



Universidade Federal de Alagoas - UFAL
Instituto de Matemática - IM
Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia



RODRIGO FERNANDES DE MOURA MELO

**HIPERSUPERFÍCIES MÍNIMAS DE FRONTEIRA LIVRE EM ALGUNS
DOMÍNIOS EUCLIDIANOS E OUTROS TÓPICOS**

Programa de Doutorado em Matemática UFAL - UFBA
Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória

MACEIÓ
MARÇO DE 2021

Rodrigo Fernandes de Moura Melo

Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns
domínios Euclidianos e outros tópicos

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória.

Maceió
Março de 2021

Catálogo na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico

Bibliotecária: Taciana Sousa dos Santos – CRB-4 – 2062

M528h Melo, Rodrigo Fernandes de Moura.

Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns domínios euclidianos e outros tópicos / Rodrigo Fernandes de Moura Melo. – 2021. 65 f. : il., figs. e grafs. color.

Orientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitório.

Tese (Doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática, Maceió : UFAL ; Salvador : Universidade Federal da Bahia, 2021.

Bibliografia: f. 61-65.

1. Hipersuperfícies mínimas. 2. Fronteira livre. 3. Domínio euclidiano. 4. Hipersuperfícies Weingarten. I. Título.

CDU: 514.7

Folha de Aprovação

AUTOR: RODRIGO FERNANDES DE MOURA MELO

Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns domínios Euclidianos e outros tópicos

Tese de Doutorado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Universidade Federal da Bahia e aprovada em 29 de março de 2021.



Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória - UFAL (Orientador)

Banca examinadora:



Prof. Dr. Cícero Tiarlos Nogueira Cruz - UFAL (Examinador Interno)



Prof. Dr. Allan George de Carvalho de Freitas - UFPB (Examinador Externo)



Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia - UFAL (Examinador Interno)



Prof. Dr. Fernando Manfio - USP (Examinador Externo)

A Ana

Agradecimentos

Devemos reconhecer a importância que a Universidade Federal de Alagoas tem, desde a década de 1960, para o progresso do estado e do país. Agradeço imensamente a maior instituição pública de ensino superior do Estado.

Minha formação acadêmica teve início em 2004, quando iniciei a graduação no Instituto de Matemática, na UFAL. Tive o privilégio de conquistar meu título de mestre nesta universidade e a honra de me tornar professor dela. Hoje, mais um ciclo se encerra, e a UFAL, que é tão importante para mim, me concede o título de doutor.

Ao chegarmos no fim de um ciclo, devemos reconhecer as pessoas que nos ajudaram a percorrê-lo. Início então, agradecendo o atual coordenador do programa, professor Márcio Silva e aos secretários Ana Mendonça, Fátima Cavalcante e Willian Cavalcante, pela eficiência e qualidade do trabalho que desempenham. Deixo também meu respeito a todos os professores do programa.

Devo agradecer aos membros da banca examinadora, professores Tiarlos Cruz, Allan Freitas, Abraão Gouveia, Fernando Manfio e Feliciano Vitório pelo tempo que dedicaram lendo, corrigindo e melhorando esta tese através de suas sugestões. Em especial, tenho muito que agradecer ao professor Feliciano, por ter me orientado durante os quatro anos de doutorado. Apesar de a matemática sempre ser o tema de nossas conversas, o professor Feliciano me deu lições de gentileza e humildade que levarei para toda a vida.

Tive a sorte de fazer muitos amigos ao longo destes anos, todos me ajudaram em algum momento desta trajetória e sei que todos estão muito felizes com esta conquista. Agradeço aos colegas Isnaldo Barbosa, Kennerson Lima, Teófilo do Nascimento e Gregório Neto, que ingressaram comigo na turma de 2010; aos colegas Gilberto Carvalho e Ranilze da Silva, da turma de 2017; aos veteranos Moreno Bonutti, Manuel Cruz, Iury Oliveira e Anderson Silva. Deixo também meus sinceros agradecimentos às colegas Isadora de Jesus; Viviane Santos e Adina dos Santos que sempre torceram por mim.

Minha esposa, Anamália Ferreira da Silva, estava comigo quando conquistei minha graduação, meu mestrado e meu cargo de docente da UFAL. Ela também estava comigo quando não consegui finalizar o curso de doutorado na primeira vez que ingressei, em 2010. Minha esposa estava comigo quando decidi ingressar no doutorado novamente, em 2017. Ela esteve comigo em vários momentos importantes de minha vida, comemorando, me confortando e me apoiando. Ela é a pessoa a quem dedico esta tese e desejo que esteja comigo até o fim de minha vida.

Três pessoas são responsáveis por minha criação e educação: meus pais, Severino de Souza Melo e Rute Fernandes de Moura Melo e minha tia, Margarida Fernandes de Moura. Todos três tiveram uma infância muito difícil, a vida os obrigou a começar a

trabalhar muito novos e eles não tiveram as mesmas oportunidades que conseguiram me proporcionar. Minha mãe especificamente, lutou contra todas as dificuldades que a vida impôs, conseguiu se tornar professora e chegou a iniciar o curso de graduação em matemática na UFAL, na década de 1980. Contudo, ela precisou abandonar o curso por diversas razões, dentre elas, porque era necessário dedicar mais tempo ao filho recém nascido. Entendo que, quando uma geração abre mão de alguns de seus sonhos e passa a investir no sonho da geração seguinte, não há palavras para agradecer esse gesto. A mim cabe apenas reconhecer que esta conquista não é somente minha, é uma conquista da família Moura e da família Melo.

Encerro esses agradecimentos me dirigindo aos colegas doutorandos. Vocês, mais do que ninguém, conhecem as dificuldades que tive de enfrentar. Neste universo de conhecimento tão vasto que é a matemática, não é incomum duvidarmos das nossas próprias capacidades. Eu gostaria de dizer que vocês são capazes e vão superar todos os obstáculos que aparecerem. Se eu consegui superar os meus, vocês também conseguirão. Muito sucesso a todos!

Resumo

Esta tese possui dois objetivos principais. O primeiro deles é investigar a existência de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios quádracos do \mathbb{R}^n . O segundo objetivo é estudar as hipersuperfícies de Weingarten em \mathbb{R}^n com duas curvaturas principais distintas, sendo uma delas simples.

Na primeira parte da tese, obtivemos resultados de existência, não-existência e unicidade de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em diversos domínios quádracos. Um desses resultados caracteriza os discos totalmente geodésicos como as únicas hipersuperfícies mínimas, compactas e de fronteira livre nos domínios não limitados. Obtivemos um resultado de classificação para superfícies mínimas de fronteira livre na bola unitária em \mathbb{R}^3 , exigindo que uma dependência linear que sempre se verifica na fronteira da superfície, possa ser estendida a um colar sobre uma componente de bordo. Ao final desta parte, usamos algumas identidades geométricas estabelecidas durante o trabalho para obter um novo resultado de gap para mínimas de fronteira livre na bola unitária em \mathbb{R}^n e estudar a existência de mínimas de fronteira livre em gráficos rotacionais em \mathbb{R}^n .

A segunda parte da tese trata das hipersuperfícies $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ que são de Weingarten no sentido de que a combinação linear entre duas curvaturas médias de ordem superior é constante ou, mais precisamente, $aH_r + bH_s = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ com $a^2 + b^2 \neq 0$. Estudamos as hipersuperfícies de Weingarten que possuem duas curvaturas principais distintas, sendo uma delas de multiplicidade 1. Neste contexto, obtivemos dois resultados que garantem isometria entre M e o cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}(\rho)$ exigindo certas condições envolvendo a, b, r, s e alguma restrição adicional sobre uma k -ésima curvatura média.

Palavras Chave: Hipersuperfície mínima; Fronteira livre; Domínio quádraco; Hipersuperfície de Weingarten

Abstract

This thesis has two main goals. The first of them is to inquire the existence of free boundary minimal hypersurfaces in quadric domains of \mathbb{R}^n . The second objective is to study the Weingarten hypersurfaces in \mathbb{R}^n with two distinct principal curvatures, one of them being simple.

In the first part of the thesis, we have reached results concern existence, non- existence and unicity of free boundary minimal hypersurfaces in several quadric domains. One of these results characterizes the totally geodesic disks as the only free boundary compact minimal hypersurfaces in unbounded domains. We have obtained a classification result for free boundary minimal surfaces in the unit ball of \mathbb{R}^3 . We have imposed that a linear dependency that is always verified on the surface's boundary would be extended to a collar over a boundary component. In the end of this part, we have used some geometric identities obtained so far to reach a new gap result for free boundary minimal hypersurfaces in the unit ball of \mathbb{R}^n and to study the existence of free boundary minimal hypersurfaces in rotational graphs of \mathbb{R}^n .

The second part of the thesis deals with Weingarten hypersurfaces $M^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ in the way that a linear combination of two higher order mean curvatures is constant, i.e., $aH_r + bH_s = 1$, $a, b \in \mathbb{R}$ with $a^2 + b^2 \neq 0$.

We have studied Weingarten hypersurfaces with two distinct principal curvatures, one of them with multiplicity 1. In this context, we have obtained two results assuring isometry among M and the cylinder $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-2}(\rho)$ under certain conditions involving a, b, r, s and some additional restriction on a k -mean curvature.

Key Words: Minimal hypersurface; Free boundary; Quadric domain; Weingarten hypersurface.

Sumário

1	Introdução	6
1.1	Visão Geral	6
1.2	Subvariedades de fronteira livre: caracterização variacional	11
1.3	Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas	17
1.4	Visão geral do Capítulo 2	19
1.5	Visão geral do Capítulo 3	24
1.6	Visão geral do Capítulo 4	26
2	Existência, unicidade e não-existência de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios quádricos	28
2.1	Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios quádricos	32
2.2	Superfícies mínimas de fronteira livre na bola	37
3	Classificação de hipersuperfícies mínimas via identidades geométricas	41
3.1	Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em gráficos rotacionais	41
3.2	Novo resultado de gap	43
4	Hipersuperfícies de Weingarten no espaço Euclidiano com duas curvaturas principais distintas	45
4.1	O caso com curvatura H_r constante	48
4.2	O caso com curvatura $H_n \neq 0$	49
A	Considerações finais	54
A.1	Hipersuperfícies H_r -mínimas de fronteira livre na bola unitária	54
A.2	Hipersuperfícies CMC de fronteira livre na bola unitária	59
	Referências	61

Capítulo 1

Introdução

1.1 Visão Geral

Os dois principais objetos de estudo deste trabalho são as hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios do \mathbb{R}^n e as hipersuperfícies de Weingarten em \mathbb{R}^n . Com o objetivo de contextualizar os resultados desta tese e também expor os trabalhos que serviram de inspiração para ela, descrevemos aqui com mais detalhes cada um desses objetos de estudo, começando com as hipersuperfícies mínimas de fronteira livre.

A teoria das superfícies mínimas teve origem no século 18 quando Lagrange buscou caracterizar a função cujo gráfico tem a menor área, dentre todas as funções $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que coincidem na fronteira ∂U do domínio limitado $U \subset \mathbb{R}^2$.

O problema variacional de determinar a existência de uma superfície de área mínima tendo uma dada curva de Jordan como fronteira é conhecido hoje em dia como *problema de Plateau*. Este nome é devido ao físico-matemático Joseph Plateau que, no século 19, conduziu uma série de estudos e experimentos com películas de sabão.

O problema de Plateau foi completamente resolvido, de modo independente, por Douglas [20] e Radó [41] no início da década de 1930. Os trabalhos desses dois matemáticos inspiraram outros a investigarem a existência de superfície de área mínima imersa em um dado domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e cuja fronteira está contida em $\partial\Omega$. Os primeiros a estudarem este tipo de problema, chamado de *problema de fronteira livre*, foram Courant [17] e Lewy [32] nas décadas de 1940 e 1950.

Na década de 1980, bastante atenção foi empregada ao estudo de discos mínimos de fronteira livre em domínios convexos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Em 1986, Grüter e Jost [25] garantiram a existência de disco mínimo de fronteira livre, mergulhado em domínios convexos limitados:

Teorema (Grüter - Jost [25]). *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ é estritamente convexo e limitado, então existe um disco mínimo de fronteira livre Σ , mergulhado em Ω .*

Sem a hipótese de convexidade, este resultado tem similaridades com o resultado obtido em 1984 por Struwe [50], que garantiu a existência de disco mínimo de fronteira livre imerso (não necessariamente mergulhado) em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

O trabalho de Nitsche [38], de 1985, merece destaque especial por ter sido o primeiro a tratar de superfícies mínimas de fronteira livre na bola unitária $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$. Com o teorema

a seguir, ele caracterizou o disco equatorial plano como sendo o único disco mínimo de fronteira livre na bola \mathbb{B}^3 .

Teorema (Nitsche [38]). *Seja Σ uma superfície mínima de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se Σ tem o tipo topológico do disco, então Σ é um disco equatorial plano.*

Uma generalização deste resultado foi obtida em 2015 por Fraser e Schoen [23] para codimensão maior, considerando ainda um disco de dimensão 2. Uma caracterização em dimensão arbitrária do disco equatorial plano como hipersuperfície mínima de fronteira livre em \mathbb{B}^n , que independe da topologia, foi obtida por Wheeler e Wheeler [54] em 2019.

Levaria 26 anos após o trabalho de Nitsche para que o estudo das superfícies mínimas de fronteira livre na bola \mathbb{B}^3 voltasse a ser objeto de interesse. Os trabalhos de Fraser e Schoen [22], [24], na década de 2010, mostraram uma estreita relação entre as superfícies mínimas de fronteira livre na bola \mathbb{B}^n e um problema de autovalor mínimo em superfícies compactas com bordo.

Teorema (Fraser - Schoen [22]). *Uma subvariedade imersa $\phi : \Sigma^k \rightarrow \mathbb{B}^n$ é mínima e de fronteira livre se, e somente se, as funções coordenadas x_i , $i = 1, \dots, n$, restritas a Σ são autofunções de Steklov com autovalor 1.*

Diante dos trabalhos de Fraser e Schoen, foi possível fazer uma analogia entre o estudo das superfícies mínimas de fronteira livre na bola \mathbb{B}^n e o estudo das superfícies mínimas fechadas em \mathbb{S}^n (este último vinha se desenvolvendo ao longo de décadas de forma independente). Naturalmente, muitos problemas já resolvidos sobre mínimas fechadas em \mathbb{S}^n inspiraram a comunidade científica a investigar os problemas “análogos” no contexto de mínimas de fronteira livre em \mathbb{B}^n . Um exemplo dessa analogia pode ser visto nos trabalhos de Ros [43] (em 1995) e de Lima e Menezes [34] (em 2020):

Teorema (Ros [43]). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ uma superfície mínima, fechada e mergulhada. Então, qualquer esfera equatorial divide Σ em exatamente duas componentes conexas.*

Teorema (Lima - Menezes [34]). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície mínima, de fronteira livre, compacta e mergulhada. Então, qualquer plano contendo a origem divide Σ em exatamente duas superfícies conexas.*

Um outro exemplo é o resultado a seguir, obtido por Lawson [29] em 1969 e por Chern, do Carmo e Kobayashi [15] em 1970, de modo independente:

Teorema (Lawson [29] e Chern - do Carmo - Kobayashi [15]). *Seja Σ^2 uma superfície mínima fechada na esfera unitária \mathbb{S}^3 . Suponha que $|A|^2 \leq 2$. Então Σ^2 é um equador ou um toro de Clifford.*

Este trabalho vem inspirando diversos outros na última década. Destacamos abaixo o de Ambrozio e Nunes [3] (em 2016) e o de Cavalcante, Mendes e Vitória [13] (em 2019):

Teorema (Ambrozio - Nunes [3]). *Seja Σ uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq 2$, então Σ é o disco equatorial plano ou o catenóide crítico.*

Teorema (Cavalcante - Mendes - Vitório [13]). *Seja Σ^2 uma superfície mínima, compacta e de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{2+k} , onde k é qualquer inteiro positivo. Se $|A|^2 \leq 4$, então Σ^2 é o disco equatorial plano.*

Cabe mencionar aqui que, em 2020, Barbosa e Viana [6] generalizaram o resultado de Ambrozio e Nunes em codimensão arbitrária. Na literatura, resultados como estes são conhecidos como *resultados de gap*. Na Seção 1.5 apresentamos mais alguns trabalhos relacionados com este tema.

No contexto de superfícies mínimas fechadas em \mathbb{S}^3 , um importante resultado foi obtido por Brendle [9] em 2013 em resposta a uma conjectura proposta por Lawson [30] em 1970:

Teorema (Brendle [9]). *O Toro de Clifford é a única superfície mínima, mergulhada, fechada e de gênero 1 em \mathbb{S}^3 .*

Diante do sucesso de Brendle, naturalmente houve interesse em estudar o problema equivalente no contexto das superfícies mínimas de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Esse problema apareceu explicitamente pela primeira vez em 2014 no trabalho de Fraser e Li [21]:

Conjectura (Fraser - Li [21]). *A menos de congruência, o catenóide crítico é o único anel mínimo de fronteira livre propriamente mergulhado em \mathbb{B}^3 .*

Esta Conjectura ainda é um problema em aberto nos dias de hoje. Contudo, diversos resultados parciais já foram estabelecidos. Fraser e Schoen [24] conseguiram demonstrá-la adicionando a hipótese de que o primeiro autovalor de Steklov é igual a 1. Em 2018, McGrath [37] também demonstrou que o primeiro autovalor de Steklov é igual a 1 sempre que a superfície mínima de fronteira livre em \mathbb{B}^3 for simétrica com respeito aos planos coordenados.

Uma caracterização do catenóide crítico como superfície mínima de fronteira livre em \mathbb{B}^3 que é independente da topologia foi estabelecida por Kapouleas e Li [26] em 2017:

Teorema (Kapouleas - Li [26]). *As únicas superfícies mínimas, mergulhadas e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 que possuem pelo menos uma componente de bordo invariante por rotações em \mathbb{S}^2 são o disco equatorial plano e o catenóide crítico.*

Devemos destacar que existem vários resultados que tratam das hipersuperfícies de curvatura média contante e que intersectam a bola unitária em um ângulo constante (hipersuperfícies capilares). Em 2019, Wang e Xia [51] estudam as hipersuperfícies capilares na bola, considerando as formas espaciais como ambiente.

Também podemos encontrar diversos trabalhos sobre hipersuperfícies de curvatura média constante e propriamente imersas em domínios quádracos no espaço Euclidiano. Em seu trabalho de 2014, López [35] estudou a existência de superfícies CMC e de fronteira livre no wedge. Também em 2014, López e Pyo [36] investigaram as superfícies CMC e capilares no cilindro. Choe e Park [16] obtiveram, em 2011, um resultado de existência para hipersuperfícies em \mathbb{R}^n de curvatura média de ordem superior constante e que intersectam a o cilindro ortogonalmente.

Na primeira parte desta tese, investigamos a existência de hipersuperfície Σ mínima e de fronteira livre em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\partial\Omega$ é a imagem inversa $F^{-1}(1)$ de uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tendo 1 como valor regular.

No Capítulo 2 estabelecemos a seguinte identidade tipo-Green envolvendo F e uma função arbitrária $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$:

$$\int_{\partial\Sigma} |\nabla F| \varphi ds = \int_{\Sigma} \varphi \Delta_{\Sigma} F d\Sigma + \int_{\Sigma} (1 - F) \Delta_{\Sigma} \varphi d\Sigma.$$

Esta identidade, junto com mais alguns resultados auxiliares, nos permitiu estudar a existência de mínimas em domínios quádricos ilimitados na Seção 2.1. A identidade também nos possibilitou obter um resultado de existência de mínimas de fronteira livre em gráficos rotacionais em \mathbb{R}^n (Seção 3.1) e um novo resultado de gap para mínimas de fronteira livre na bola unitária $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ (3.2).

