Volume 3
2017

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE ALAGOAS

RESOLUÇÃO DO BANCO DE QUESTÕES DE CÁLCULO 1

Organizado por
Carlos Alberto Santos Barbosa

Apresentação

O objetivo principal desta resolução do Banco de Questões (extraído das avaliações escritas de turmas de Cálculo Unificado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL) é auxiliar no desempenho dos estudantes da disciplina Cálculo 1, que durante o processo de conhecimento começam a inserir-se no aprendizado, mostrando-lhes uma noção de como resolver questões das provas realizadas, visando sempre a clareza e objetividade na obtenção dos resultados e suas implicações referentes ao quesito de modo a melhorar seu desempenho acadêmico na disciplina.

Dando continuidade e finalizando o trabalho presente nos volumes 1 e 2, o Volume 3 contém as avaliações aplicadas durante os semestres letivos 2017.1 e 2017.2, bem como as resoluções das mesmas, divididos em dois capítulos (18 e 19), respectivamente aos semestres letivos citados.

Esse último volume coincide com o fim das atividades acadêmicas do autor, deixando esse trabalho – as resoluções das provas de Cálculo 1 – à disposição dos discentes e que estes façam bom uso desse material e consigam, além da aprovação na disciplina Cálculo 1, um bom aproveitamento de todo conhecimento adquirido para melhor entendimento nas disciplinas posteriores que utilizarão resultados, conceitos, e teoremas vistos durante todo o Cálculo 1.

SUMÁRIO

Capítulo 18 ..... **3**
2017.1 ..... **3**
1.1 1ª Prova – 04 de Agosto de 2017 3
1.2 1ª Prova – 05 de Agosto de 2017 13
1.3 2ª Prova – 01 de Setembro de 2017 22
1.4 2ª Prova – 02 de Setembro de 2017 30
1.5 3ª Prova – 06 de Outubro de 2017 38
1.6 3ª Prova – 07 de Outubro de 2017 45
1.7 4ª Prova – 10 de Novembro de 2017 55
1.8 4ª Prova – 11 de Novembro de 2017 64
1.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 24 de Novembro de 2017 72
1.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 25 de Novembro de 2017 79
1.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 24 de Novembro de 2017 86
1.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 25 de Novembro de 2017 97
1.13 Prova Final – 01 de Dezembro de 2017 108
Capítulo 19 ..... **130**
2017.2 ..... **130**
2.1 1ª Prova – 23 de Fevereiro de 2018 130
2.2 1ª Prova – 24 de Fevereiro de 2018 138
2.3 2ª Prova – 23 de Março de 2018 146
2.4 2ª Prova – 24 de Março de 2018 153
2.5 3ª Prova – 27 de Abril de 2018 161
2.6 3ª Prova – 28 de Abril de 2018 168
2.7 4ª Prova – 18 de Maio de 2018 175
2.8 4ª Prova – 19 de Maio de 2018 184
2.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 25 de Maio de 2018 194
2.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 26 de Maio de 2018 200
2.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 25 de Maio de 2018 209
2.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 26 de Maio de 2018 218
2.13 Prova Final – 01 de Junho de 2018 229

Capítulo 18

2017.1

1.1 1ª Prova – 04 de Agosto de 2017

Questão 1.

$a)$ *Determine qual dos intervalos* $\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *e* $\left(\frac{1}{2},1\right)$ *contém o limite* $\lim_{x\to 3}\cos\left(\frac{x^{100}-3x^{99}}{x^{99}-3x^{98}}\right)$.

$b)$*Suponha que* k *é um número real não-nulo, calcule, se existir, o limite* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x+k}}{kx}$.

Questão 2

$a)$*Determine uma expressão, por sentenças, correspondente à função* $f(x)=[\![\cos x]\!]$, *no intervalo* $0<x<2\pi$.

$b)$ *Analise a continuidade da função* $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x\,, & se\ x<0\\ 2-x^2, & se\ 0\le x\le\sqrt{2}\\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x-\sqrt{2}}{2}\right), & se\ x>\sqrt{2}\end{cases}$ *em* $\mathbb{R}$.

Questão 3

$a)$*Seja* $f(x)=\begin{cases}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}, & se\ x\neq 1\\ c, & se\ x=1\end{cases}$. *Determine o valor de c para que a função seja contínua em todos os reais.*

$b)$ *Mostre que os gráficos de* $f(x)=1$ *e* $g(x)=x^2.\operatorname{tg}x$ *têm pelo menos um ponto de intersecção com abscissa no intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 4

$a)$*Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função* $f(x)=\frac{2x^3-x+\sqrt{2}}{(x^2-1)(x+2)}$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 2}\left(\operatorname{sen}\left[\cos(2x)+\log x^2+\sqrt{x+7}\right].(x^{10}-1024)\right)$.

