-4>>.

LY, I. The first eigenvalue for the p -Laplacian operator. **JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.**, v. 6, n. 3, p. Article 91, 12, 2005. ISSN 1443-5756.

MCKEAN, H. P. An upper bound to the spectrum of Δ on a manifold of negative curvature. **J. Differential Geometry**, v. 4, p. 359–366, 1970. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214429509>>.

MEEKS III, W. H. The topology and geometry of embedded surfaces of constant mean curvature. **J. Differential Geom.**, v. 27, n. 3, p. 539–552, 1988. ISSN 0022-040X. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1214442008>>.

MELIÁN, J. G.; DE LIS, J. S. On the perturbation of eigenvalues for the p -Laplacian. **C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.**, v. 332, n. 10, p. 893–898, 2001. ISSN 0764-4442. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0764-4442\(01\)01956-5](https://doi.org/10.1016/S0764-4442(01)01956-5)>.

O'NEILL, B. The fundamental equations of a submersion. **Michigan Math. J.**, v. 13, p. 459–469, 1966. ISSN 0026-2285. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.mmj/1028999604>>.

ÔTANI, M. A remark on certain nonlinear elliptic equations. **Proc. Fac. Sci. Tokai Univ.**, v. 19, p. 23–28, 1984. ISSN 0563-6795.

PACARD, F.; SICBALDI, P. Extremal domains for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator. **Ann. Inst. Fourier (Grenoble)**, v. 59, n. 2, p. 515–542, 2009. ISSN 0373-0956. Disponível em: <http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_2_515_0>.

PINASCO, J. P. Lower bounds for eigenvalues of the one-dimensional p -Laplacian. **Abstr. Appl. Anal.**, n. 2, p. 147–153, 2004. ISSN 1085-3375. Disponível em: <<https://doi.org/10.1155/S108533750431002X>>.

PINO, M. D.; PACARD, F.; WEI, J. Serrin's overdetermined problem and constant mean curvature surfaces. **Duke Math. J.**, v. 164, n. 14, p. 2643–2722, 2015. ISSN 0012-7094. Disponível em: <<https://doi.org/10.1215/00127094-3146710>>.

POLIQVIN, G. Bounds on the principal frequency of the p -Laplacian. In: **Geometric and spectral analysis**. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, (Contemp. Math., v. 630). p. 349–366. Disponível em: <<https://doi.org/10.1090/conm/630/12675>>.

POLYMERAKIS, P. Spectral estimates and discreteness of spectra under Riemannian submersions. **Ann. Global Anal. Geom.**, v. 57, n. 2, p. 349–363, 2020. ISSN 0232-704X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10455-020-09703-y>>.

REICHEL, W. Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains. **Arch. Rational Mech. Anal.**, v. 137, n. 4, p. 381–394, 1997. ISSN 0003-9527. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s002050050034>>.

ROS, A.; RUIZ, D.; SICBALDI, P. A rigidity result for overdetermined elliptic problems in the plane. **Comm. Pure Appl. Math.**, v. 70, n. 7, p. 1223–1252, 2017. ISSN 0010-3640. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/cpa.21696>>.

ROS, A.; RUIZ, D.; SICBALDI, P. Solutions to overdetermined elliptic problems in nontrivial exterior domains. **J. Eur. Math. Soc. (JEMS)**, v. 22, n. 1, p. 253–281, 2020. ISSN 1435-9855. Disponível em: <<https://doi.org/10.4171/jems/921>>.

ROS, A.; SICBALDI, P. Geometry and topology of some overdetermined elliptic problems. **J. Differential Equations**, v. 255, n. 5, p. 951–977, 2013. ISSN 0022-0396. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.04.027>>.

SANHAJI, A.; DAKKAK, A. On the eigencurves of one dimensional p -Laplacian with weights for an elliptic Neumann problem. **Rend. Circ. Mat. Palermo (2)**, v. 69, n. 2, p. 353–367, 2020. ISSN 0009-725X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12215-019-00405-4>>.

SCHLENK, F.; SICBALDI, P. Bifurcating extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian. **Adv. Math.**, v. 229, n. 1, p. 602–632, 2012. ISSN 0001-8708. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.10.001>>.

SCHOEN, R.; YAU, S.-T. **Lectures on differential geometry**. [S.l.]: International Press, Cambridge, MA, 1994. v+235 p. Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, With a preface translated from the Chinese by Kaising Tso. ISBN 1-57146-012-8.

SERRIN, J. A symmetry problem in potential theory. **Arch. Rational Mech. Anal.**, v. 43, p. 304–318, 1971. ISSN 0003-9527. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF00250468>>.

SICBALDI, P. New extremal domains for the first eigenvalue of the Laplacian in flat tori. **Calc. Var. Partial Differential Equations**, v. 37, n. 3-4, p. 329–344, 2010. ISSN 0944-2669. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00526-009-0264-z>>.

SIMON, L. Introduction to geometric measure theory. **Tsinghua Lectures**, 2014.

TOLKSDORF, P. Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations. **J. Differential Equations**, v. 51, n. 1, p. 126–150, 1984. ISSN 0022-0396. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0022-0396\(84\)90105-0](https://doi.org/10.1016/0022-0396(84)90105-0)>.

TRAIZET, M. Classification of the solutions to an overdetermined elliptic problem in the plane. **Geom. Funct. Anal.**, v. 24, n. 2, p. 690–720, 2014. ISSN 1016-443X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00039-014-0268-5>>.

VALTORTA, D. Sharp estimate on the first eigenvalue of the p -Laplacian. **Nonlinear Anal.**, v. 75, n. 13, p. 4974–4994, 2012. ISSN 0362-546X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.012>>.

VÁZQUEZ, J. L. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. **Appl. Math. Optim.**, v. 12, n. 3, p. 191–202, 1984. ISSN 0095-4616. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01449041>>.

VEERAVALLI, A. R. Une remarque sur l'inégalité de McKean. **Comment. Math. Helv.**, v. 78, n. 4, p. 884–888, 2003. ISSN 0010-2571. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00014-003-0782-9>>.

WANG, K.; WEI, J. On Serrin's overdetermined problem and a conjecture of Berestycki, Caffarelli and Nirenberg. **Comm. Partial Differential Equations**, v. 44, n. 9, p. 837–858, 2019. ISSN 0360-5302. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/03605302.2019.1611846>>.