Na Seção 2.2 fizemos um estudo à parte, sobre mínimas na bola unitária $\mathbb{B}^3 \subset \mathbb{R}^3$. Nela mostramos que se existe uma dependência linear entre um vetor específico e sua imagem pela aplicação de Weingarten ao longo de uma vizinhança da fronteira, o disco equatorial plano e o catenóide crítico são as únicas superfícies mínimas de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^3 .

Como destacado no início, o outro objeto de estudo desta tese trata das hipersuperfícies de Weingarten, ou seja, as hipersuperfícies onde existe uma relação entre as curvaturas principais. Exemplos destas são as superfícies de revolução e as superfícies de curvatura constante, i.e., curvatura Gaussiana, curvatura média ou mais geralmente, curvatura H_r -média. Estas superfícies recebem este nome devido aos estudos que Weingarten [53] desenvolveu em 1861 ao investigar o problema de encontrar todas as superfícies isométricas a uma dada superfície de revolução. Para o caso de superfícies com curvatura média constante, um resultado clássico de Klotz e Osserman [27] obtido em 1966, estabelece o seguinte:

Teorema (Klotz - Osserman [27]). *Seja $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície completa de curvatura média constante. Se M não é totalmente umbílica e a curvatura Gaussiana K não muda de sinal, então M é um cilindro circular.*

O raio do cilindro no trabalho de Klotz e Osserman [27] é $\rho = (2|H|)^{-1}$. Este valor decorre da teoria das superfícies isoparamétricas, onde se mostra que a constante $1/\rho$ coincide com a curvatura principal não-nula da superfície M . Na Seção 1.3 fazemos alguns comentários sobre a teoria das hipersuperfícies isoparamétricas.

Em dimensão arbitrária, um caso particular com especial interesse é aquele no qual a hipersuperfície de Weingarten possui apenas duas curvaturas principais e uma delas se exprime em função da outra. Neste contexto, um importante resultado foi estabelecido por do Carmo e Dajczer [19] em 1983:

Teorema (do Carmo - Dajczer [19]). *Seja M uma hipersuperfície arbitrária imersa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 3$, com duas curvaturas principais λ e μ de multiplicidades $(n-1)$ e 1 , respectivamente. Suponha que $\lambda \neq 0$, $\mu = \mu(\lambda)$ e que $\lambda \neq \mu$. Então M é uma hipersuperfície de rotação.*

Aqui vale mencionar que em 2005, Kühnel e Steller [28] obtiveram diversos resultados que classificam as superfícies de Weingarten fechadas em \mathbb{R}^3 . Eles pediram que a relação entre as curvaturas principais λ e μ fosse da forma $\mu = F(\lambda)$, onde F é um polinômio de grau 2 ou de grau ímpar.

No caso em que a hipersuperfície é *Weingarten linear*, i.e., a curvatura média H e a curvatura escalar S satisfazem uma relação do tipo $aH + bS = 1$, $a^2 + b^2 \neq 0$, um resultado de classificação das hipersuperfícies de Weingarten M^n , com duas curvaturas principais, imersa nas formas espaciais, foi obtido por Shu [47] em 2010. Para o caso em que o ambiente é o \mathbb{R}^{n+1} , ele mostrou que se a curvatura seccional de M^n é não-negativa e uma das curvaturas principais é simples, M^n é isométrica ao cilindro circular $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho)$. Uma ferramenta crucial para o resultado de Shu foi a classificação das hipersuperfícies isoparamétricas, estabelecida por Segre [46] e Cartan [11].

Em 2019, Alías e Meléndez [2] apresentaram uma generalização do resultado de Klotz e Osserman [27] e que tem relação também com o resultado de Shu [47]:

Teorema (Alías - Meléndez [2]). *Sejam $n \geq 3$, $2 \leq r < n$. Seja M uma hipersuperfície completa, imersa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , com r -ésima curvatura $H_r \neq 0$ constante e duas curvaturas principais distintas, uma delas sendo simples. Se a curvatura de Gauss-Kronecker K não muda de sinal então, $K = 0$ e M é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com raio $\rho > 0$.*

Na segunda parte desta tese consideramos $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície completa, conexa, orientável, cujas curvaturas médias H_r e H_s , $2 \leq r < s \leq n$, satisfazem a combinação linear $aH_r + bH_s = 1$, onde a e b são constantes com $a^2 + b^2 \neq 0$. Nos dois principais resultados do Capítulo 4 mostramos que, sob certas restrições adicionais sobre a, b, r, s , a hipersuperfície M^n é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\rho > 0$. Vale destacar que um dos resultados (Teorema 4.1) generaliza o resultado de Alías e Meléndez [2].

1.2 Subvariedades de fronteira livre: caracterização variacional

Sejam Σ^n e Ω^{n+k} variedades Riemannianas com bordos suaves e $\varphi : \Sigma \rightarrow \Omega$ uma imersão isométrica *própria*, isto é, $\varphi(\text{int}\Sigma) \subset \text{int}\Omega$ e $\varphi(\partial\Sigma) \subset \partial\Omega$. Iremos denotar por α a segunda forma fundamental de φ .

A imersão φ é chamada de *mínima* se, para todo $p \in \Sigma$, o *vetor curvatura média*

$$H := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha(e_i, e_i)$$

é identicamente nulo para qualquer base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p\Sigma$.

Dizemos que uma imersão própria φ é *de fronteira livre* se ela é mínima e $\Sigma \perp \partial\Omega$ em $\partial\Sigma$. Para que uma imersão própria e mínima seja de fronteira livre, basta que o vetor conormal $\nu \in (T_p\partial\Sigma)^\perp \subset T_p\Sigma$, pertença ao espaço $(T_p\partial\Omega)^\perp$ para todo $p \in \partial\Sigma$.

O objetivo desta seção é caracterizar as subvariedades de fronteira livre como os pontos críticos de uma função que calcula a área de cada elemento pertencente a uma família de subvariedades próprias de Ω e que estão próximas entre si, em um sentido que passamos a descrever.

Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow \Omega$ uma imersão própria. Uma *variação de φ* é uma aplicação suave $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$ de suporte compacto, tal que, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\Phi_t := \Phi(t, \cdot) : \Sigma \rightarrow \Omega$ é imersão isométrica e $\Phi_0 = \varphi$. O *campo variacional* de Φ é definido em cada $p \in \Sigma$ por

$$V(p) := \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} \in T_p\Omega.$$

Dizemos que uma variação Φ é *admissível* se Φ_t é uma imersão própria para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Em particular, quando Φ é admissível, $V(p) \in T_p\partial\Omega$ para todo $p \in \partial\Sigma$.

Dada a variação admissível Φ , seja $d\Sigma_t$ o elemento de volume da métrica induzida por Φ_t em Σ . O *funcional área* associado a Φ é definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \mathcal{A}(t) := \int_{\Sigma} d\Sigma_t. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Em particular, $\mathcal{A}(0) = \text{área de } \Sigma$. Estamos interessados em obter a expressão de $\mathcal{A}'(0)$ em termos de elementos geométricos de Σ . Para isso, os dois lemas a seguir são fundamentais. O primeiro é um resultado clássico do cálculo diferencial e cuja demonstração é exposta aqui por completude. O segundo exprime a n -forma $d\Sigma_t$ em função da n -forma $d\Sigma$ (note que ambas estão definidas no espaço das n -formas em Σ).

Lema 1.1. *Considere um caminho suave de matrizes*

$$\begin{aligned} G : (-\varepsilon, \varepsilon) &\longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto G(t) := (g_{ij}(t)) \end{aligned}$$

tal que $G(0) = I_n$ (matriz identidade). Então,

$$\left. \frac{d}{dt} (\det G(t)) \right|_{t=0} = \text{traço}(G'(0)).$$

Demonstração. Sejam $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathbb{R}^n$ a base canônica e dx a n -forma linear que representa o elemento de volume do \mathbb{R}^n com respeito a esta base. Segue da regra da cadeia que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det G(t) &= \frac{d}{dt} dx(G(t)E_1, \dots, G(t)E_n) \\ &= dx'(G(t)E_1, \dots, G(t)E_n) \cdot G'(t) \\ &= \sum_{i=1}^n dx(G(t)E_1, \dots, G'(t)E_i, \dots, G(t)E_n). \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \det G(t) \right|_{t=0} &= \sum_{i=1}^n dx(I_n E_1, \dots, G'(0)E_i, \dots, I_n E_n) \\ &= \sum_{i=1}^n g'_{ii}(0) \\ &= \text{traço } G'(0). \end{aligned}$$

□

Para enunciarmos o próximo lema, precisamos fazer algumas construções. Fixado $p \in \Sigma$, sejam $U \subset \Sigma$ uma vizinhança de p e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal em U com respeito à métrica induzida por $\Phi_0 = \varphi$. Considere em $U_t := \Phi_t(U)$ o referencial (não necessariamente ortonormal) $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$ cujos campos são $e_i(t) := d\Phi_t e_i$, $i = 1, \dots, n$. Em particular, $e_i(0) = e_i$.

Agora, para cada t , seja $G(t) := [g_{ij}(t)]$ a matriz $n \times n$ cujas entradas são as funções suaves $g_{ij}(t) : U_t \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$g_{ij}(t) := \langle e_i(t), e_j(t) \rangle, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Note que, em particular, $G(0) = I_n$.

Lema 1.2. *Nas condições descritas acima, temos que*

$$d\Sigma_t = \sqrt{\det G(t)} d\Sigma.$$

Demonstração. Como $d\Sigma_t$ e $d\Sigma$ são n -formas em Σ , temos que

$$d\Sigma_t = f d\Sigma$$

onde f é uma função suave em Σ . Por outro lado, sabemos que $d\Sigma(e_1, \dots, e_n) = 1$. Portanto, para demonstrarmos o lema, é suficiente determinarmos f calculando $d\Sigma_t(e_1, \dots, e_n)$.

Seja $\{\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_n(t)\}$ referencial em U_t , ortonormal com respeito à métrica induzida por Ω e na mesma orientação que $\{e_1(t), \dots, e_n(t)\}$. Para cada t existe uma matriz $M(t) = [m_{ij}(t)]$ com determinante positivo e cujas entradas são funções suaves $m_{ij}(t) : U_t \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$, que satisfazem

$$e_j(t) = \sum_{k=1}^n m_{kj}(t) \bar{e}_k(t).$$

Sendo assim,

$$g_{ij}(t) = \langle e_i(t), e_j(t) \rangle = \sum_{k,l} m_{ki} m_{lj} \langle \bar{e}_k(t), \bar{e}_l(t) \rangle = \sum_k m_{ki} m_{kj}.$$

Logo, $G(t) = M^t(t) \cdot M(t)$ que por sua vez implica,

$$\det M(t) = \sqrt{\det G(t)}.$$

Sendo $d\omega_t$ o elemento de volume de U_t com respeito à métrica induzida por Ω , i.e., a n -forma linear que representa o elemento de volume de U_t com respeito a base $\{\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_n(t)\}$, obtemos

$$\begin{aligned} d\Sigma_t(e_1, \dots, e_n) &= \Phi^*(d\omega_t)(e_1, \dots, e_n) \\ &= d\omega_t(d\Phi_t e_1, \dots, d\Phi_t e_n) \\ &= d\omega_t(e_1(t), \dots, e_n(t)) \\ &= \det M(t) d\omega_t(\bar{e}_1(t), \dots, \bar{e}_n(t)) \\ &= \det M(t) \\ &= \sqrt{\det G(t)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.1. (*1ª Variação da Área*) Sejam $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$ uma variação admissível de φ com campo variacional V . Então

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} \langle H, V \rangle d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \langle V, \nu \rangle ds,$$

onde $\nu \subset \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o campo conormal em $\partial\Sigma$ apontando para fora de Σ e ds é o elemento de volume de $\partial\Sigma$ induzido por φ .

Demonstração. Derivando ambos os lados da expressão dada no lema 1.2 com relação a t e usando o lema 1.1 obtemos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} d\Sigma_t \right|_{t=0} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det G(0)}} \frac{d}{dt} (\det G(t)) \Big|_{t=0} d\Sigma \\ &= \frac{1}{2} \text{traço } G'(0) d\Sigma \\ &= \frac{1}{2} \sum_k g'_{kk}(0) d\Sigma. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Note porém que¹

$$\begin{aligned} g'_{kk}(t) &= \frac{\partial\Phi}{\partial t} \langle e_k(t), e_k(t) \rangle \\ &= 2 \left\langle \bar{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial t}} e_k(t), e_k(t) \right\rangle \\ &= 2 \left\langle \bar{\nabla}_{e_k(t)} \frac{\partial\Phi}{\partial t}, e_k(t) \right\rangle \\ &= 2 \left[e_k(t) \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial t}, e_k(t) \right\rangle - \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial t}, \bar{\nabla}_{e_k(t)} e_k(t) \right\rangle \right]. \end{aligned}$$

Assumindo que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um referencial geodésico em $p \in \Sigma$ decorre da expressão acima que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_k g'_{kk}(0) &= \sum_k [e_k \langle V, e_k \rangle - \langle V, \alpha(e_k, e_k) \rangle] \\ &= \sum_k e_k \langle V^T, e_k \rangle - \left\langle V, \sum_k \alpha(e_k, e_k) \right\rangle \\ &= \sum_k \langle \nabla_{e_k} V^T, e_k \rangle - n \langle V, H \rangle \\ &= \text{div}_\Sigma(V^T) - n \langle V, H \rangle. \end{aligned}$$

¹Podemos pensar em U como vizinhança coordenada tal que $\partial_{x_i} = e_i$. Considerando em $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma$ a métrica produto segue que $[\partial t, e_k] = 0$. Logo, como Φ_t é difeomorfismo,

$$0 = d\Phi_t [\partial t, e_k] = [d\Phi_t \partial t, d\Phi_t e_k] = \bar{\nabla}_{\frac{\partial\Phi}{\partial t}} e_k(t) - \bar{\nabla}_{e_k(t)} \frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Inserindo essa informação em (2.8) e usando o fato de Φ ter suporte compacto, decorre do teorema da divergência que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} &= \int_{\Sigma} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\Sigma_t \\
&= \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\Sigma}(V^T) d\Sigma - n \int_{\Sigma} \langle V, H \rangle d\Sigma \\
&= \int_{\partial\Sigma} \langle V^T, \nu \rangle ds - n \int_{\Sigma} \langle V, H \rangle d\Sigma \\
&= \int_{\partial\Sigma} \langle V, \nu \rangle ds - n \int_{\Sigma} \langle V, H \rangle d\Sigma.
\end{aligned}$$

□

É imediato a partir da fórmula da 1ª variação da área que

$$\left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = 0$$

para toda imersão mínima de fronteira livre φ . Dito de outro modo, toda imersão mínima de fronteira livre é ponto crítico do funcional área associado a qualquer variação admissível $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$. A proposição a seguir estabelece a recíproca deste fato.

Proposição 1.1. *Se uma imersão própria $\varphi : \Sigma \rightarrow \Omega$ é ponto crítico do funcional área associado a toda variação admissível $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$, então φ é mínima de fronteira livre.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $H(p) = 0$ para cada $p \in \Sigma \setminus \partial\Sigma$. Considere uma bola $U \subset \operatorname{int}\Sigma$ centrada em p e defina uma função suave $f : \Sigma \rightarrow [0, 1]$ suportada em U com $f(p) = 1$. Seja $\Phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \Sigma \rightarrow \Omega$ a variação dada por

$$\Phi(t, x) := \overline{\operatorname{exp}}_{\varphi(x)}(tf(x)H(x)),$$

onde $\overline{\operatorname{exp}}$ é aplicação exponencial de Ω . Segue que Φ é variação admissível com campo variacional

$$V(x) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{t=0} = (d\overline{\operatorname{exp}}_{\varphi(x)})_0(f(x)H(x)) = f(x)H(x).$$

Note que $V|_{\partial\Sigma} = 0$. Sendo φ um ponto crítico do funcional área associado a Φ , segue que

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = -n \int_{\Sigma} \langle H, V \rangle = -n \int_{\Sigma} f|H|^2.$$

Logo, $f|H|^2 = 0$ em U . Em particular $0 = f(p)|H(p)|^2 = |H(p)|^2$, donde $H(p) = 0$.

Resta mostrar que o vetor conormal ν pertence ao espaço $(T_p\partial\Omega)^\perp$ para todo $p \in \partial\Sigma$. Para isso, considere uma variação admissível Φ cujo campo variacional restrito a $\partial\Sigma$ seja $V = \nu^\tau$, componente tangencial de ν visto como um elemento de $T\Omega = T\partial\Omega \oplus (T\partial\Omega)^\perp$.

Uma vez que Σ é mínima, decorre da fórmula da primeira variação da área associada a esta variação que

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{A}(t) \right|_{t=0} = \int_{\partial\Sigma} \langle V, \nu \rangle = \int_{\partial\Sigma} \langle \nu^\tau, \nu \rangle = \int_{\partial\Sigma} |\nu^\tau|^2.$$

Logo, $\nu^\tau = 0$ em $\partial\Sigma$, donde $\nu \in (T_p \partial\Omega)^\perp$ para todo $p \in \partial\Sigma$. □

1.3 Classificação das hipersuperfícies isoparamétricas

A teoria das hipersuperfícies isoparamétricas está presente em parte substancial do Capítulo 4. Portanto, devemos comentar sobre esta teoria e explicar de que forma ela se relaciona ao que é estudado naquele capítulo.

Uma função suave $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *isoparamétrica* se satisfaz as identidades

$$|\overline{\nabla}f|^2 = F_1(f) \quad \text{e} \quad \Delta_{\mathbb{R}^3}f = F_2(f),$$

para algum par F_1, F_2 de funções reais. Note que se f é isoparamétrica, $|\overline{\nabla}f|$ e $\Delta_{\mathbb{R}^3}f$ são constantes ao longo de cada conjunto de nível de f . Somigliana [49] em 1919 foi um dos primeiros a relacionar funções isoparamétricas e superfícies de curvatura média constante:

Teorema (Somigliana [49]). *Uma função f é isoparamétrica se, e somente se, cada superfície de nível regular possui curvatura média constante.*

Neste mesmo trabalho, Somigliana obteve um resultado de classificação para as superfícies em \mathbb{R}^3 que são conjunto de nível regular de alguma função isoparamétrica.

Teorema (Somigliana [49]). *As superfícies de nível de uma função isoparamétrica são todas esferas, planos ou cilindros.*

Posteriormente, este teorema foi redescoberto por Segre [45], em 1924, e por Levi-Civita [31], em 1937. O resultado deste último diz precisamente o seguinte:

Teorema (Levi-Civita [31]). *Uma função $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é isoparamétrica se, e somente se, cada superfície de nível possui as duas curvaturas principais constantes.*

A partir deste teorema, o resultado de Somigliana segue verificando-se os três casos possíveis para as duas curvaturas principais: $k_1 = k_2 \neq 0$, $k_1 = k_2 = 0$ e $k_1 \neq k_2$.

Considerando as formas espaciais (em dimensão arbitrária) como ambiente, Cartan [10] mostrou em 1938 que uma condição necessária e suficiente para que uma dada hipersuperfície seja o nível regular de alguma função isoparamétrica é que todas as suas curvaturas principais sejam constantes. Um exemplo de ambiente onde não vale este resultado de Cartan foi dado por Wang [52] em 1982. Diante do resultado de Cartan é comum nos referirmos a uma hipersuperfície imersa em uma forma espacial, cujas curvaturas principais são constantes, por *hipersuperfície isoparamétrica*.