$Questão\ 5$

$a) Se\ a\ reta\ tangente\ a\ y = f(x)\ em\ (2{,}1)\ passar\ pelo\ ponto\ (0{,}2), encontre$
$f(2)\ e\ f'(2).$

$b) Encontre, usando\ a\ definição\ de\ derivada, a\ equação\ da\ reta\ tangente$
à $curva\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}, no\ ponto\ (0{,}1).$

***Questão* 1.**

a) Determine qual dos intervalos $\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\left(-\frac{1}{2},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *e* $\left(\frac{1}{2},1\right)$ *contém o limite* $\lim_{x\to 3}\cos\left(\frac{x^{100}-3x^{99}}{x^{99}-3x^{98}}\right)$.

Seja $g(x)=\frac{x^{100}-3x^{99}}{x^{99}-3x^{98}}$ *e* $f(x)=\cos x$. *Logo,*

$$\lim_{x\to 3}\cos\left(\frac{x^{100}-3x^{99}}{x^{99}-3x^{98}}\right)=\lim_{x\to 3}f\big(g(x)\big)$$

Sabe-se que $D(g)=\{x\in\mathbb{R}: x\neq 0 \text{ e } x\neq 3\}$ *e* $D(f)=\mathbb{R}$. *Além disso,* f *é uma função trigonométrica e, portanto, contínua em seu domínio, isto é,* f *é contínua em todos os reais.*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}g(x)&=\lim_{x\to 3}\frac{x^{100}-3x^{99}}{x^{99}-3x^{98}}\\&=\lim_{x\to 3}\frac{x^{99}(x-3)}{x^{98}(x-3)}\ ;\ *\\&=\lim_{x\to 3}x\\&=3.\end{aligned}$$

$*$ *Se* $x\to 3$, *então* $x\neq 3$ *e, portanto,* $(x-3)\neq 0$.

Como $\lim_{x\to 3}g(x)=3$ *e* f *é contínua em* 3, *então* $\lim_{x\to 3}f\big(g(x)\big)=f(3)$. *Em outras palavras,*

$$\lim_{x\to 3}f\big(g(x)\big)=f\left(\lim_{x\to 3}g(x)\right)=f(3)=\cos 3.$$

Sabe-se que, em radianos, $\frac{2\pi}{3}<3<\pi$ *e, como* $\cos x<0$ *neste intervalo, então ...*

$$\cos\pi<\cos 3<\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$-1<\cos 3<-\frac{1}{2}$$

Portanto, o valor $\cos 3$ *está no intervalo* $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$.

b) Suponha que k *é um número real não-nulo, calcule, se existir, o limite* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x+k}}{kx}$.

$*$ *Obs.:* $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x+k}}{kx}$, $D(f)=\{x\in\mathbb{R}:\ x\geq -k \text{ e } x\neq 0, \text{com } \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}_+^*\}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x+k}}{kx}&=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+k}-\sqrt{x+k}}{kx}\cdot\frac{\sqrt{x^2+k}+\sqrt{x+k}}{\sqrt{x^2+k}+\sqrt{x+k}}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+k-(x+k)}{kx\left(\sqrt{x^2+k}+\sqrt{x+k}\right)}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{kx\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right)}; \ * Se\ x \to 0, então\ x \neq 0.$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x - 1}{k\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right)}$$

$$* \lim_{x\to 0}(x-1) = \lim_{x\to 0} x - \lim_{x\to 0} 1 = 0 - 1 = -1.$$

$$* \lim_{x\to 0} k\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right) = k.\left[\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+k} + \lim_{x\to 0}\sqrt{x+k}\right]$$

$$= k.\left[\sqrt{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} k} + \sqrt{\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} k}\right]$$

$$= k.\left[\sqrt{0^2+k} + \sqrt{0+k}\right]$$

$$= 2k\sqrt{k} \neq 0.$$

$Como\ \lim_{x\to 0}(x-1)\ existe\ e\ \lim_{x\to 0} k\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right)\ existe, e\ ainda,$
$\lim_{x\to 0} k\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right) \neq 0. Então,$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{k\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right)} = \frac{\lim_{x\to 0}(x-1)}{\lim_{x\to 0} k\left(\sqrt{x^2+k} + \sqrt{x+k}\right)} = -\frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