É importante mencionar que, em 1938, Segre [46] obteve uma generalização do resultado de classificação de Somigliana para o \mathbb{R}^n . Diante a equivalência estabelecida por Cartan, destacada no parágrafo anterior, é possível enunciar o resultado de Segre do seguinte modo:

Teorema (Segre [46]). *Seja M é uma hipersuperfície isoparamétrica em \mathbb{R}^{n+1} . Então M é isométrica a alguma das hipersuperfícies a seguir:*

- *O hiperplano \mathbb{R}^n . Neste caso, M possui apenas uma curvatura principal nula e de multiplicidade n ; ou*

- *A hiperesfera \mathbb{S}^n . Neste caso, M possui apenas uma curvatura principal não nula e de multiplicidade n ; ou*
- *O cilindro $\mathbb{R}^k \times \mathbb{S}^{n-k}(\rho)$. Neste caso, M possui apenas duas curvaturas principais: $\mu = 0$, de multiplicidade k , e $\lambda = 1/\rho$, de multiplicidade $n - k$.*

Cartan [10] obteve resultado semelhante para o espaço hiperbólico \mathbb{H}^{n+1} . Ele também classificou as hipersuperfícies isoparamétricas em \mathbb{S}^{n+1} para alguns valores específicos de n em [10], [11] e [12]. O caso geral ainda é objeto de estudo hoje em dia.

A teoria das hipersuperfícies isoparamétricas nas formas espaciais se tornou um tópico clássico da geometria diferencial, uma abordagem moderna desse tema pode ser encontrada no Capítulo 3 de Cecil e Ryan [14].

1.4 Visão geral do Capítulo 2

Sobre a Seção 2.1: Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios quádricos

Na Seção 2.1, o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é caracterizado como aquele cuja fronteira $\partial\Omega$ é a imagem inversa $F^{-1}(1)$ da função específica

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + b x_n + c, \quad a_i \in \{-1, 0, 1\}, \quad b, c \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Cada escolha dos coeficientes de F associa $\partial\Omega$ a uma hipersuperfície quádrica em \mathbb{R}^n : parabolóide circular, parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, cone, esfera, etc. Vimos que é possível obter resultados de existência, não-existência e unicidade, que se aplicam a várias dessas hipersuperfícies simultaneamente, não sendo necessário obter um resultado para cada caso particular. O primeiro teorema da seção é o seguinte:

Teorema (Teorema 2.1). *Se a função F é tal que $a_n = 0$ e $b \neq 0$, então não existe hipersuperfície mínima de fronteira livre em Ω .*

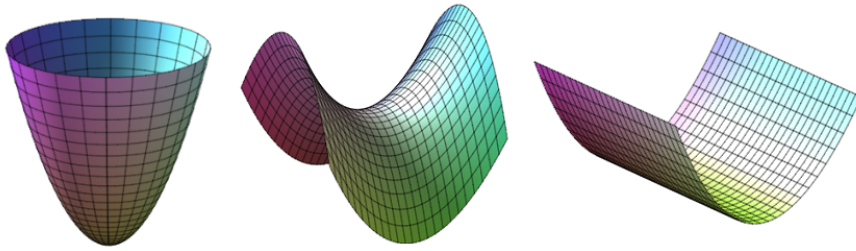


Figura 1.1: Algumas quádricas $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ para $a_3 = 0$ e $b \neq 0$

A Figura 1.1 exibe algumas das hipersuperfícies $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que são cobertas pelo Teorema 2.1. Vale observar que se tivermos $a_n \neq 0$ e $b \neq 0$, a expressão de F , após aplicada a mudança de coordenadas $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, \tilde{x}_n)$, onde $\tilde{x}_n = x_n + b/(2a_n)$, fica da seguinte forma:

$$F(x_1, x_2, \dots, \tilde{x}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i^2 + a_n \tilde{x}_n^2 + \tilde{c}, \quad \tilde{c} = c - a_n \left(\frac{b}{2a_n} \right)^2.$$

Desse modo, investigar a existência de mínimas nas quádricas $\partial\Omega = F^{-1}(1)$ com $a_n \neq 0$ e $b \neq 0$ equivale a investigar a existência com $b = 0$.

Outro resultado da Seção 2.1 é o teorema a seguir. Observe que ele fornece uma condição necessária e suficiente para que exista mínima em Ω . Em particular, ele permite descartar a existência de mínimas em uma série de quádricas, incluindo o *Slab*. Algumas das quádricas $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cobertas pelo Teorema 2.2 são exibidas na Figura 1.2.

Teorema (Teorema 2.2). *Seja F como em (1.3) com $b = 0$, $c \leq 0$ e ao menos um dos coeficientes (digamos a_n) diferente de 1. Existe uma hipersuperfície Σ mínima, compacta e de fronteira livre em Ω se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$. Além disso,*

- (a) *se $a_n = -1$ então Σ é o disco plano perpendicular ao eixo x_n na origem;*
- (b) *se $a_n = 0$ então Σ é qualquer um dos discos planos que intersectam $\partial\Omega$ ortogonalmente.*

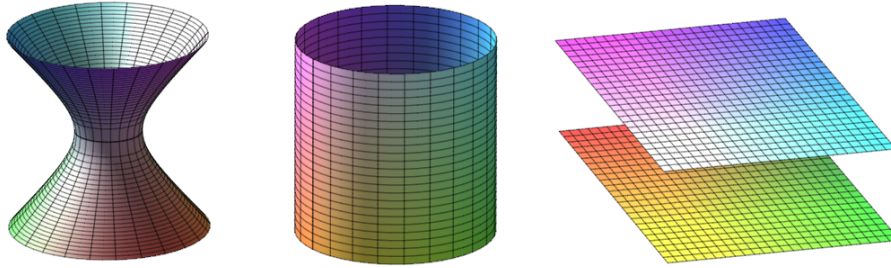


Figura 1.2: Algumas quádricas $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ para $b = 0$, $c \leq 0$ e $a_3 \neq 1$

Os dois últimos teoremas da Seção 2.1 consideram os casos em que F tem a forma

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 + a_{n-1}x_{n-1}^2 - x_n^2 + c, \quad c \geq 1, \quad (1.4)$$

com a_{n-1} sendo igual a 1 ou 0. Note que se $c = 1$, a hipersuperfície $F^{-1}(1) = \partial\Omega$ não é regular na origem (caso $a_{n-1} = 1$) ou sobre o eixo x_{n-1} (caso $a_{n-1} = 0$). Sendo assim, para que 1 seja valor regular da função F , consideramos que a origem ou os pontos do eixo x_{n-1} não pertencem ao domínio de F sempre que tivermos $c = 1$ em (1.4). Os enunciados dos teoremas vêm logo a seguir. As Figuras 1.3 e 1.4 ilustram algumas das quádricas $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cobertas por eles.

Teorema (Teorema 2.3). *Suponha que F é como em (1.4) com $a_{n-1} = 1$. Então, não existe hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em Ω .*

Teorema (Teorema 2.4). *Suponha que F é como em (1.4) com $a_{n-1} = 0$. Então, não existe hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em Ω .*

Encerramos essa seção fazendo duas observações a respeito dos casos cobertos pelos teoremas da Seção 2.1.

Observação 1.1. *Devemos chamar atenção que o caso onde as quádricas $\partial\Omega = F^{-1}(1)$ estão associadas aos coeficientes $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, $b = 0$, $0 < c < 1$, não foi abordado. A razão para isso é que estas quádricas são as mesmas associadas aos coeficientes $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, $b = 0$, $c \leq 0$, após aplicada uma operação linear de contração em \mathbb{R}^n . Como a propriedade “ Σ é mínima de fronteira livre” é preservada por esse tipo de operação linear, um resultado de existência (ou de não-existência) em um caso, vale automaticamente para o outro.*

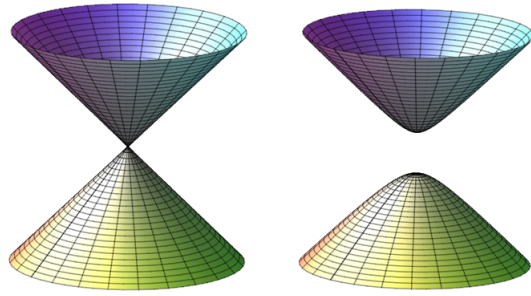


Figura 1.3: Algumas quádricas $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ para $b = 0$, $c \geq 1$, $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = -1$

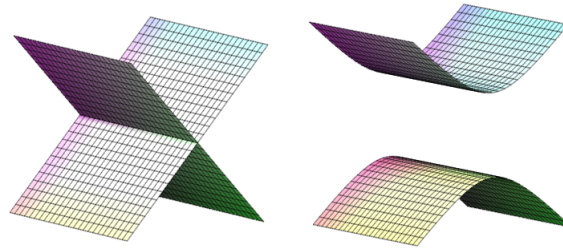


Figura 1.4: Algumas quádricas $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$ para $b = 0$, $c \geq 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ e $a_3 = -1$

Observação 1.2. *Algumas das quádricas cobertas pelos teoremas da Seção 2.1 são cobertas mais de uma vez. Por exemplo, podemos usar o Teorema 2.2 (junto com o que comentamos na observação acima) para mostrar que não existe superfície mínima, compacta e de fronteira livre no hiperboloide de duas folhas.*

Sobre a Seção 2.2: Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

O resultado estabelecido na Seção 2.2 considera o caso em que o domínio Ω é a bola unitária \mathbb{B}^3 em \mathbb{R}^3 . Em seu enunciado x^T representa a projeção do vetor posição $x \in \Sigma$ sobre $T_x\Sigma$ e Ax^T é sua imagem pelo operador de Weingarten.

Teorema (Teorema 2.5). *Seja $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ uma superfície mínima, mergulhada e de fronteira livre. Seja $\gamma \subset \partial\Sigma$ uma componente conexa de $\partial\Sigma$. Suponha que exista um colar $\Gamma \subset \Sigma$ sobre γ no qual o conjunto $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente. Então, Σ é o disco equatorial \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} .*

Note que não é imposta restrição alguma sobre a topologia da superfície nem sobre a quantidade de componentes de bordo que ela possui. Também é importante destacar que, devido a Σ ser de fronteira livre, a dependência linear entre os vetores x^T e Ax^T é assegurada nos pontos de $\partial\Sigma$, conforme assinalamos em (2.15). Desse modo, a hipótese pede que a condição de dependência linear se estenda a um colar sobre (pelo menos) uma das componentes de bordo de Σ . Esta situação é ilustrada na Figura 1.5.

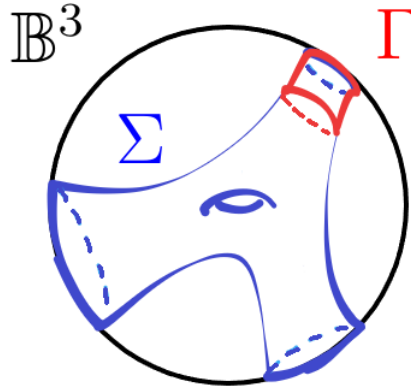


Figura 1.5: Nas hipóteses do Teorema 2.5, a dependência linear entre x^T e Ax^T é estendida a um colar Γ sobre uma componente de bordo de Σ

Para explicarmos em linhas gerais os pontos principais da demonstração do Teorema 2.5. Convém lembrarmos do

Teorema (Teorema de Unicidade de Björling [18]). *Sejam $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva de Jordan analítica real com $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in I$ e $n : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ um campo analítico real sobre γ tal que $|n| = 1$ e $\langle \gamma'(t), n(t) \rangle = 0$, $t \in I$. Então, existe uma única superfície mínima $\varphi : I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

- $\varphi(t, 0) = \gamma(t)$, $t \in I$;
- O campo normal à superfície ao longo de γ é dado por $N(t, 0) = n(t)$, $t \in I$.

Com o intuito de demonstrar o Teorema 2.5, boa parte dos resultados contidos na Seção 2.2 exploram a hipótese de dependência linear sobre o colar junto do fato de Σ ser

mínima e de fronteira livre para garantir que a componente de bordo γ é um círculo. A partir desse ponto, os argumentos seguem as mesmas ideias de Kapouleas e Li [26] que consistem em usar o Teorema de Unicidade de Björling para assegurar que Σ e \mathbb{D} (ou Σ e \mathbb{K}) são iguais ao longo de uma faixa contendo γ e, posteriormente, o Teorema de Continuidade Analítica para garantir que Σ e \mathbb{D} (ou Σ e \mathbb{K}) são iguais em toda parte.

1.5 Visão geral do Capítulo 3

Veremos no Capítulo 2 que a identidade (2.3) é fundamental para obtenção dos resultados daquele capítulo. Ela estabelece o seguinte:

$$\int_{\partial\Sigma} |\nabla F| \varphi ds = \int_{\Sigma} \varphi \Delta_{\Sigma} F d\Sigma + \int_{\Sigma} (1 - F) \Delta_{\Sigma} \varphi d\Sigma.$$

Naquele capítulo, ela é utilizada para o caso especial em que $\varphi = 1$.

Nos dois resultados contidos no Capítulo 3 utilizamos novamente a identidade (2.3) com escolhas específicas para as funções F e φ . No primeiro destes resultados, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio onde a fronteira $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície rotacional cuja curva geratriz é o gráfico de uma função real f suave e positiva. É possível caracterizar $\partial\Omega$ como a imagem inversa de uma função $F : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associada a f e aplicar a identidade (2.3) com $\varphi = 1$ para estabelecer o seguinte resultado:

Teorema (Teorema 3.1). *Suponha que Σ é uma hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em um pedaço Ω' de Ω onde $f' \geq 0$. Então Σ é um disco plano e sua fronteira $\partial\Sigma$ está contida em $f'(t) = 0$.*

Vale destacar que o Teorema 3.1 nos permite estudar a existência de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em alguns dos domínios quádricos de rotação discutidos no Capítulo 2.

Na segunda parte do Capítulo 3 obtemos o seguinte resultado de gap para hipersuperfícies mínimas de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{n+1} :

Teorema (Teorema 3.2). *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{n+1} . Se $|A|^2 \leq 2n$, então Σ é um disco equatorial totalmente geodésico \mathbb{D}^n .*

Para obtenção deste resultado, a identidade (2.3) é aplicada tomando F como a função distância e φ como a função suporte.

Observação 1.3. *É importante salientar que uma identidade semelhante a (2.3) pode ser empregada no estudo das H_r -mínimas de fronteira livre em \mathbb{B}^{n+1} . No Apêndice A.1 obtemos um resultado neste contexto.*

Resultados de gap na bola unitária, como o do Teorema 3.2, vêm surgindo com certa frequência nos últimos anos. Como comentamos no início da introdução, um importante resultado de gap para superfícies mínimas de fronteira livre na bola unitária em \mathbb{R}^3 foi obtido por Ambrozio e Nunes [3]. Após este resultado, vários outros inspirados por ele surgiram em outros contextos, tais como: dimensão arbitrária, outros espaços ambientes, superfícies de curvatura média constante, etc.

Um destes resultados foi obtido em 2018 por Li e Xiong [33] considerando o espaço ambiente M^3 como um dos seguintes: o \mathbb{R}^3 , o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 ou o hemisfério \mathbb{S}_+^3 (estes dois últimos associados a uma função potencial específica λ).

Teorema (Li - Xiong [33]). *Seja Σ uma superfície mínima compacta e de fronteira livre na bola geodésica $B \subset M^3$. Se $|A|^2 \langle x, N \rangle^2 / \lambda^2 \leq 2$ então Σ é um disco totalmente geodésico ou um anel rotacional.*

No contexto de superfícies de curvatura média constante, um resultado obtido em 2019 por Barbosa, Cavalcante e Pereira [5] estabelece o seguinte:

Teorema (Barbosa - Cavalcante - Pereira [5]). *Seja Σ uma superfície CMC compacta e de fronteira livre na bola \mathbb{B}^3 . Se*

$$|\Phi|^2 \langle x, N \rangle^2 \leq \frac{1}{2} (2 + H \langle x, N \rangle)^2,$$

onde Φ é a segunda forma fundamental sem traço, então Σ é uma calota esférica ou uma superfície de Delaunay.

Em 2020, Andrade, Barbosa e Pereira [4] obtiveram um resultado que possui ingredientes de [33] e [5] ao estudarem superfícies de curvatura média constante na bola $B \subset \mathbb{R}^3$, munida de uma métrica conforme.

1.6 Visão geral do Capítulo 4

No Capítulo 4 estudamos as hipersuperfícies $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ que são de Weingarten linear no sentido que duas curvaturas médias H_r e H_s satisfazem

$$aH_r + bH_s = 1, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad (1.5)$$

Os dois principais resultados estabelecidos naquele capítulo são:

Teorema (Teorema 4.1). *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Weingarten com $b = 0$. Suponha que M^n possui apenas duas curvaturas principais, sendo uma delas simples. Para cada $s \in \mathbb{Z}$ com $1 \leq r + s \leq n$, existe uma constante C dependendo de s tal que, se $H_{r+s} - C$ não muda de sinal, então M^n é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\rho > 0$.*

Teorema (Teorema 4.2). *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Weingarten com $a \cdot b \neq 0$. Suponha que a curvatura de Gauss-Kronecker K não muda de sinal. Então M^n é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\rho > 0$ nos seguintes casos:*

- (i) $r + s$ é par, $b > 0$ e $a > 0$ (ou $a < 0$ com $l < \hat{\lambda}$).
- (ii) r é par, s é ímpar, $b > 0$ e $a < 0$ com $l < \hat{\lambda}$.

Além disso, não existe hipersuperfície que atenda às hipóteses deste teorema se

- (iii) r é par, s é par, $b < 0$ e $a_0 < \tilde{a} < 0$.

Devemos destacar que, se no Teorema 4.1 tivermos $C = 0$ e H_{r+s} igual a curvatura de Gauss-Kronecker, reobtemos o resultado de Alías e Meléndez [2].

Uma pergunta bastante natural é:

Por que não investigar o caso em que M^n possui duas curvaturas principais e nenhuma delas é simples?

Antes de respondermos essa pergunta, observamos em primeiro lugar que se $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície de Weingarten linear com duas curvaturas principais λ e μ , de multiplicidades $(n - m)$ e m , respectivamente, a expressão 1.5 se escreve em termos dessas curvaturas da seguinte forma:

$$a \binom{n}{r}^{-1} \sum_{i=0}^r \binom{n-m}{r-i} \binom{m}{i} \lambda^{r-i} \mu^i + b \binom{n}{s}^{-1} \sum_{j=0}^s \binom{n-m}{s-j} \binom{m}{j} \lambda^{s-j} \mu^j = 1. \quad (1.6)$$

Por outro lado, foi demonstrado por Otsuki [39] em 1970 o seguinte resultado:

Teorema (Otsuki [39]). *Sejam \overline{M}^{n+1} variedade Riemanniana de curvatura constante, M^n hipersuperfície imersa em \overline{M}^{n+1} e $D_\lambda \subset TM$ a distribuição determinada pelos vetores principais associados à curvatura principal λ de M . Se a multiplicidade de todas as curvaturas principais é constante, então cada distribuição D_λ é totalmente integrável. Em particular, se a multiplicidade de uma curvatura principal λ é maior que 1 então λ é constante sobre cada subvariedade integral da distribuição D_λ .*

Deste modo, seja μ_q a subvariedade integral da distribuição associada à μ e que contem o ponto $q \in M$. Se as multiplicidades das curvaturas principais λ e μ de M são maiores que 1 então decorre da expressão 1.6 que

$$A_s \lambda^s(p) + A_{s-1} \lambda^{s-1}(p) + \dots + A_0 = 1, \quad \forall p \in \mu_q,$$

onde A_s, A_{s-1}, \dots, A_0 são constantes. Segue que $\lambda(p) = \lambda(q)$ para todo $p \in \mu_q$ pois, caso contrário, teríamos um polinômio de grau menor ou igual a s com infinitas raízes distintas, uma vez que μ_q é conexo. Como a curvatura principal λ é constante ao longo de cada uma das folhas da distribuição a ela associada, temos que λ é constante sobre toda M . De modo semelhante vemos que μ é constante em M . Concluímos da teoria das hipersuperfícies isoparamétricas que M^n é um subconjunto aberto de um hiperplano, uma hiperesfera ou um cilindro.

Diante do exposto acima (e respondendo a pergunta), o caso interessante a ser investigado para hipersuperfícies de Weingarten em \mathbb{R}^{n+1} com duas curvaturas principais é aquele no qual uma das curvaturas principais é simples.

Existem mais dois resultados importantes nos quais o Capítulo 4 se apoia. O primeiro é um resultado de estrutura topológica para variedades Riemannianas completas não compactas e de curvatura seccional não negativa. Ele foi obtido por Perelman [40] em 1994 em resposta à conjectura feita por Cheeger e Gromoll em 1972.

Teorema (Perelman [40]). *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa, conexa, não compacta, de curvatura seccional não negativa e contendo um ponto onde todas as curvaturas seccionais são estritamente positivas. Então a alma de M^n é um ponto; equivalentemente, M^n é difeomorfo ao \mathbb{R}^n .*

O segundo é um resultado geométrico sobre curvaturas principais da hipersuperfície. Ele é conhecido na literatura como o *teorema das curvaturas principais* e foi obtido por Smyth e Xavier [48] em 1987.

Teorema (Smyth - Xavier [48]). *Seja M^n uma hipersuperfície em \mathbb{R}^{n+1} completa, imersa e orientável que não é um hiperplano e seja A a sua segunda forma fundamental com respeito a um campo normal unitário globalmente definido. Denotemos por $\Lambda \subset \mathbb{R}$ o conjunto de todos os valores não nulos assumidos pelos autovalores de A e sejam $\Lambda^\pm = \Lambda \cap \mathbb{R}^\pm$.*

(i) *Se Λ^+ e Λ^- são ambos não vazios, então $\inf \Lambda^+ = \sup \Lambda^- = 0$.*

(ii) *Se Λ^+ ou Λ^- é vazio então $\bar{\Lambda}$, o fecho de Λ , é conexo.*

Capítulo 2

Existência, unicidade e não-existência de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios quádricos

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de bordo suave $\partial\Omega$ e denote por \bar{N} o campo normal unitário a $\partial\Omega$ e que aponta para fora de Ω . Considere $x : \Sigma^{n-1} \rightarrow \Omega$ uma hipersuperfície compacta, com bordo, propriamente imersa, i.e., $\text{int}\Sigma \subset \text{int}\Omega$ e $\partial\Sigma \subset \partial\Omega$. Denotando por N o campo normal unitário a Σ , sabemos que o *operador de Weingarten* associado é dado por $A = -(\bar{\nabla}N)^T$, onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de \mathbb{R}^n . Chamaremos de ν o campo conormal unitário sobre $\partial\Sigma$ em Σ e que aponta para fora de Σ . Lembramos que, neste contexto, a hipersuperfície Σ é dita de *fronteira livre* se Σ intersecta $\partial\Omega$ ortogonalmente. Em outras palavras, $\nu = \bar{N}$ sobre $\partial\Sigma$ ou, equivalentemente, $\langle N, \bar{N} \rangle = 0$ sobre $\partial\Sigma$.

Proposição 2.1. *Se Σ é hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\int_{\partial\Sigma} \langle x, \bar{N} \rangle ds = (n-1)|\Sigma|. \quad (2.1)$$

Demonstração. Identificado a imersão x com o vetor posição em \mathbb{R}^n , segue que

$$\langle \nabla|x|^2, X \rangle = X \langle x, x \rangle = 2 \langle x, X \rangle,$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$. Assim, o campo gradiente de $|x|^2$ em Σ é $\nabla|x|^2 = 2x^T$. Sendo $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ um referencial ortonormal de $T\Sigma$, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \nabla |x|^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} (2x^T), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i} (2x - 2 \langle x, N \rangle N), e_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i} (2x), e_i \rangle - 2 \langle x, N \rangle \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle \\
&= \Delta_{\mathbb{R}^n} |x|^2 - 2 \langle \bar{\nabla}_N x, N \rangle + 2 \langle x, N \rangle \operatorname{traço} A \\
&= 2n - 2|N|^2, \\
&= 2(n-1),
\end{aligned}$$

onde usamos a hipótese de Σ ser mínima para garantir que $\operatorname{traço} A = 0$. Integrando ambos os lados da igualdade acima e aplicando o Teorema da Divergência, segue que

$$\begin{aligned}
2(n-1)|\Sigma| &= \int_{\Sigma} \operatorname{div} \nabla |x|^2 d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle \nabla |x|^2, \nu \rangle ds \\
&= 2 \int_{\partial\Sigma} \langle x^T, \nu \rangle ds = 2 \int_{\partial\Sigma} \langle x, \bar{N} \rangle ds,
\end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a hipótese de Σ ser de fronteira livre. \square

Neste trabalho, estamos interessados em domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\partial\Omega$ é um nível regular de uma função suave $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Mais precisamente, 1 é valor regular de F e $\partial\Omega = F^{-1}(1)$. Nestas condições temos que os vetores \bar{N} e $\bar{\nabla} F$ são colineares sobre $\partial\Omega$. Note que nenhuma hipótese topológica é imposta sobre $\partial\Omega$, como também é não é pedido que $\partial\Omega$ seja convexa ou limitada.

É importante observarmos que a função F não é única, isto é, o bordo $\partial\Omega$ pode ser imagem inversa do valor regular 1 de diversas funções suaves. Contudo, como veremos nas demonstrações das Proposições 2.2, 2.3 e 2.4 a seguir, precisamos que

$$\bar{N} = |\nabla F|^{-1} \nabla F \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad (2.2)$$

para sermos capazes de usar o Teorema da Divergência sobre Σ . Quando $F^{-1}(1) = \partial\Omega$ possui apenas uma componente conexa, a condição (2.2) é sempre atendida, bastando trocar F por $G = 2 - F$ caso necessário (note que $\bar{\nabla} G = -\bar{\nabla} F$ e $G^{-1}(1) = F^{-1}(1)$). Caso $F^{-1}(1) = \partial\Omega$ possua mais de uma componente conexa, as identidades nas Proposições 2.2, 2.3 e 2.4 valem para aquelas hipersuperfícies Σ nas quais a condição (2.2) se verifica em cada componente de bordo de $\partial\Sigma$.

Proposição 2.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio como descrito acima e Σ uma hipersuperfície de fronteira livre em Ω . Suponha que a função F , associada à $\partial\Omega$, satisfaz a condição (2.2). Então, para toda $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$, vale*

$$\int_{\partial\Sigma} |\nabla F| \varphi ds = \int_{\Sigma} \varphi \Delta_{\Sigma} F d\Sigma + \int_{\Sigma} (1 - F) \Delta_{\Sigma} \varphi d\Sigma, \quad (2.3)$$

onde Δ_Σ é o operador de Laplace-Beltrami em Σ . Em particular, sob as mesmas hipóteses,

$$\int_{\partial\Sigma} |\nabla F| ds = \int_\Sigma \Delta_\Sigma F d\Sigma.$$

Demonstração. Uma vez que Σ é de fronteira livre e $\partial\Omega$ é um conjunto de nível de F , $\nabla F = |\nabla F|\nu$ sobre $\partial\Sigma$. Portanto, decorre do Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Sigma} \varphi |\nabla F| ds &= \int_{\partial\Sigma} \varphi \langle \nabla F, \nu \rangle ds \\ &= \int_\Sigma \operatorname{div}(\varphi \nabla F) d\Sigma \\ &= \int_\Sigma \varphi \Delta_\Sigma F d\Sigma + \int_\Sigma \langle \nabla \varphi, \nabla F \rangle d\Sigma. \end{aligned}$$

Por outro lado, o Teorema da Divergência também fornece

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \Delta_\Sigma \varphi d\Sigma &= \int_{\partial\Sigma} F \langle \nabla \varphi, \nu \rangle ds \\ &= \int_\Sigma \operatorname{div}(F \nabla \varphi) d\Sigma \\ &= \int_\Sigma F \Delta_\Sigma \varphi d\Sigma + \int_\Sigma \langle \nabla \varphi, \nabla F \rangle d\Sigma. \end{aligned}$$

A equação (2.3) agora segue tomando a diferença entre as duas identidades acima. □

O resultado a seguir fornece um critério de não-existência de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios Ω do tipo que estamos interessados.

Proposição 2.3. *Suponha que F satisfaz a condição (2.2) e que exista i tal que $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial x_i} < 0$ em $\partial\Omega$. Então, não existe hipersuperfície mínima de fronteira livre em Ω .*

Demonstração. A demonstração será por contradição. Suponha que, mesmo sob as hipóteses, exista Σ mínima de fronteira livre em Ω e considere a função $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ dada por $\varphi = \langle a, x \rangle$, onde $a \in \mathbb{R}^n$. Então,

$$\nabla \varphi = a - \langle a, N \rangle N.$$

Uma vez que $\partial\Sigma$ está contida em um conjunto de nível de F , o vetor conormal de Σ é dado por $\nu = |\nabla F|^{-1} \nabla F$. Assim, em $\partial\Sigma$ temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \langle \nabla \varphi, \nu \rangle = \langle a, \nu \rangle = |\nabla F|^{-1} \langle a, \nabla F \rangle.$$

Por outro lado, dado um referencial ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ em um ponto de Σ , temos

$$\Delta_\Sigma \varphi = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i} \nabla \varphi, e_i \rangle = - \langle a, N \rangle \sum_{i=1}^{n-1} \langle \bar{\nabla}_{e_i} N, e_i \rangle = \langle a, N \rangle \operatorname{traço} A = 0,$$

uma vez que Σ é mínima. Segue agora do Teorema da Divergência que

$$0 = \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} \varphi d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} ds = \int_{\partial\Sigma} |\nabla F|^{-1} \langle a, \nabla F \rangle ds. \quad (2.4)$$

A contradição surge ao tomarmos $a = E_i$ (i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^n) na igualdade acima e usarmos a hipótese sobre o sinal de $\frac{\partial F}{\partial x_i}$. \square

Corolário 2.1. *Suponha que exista Σ mínima de fronteira livre em Ω e assumamos que $\frac{\partial F}{\partial x_i} \geq 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial x_i} \leq 0$ em $\partial\Omega$ para algum i . Então $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$ em $\partial\Sigma$ e, conseqüentemente, Σ é totalmente geodésica: Σ é uma interseção $\Omega \cap \Pi$, onde Π é um hiperplano.*

Demonstração. Tomando $a = E_i$ em (2.4), obtemos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \text{ em } \partial\Sigma.$$

Então, uma vez que $\Delta_{\Sigma} \varphi = 0$, decorre do Princípio do Máximo que $\varphi = \langle E_i, x \rangle$ é constante em Σ . Mas isso equivale a dizer que Σ está contida em um plano. \square

Observação 2.1. *A Proposição 2.3 continuaria valendo se na hipótese tivéssemos $\frac{\partial F}{\partial v} > 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial v} < 0$ (derivada direcional) ao invés de $\frac{\partial F}{\partial x_i} > 0$ ou $\frac{\partial F}{\partial x_i} < 0$. Bastaria tomar $a = v$ ao invés de $a = E_i$ na demonstração. O mesmo pode ser dito com respeito ao Corolário 2.1.*

Encerramos essa seção com um resultado para o caso especial em que F é k -homogênea, isto é, $F(tx) = t^k F(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. É fácil checar que, neste caso, $kF(x) = \langle \bar{\nabla} F, x \rangle$. Em particular, se $x \in \partial\Omega$,

$$k \cdot 1 = \langle \bar{\nabla} F, x \rangle = |\bar{\nabla} F| \langle \bar{N}, x \rangle.$$

Multiplicando ambos os lados por $|\bar{\nabla} F|^{-1}$ e integrando em $\partial\Sigma$ podemos usar (2.1) e chegarmos ao seguinte resultado:

Proposição 2.4. *Suponha que F é k -homogênea e satisfaz a condição (2.2). Se Σ é hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, então*

$$\int_{\partial\Sigma} k |\nabla F|^{-1} ds = (n-1) |\Sigma|.$$

Observação 2.2. *Em verdade, a Proposição 2.4 continua válida mesmo quando uma constante c é adicionada a F . De fato, as funções $G = F + c$ e F possuem o mesmo campo gradiente em Σ .*

Observação 2.3. *Note que todos os resultados dessa seção, embora enunciados para hipersuperfícies, são válidos para subvariedades mínimas de fronteira livre Σ^k em $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

2.1 Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em domínios quádricos

Nesta seção estamos interessados em estudar a existência de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre Σ em um domínio Ω cujo bordo $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície quádrica. Para isso, consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\partial\Omega = F^{-1}(1)$, onde $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é a função

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + b x_n + c, \quad (2.5)$$

com $a_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, \dots, n$, e $b, c \in \mathbb{R}$. Devemos observar que a função F atende a condição (2.2) em cada um dos casos cobertos pelos teoremas desta seção.

Quando $a_n = 0$ temos $\frac{\partial F}{\partial x_n} = b$. Neste caso, se $b \neq 0$, segue da Proposição 2.3 que não existe hipersuperfície mínima de fronteira livre em Ω . Sendo assim, nosso primeiro resultado de não-existência é o seguinte:

Teorema 2.1. *Se a função F é tal que $a_n = 0$ e $b \neq 0$, então não existe hipersuperfície mínima de fronteira livre em Ω .*

O resultado acima garante, por exemplo, que não existe hipersuperfície mínima de fronteira livre no parabolóide circular, nem no parabolóide hiperbólico, nem no cilindro parabólico.

Para estudarmos mais casos que não são cobertos pelo Teorema 2.1, precisamos de alguns ingredientes associados à função F . Denotando por $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ a base canônica do \mathbb{R}^n , temos que o gradiente $\bar{\nabla}F \in T\mathbb{R}^n$ é dado por

$$\bar{\nabla}F = \sum_{i=1}^{n-1} 2a_i x_i E_i + (2a_n x_n + b) E_n$$

e, portanto,

$$|\bar{\nabla}F| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} 4a_i^2 x_i^2 + (2a_n x_n + b)^2}.$$

Lembramos que, sendo Σ de bordo livre, o campo $\bar{\nabla}F$ é tangente a Σ em $\partial\Sigma$ e, desse modo,

$$\bar{\nabla}F = \nabla F \quad \text{em} \quad \partial\Sigma. \quad (2.6)$$

Decorre do fato de $\partial\Sigma$ estar contida no conjunto de nível 1 de F e da identidade (2.6) que, em $\partial\Sigma$, vale

$$\left\langle x, \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right\rangle = \frac{\sum_{i=1}^n 2a_i x_i^2 + b x_n}{|\nabla F|} = \frac{2(F(x) - c) - b x_n}{|\nabla F|} = \frac{2(1 - c) - b x_n}{|\nabla F|}.$$

Sendo assim, a Proposição 2.1 nos dá

$$\int_{\partial\Sigma} \frac{2(1 - c) - b x_n}{|\nabla F|} ds = \int_{\partial\Sigma} \left\langle x, \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right\rangle ds = \int_{\partial\Sigma} \langle x, \bar{N} \rangle ds = (n - 1)|\Sigma|. \quad (2.7)$$

Chamando de N_1, N_2, \dots, N_n as coordenadas de N em \mathbb{R}^n , temos que o Laplaciano de F é dado por

$$\Delta_{\Sigma} F = \Delta_{\mathbb{R}^n} F - \langle \bar{\nabla}_N \bar{\nabla} F, N \rangle = \sum_{i=1}^n [2a_i - 2a_i N_i^2] = 2 \sum_{i=1}^n a_i (1 - N_i^2).$$

Logo, a Proposição 2.2 fica

$$\int_{\partial \Sigma} |\nabla F| ds = \int_{\Sigma} \Delta_{\Sigma} F d\Sigma = \int_{\Sigma} 2 \sum_{i=1}^n a_i (1 - N_i^2) d\Sigma. \quad (2.8)$$

Tomando a diferença entre (2.8) e (2.7), obtemos

$$\int_{\partial \Sigma} \frac{4 \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 x_i^2 + (2a_n x_n + b)^2 + b x_n - 2(1-c)}{|\nabla F|} ds = \int_{\Sigma} \left[2 \sum_{i=1}^n a_i (1 - N_i^2) - (n-1) \right] d\Sigma. \quad (2.9)$$

Teorema 2.2. *Seja F como em (2.5) com $b = 0$, $c \leq 0$ e ao menos um dos coeficientes (digamos a_n) é diferente de 1. Existe hipersuperfície Σ mínima, compacta e de fronteira livre em Ω se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 1$. Além disso,*

- (a) se $a_n = -1$ então Σ é o disco plano perpendicular ao eixo x_n na origem;
- (b) se $a_n = 0$ então Σ é qualquer um dos discos planos que intersectam $\partial \Omega$ ortogonalmente.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que os primeiros k coeficientes a_1, a_2, \dots, a_k são iguais a 1. Então, F pode ser escrita como

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i=k+1}^n a_i x_i^2 + c. \quad (2.10)$$

Note que, neste caso, F é uma função 2-homogênea somada a uma constante e, desse modo, atende a identidade dada na Proposição 2.4. Pondo $b = 0$, o membro esquerdo de (2.9) fica

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Sigma} \frac{4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 - 2(1-c)}{|\nabla F|} ds &= \int_{\partial \Sigma} \frac{4 [1 - c + \sum_{i=k+1}^n (-a_i x_i^2 + a_i^2 x_i^2)] - 2(1-c)}{|\nabla F|} ds \\ &= \int_{\partial \Sigma} \frac{\sum_{i=k+1}^n 4a_i (a_i - 1) x_i^2 + 2(1-c)}{|\nabla F|} ds \\ &= \int_{\partial \Sigma} \frac{\sum_{i=k+1}^n 4a_i (a_i - 1) x_i^2}{|\nabla F|} ds + (1-c)(n-1)|\Sigma|. \end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvendo o membro direito de (2.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma} \left[2 \sum_{i=1}^n a_i (1 - N_i^2) - (n-1) \right] d\Sigma &= \int_{\Sigma} \left[2 \left(\sum_{i=1}^k (1 - N_i^2) + \sum_{i=k+1}^n a_i (1 - N_i^2) \right) - (n-1) \right] d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} \left[2 \left(k-1 + \sum_{i=k+1}^n N_i^2 + \sum_{i=k+1}^n a_i (1 - N_i^2) \right) - (n-1) \right] d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} \left[2 \left(n-1 + \sum_{i=k+1}^n ((N_i^2 - 1) + a_i (1 - N_i^2)) \right) - (n-1) \right] d\Sigma \\
&= (n-1)|\Sigma| + 2 \int_{\Sigma} \sum_{i=k+1}^n (N_i^2 - 1)(1 - a_i) d\Sigma.
\end{aligned}$$

Agora, essas informações juntas em ambos os lados de (2.9) fornecem

$$\int_{\partial\Sigma} \frac{\sum_{i=k+1}^n 4a_i (a_i - 1) x_i^2}{|\nabla F|} ds = c(n-1)|\Sigma| + 2 \int_{\Sigma} \sum_{i=k+1}^n (N_i^2 - 1)(1 - a_i) d\Sigma. \quad (2.11)$$

Uma vez que $c \leq 0$, $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ e $|N| = 1$, temos

$$0 \leq \int_{\partial\Sigma} \frac{\sum_{i=k+1}^n 2a_i (a_i - 1) x_i^2}{|\nabla F|} ds \leq \int_{\Sigma} \sum_{i=k+1}^n (N_i^2 - 1)(1 - a_i) d\Sigma \leq 0, \quad (2.12)$$

o que implica que ambos os termos nas integrais são nulos. Em particular,

$$(N_i^2 - 1)(1 - a_i) = 0, \quad \forall i = k+1, k+2, \dots, n.$$

Mas a igualdade acima só é possível quando exatamente um dos a_i , $i = k+1, \dots, n$, é diferente de 1 (caso contrário temos pelo menos duas coordenadas de N iguais a 1). Mais precisamente, os somatórios que aparecem nas integrais acima possuem apenas uma parcela ou, dito de outro modo, $k = n-1$. Sem perda de generalidade podemos admitir que $a_n \neq 1$.