***Questão* 2.**

$a) Determine\ uma\ expressão, por\ sentenças, correspondente$ à $função$
$f(x) = [\![\cos x]\!], no\ intervalo\ 0 < x < 2\pi.$

$* Se\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), então\ 0 \leq \cos x < 1\ e, portanto, [\![\cos x]\!] = 0;$
$* Se\ x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), então\ -1 \leq \cos x < 0\ e, portanto, [\![\cos x]\!] = -1.$

$Logo,$

$$f(x) = [\![\cos x]\!] = \begin{cases} 0, & se\ 0 < x \leq \frac{\pi}{2}\ ou\ \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \\ -1, & se\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$b)\ Analise\ a\ continuidade\ da\ função\ f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ x < 0 \\ 2 - x^2, & se\ 0 \leq x \leq \sqrt{2} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{x-\sqrt{2}}{2}\right), & se\ x > \sqrt{2} \end{cases}\ em\ \mathbb{R}.$

$A\ função\ f, definida\ por\ sentenças,$ é $contínua\ em\ (-\infty, 0) \cup \left(0, \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, \infty\right),$
$pois\ as\ funções\ trigonométrica, polinomial\ e\ trigonométrica\ inversa, dadas$
$respectivamente\ por\ (sen\ x), (2 - x^2)\ e\ \{arctg[(x - \sqrt{2})/2]\}, são\ contínuas\ em$
$seus\ domínios, isto$ é, $em\ todos\ os\ reais. Logo, f$ é $contínua\ onde\ estas\ funções$
$estão\ definidas. Resta\ analisar\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = 0\ e\ x = \sqrt{2}.$

$* Uma\ função\ f$ é $contínua\ em\ um\ número\ a\ se, somente\ se,$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$-Em\ x = 0, temos$:

$f(0) = 2 - 0^2 = 2 - 0 = 2.$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(2 - x^2) = \lim_{x\to 0^+} 2 - \lim_{x\to 0^+} x^2 = 2 - 0^2 = 2 - 0 = 2.$
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 = 0.$

$*\ Como\ \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x), então\ \lim_{x\to 0} f(x)\ não\ existe\ e, portanto, f$ é $descontínua\ em\ 0. Além\ disso, como\ os\ limites\ laterais\ existem, implica\ dizer\ que\ a\ descontinuidade\ de\ f\ em\ 0$ é $do\ tipo\ salto.$

$-Em\ x = \sqrt{2}, temos$:

$f(\sqrt{2}) = 2 - (\sqrt{2})^2 = 2 - 2 = 0.$
$\lim_{x\to \sqrt{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}^-}(2 - x^2) = \lim_{x\to \sqrt{2}^-} 2 - \lim_{x\to \sqrt{2}^-} x^2 = 2 - (\sqrt{2})^2 = 2 - 2 = 0.$
$\lim_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x - \sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0.$

$*\ Como\ \lim_{x\to \sqrt{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \sqrt{2}^-} f(x), então\ \lim_{x\to \sqrt{2}} f(x)\ existe\ e\ \lim_{x\to \sqrt{2}} f(x) = f(\sqrt{2}).$
$Logo, f$ é $contínua\ em\ \sqrt{2}.$

$Com\ isso, juntamente\ com\ a\ análise\ feita\ inicialmente, concluimos\ que\ f$ é $contínua\ em\ (-\infty, 0) \cup (0, \infty), ou\ ainda, f$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}^*.$

Questão 3.

$a) Seja\ f(x) = \begin{cases} \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}}, & se\ x \neq 1 \\ c, & se\ x = 1 \end{cases}. Determine\ o\ valor\ de\ c\ para\ que\ a\ função$
$seja\ contínua\ em\ todos\ os\ reais.$

$Seja\ g(x) = \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}}.\ Temos\ que\ D(g) = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 1\}. Como\ g$ é $uma\ função$
$racional, então\ g$ é $contínua\ em\ seu\ domínio. Logo, g$ é $contínua\ em\ (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$
$Isto\ implica\ dizer\ que\ f$ é $contínua\ em\ (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$

$Para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ todos\ os\ reais$ é $condição\ necessária\ e\ suficiente$
$que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 1. Portanto, pela\ definição\ de\ continuidade\ de$
$uma\ função\ em\ um\ número, temos$:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = c$$

$$c = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}}$$
$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1 - x}{1 - \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{(1-x)}; * \quad \begin{array}{l} Se\ x \to 1, então\ x \neq 1\ e, \\ portanto, (1-x) \neq 0. \end{array}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} 1 + \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x} + \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{x^2}$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3.$$