Finalmente, pondo $a_n = -1$ em (2.12) obtemos $x_n = 0$ sobre $\partial\Sigma$ e $N_n = 1$. Assim Σ é o disco plano perpendicular ao eixo x_n na origem. Por outro lado, se $a_n = 0$, a desigualdade (2.12) nos diz que $N_n = 1$ e Σ é qualquer um dos discos planos que intersectam o eixo x_n ortogonalmente. \square

O Teorema 2.2 assegura que dentre todos os domínios quádricos Ω cujos bordos $\partial\Omega$ são hipersuperfícies de nível 1 de F dada em (2.10), os únicos que admitem hipersuperfícies mínimas compactas e de fronteira livre são aqueles cujo bordo $\partial\Omega$ é o hiperboloide de uma folha ou o cilindro circular. O Teorema 2.2 assegura ainda que, por exemplo, não existe hipersuperfície mínima compacta e de fronteira livre no domínio Ω cujo bordo $\partial\Omega$ é $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-1-k}$, $1 \leq k \leq n-2$, ou o *slab* (i.e., $\partial\Omega = F^{-1}(1)$ com $a_i = 0$ se $i \neq n$ e $a_n = 1$ em (2.10)).

O resultado a seguir mostra que não existe hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em domínio Ω cujo bordo $\partial\Omega$ é um cone ou um hiperboloide de duas folhas. Para o caso específico do cone, i.e., para $\partial\Omega = F^{-1}(1)$ onde F é a função dada no teorema a seguir com $c = 1$, estamos considerando que o domínio de F não contém a origem para garantirmos que 1 seja valor regular da função (conforme comentamos no final da Seção 1.4).

Teorema 2.3. *Suponha que F é dada por*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_n^2 + c.$$

com $c \geq 1$. Então, não existe hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em Ω .

Demonstração. Suponha que o teorema esteja errado e seja Σ uma hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em Ω . Note que Σ não pode estar imersa em nenhum dos domínios

$$D_1 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + c - 1} \right\}$$

ou

$$D_2 = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \leq -\sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + c - 1} \right\},$$

pois, caso contrário, teríamos $\frac{\partial F}{\partial x_n} < 0$ em D_1 ou $\frac{\partial F}{\partial x_n} > 0$ em D_2 e a Proposição 2.3 aplicada a $F|_{D_i}$ nos conduziria a uma contradição. Portanto, Σ deve possuir componentes de bordo em ∂D_1 e ∂D_2 .

Uma vez que Σ é de fronteira livre, sabemos que

$$|\nabla F(x)|\nu = \nabla F(x) = 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i E_i - x_n E_n \right) = 2(x - 2x_n E_n), \quad \forall x \in \partial\Sigma,$$

onde $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^n .

Seja $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2.$$

Note que $G^{-1}(l)$, $l > 0$, é nível regular onde um campo normal unitário em $x \in G^{-1}(l)$ é

$$\mathcal{N}(x) = \frac{\nabla G}{|\nabla G|} = \frac{1}{\sqrt{l}} \sum_{i=1}^{n-1} x_i E_i = \frac{1}{\sqrt{l}} (x - x_n E_n).$$

Uma vez que Σ é compacta, existe um $l_0 > 0$ tal que $\Sigma \subset G^{-1}(l < l_0)$. Podemos decrescer $l_0 > 0$ até as hipersuperfícies $G^{-1}(l_0)$ e Σ se intersectarem pela primeira vez no ponto \tilde{x} . Segue que $G^{-1}(l_0)$ e Σ são tangentes em \tilde{x} . Em particular, $N(\tilde{x}) = \mathcal{N}(\tilde{x})$. Note que $\tilde{x} \notin \partial\Sigma$ pois, caso contrário, teríamos

$$0 = \langle N(\tilde{x}), \nabla F(\tilde{x}) \rangle = \langle \mathcal{N}(\tilde{x}), \nabla F(\tilde{x}) \rangle = \frac{2}{\sqrt{l_0}} (|\tilde{x}|^2 - \tilde{x}_n^2) = \frac{2}{\sqrt{l_0}} G(\tilde{x}) = 2\sqrt{l_0} > 0.$$

Agora, seja $\rho := G|_{\Sigma}$. Então,

$$\rho(x) = |x - \langle x, E_n \rangle E_n|^2 = |x|^2 - \langle x, E_n \rangle^2, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Um cálculo direto fornece, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} \text{Hess}_\Sigma \rho(X, Y) &= \text{Hess}_{\mathbb{R}^n} G(X, Y) + \langle AX, Y \rangle \langle \bar{\nabla} G, N \rangle \\ &= 2[\langle X, Y \rangle - \langle X, E_n \rangle \langle Y, E_n \rangle + \langle AX, Y \rangle (\langle x, N \rangle - \langle x, E_n \rangle \langle N, E_n \rangle)]. \end{aligned}$$

Uma vez que ρ atinge seu máximo em \tilde{x} , segue que

$$\begin{aligned} 0 \geq \frac{1}{2} \text{Hess}_\Sigma \rho(X, X) &= |X|^2 - \langle X, E_n \rangle^2 + \langle AX, X \rangle (\langle \tilde{x}, \mathcal{N} \rangle - \langle \tilde{x}, E_n \rangle \langle \mathcal{N}, E_n \rangle) \\ &= |X|^2 - \langle X, E_n \rangle^2 + \frac{1}{\sqrt{l_0}} \langle AX, X \rangle (|\tilde{x}|^2 - \tilde{x}_n^2). \end{aligned}$$

A desigualdade acima então fornece

$$\langle AX, X \rangle \leq -\frac{|X|^2 - \langle X, E_n \rangle^2}{|\tilde{x}|^2 - \tilde{x}_n^2} \sqrt{l_0} \leq 0, \quad \forall X \in T_{\tilde{x}}\Sigma. \quad (2.13)$$

Mas, sendo Σ mínima, a desigualdade (2.13) é possível apenas se

$$\langle AX, X \rangle = 0, \quad \forall X \in T_{\tilde{x}}\Sigma.$$

Contudo, pondo $X \in T_{\tilde{x}}\Sigma$ com $X \neq 0$ e $\langle X, E_n \rangle = 0$ em (2.13) (o que de fato é possível porque $T_{\tilde{x}}\Sigma = T_{\tilde{x}}G^{-1}(l_0)$) obtemos a contradição $\langle AX, X \rangle < 0$. \square

O último resultado dessa seção garante que não existe hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em um domínio Ω cujo bordo $\partial\Omega$ é um cilindro sobre uma hipérbole ou um *Wedge* (i.e, $F^{-1}(1) = \partial\Omega$ é a hipersuperfície $\sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 - x_n^2 = 0$). De modo semelhante ao que fizemos para o caso do cone no teorema anterior, no caso específico do *Wedge*, precisamos excluir o eixo x_{n-1} do domínio de F para assegurar que 1 é valor regular de F (veja o penúltimo parágrafo da Seção 1.4).

Teorema 2.4. *Suponha que F é dada por*

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-2} x_i^2 - x_n^2 + c.$$

com $c \geq 1$. Então, não existe hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em Ω .

Demonstração. A demonstração segue os mesmos passos da demonstração do Teorema 2.3 usando a função $G(x) = x_{n-1}^2$. \square

2.2 Superfícies mínimas de fronteira livre na bola

Nesta seção nos concentramos no caso especial em que o domínio Ω é a bola unitária \mathbb{B}^3 em \mathbb{R}^3 , centrada na origem. Considere um mergulho $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{B}^3$ de uma superfície Σ conexa, orientável, mínima e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 . Como de costume, denotamos por N campo normal unitário em Σ e por $A = -(\overline{\nabla}N)^T$ o operador de Weingarten associado, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de \mathbb{R}^3 . Também representamos por $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ as componentes conexas de $\partial\Sigma$.

Chamando de $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ a distância intrínseca sobre Σ , um ε -colar da componente $\gamma \subset \partial\Sigma$ (ou simplesmente um *colar*) é um conjunto da forma

$$\Gamma_\varepsilon = \{p \in \Sigma; \text{dist}(p, \gamma) < \varepsilon\}.$$

Identificando x com o vetor posição, é fácil ver que o campo x^T , obtido da projeção de x sobre $T\Sigma$, é ortogonal a $\partial\Sigma$, uma vez que Σ é de fronteira livre. Em particular, $x^T = x$ em $\partial\Sigma$ e, desse modo,

$$|x^T| = |x| = 1 > 0, \quad \forall x \in \gamma_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Logo, para cada $i = 1, \dots, k$, a continuidade do campo $x^T \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ garante a existência de um colar $\Gamma_i \subset \Sigma$ contendo γ_i , no qual

$$|x^T| \geq \varepsilon_i > 0 \quad \text{sobre } \Gamma_i. \quad (2.14)$$

Daqui por diante iremos assumir que todo colar em Σ contendo uma componente conexa de $\partial\Sigma$ satisfaz a condição (2.14).

Nesta seção duas funções suaves em Σ desempenham um papel fundamental. A primeira é a *função suporte*

$$\begin{aligned} g : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) := \langle x, N \rangle \end{aligned}$$

e a segunda é a *função distância*

$$\begin{aligned} \rho : \Sigma &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \rho(x) := \frac{1}{2}|x|^2. \end{aligned}$$

Note que a fronteira $\partial\Sigma$ de Σ está contida nos conjuntos de nível $g^{-1}(0)$ e $\rho^{-1}(1/2)$. Logo, os vetores ∇g e $\nabla \rho$ são linearmente dependentes sobre $\partial\Sigma$, uma vez que ambos pertencem a $T\Sigma$ e são ortogonais a $\partial\Sigma$. Vamos estabelecer os gradientes dessas funções. Em primeiro lugar note que, para todo $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla g, X \rangle &= X \langle x, N \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X x, N \rangle + \langle x, \overline{\nabla}_X N \rangle \\ &= \langle X, N \rangle + \langle x, -AX \rangle \\ &= \langle -Ax^T, X \rangle \end{aligned}$$

onde usamos o fato de $(\overline{\nabla}_X N)^\perp = 0$ pois N é unitário. Assim, o gradiente da função suporte é dado por $\nabla g = -Ax^T$. Com respeito à função distância, temos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla \rho, X \rangle &= \frac{1}{2} X \langle x, x \rangle \\ &= \langle \overline{\nabla}_X x, x \rangle \\ &= \langle X, x \rangle \\ &= \langle x^T, X \rangle.\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla \rho = x^T$. Conhecidas as expressões dos gradientes de g e ρ , podemos reformular a observação feita no início desse parágrafo nos seguintes termos:

$$\{x^T, Ax^T\} \text{ é linearmente dependente em } \partial\Sigma. \quad (2.15)$$

Para cada $p \in \Sigma$, considere o operador

$$\begin{aligned}J_p : T_p \mathbb{R}^3 &\longrightarrow T_p \Sigma \\ V &\longmapsto J(V) = N \wedge V^T\end{aligned}$$

onde \wedge representa a operação de *produto vetorial* em \mathbb{R}^3 . O lema a seguir será útil na demonstração da Proposição 2.5 a seguir. Em seu enunciado x representa tanto um ponto de Σ quanto um vetor do \mathbb{R}^3 .

Lema 2.1. *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície orientável e $\omega \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ o campo dado por $\omega(x) = J_x(x)$. Então,*

$$\langle \nabla_X \omega, X \rangle = \langle x, N \rangle \langle AX, J(X) \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Em particular, se x^T é uma direção principal do operador de Weingarten sobre um colar ao redor de uma componente conexa de $\partial\Sigma$, então

$$\langle \nabla_{x^T} \omega, x^T \rangle = 0.$$

Demonstração. Em primeiro lugar, observe que

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \omega &= \overline{\nabla}_X (x \wedge N) \\ &= \overline{\nabla}_X x \wedge N + x \wedge \overline{\nabla}_X N \\ &= X \wedge N - x \wedge AX \\ &= -J(X) - (x^T + \langle x, N \rangle N) \wedge AX \\ &= -J(X) - x^T \wedge AX - \langle x, N \rangle N \wedge AX \\ &= -J(X) - x^T \wedge AX - \langle x, N \rangle J(AX).\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $x^T \wedge AX$ é ortogonal a Σ , concluímos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \omega, X \rangle &= \langle \overline{\nabla}_X \omega, X \rangle \\ &= -\langle J(X), X \rangle - \langle x, N \rangle \langle J(AX), X \rangle \\ &= \langle x, N \rangle \langle AX, J(X) \rangle.\end{aligned}$$

□

Antes de apresentarmos o próximo resultado, cabe fazermos um comentário sobre seu enunciado. Nele, pedimos que a dependência linear destacada em (2.15) se estenda a um colar Γ sobre ao menos uma componente γ de $\partial\Sigma$. Diante do que observamos em (2.14), podemos assumir que este colar Γ é fino o suficiente de modo que $x^T \neq 0$. Nestas condições, faz sentido chamar x^T de autovetor de A sobre o colar Γ .

Proposição 2.5. *Sejam Σ uma superfície mergulhada e de fronteira livre em \mathbb{B}^3 e γ uma componente conexa de $\partial\Sigma$. Suponha que existe um colar $\Gamma \subset \Sigma$ contendo γ onde o conjunto $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente. Então, o autovalor associado a x^T é constante ao longo de γ .*

Demonstração. Seja λ o autovalor associado a x^T . Sob as hipóteses da proposição, o gradiente da função suporte $g = \langle x, N \rangle$ é

$$\nabla g = -Ax^T = -\lambda x^T \text{ sobre } \Gamma.$$

Em particular, como Σ é de fronteira livre,

$$\lambda^2 = \lambda^2 |x^T|^2 = |\nabla g|^2 \text{ sobre } \gamma \subset \partial\Sigma.$$

Uma vez que x e N são ortogonais a $\partial\Sigma$, o campo $\omega = J(x) = N \wedge x$ é tangente a $\partial\Sigma$. Sendo assim, para mostrarmos que λ é constante ao longo de $\gamma \subset \partial\Sigma$, é suficiente verificarmos que

$$\omega |\nabla g|^2 = 0 \text{ sobre } \gamma.$$

Assim, sobre γ , vale

$$\begin{aligned} \omega |\nabla g|^2 &= 2 \langle \nabla_\omega \nabla g, \nabla g \rangle \\ &= 2 \langle \text{Hess}_g \omega, \nabla g \rangle \\ &= 2 \langle \omega, \text{Hess}_g \nabla g \rangle \\ &= 2 \langle \omega, \nabla_{\nabla g} \nabla g \rangle \\ &= 2 \nabla g \langle \omega, \nabla g \rangle - 2 \langle \nabla_{\nabla g} \omega, \nabla g \rangle \\ &= 2 \nabla g \langle J(x^T), -Ax^T \rangle - 2 \langle \nabla_{-Ax^T} \omega, -Ax^T \rangle \\ &= 2 \nabla g \langle J(x^T), -Ax^T \rangle - 2\lambda^2 \langle \nabla_{x^T} \omega, x^T \rangle. \end{aligned}$$

Note que os dois termos da última igualdade são nulos, o primeiro devido aos vetores $J(x^T)$ e Ax^T serem ortogonais em Γ e o segundo devido ao caso particular assinalado no Lema 2.1. \square

Para demonstrarmos o principal resultado dessa seção (Teorema 2.5) vamos precisar extrair algumas informações do operador de Weingarten da fronteira $\partial\Sigma$, ora vista como subvariedade de Σ e ora vista como subvariedade de \mathbb{S}^2 . Seja qual for a dimensão da hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$, o esforço para realizar essa tarefa é o mesmo. Portanto, vamos assumir por um instante que $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário.

Para distinguirmos entre os operadores de Weingarten usaremos a seguinte notação: $A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^{n-1}}$ (para $\partial\Sigma^{n-2} \hookrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$); $A_{\mathbb{S}^{n-1}}^{\mathbb{R}^n}$ (para $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$) e $A_{\partial\Sigma}^\Sigma$ (para $\partial\Sigma^{n-2} \hookrightarrow \Sigma^{n-1}$).

Agora, para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma)$, vale

$$\begin{aligned}\nabla_X^{\mathbb{R}^n} Y &= \nabla_X^{\mathbb{S}^{n-1}} Y + \langle A_{\mathbb{S}^{n-1}}^{\mathbb{R}^n} X, Y \rangle \bar{N} \\ &= \nabla_X^{\partial\Sigma} Y + \langle A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^{n-1}} X, Y \rangle N - \langle X, Y \rangle \bar{N}, \\ \nabla_X^{\mathbb{R}^n} Y &= \nabla_X Y + \langle AX, Y \rangle N \\ &= \nabla_X^{\partial\Sigma} Y + \langle A_{\partial\Sigma}^{\Sigma} X, Y \rangle \nu + \langle AX, Y \rangle N,\end{aligned}$$

onde \bar{N} é o campo normal unitário sobre \mathbb{S}^{n-1} e $\nu \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ é o campo conormal unitário sobre $\partial\Sigma$. Sendo Σ de fronteira livre, temos que $\bar{N} = \nu$ sobre $\partial\Sigma$. Desse modo,

$$A = A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^{n-1}} \quad \text{sobre } \partial\Sigma.$$

Se, para cada $p \in \partial\Sigma$, $\{e_1, \dots, e_{n-2}\} \subset T_p \partial\Sigma$ é uma base ortonormal composta de autovetores de $A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^{n-1}}$ associada aos autovalores $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$, respectivamente, a matriz de A na base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-2}, x^T\} \subset T_p \Sigma$ é

$$A = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

onde λ é o autovalor associado ao autovetor x^T de A . Em particular, quando $n = 3$, a matriz de A se torna

$$A = \begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

sendo τ a curvatura geodésica de $\partial\Sigma$ vista como subvariedade de \mathbb{S}^2 . Note que a curvatura média de $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ é portanto

$$H = \frac{\tau + \lambda}{2}. \quad (2.17)$$

Teorema 2.5. *Nas mesmas hipóteses da Proposição 2.5, se Σ é mínima então Σ é o disco equatorial \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} .*

Demonstração. Mostramos na Proposição 2.5 que λ é constante sobre γ . Ora, sendo $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$ mínima, segue de (2.17) que a curvatura geodésica τ de $\gamma \subset \mathbb{S}^2$ também é constante. Portanto, γ é um círculo sobre \mathbb{S}^2 . Em particular, γ é invariante por rotações. Segue do Teorema de Kapouleas e Li [26] (cujo enunciado se encontra na Introdução) que Σ é o disco equatorial plano \mathbb{D} ou o catenóide crítico \mathbb{K} . □

Capítulo 3

Classificação de hipersuperfícies mínimas via identidades geométricas

3.1 Hipersuperfícies mínimas de fronteira livre em gráficos rotacionais

Nesta seção consideramos um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuja fronteira $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície rotacional no sentido que passamos a descrever. Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e positiva e $\alpha(t) = (f(t), t)$ uma parametrização do gráfico de f no plano x_1x_n . Seja ainda Θ uma parametrização da esfera unitária $(n-2)$ -dimensional no hiperplano $x_n = 0$. A hipersuperfície de revolução com geratriz α pode ser parametrizada por

$$X(\Theta, t) = (\Theta f(t), t).$$

Neste sentido, discutimos a existência de hipersuperfície mínima Σ e de fronteira livre em um domínio Ω cujo bordo $\partial\Omega$ é uma hipersuperfície de revolução. Denotando $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ e $y = x_n$, considere $F : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função suave definida por

$$F(x, y) = |x|^2 - f(y)^2 + 1.$$

Assim $\partial\Omega \subset F^{-1}(1)$. Além disso, como o campo gradiente de F é dado por

$$\bar{\nabla}F = (2x, -2ff'),$$

temos que 1 é valor regular de F pois, por construção, a curva α não tangencia o eixo x_n . Segue que

$$|\bar{\nabla}F| = 2\sqrt{|x|^2 + f^2(f')^2}.$$

Em particular, sendo Σ de bordo livre em Ω , temos

$$|\nabla F| \Big|_{\partial\Sigma} = 2f\sqrt{1 + (f')^2}.$$

Observamos que

$$D^2F = \begin{pmatrix} 2I_{n-1} & 0 \\ 0 & -2(f')^2 - 2ff'' \end{pmatrix},$$

onde I_{n-1} representa o operador identidade em \mathbb{R}^{n-1} . Desse modo, sendo $N = (N_1, \dots, N_n)$ o campo normal unitário a Σ , decorre da minimalidade de Σ que

$$\begin{aligned}
\Delta_\Sigma F &= \Delta_{\mathbb{R}^n} F - D^2 F(N, N) \\
&= 2(n-1) - 2(f')^2 - 2ff'' - 2[N_1^2 + \dots + N_{n-1}^2 - ((f')^2 + ff'')N_n^2] \\
&= 2(n-1) - 2\left[(f')^2 + ff'' + 1 - N_n^2 - ((f')^2 + ff'')N_n^2\right] \\
&= 2(n-1) - 2\left[(1 - N_n^2)((f')^2 + ff'') + 1 - N_n^2\right] \\
&= 2(n-1) - 2(1 - N_n^2)[(f')^2 + ff'' + 1],
\end{aligned}$$

onde usamos que $N_1^2 + \dots + N_{n-1}^2 = 1 - N_n^2$. Então, usando a Proposição 2.2, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} f\sqrt{1+(f')^2} ds &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma} |\nabla F| ds = \frac{1}{2} \int_\Sigma \Delta_\Sigma F d\Sigma \\
&= (n-1)|\Sigma| + \int_\Sigma (N_n^2 - 1)[(f')^2 + ff'' + 1] d\Sigma. \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a Proposição 2.1 e lembrando que o campo normal unitário de $\partial\Omega$ é dado por $\bar{N} = \frac{\bar{\nabla} F}{|\bar{\nabla} F|}$, temos que

$$(n-1)|\Sigma| = \int_{\partial\Sigma} \langle (x, y), \bar{N} \rangle ds = \int_{\partial\Sigma} \frac{|x|^2 - yff'}{f\sqrt{1+(f')^2}} ds = \int_{\partial\Sigma} \frac{f - yf'}{\sqrt{1+(f')^2}} ds. \quad (3.2)$$

Confrontando as equações (3.1) e (3.2), temos que

$$\int_{\partial\Sigma} \frac{f(f')^2 + yf'}{\sqrt{1+(f')^2}} ds = \int_\Sigma (N_n^2 - 1)[(f')^2 + ff'' + 1] d\Sigma. \quad (3.3)$$

Note que, se $\Sigma \subset \Omega'$ onde Ω' é um pedaço de Ω com $f' \geq 0$ e $f'' \geq 0$, então Σ é um disco plano e sua fronteira $\partial\Sigma$ está contida no subconjunto de $\partial\Omega'$ onde $f'(t) = 0$. Podemos então concluir o seguinte:

Teorema 3.1. *Suponha que Σ é uma hipersuperfície mínima, compacta e de fronteira livre em um pedaço Ω' de Ω onde $f' \geq 0$ e $f'' \geq 0$. Então Σ é um disco plano e sua fronteira $\partial\Sigma$ está em $f'(t) = 0$.*

Note que o Teorema 3.1 nos permite reobter os resultados de existência, não-existência e unicidade da Seção 2.1 para algumas das quádricas de rotação: cilindro, cone, hiperboloide de uma folha e paraboloides. Para exemplificarmos, vejamos o caso em que $\partial\Omega$ é o cone com função geratriz dada por $f(t) = at$, $a > 0$. Como $f'(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, o teorema garante que não existe mínima de fronteira livre em $\partial\Omega$.

3.2 Novo resultado de gap

Conforme expomos na introdução, são vários os resultados para mínimas de fronteira livre na bola que tiveram inspiração em resultados de gap para mínimas fechadas na esfera, como os obtidos por Lawson [29] em 1969 e por Chern, do Carmo e Kobayashi [15] em 1970.

Nesta seção, usamos a expressão obtida na Proposição 2.2 para obter um novo resultado de gap para mínimas de fronteira livre na bola. Note que o teorema a seguir generaliza o resultado de Cavalcante, Mendes e Vitório [13] para hipersuperfícies em dimensão arbitrária.

Teorema 3.2. *Seja Σ^n uma hipersuperfície mínima de fronteira livre na bola unitária \mathbb{B}^{n+1} . Se $|A|^2 \leq 2n$, então Σ é um disco equatorial totalmente geodésico \mathbb{D}^n .*

Demonstração. Primeiramente observamos que se tomarmos $F(x) = |x|^2$, a bola \mathbb{B}^{n+1} é um domínio em \mathbb{R}^{n+1} tal que $\partial\mathbb{B}^{n+1} = F^{-1}(1)$. Aplicando então a fórmula (2.3), obtemos

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi ds = n \int_{\Sigma} \varphi + \frac{1}{2} d\Sigma \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \Delta\varphi d\Sigma. \quad (3.4)$$

É sabido que a função suporte $g = \langle x, N \rangle$ satisfaz a equação

$$\Delta g + |A|^2 g = 0.$$

Lembramos também que, sendo Σ de fronteira livre em \mathbb{B}^{n+1} , $g = 0$ sobre $\partial\Sigma$. Portanto, g é autofunção associada ao autovalor 0 do *operador de Jacobi*, definido por $J := -\Delta - |A|^2$.

Afirmamos que 0 é o primeiro autovalor de J . Com efeito, se a afirmação é falsa então o primeiro autovalor é um certo $\lambda_1^J < 0$ e este está associado a uma função $g_1 \geq 0$ tal que

$$\begin{cases} Jg_1 = \lambda_1^J g_1 & \text{sobre } \Sigma, \\ g_1 = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Pondo g_1 em (3.4), temos

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_{\partial\Sigma} g_1 ds = 2n \int_{\Sigma} g_1 d\Sigma + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \Delta g_1 d\Sigma \\ &= 2n \int_{\Sigma} g_1 d\Sigma + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) (-|A|^2 g_1 d\Sigma - \lambda_1^J g_1) d\Sigma \\ &= \int_{\Sigma} [2n - |A|^2] g_1 d\Sigma + \int_{\Sigma} |x|^2 |A|^2 g_1 - \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \lambda_1^J g_1 d\Sigma. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Mas isso não pode ocorrer uma vez que $|A|^2 \leq 2n$. Portanto a afirmação é verdadeira. Em particular, $g \geq 0$.

Agora, pondo g em (3.4) obtemos

$$\begin{aligned}
0 = 2 \int_{\partial\Sigma} g ds &= 2n \int_{\Sigma} g d\Sigma + \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \Delta g d\Sigma \\
&= \int_{\Sigma} [2n - |A|^2] g d\Sigma + \int_{\Sigma} |x|^2 |A|^2 g d\Sigma.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Segue de $|A|^2 \leq 2n$ que

$$\begin{cases} [2n - |A|^2] g = 0 \\ |x|^2 |A|^2 g = 0 \end{cases} .$$

Se $g(x) \neq 0$ então

$$\begin{cases} |A|^2 = 2n \\ |x|^2 |A|^2 = 0 \end{cases} ,$$

e daí, $x = 0$. Logo $g(x) = 0$ para todo $x \in \Sigma \setminus \{0\}$. Decorre da continuidade de g que $g \equiv 0$ em Σ . Portanto, Σ é um cone mínimo, donde, por regularidade, Σ é uma hipersuperfície totalmente geodésica. \square

Capítulo 4

Hipersuperfícies de Weingarten no espaço Euclidiano com duas curvaturas principais distintas

Seja M^n uma variedade Riemanniana conexa, completa e orientável, imersa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . A orientação nos permite escolher sobre M um campo normal unitário N . O operador de Weingarten associado a N é dado por $A = -(\bar{\nabla}N)^T$, onde $\bar{\nabla}$ denota a conexão de \mathbb{R}^{n+1} . Sejam k_1, k_2, \dots, k_n os autovalores de A (chamados de *curvaturas principais*). Definimos, para cada $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, a *função simétrica elementar* S_r por

$$S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r}$$

e a r -ésima *curvatura média* de M por $H_r = S_r / \binom{n}{r}$. Note que H_1 é a curvatura média de M e que o número H_2 está relacionado à curvatura escalar de M . De modo geral, quando r é ímpar, H_r é um valor extrínseco e, portando, seu valor depende da orientação de M . Já quando r é par, H_r é intrínseco e, sendo assim, seu sinal não depende da orientação de M . Neste sentido, o seguinte resultado de não existência será útil para nossos propósitos. Ele foi obtido por Wu [55] em 2010 (parte 2 do Teorema 5.4).

Lema 4.1 (Wu [55]). *Se r é par, não existe hipersuperfície completa em \mathbb{R}^{n+1} , $n \geq 3$, de r -ésima curvatura constante negativa e duas curvaturas principais distintas.*

Para o caso especial em que M possui apenas duas curvaturas principais, digamos λ e μ , um cálculo direto fornece

$$\binom{n}{r} H_r = \sum_{i=0}^r \binom{n-m}{r-i} \binom{m}{i} \lambda^{r-i} \mu^i, \quad (4.1)$$

onde $(n-m)$ e m são as multiplicidades de λ e μ , respectivamente (acima, estamos considerando $\binom{j}{i} = 0$ se $i > j$). Em particular, quando μ é *simples* ($m = 1$), a equação (4.1) se torna

$$nH_r = \lambda^{r-1}((n-r)\lambda + r\mu). \quad (4.2)$$

Neste contexto, usaremos o seguinte resultado obtido por Alías e Meléndez [1] em 2016 (Lema 8):

Lema 4.2 (Alías - Meléndez [1]). *Seja M uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1} com duas curvaturas principais λ e μ de multiplicidades $(n-1)$ e 1 , respectivamente, tais que $\lambda(p), \mu(p) \geq \varepsilon$ para algum $p \in M$. Então, a curvatura seccional K_M em p satisfaz $K_M(\Pi_p) \geq \varepsilon^2$ para todo 2-plano $\Pi_p \subset T_p M$.*

Como destacamos na introdução, este capítulo trata das hipersuperfícies de Weingarten com duas curvaturas principais λ e μ , sendo μ de multiplicidade 1. Por hipótese, as curvaturas H_r e H_s devem satisfazer a seguinte identidade:

$$aH_r + bH_s = 1, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad 2 \leq r < s \leq n. \quad (4.3)$$

Veremos nos Teoremas 4.1 e 4.2 que impondo certas restrições adicionais sobre a, b, r, s , a hipersuperfície M é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$. O ponto de partida para a obtenção de ambos os teoremas consiste em garantir que uma das curvaturas principais se exprime em função da outra, isto é, $\mu = \mu(\lambda)$. A proposição a seguir apresenta uma condição suficiente sobre a função $\mu(\lambda)$ para que esta isometria ocorra.

Proposição 4.1. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Weingarten. Suponha que M^n possui apenas duas curvaturas principais distintas, λ e μ , sendo $\mu = \mu(\lambda)$ simples. Suponha que $\lambda(p) > l \geq 0$, $p \in M$, e que a função $\lambda \mapsto \mu(\lambda)$ satisfaz as seguintes condições:*

- μ não muda de sinal ao longo de M ;
- $\lambda = \hat{\lambda}$ é a única solução de $\mu(\lambda) = 0$;
- $\mu(\lambda)$ é decrescente em (l, ∞) ; e
- $\mu(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \rightarrow l$.

Então, M é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ com raio $\rho > 0$.

Demonstração. Seja $\lambda_0 > l$ a (única) solução de $\mu(\lambda) = \lambda$. Uma vez que μ não muda de sinal e $\mu \neq \lambda$ sobre o conjunto conexo M , existem três possibilidades:

Caso (i) $l < \lambda(p) < \lambda_0$ para todo $p \in M$, ou

Caso (ii) $\lambda_0 < \lambda(p) \leq \hat{\lambda}$ para todo $p \in M$, ou

Caso (iii) $\lambda(p) \geq \hat{\lambda}$ para todo $p \in M$.

Se o Caso (i) ocorre, segue que

$$l < \lambda(p) < \lambda_0 < \mu(p), \quad \forall p \in M.$$

Então, decorre do Lema 4.2 que todas as curvaturas seccionais de M satisfazem

$$K_M(\Pi_p) \geq \lambda(p)^2 > 0,$$

para todo $p \in M$ e todo 2-plano $\Pi_p \subset T_p M$. Se $\inf_M \lambda > 0$ segue do Teorema de Bonnet-Myers que M é compacta. Sendo assim,

$$\Lambda = [\lambda_*, \lambda^*] \cup [\mu_*, \mu^*],$$

onde

$$\lambda_* = \min_M \lambda, \quad \lambda^* = \max_M \lambda, \quad \mu_* = \min_M \mu, \quad \mu^* = \max_M \mu.$$

Portanto, $\bar{\Lambda} = \Lambda$ é disjunto com $\Lambda^- = \emptyset$ o que contradiz o resultado de Smyth e Xavier [48] (cf. visto na Seção 1.6). Neste caso devemos ter $\inf_M \lambda = 0$ e M não pode ser compacta. Decorre do resultado de Perelman [40] (cf. visto na Seção 1.6) que M é difeomorfa ao \mathbb{R}^n . Por outro lado, uma vez que $\lambda > 0$ e $\lambda \neq \mu$ por hipótese, o resultado de do Carmo e Dajczer [19] (cf. visto na Introdução) garante que M é uma hipersuperfície de rotação, i.e., M é homeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$ o que nos conduz a outra contradição. Em suma, o Caso (i) não pode ocorrer.

Se o Caso (iii) ocorre, os conjuntos

$$\Lambda^+ = \{\lambda(p)\}_{p \in M} \quad \text{e} \quad \Lambda^- = \{\mu(\lambda(p))\}_{p \in M}$$

são ambos não-vazios com $\inf \Lambda^+ \geq \hat{\lambda} > 0$, contradizendo o resultado de Smyth e Xavier [48]. Logo, o Caso (iii) não pode ocorrer também.

Finalmente, se o Caso (ii) ocorre, segue que

$$0 \leq \mu(p) < \lambda_0 < \lambda(p) \leq \hat{\lambda}, \quad \forall p \in M.$$

Afirmamos que, neste caso, deve ocorrer

$$\lambda = \text{const.} = \hat{\lambda}.$$

Suponha por um instante que exista $p_0 \in M$ com $\lambda(p_0) < \hat{\lambda}$. Então, o Lema 4.2 garante que todas as curvaturas seccionais de M em p_0 são positivas e, sendo assim, o resultado de Perelman [40] garante que M é difeomorfa ao \mathbb{R}^n . Por outro lado, uma vez que $\lambda > 0$ e $\lambda \neq \mu$, podemos repetir os argumentos do Caso (i) para concluir que M é homeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}$, produzindo assim uma contradição. Isso mostra que nossa afirmação é verdadeira.

Consequentemente, $\lambda = \text{const.} = \hat{\lambda}$ e $\mu = \text{const.} = 0$ e, sendo assim, M é uma hipersuperfície isoparamétrica imersa no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . A classificação das hipersuperfícies isoparamétricas (cf. visto na Seção 1.3) garante que M é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho)$. \square

4.1 O caso com curvatura H_r constante

Nesta seção assumimos que $b = 0$ na identidade (4.3). Isto equivale a supor que $H_r = \text{const.} \neq 0$. Como $r \geq 2$, a equação (4.2) garante que λ não se anula em M . Sendo assim, é possível exprimir μ em termos de λ como

$$\mu(\lambda) = \frac{nH_r}{r\lambda^{r-1}} - \frac{n-r}{r}\lambda.$$

O gráfico de μ é dado na Figura 4.1. Nela, as constantes

$$\hat{\lambda} = \left(\frac{nH_r}{n-r}\right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{e} \quad \lambda_0 = -\left(\frac{n(r-1)H_r}{n-r}\right)^{\frac{1}{r}}$$

são, respectivamente, a única raiz de $\mu(\lambda) = 0$ e o número onde $\mu|_{(-\infty,0)}$ atinge seu mínimo.

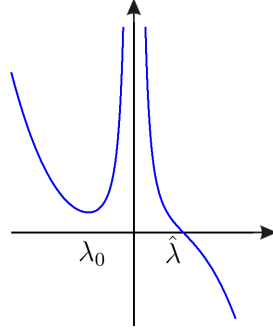


Figura 4.1: Gráfico de μ

Perceba que pondo $\hat{\lambda}$ em

$$nH_{r+s} = \lambda^{r+s-1} ((n - (r + s))\lambda + (r + s)\mu(\lambda))$$

obtemos

$$\begin{aligned} nH_{r+s}(\hat{\lambda}) &= \hat{\lambda}^{r+s-1} \left((n - (r + s))\hat{\lambda} + (r + s)\mu(\hat{\lambda}) \right) \\ &= (n - (r + s)) \hat{\lambda}^{r+s} \\ &= (n - (r + s)) \left(\frac{nH_r}{n-r} \right)^{\frac{r+s}{r}}. \end{aligned}$$

No que segue iremos denotar por C a constante

$$C = H_{r+s}(\hat{\lambda}) = \left(\frac{n - (r + s)}{n} \right) \left(\frac{nH_r}{n-r} \right)^{\frac{r+s}{r}}.$$

Teorema 4.1. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Weingarten com $b = 0$. Suponha que M^n possui apenas duas curvaturas principais, sendo uma delas simples. Para cada $s \in \mathbb{Z}$ com $1 \leq r + s \leq n$, existe uma constante C dependendo de s tal que, se $H_{r+s} - C$ não muda de sinal, então M^n é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\rho > 0$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir que $H_r > 0$ e que $\lambda > 0$ em M . Com efeito, se r é par o Lema 4.1 garante que $H_r > 0$ e, uma vez que o sinal de H_r não depende da orientação escolhida em M , podemos fixar aquela na qual $\lambda > 0$. Por outro lado, se r é ímpar o sinal de H_r depende da orientação escolhida em M e podemos escolher aquela na qual $H_r > 0$. Neste caso, afirmamos que, necessariamente, devemos ter $\lambda > 0$. Ora, se isto não é verdade, o mínimo absoluto de $\mu(\lambda)$, $\lambda < 0$, é atingido em λ_0 com

$$\min_{\lambda < 0} \mu(\lambda) = \mu(\lambda_0) > 0.$$

Daí, sendo $\lambda < 0$ em M , obtemos $\Lambda^+ \neq \emptyset \neq \Lambda^-$ com $\inf \Lambda^+ = \mu(\lambda_0) > 0$ o que contradiz o resultado de Smyth e Xavier [48]. Portanto, podemos assumir que $H_r > 0$ e que $\lambda > 0$ em M , conforme havíamos afirmado. Ora, como $H_{r+s} - C$ não muda de sinal por hipótese, os valores possíveis que $\lambda(p)$ pode assumir estão no intervalo $(0, \hat{\lambda}] \subset \mathbb{R}, \forall p \in M$, ou no intervalo $[\hat{\lambda}, \infty) \subset \mathbb{R}, \forall p \in M$. Consequentemente, $\mu(\lambda)$ não muda de sinal em M e a primeira hipótese da Proposição 4.1 está assegurada. É fácil ver que as demais hipóteses sobre μ na Proposição 4.1 também são satisfeitas (com $l = 0$). Concluimos portanto que M é isométrica a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho)$. \square

4.2 O caso com curvatura $H_n \neq 0$

Nesta seção, voltamos a assumir que a hipersuperfície de Weingarten satisfaz a identidade (4.3) em sua generalidade. Nosso objetivo é demonstrar o Teorema 4.2. Uma vez que M possui apenas duas curvaturas principais e como $r \geq 2$, temos que λ não se anula em M . Portanto, combinando as expressões (4.2) e (4.3), é possível exprimir μ em função de λ como

$$\mu(\lambda) = \frac{b(n-s)\lambda}{ar + bs\lambda^{s-r}} \left[\frac{n}{b(n-s)} \lambda^{-r} - \lambda^{s-r} - \frac{a(n-r)}{b(n-s)} \right]. \quad (4.4)$$

Fazendo $\tilde{b} = \frac{n}{b(n-s)}$ e introduzindo as funções τ e ν , dadas por

$$\tau(\lambda) = \frac{(n-s)\lambda}{\frac{a}{b}r + s\lambda^{s-r}} \quad \text{e} \quad \nu(\lambda) = \frac{1}{\lambda^r}(\tilde{b} - \lambda^s), \quad (4.5)$$

podemos fazer $\tilde{a} = \frac{a(n-r)}{b(n-s)}$ e reescrever (4.4) como

$$\mu(\lambda) = \tau(\lambda) [\nu(\lambda) - \tilde{a}].$$

Essencialmente, o que precisamos fazer para demonstrar o Teorema 4.2 é estudar o comportamento da função μ em cada um dos casos listados nele. Faremos isso de modo sistemático, analisando primeiro as funções τ e $[\nu - \tilde{a}]$ para em seguida analisar a função μ (que é o produto dessas funções).

Em todos os itens descritos no Teorema 4.2, é imediato perceber que a única solução de $\tau(\lambda) = 0$ é $\lambda = 0$. Também é possível verificar que número possível de assíntotas verticais de τ é zero, um ou dois. O lema a seguir resume os possíveis comportamentos da função τ . A Figura 4.2 ilustra cada situação apresentada nele.

Lema 4.3. *Sejam*

$$l = \left(\frac{-ar}{bs} \right)^{\frac{1}{s-r}} \quad e \quad L_{\pm} = \{(\pm l, t) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}.$$

Então, a função τ possui os seguintes aspectos para cada um dos casos a seguir:

- (i) Para $r+s$ par e $a \cdot b > 0$: $\tau|_{(-\infty, 0)} < 0$, $\tau|_{(0, \infty)} > 0$ e τ não possui assíntota vertical.
- (ii) Para $r+s$ par, $a < 0$ e $b > 0$: $\tau|_{(-\infty, -l) \cup (0, l)} < 0$, $\tau|_{(-l, 0) \cup (l, \infty)} > 0$ e L_{\pm} são as duas assíntotas verticais de τ .
- (iii) Para r par, s ímpar, $a < 0$ e $b > 0$: $\tau|_{(-\infty, 0) \cup (l, \infty)} > 0$, $\tau|_{(0, l)} < 0$ e L_+ é a única assíntota vertical de τ .

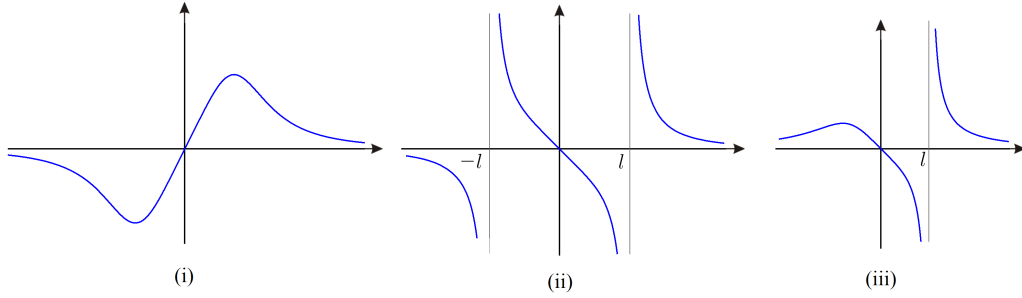


Figura 4.2: Comportamento de τ em cada um dos casos do Lema 4.3

No que diz respeito à função ν , é imediato que $\{(0, t) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\}$ é sua única assíntota vertical e que o número de raízes de $\nu(\lambda) = 0$ é zero, um ou dois. Descrevemos os possíveis comportamentos da função ν no lema a seguir. A Figura 4.3 ilustra cada situação apresentada nele.

Lema 4.4. *Sejam*

$$\tilde{\lambda} = (\tilde{b})^{\frac{1}{s}} \quad e \quad a_0 = \nu \left(\left(\frac{-r\tilde{b}}{s-r} \right)^{\frac{1}{s}} \right).$$

Então, a função ν possui os seguintes aspectos para cada um dos casos a seguir:

- (i) Para r par, s par, $b > 0$: $\nu|_{(0, \infty)}$ é decrescente, $\nu(-\lambda) = \nu(\lambda)$ e $\lambda = \pm \tilde{\lambda}$ são as raízes de ν .
- (ii) Para r par, s par, $b < 0$: $\nu|_{(0, \infty)} < 0$ com máximo a_0 e $\nu(-\lambda) = \nu(\lambda)$.
- (iii) Para r par, s ímpar, $b > 0$: $\nu|_{(0, \infty)}$ é decrescente, $\nu|_{(-\infty, 0)} > 0$ com mínimo a_0 e $\lambda = \tilde{\lambda}$ é a única raiz de ν .
- (iv) Para r ímpar, s ímpar, $b > 0$: $\nu|_{(0, \infty)}$ é decrescente, $\nu|_{(-\infty, 0)} < 0$ com máximo a_0 e $\lambda = \tilde{\lambda}$ é a única raiz de ν .

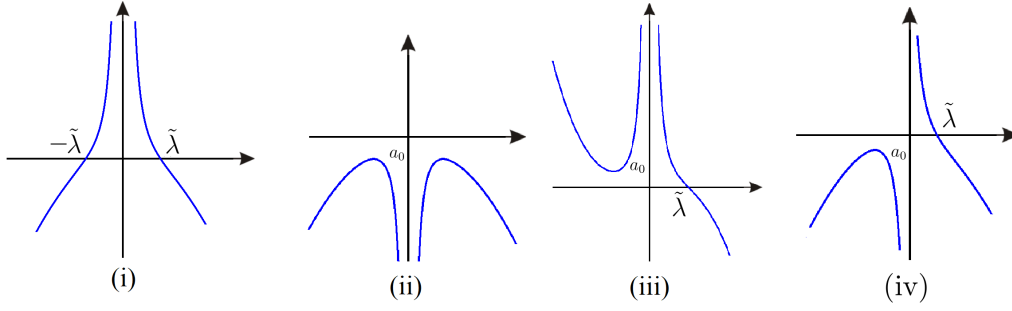


Figura 4.3: Gráfico de ν em cada um dos casos do Lema 4.4

Devemos destacar que sendo $[\nu - \tilde{a}]$ uma translação de ν , ambas as funções possuem os mesmos aspectos descritos no Lema 4.4 se impusermos algumas restrições sobre a constante \tilde{a} . Mais precisamente, vale o seguinte

Lema 4.5. *Seja $\hat{\lambda}$ a raiz positiva de $\nu(\lambda) - \tilde{a} = 0$. Então, ν e $[\nu - \tilde{a}]$ possuem os mesmos aspectos em cada um dos casos descritos no Lema 4.4 (trocando λ por $\hat{\lambda}$) se impusermos as seguintes restrições sobre \tilde{a} :*

- (i) Sem restrições.
- (ii) $\tilde{a} > a_0$.
- (iii) $\tilde{a} < a_0$.
- (iv) $\tilde{a} > a_0$.

Juntos, os Lemas 4.3 e 4.5 nos permitem esboçar o gráfico de μ realizando o produto entre τ e $[\nu - \tilde{a}]$. Os cinco gráficos obtidos desse produto estão esboçados nas Figuras 4.4 e 4.5. Elas são especialmente úteis para acompanhar a demonstração do Teorema 4.2.

Teorema 4.2. *Seja $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície de Weingarten com $a \cdot b \neq 0$. Suponha que a curvatura de Gauss-Kronecker K não muda de sinal. Então M^n é isométrica ao cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^{n-1}(\rho) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\rho > 0$ nos seguintes casos:*

- (i) $r + s$ é par com $b > 0$ e $a > 0$ ou $b > 0$, $a < 0$ e $l < \hat{\lambda}$.
- (ii) r é par, s é ímpar, $b > 0$ e $a < 0$ com $l < \hat{\lambda}$.

Além disso, não existe hipersuperfície que atenda às hipóteses deste teorema se

- (iii) r é par, s é par, $b < 0$ e $a_0 < \tilde{a} < 0$.

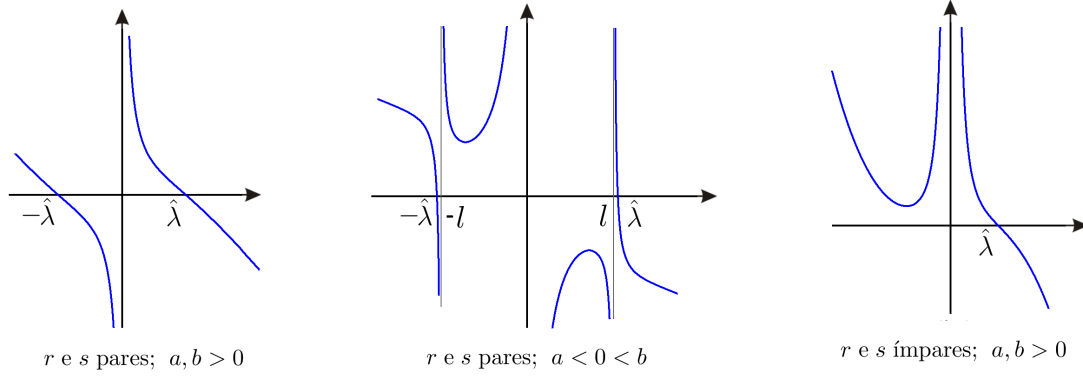


Figura 4.4: Gráficos de μ em cada uma das situações descritas na demonstração do Teorema 4.2, Caso (i).

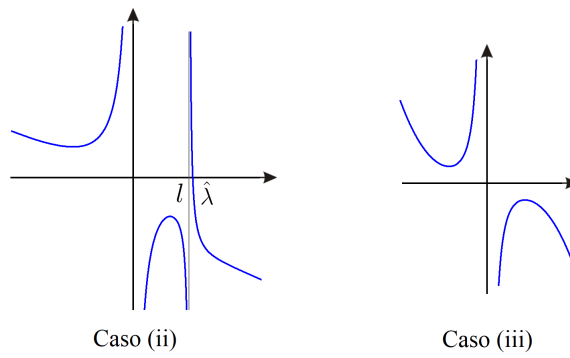


Figura 4.5: Gráficos de μ para os Casos (ii) e (iii) do Teorema 4.2

Demonstração. Caso (i) Suponha primeiro que r e s são ambos pares. Sendo assim, H_r e H_s não dependem da orientação escolhida para M e podemos fixar aquela na qual $\lambda > 0$. Logo, uma vez a curvatura de Gauss-Kronecker não muda de sinal, o mesmo ocorre com a função μ . Daí, temos o seguinte:

Se $b > 0$ e $a > 0$ o resultado é imediato pela Proposição 4.1.

Se $b > 0$, $a < 0$ com $l < \hat{\lambda}$, existem duas possibilidades para $\lambda(p)$. A primeira é $0 < \lambda < l$ em M , o que nos dá um absurdo porque teríamos $\Lambda^- \neq \emptyset \neq \Lambda^+$ com $\sup \Lambda^- < 0$ contradizendo o resultado de Smyth e Xavier [48]. A segunda possibilidade é $\lambda > l$ em M , o que nos leva ao resultado de acordo com a Proposição 4.1.

Suponha agora que r e s são ambos ímpares, $b > 0$ e $a > 0$. Existem duas possibilidades. Na primeira possibilidade temos $\lambda < 0$ em M , o que nos dá um absurdo porque teríamos $\Lambda^- \neq \emptyset \neq \Lambda^+$ com $\inf \Lambda^+ > 0$, contradizendo o resultado de Smyth e Xavier [48]. Na segunda possibilidade temos $\lambda > 0$ em M o que nos leva ao resultado via Proposição 4.1.

Caso (ii) Existem três possibilidades para λ . A primeira é $\lambda < 0$ em M que nos

dá $\Lambda^- \neq \emptyset \neq \Lambda^+$ com $\inf \Lambda^+ > 0$, contradizendo o resultado de Smyth e Xavier [48]. A segunda é $0 < \lambda < l$ em M que nos dá $\Lambda^- \neq \emptyset \neq \Lambda^+$ com $\sup \Lambda^- < 0$ e outra contradição. A última possibilidade é $\lambda > l$ em M que nos leva ao resultado via Proposição 4.1.

Caso (iii) Existem duas possibilidades para λ . A primeira é $\lambda < 0$ em M , o que nos dá $\Lambda^- \neq \emptyset \neq \Lambda^+$ com $\inf \Lambda^+ > 0$. A segunda é $\lambda > 0$, o que implica $\Lambda^- \neq \emptyset \neq \Lambda^+$ com $\sup \Lambda^- < 0$. Ambas as possibilidades nos levam a uma contradição com o resultado de Smyth e Xavier [48]. Concluimos assim que, neste caso, não existe hipersuperfície satisfazendo as hipóteses do teorema. \square

Apêndice A

Considerações finais

A.1 Hipersuperfícies H_r -mínimas de fronteira livre na bola unitária

Uma identidade semelhante a da Proposição 2.2 pode ser empregada para obtenção de um resultado de gap para as hipersuperfícies H_r -mínimas de fronteira livre em \mathbb{B}^{n+1} . Passamos a descrever como isso pode ser feito.

Seja \mathbb{B}^{n+1} a bola unitária centrada na origem em \mathbb{R}^{n+1} . Considere $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ uma imersão de fronteira livre onde Σ é uma hipersuperfície Riemanniana conexa e orientável. Como de costume, iremos denotar por N o campo normal unitário sobre Σ , por $A = -(\overline{\nabla}N)^T$ o operador de Weingarten e por ν o campo conormal unitário sobre $\partial\Sigma$. Identificando a imersão x com o vetor posição, lembramos que Σ de bordo livre equivale a $x^T = x = \nu$ sobre $\partial\Sigma$.

Denotando por k_1, k_2, \dots, k_n os autovalores de A , definimos para cada $r \in \{1, 2, \dots, n\}$, a *função simétrica elementar* S_r do seguinte modo:

$$S_r = \sum_{i_1 < \dots < i_r} k_{i_1} \cdots k_{i_r}.$$

Então, a r -ésima *curvatura* de x (ou simplesmente *curvatura* H_r) é definida como a razão entre S_r e o seu número de parcelas no somatório, isto é $H_r = S_r / \binom{n}{r}$.

Para cada $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ considere a r -ésima *transformação de Newton* $P_r : T\Sigma \rightarrow T\Sigma$ definida recursivamente por

$$P_0 = I \quad \text{e} \quad P_r = S_r I - A P_{r-1}, \quad (\text{A.1})$$

onde I é o operador identidade.

Seja $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um referencial ortonormal composto de autovetores de A associado aos autovalores k_1, k_2, \dots, k_n . Seja ainda $S_r(A_i)$ a r -ésima função simétrica associada à $A_i := A|_{e_i^\perp}$. O lema a seguir se encontra no artigo de Barbosa e Colares [7] de 1997.

Lema A.1. *Para cada $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$:*

- (a) $P_r(e_i) = S_r(A_i)e_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$;

$$(b) \operatorname{traço}(P_r) = \sum_{i=1}^n S_r(A_i) = (n-r)S_r;$$

$$(c) \operatorname{traço}(AP_r) = \sum_{i=1}^n k_i S_r(A_i) = (r+1)S_{r+1}.$$

Seja $\Phi : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow \mathfrak{X}(\Sigma)$ um *endomorfismo auto-adjunto* isto é,

$$\langle \Phi X, Y \rangle = \langle X, \Phi Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

É fácil ver que para qualquer $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$ vale

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \langle \Phi x^T, \nu \rangle = \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\varphi \Phi x^T) = \int_{\Sigma} \varphi \operatorname{div}(\Phi x^T) + \int_{\Sigma} \langle \Phi x^T, \nabla \varphi \rangle. \quad (\text{A.2})$$

Queremos expressar a segunda integral do lado direito de A.2 em termos envolvendo a divergência do campo $\Phi \nabla \varphi$. Para isso, lembre que o campo gradiente da função distância $\rho(x) = |x|^2/2$ é $\nabla \rho = x^T$ e note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\Phi \nabla \varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma} \langle \Phi \nabla \varphi, \nu \rangle \\ &= \int_{\partial\Sigma} \rho \langle \Phi \nabla \varphi, \nu \rangle \\ &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}(\rho \Phi \nabla \varphi) \\ &= \int_{\Sigma} \rho \operatorname{div}(\Phi \nabla \varphi) + \int_{\Sigma} \langle \nabla \rho, \Phi \nabla \varphi \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Sigma} |x|^2 \operatorname{div}(\Phi \nabla \varphi) + \int_{\Sigma} \langle \Phi x^T, \nabla \varphi \rangle, \end{aligned}$$

onde na última parcela usamos o fato de Φ ser auto-adjunto. Voltando agora para (A.2), segue da expressão acima que

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \langle \Phi \nu, \nu \rangle = \int_{\Sigma} \varphi \operatorname{div}(\Phi x^T) + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) \operatorname{div}(\Phi \nabla \varphi).$$

Em particular, quando Φ é o operador auto-adjunto P_r (conforme vimos no Lema A.1), a igualdade acima se torna

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi \langle P_r \nu, \nu \rangle = \int_{\Sigma} \varphi L_r \rho + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) L_r \varphi, \quad (\text{A.3})$$

onde L_r é o operador

$$\begin{aligned} L_r : C^\infty(\Sigma) &\longrightarrow C^\infty(\Sigma) \\ \varphi &\longmapsto L_r \varphi := \operatorname{div}(P_r \nabla \varphi). \end{aligned}$$

Para que possamos demonstrar o principal resultado desta seção (Teorema A.1) é fundamental calcularmos as expressões de $L_r \varphi$ para os dois casos particulares em que φ é a função distância $\rho = |x|^2/2$ e a função suporte $g = \langle x, N \rangle$. Realizaremos essa tarefa utilizando alguns objetos auxiliares que passamos a descrever.

Considere o referencial ortonormal $\{U_1(x), \dots, U_{n+1}(x)\} \subset T_x \mathbb{R}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{n+1}$ obtido do transporte paralelo da base canônica $\{E_1, \dots, E_{n+1}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. As coordenadas dos campos normal N e posição x são dadas em termos deste referencial por

$$f_i := \langle N, U_i \rangle \quad \text{e} \quad g_i := \langle x, U_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (\text{A.4})$$

Sendo assim, as funções ρ e g podem ser expressas em termos dessas funções como

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} g_i^2 \quad \text{e} \quad g = \sum_{i=1}^{n+1} f_i g_i. \quad (\text{A.5})$$

Uma vez que os campos U_1, \dots, U_{n+1} são paralelos, segue que

$$\langle \nabla f_i, X \rangle = X(f_i) = \langle \bar{\nabla}_X N, U_i \rangle = \langle -AX, U_i \rangle = \langle X, -AU_i^T \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma),$$

onde U_i^T é a componente tangencial de U_i sobre $T\Sigma$. De modo semelhante,

$$\langle \nabla^M g_i, X \rangle = X(g_i) = \langle \bar{D}_X x, U_i \rangle = \langle X, U_i \rangle, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Concluimos portanto que

$$\nabla f_i = -AU_i^T \quad \text{e} \quad \nabla g_i = U_i^T. \quad (\text{A.6})$$

Antes de apresentarmos o próximo resultado, observamos que o vetor U_i^T se exprime em termos dos vetores de uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset T_x \Sigma$ do seguinte modo:

$$U_i^T = \sum_{j=1}^n \langle U_i, v_j \rangle v_j, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

O lema a seguir é fundamental para os nossos propósitos. Sua demonstração encontra-se em [44].

Lema A.2. *Para cada $r \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ e cada $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$:*

- (a) $L_r f_i = -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_i - \bar{\nabla}_{U_i^T} S_{r+1}$;
- (b) $L_r g_i = (r+1)S_{r+1}f_i$.

Decorre da primeira identidade em (A.5) e do Lema A.2 que

$$\begin{aligned} L_r \rho &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} L_r g_i^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (g_i L_r g_i + \langle P_r \nabla g_i, \nabla g_i \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (g_i L_r g_i + \langle P_r U_i^T, U_i^T \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} ((r+1)S_{r+1}g_i f_i + \langle P_r U_i^T, U_i^T \rangle) \\ &= (r+1)S_{r+1} \langle x, N \rangle + \sum_{i=1}^{n+1} \langle P_r U_i^T, U_i^T \rangle. \end{aligned}$$

Mas, segue do item (b) do Lema A.1, que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \langle P_r U_i^T, U_i^T \rangle &= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle P_r \left(\sum_{j=1}^n \langle U_i, v_j \rangle v_j \right), \sum_{k=1}^n \langle U_i, v_k \rangle v_k \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle U_i, v_j \rangle \langle U_i, v_k \rangle \langle P_r v_j, v_k \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \langle v_j, v_k \rangle \langle P_r v_j, v_k \rangle \\
&= \sum_{j=1}^n \langle P_r v_j, v_j \rangle \\
&= \text{traço}(P_r) \\
&= (n-r)S_r.
\end{aligned}$$

Assim,

$$L_r \rho = (r+1)S_{r+1} \langle x, N \rangle + (n-r)S_r. \quad (\text{A.7})$$

Agora, a segunda identidade em (A.5) junto com o Lema A.2 implicam que

$$\begin{aligned}
L_r(f_i g_i) &= \text{div}(P_r \nabla(f_i g_i)) \\
&= \text{div} P_r(f_i \nabla g_i + g_i \nabla f_i) \\
&= \text{div} P_r(f_i \nabla g_i) + \text{div} P_r(g_i \nabla f_i) \\
&= f_i L_r g_i + g_i L_r f_i + 2 \langle P_r \nabla g_i, \nabla f_i \rangle \\
&= (r+1)S_{r+1} f_i^2 - g_i((S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})f_i + \bar{\nabla}_{U_i^T} S_{r+1}) + 2 \langle P_r U_i^T, -A U_i^T \rangle \\
&= (r+1)S_{r+1} f_i^2 - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2})g_i f_i - \bar{\nabla}_{U_i^T} S_{r+1} g_i - 2 \langle A P_r U_i^T, U_i^T \rangle.
\end{aligned}$$

Então, segue do item (c) do Lema A.1 que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} L_r(f_i g_i) &= (r+1)S_{r+1}|N|^2 - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle x, N \rangle - \langle \nabla S_{r+1}, x \rangle - 2 \text{traço}(A P_r) \\
&= (r+1)S_{r+1} - (S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle x, N \rangle - \langle \nabla S_{r+1}, x \rangle - 2(r+1)S_{r+1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$L_r g = -(S_1 S_{r+1} - (r+2)S_{r+2}) \langle x, N \rangle - \langle \nabla S_{r+1}, x \rangle - (r+1)S_{r+1}. \quad (\text{A.8})$$

Para o caso especial em que $S_{r+1} = 0$, as identidades (A.7) e (A.8) se tornam:

$$L_r \rho = (n-r)S_r \quad \text{e} \quad L_r g = (r+2)S_{r+2}. \quad (\text{A.9})$$

Teorema A.1. *Seja Σ^n uma hipersuperfície de bordo livre na bola unitária \mathbb{B}^{n+1} . Se existe $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $S_{r+1} = 0$ e*

$$(n-r)S_r + \frac{1}{2}(1-|x|^2)(r+2)S_{r+2} \geq 0,$$

então Σ é um disco equatorial totalmente geodésico \mathbb{D}^n .

Demonstração. Decorre da segunda identidade em (A.9) que a função suporte $g = \langle x, N \rangle$ é uma autofunção do operador

$$T_r := -(L_r - (r + 2)S_{r+2}),$$

associada ao autovalor 0. Suponha que g mude de sinal em Σ . Então 0 não é o primeiro autovalor de T_r . Seja portanto $\lambda_r < 0$ o primeiro autovalor de T_r associado a autofunção $\varphi_r \geq 0$. Nestas condições, sabemos que

$$\begin{cases} T_r \varphi_r = \lambda_r \varphi & \text{sobre } \Sigma, \\ \varphi_r = 0 & \text{sobre } \partial\Sigma. \end{cases}$$

Então, a primeira identidade de (A.9) junto da expressão (A.3) implicam que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Sigma} \varphi_r \langle P_r \nu, \nu \rangle = \int_{\Sigma} \varphi_r L_r \rho + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) L_r \varphi_r \\ &= \int_{\Sigma} (n - r) S_r \varphi_r + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) (-\lambda_r \varphi_r + (r + 2) S_{r+2} \varphi_r) \\ &= \int_{\Sigma} \left[(n - r) S_r + \frac{1}{2} (1 - |x|^2) (r + 2) S_{r+2} \right] \varphi_r - \lambda_r \int_{\Sigma} \frac{1}{2} (1 - |x|^2) \varphi_r. \end{aligned}$$

Mas o lado direito da equação acima é estritamente positivo o que nos leva a uma contradição. Então,

$$g = \langle x, N \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \Sigma.$$

Agora, como $g = 0$ sobre $\partial\Sigma$, decorre mais uma vez de (A.9) junto da expressão (A.3) que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Sigma} g \langle P_r \nu, \nu \rangle = \int_{\Sigma} g L_r \rho + \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (1 - |x|^2) L_r g \\ &= \int_{\Sigma} \left[(n - r) S_r + \frac{1}{2} (1 - |x|^2) (r + 2) S_{r+2} \right] g. \end{aligned}$$

Como o integrando acima é não negativo concluímos que $g = 0$ em quase todo ponto. Por continuidade, $g \equiv 0$ em Σ e assim Σ é um cone mínimo. Por regularidade concluímos que Σ é uma hipersuperfície totalmente geodésica, i.e., $\Sigma = \mathbb{D}^n$. \square

A.2 Hipersuperfícies CMC de fronteira livre na bola unitária

Acreditamos que é possível reproduzir o que foi feito na Seção 2.2 para hipersuperfícies de curvatura média constante e de fronteira livre na bola unitária $\mathbb{B}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Passamos a justificar porque isto é razoável e descrever quais os principais pontos desta generalização que precisam ser verificados.

Seja $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ uma imersão de fronteira livre onde Σ é uma hipersuperfície Riemanniana conexa e orientável e sem auto interseção.

Como vimos na Seção 2.2, se A representa o operador de Weingarten da imersão $\Sigma^n \hookrightarrow \mathbb{B}^{n+1}$ e $A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^n}$ representa o operador de Weingarten da imersão $\partial\Sigma^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$, temos que

$$A = A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^n} \text{ sobre } \partial\Sigma.$$

Seja $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal composta de autovetores de $A_{\partial\Sigma}^{\mathbb{S}^n}$ associada aos autovalores $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. Segue portanto, que a matriz de A na base ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n-1}, x^T\}$ nos pontos de $\partial\Sigma$ é

$$A = \begin{pmatrix} \tau_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tau_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

onde λ é o autovalor associado ao autovetor x^T . Nestas condições, se Σ tem curvatura média constante e λ é constante sobre uma componente de bordo γ de $\partial\Sigma$, podemos concluir que a curvatura média de $\gamma \subset \partial\Sigma$, vista como hipersuperfície de \mathbb{S}^n , é constante. Por outro lado, o resultado obtido por Ros [42] em 1987 afirma o seguinte:

Teorema (Ros [42]). *Seja Σ^n uma hipersuperfície compacta e mergulhada no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . Se uma curvatura H_r é constante para algum $r = 1, \dots, n$, então Σ^{n-1} é uma esfera.*

Diante deste resultado, podemos afirmar que

Se Σ^n é hipersuperfície CMC de fronteira livre em \mathbb{B}^{n+1} e o autovalor de A associado a x^T é constante ao longo de uma componente conexa γ de $\partial\Sigma$, então γ é uma hiperesfera de dimensão $n - 1$.

Portanto, adaptando em dimensão arbitrária o que foi feito na Proposição 2.5, é possível garantir que γ é uma hiperesfera assumindo que $\{x^T, Ax^T\}$ é linearmente dependente em um colar contendo γ .

Seguindo as etapas da Seção 2.2, o próximo passo a ser tomado após termos a garantia de que γ é uma hiperesfera, seria obter um resultado de classificação semelhante ao de Kapouleas e Li [26] que, por sua vez, se baseia no Teorema de Unicidade de Björling [18] para superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 .

Em 2010, uma generalização do Teorema de Unicidade de Björling [18] foi obtida por Brander e Dorfmeister [8] para superfícies CMC em \mathbb{R}^3 . É necessário portanto, verificar se um resultado semelhante ao de Brander e Dorfmeister [8] vale em \mathbb{R}^n para então obtermos um resultado de classificação para hipersuperfícies CMC de fronteira livre na bola unitária em \mathbb{R}^{n+1} , semelhante ao obtido na Seção 2.2.

Referências Bibliográficas

- [1] Luis J. Alías and Josué Meléndez, *Hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Euclidean space*, *Geom. Dedicata* **182** (2016), 117–131. MR 3500380
- [2] ———, *Remarks on hypersurfaces with constant higher order mean curvature in Euclidean space*, *Geom. Dedicata* **199** (2019), 273–280. MR 3928801
- [3] Lucas Ambrozio and Ivaldo Nunes, *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in the three-ball*, 2016.
- [4] M. Andrade, E. Barbosa, and E. Pereira, *Gap results for free boundary cmc surfaces in radially symmetric conformally euclidean three-balls*, *Journal of Geometric Analysis* (2020).
- [5] Ezequiel Barbosa, Marcos P. Cavalcante, and Edno Pereira, *Gap results for free boundary cmc surfaces in the euclidean three-ball*, 2019.
- [6] Ezequiel Barbosa and Celso Viana, *A remark on a curvature gap for minimal surfaces in the ball*, *Math. Z.* **294** (2020), no. 1-2, 713–720. MR 4050081
- [7] João Lucas Marques Barbosa and Antônio Gervasio Colares, *Stability of hypersurfaces with constant r -mean curvature*, *Ann. Global Anal. Geom.* **15** (1997), no. 3, 277–297. MR 1456513
- [8] David Brander and Josef F. Dorfmeister, *The Björling problem for non-minimal constant mean curvature surfaces*, *Comm. Anal. Geom.* **18** (2010), no. 1, 171–194. MR 2660462
- [9] Simon Brendle, *Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture*, *Acta Math.* **211** (2013), no. 2, 177–190. MR 3143888
- [10] Élie Cartan, *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante*, *Ann. Mat. Pura Appl.* **17** (1938), no. 1, 177–191. MR 1553310
- [11] Elie Cartan, *Sur des familles remarquables d’hypersurfaces isoparamétriques dans les espaces sphériques*, *Math. Z.* **45** (1939), 335–367. MR 169
- [12] ———, *Sur des familles d’hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions*, *Univ. Nac. Tucumán. Revista A.* **1** (1940), 5–22. MR 0004519

- [13] Marcos P. Cavalcante, Abraão Mendes, and Feliciano Vitório, *Vanishing theorems for the cohomology groups of free boundary submanifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **56** (2019), no. 1, 137–146. MR 3962030
- [14] Thomas E. Cecil and Patrick J. Ryan, *Geometry of hypersurfaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2015. MR 3408101
- [15] S. S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968), Springer, New York, 1970, pp. 59–75. MR 0273546
- [16] Jaigyoung Choe and Sung-Ho Park, *Capillary surfaces in a convex cone*, Math. Z. **267** (2011), no. 3-4, 875–886. MR 2776063
- [17] R. Courant, *The existence of minimal surfaces of given topological structure under prescribed boundary conditions*, Acta Math. **72** (1940), 51–98. MR 2478
- [18] Ulrich Dierkes, Stefan Hildebrandt, Albrecht Küster, and Ortwin Wohlrab, *Minimal surfaces. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 295, Springer-Verlag, Berlin, 1992, Boundary value problems. MR 1215267
- [19] M. do Carmo and M. Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 2, 685–709. MR 694383
- [20] Jesse Douglas, *Solution of the problem of plateau*, Transactions of the American Mathematical Society **33** (1931), no. 1, 263–321.
- [21] Ailana Fraser and Martin Man-chun Li, *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*, J. Differential Geom. **96** (2014), no. 2, 183–200. MR 3178438
- [22] Ailana Fraser and Richard Schoen, *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*, Adv. Math. **226** (2011), no. 5, 4011–4030. MR 2770439
- [23] ———, *Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 17, 8268–8274. MR 3404014
- [24] ———, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 823–890. MR 3461367
- [25] Michael Grüter and Jürgen Jost, *On embedded minimal disks in convex bodies*, Annales de l’I.H.P. Analyse non linéaire **3** (1986), no. 5, 345–390 (en). MR 868522
- [26] Nikolaos Kapouleas and Martin Man-chun Li, *Free boundary minimal surfaces in the unit three-ball via desingularization of the critical catenoid and the equatorial disk*, arXiv preprint arXiv:1709.08556 (2017).

- [27] Tilla Klotz and Robert Osserman, *Complete surfaces in E^3 with constant mean curvature*, Comment. Math. Helv. **41** (1966/67), 313–318. MR 211332
- [28] Wolfgang Kühnel and Michael Steller, *On closed Weingarten surfaces*, Monatsh. Math. **146** (2005), no. 2, 113–126. MR 2176338
- [29] H. Blaine Lawson, Jr., *Local rigidity theorems for minimal hypersurfaces*, Ann. of Math. (2) **89** (1969), 187–197. MR 238229
- [30] ———, *The unknottedness of minimal embeddings*, Invent. Math. **11** (1970), 183–187. MR 287447
- [31] T. Levi-Civita, *Famiglie di superficie isoparametriche nell'ordinario spazio euclideo*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser. **26** (1937), 355–362.
- [32] Hans Lewy, *On minimal surfaces with partially free boundary*, Comm. Pure Appl. Math. **4** (1951), 1–13. MR 52711
- [33] Haizhong Li and Changwei Xiong, *A gap theorem for free boundary minimal surfaces in geodesic balls of hyperbolic space and hemisphere*, J. Geom. Anal. **28** (2018), no. 4, 3171–3182. MR 3881968
- [34] Vanderson Lima and Ana Menezes, *A two-piece property for free boundary minimal surfaces in the ball*, Trans. Amer. Math. Soc. **374** (2021), no. 3, 1661–1686. MR 4216720
- [35] Rafael López, *Capillary surfaces with free boundary in a wedge*, Adv. Math. **262** (2014), 476–483. MR 3228434
- [36] Rafael López and Juncheol Pyo, *Capillary surfaces of constant mean curvature in a right solid cylinder*, Math. Nachr. **287** (2014), no. 11-12, 1312–1319. MR 3247019
- [37] Peter McGrath, *A characterization of the critical catenoid*, Indiana Univ. Math. J. **67** (2018), no. 2, 889–897. MR 3798860
- [38] Johannes C. C. Nitsche, *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), no. 1, 1–19. MR 784101
- [39] Tominosuke Otsuki, *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. J. Math. **92** (1970), 145–173. MR 264565
- [40] G. Perelman, *Proof of the soul conjecture of Cheeger and Gromoll*, J. Differential Geom. **40** (1994), no. 1, 209–212. MR 1285534
- [41] Tibor Radó, *On plateau's problem*, Annals of Mathematics (1930), 457–469.
- [42] Antonio Ros, *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Rev. Mat. Iberoamericana **3** (1987), no. 3-4, 447–453. MR 996826

- [43] ———, *A two-piece property for compact minimal surfaces in a three-sphere*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), no. 3, 841–849. MR 1375352
- [44] Harold Rosenberg, *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull. Sci. Math. **117** (1993), no. 2, 211–239. MR 1216008
- [45] B. Segre, *Una proprietà caratteristica di tre sistemi ∞^1 di superficie*, Atti Acc. Sc. Torino **LIX** (1924), 666–671.
- [46] ———, *Famiglie di ipersuperficie isoparametriche negli spazi euclidei ad un qualunque numero di dimensioni*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser. **27** (1938), 203–207.
- [47] Shichang Shu, *Linear Weingarten hypersurfaces in a real space form*, Glasg. Math. J. **52** (2010), no. 3, 635–648. MR 2679920
- [48] Brian Smyth and Frederico Xavier, *Efimov's theorem in dimension greater than two*, Invent. Math. **90** (1987), no. 3, 443–450. MR 914845
- [49] C. Somigliana, *Sulle relazioni fra il principio di Huygens e l'ottica geometrica*, Atti Acc. Sci. Torino **54** (1918-1919), 974–979.
- [50] M. Struwe, *On a free boundary problem for minimal surfaces*, Invent. Math. **75** (1984), no. 3, 547–560. MR 735340
- [51] Guofang Wang and Chao Xia, *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*, Math. Ann. **374** (2019), no. 3-4, 1845–1882. MR 3985125
- [52] Qi Ming Wang, *Isoparametric hypersurfaces in complex projective spaces*, Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. 1, 2, 3 (Beijing, 1980), Sci. Press Beijing, Beijing, 1982, pp. 1509–1523. MR 714387
- [53] J. Weingarten, *Ueber eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen*, J. Reine Angew. Math. **59** (1861), 382–393. MR 1579186
- [54] Glen Wheeler and Valentina-Mira Wheeler, *Minimal hypersurfaces in the ball with free boundary*, Differential Geom. Appl. **62** (2019), 120–127. MR 3874608
- [55] Bing-Ye Wu, *On hypersurfaces with two distinct principal curvatures in Euclidean space*, Houston J. Math. **36** (2010), no. 2, 451–467. MR 2661255

Índice Remissivo

- Campo
 - conormal, 28
 - normal, 28
 - variacional, 11
- Colar, 37
- Curvatura(s)
 - média de ordem superior, 45, 54
 - principais, 45
 - principal simples, 45
- Endomorfismo auto-adjunto, 55
- Função
 - distância, 37
 - isoparamétrica, 17
 - simétrica elementar, 45, 54
 - suporte, 37
- Funcional área, 11
- Hipersuperfície
 - de Weingarten, 9
 - de Weingarten linear, 10, 26
 - de fronteira livre, 28
 - isoparamétrica, 17
- Imersão isométrica
 - de fronteira livre, 11
 - mínima, 11
 - própria, 11
 - variação de uma, 11
- Operador
 - de Jacobi, 43
 - de Weingarten, 28
- Problema
 - de fronteira livre, 6
 - de Plateau, 6
- Produto vetorial, 38
- Slab, 19, 34
- Teorema
 - da alma, 27
 - das curvaturas principais, 27
- Transformação de Newton, 54
- Variação admissível, 11
- Vetor
 - curvatura média, 11
- Wedge, 8, 36