Portanto, para $c = 3$ a função f é contínua em todos os reais.

b) Mostre que os gráficos de $f(x) = 1$ e $g(x) = x^2.\operatorname{tg} x$ têm pelo menos um ponto de intersecção com abscissa no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Como a função h é definida pela diferença entre funções contínuas no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, então a função h é contínua em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Logo, h é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

($\subset$ – está contido)

$h(0) = f(0) - g(0) = 1 - 0^2.\operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$

$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) - g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{\pi^2\sqrt{3}}{9}.$

Como h é contínua no intervalo fechado $[0, \pi/3]$ e 0 é um número entre $h(0)$ e $h\left(\frac{\pi}{3}\right)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ tal que $h(c) = 0$.

$$h(c) = 0 \Longrightarrow f(c) - g(c) = 0 \therefore f(c) = g(c)$$

Com isso mostramos que f e g têm pelo menos um ponto de intersecção cuja abscissa está no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 4.

a) Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função $f(x) = \frac{2x^3 - x + \sqrt{2}}{(x^2-1)(x+2)}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\ e\ x \neq -2\}$.

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - x + \sqrt{2}}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 - 0 - 0}$$

$$= 2.$$

Portanto, a reta $y = 2$ *é assíntota horizontal do gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - x + \sqrt{2}}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3\left(2 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{2}}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2}}{x^3}}{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 - 0 - 0}$$

$$= 2.$$

Logo, a reta $y = 2$ *é a única assíntota horizontal do gráfico de* f.

A reta $x = a$ *é assíntota vertical do gráfico da função* f *se*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Pela definição acima e o conceito de continuidade de uma função em um número a*, conclui-se que* f *é descontínua em* a*. Neste caso, devemos analisar as descontinuidade de* f *em* $x = \{-2, -1, 1\}$.

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{\overbrace{2x^3 - x + \sqrt{2}}^{-14+\sqrt{2}}}{\underbrace{(x^2-1)}_{3}\underbrace{(x+2)}_{0^+}} = \lim_{x\to-2^+} \frac{\overbrace{2x^3 - x + \sqrt{2}}^{-14+\sqrt{2}}}{\underbrace{(x^2-1)(x+2)}_{0^+}} = -\infty$$

$*$ *Se* $x \to -2^+$*, então* $\left(2x^3 - x + \sqrt{2}\right) \to \left(-14 + \sqrt{2}\right)$, $(x^2 - 1) \to 3$ *e* $(x + 2) \to 0^+$
Assim, $(x^2 - 1)(x + 2) \to 0^+$.
Logo, a reta $x = -2$ *é assíntota vertical do gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{2x^3 - x + \sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}}}{\underbrace{(x^2-1)}_{\downarrow\, 0^-}\underbrace{(x+2)}_{\downarrow\, 1}} = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{2x^3 - x + \sqrt{2}}^{-1+\sqrt{2}}}{\underbrace{(x^2-1)(x+2)}_{\downarrow\, 0^-}} = -\infty$$

$*\ Se\ x \to -1^+, então\ \left(2x^3 - x + \sqrt{2}\right) \to \left(-1+\sqrt{2}\right), (x^2-1) \to 0^-\ e\ (x+2) \to 1$
$Assim, (x^2-1)(x+2) \to 0^-.$

$Logo, a\ reta\ x = -1$ é $assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f.$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{2x^3 - x + \sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}}{\underbrace{(x^2-1)}_{\downarrow\, 0^+}\underbrace{(x+2)}_{\downarrow\, 3}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{2x^3 - x + \sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}}}{\underbrace{(x^2-1)(x+2)}_{\downarrow\, 0^+}} = +\infty$$

$*\ Se\ x \to 1^+, então\ \left(2x^3 - x + \sqrt{2}\right) \to \left(1+\sqrt{2}\right), (x^2-1) \to 0^+\ e\ (x+2) \to 3$
$Assim, (x^2-1)(x+2) \to 0^+.$

$Logo, a\ reta\ x = 1$ é $assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f.$

$Assíntotas\ do\ gráfico\ da\ função\ f: \{y = 2; x = -2; x = -1; x = 1\}.$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to 2}\left(\operatorname{sen}\left[\cos(2x) + \log x^2 + \sqrt{x+7}\right].(x^{10} - 1024)\right).$
$\forall x \in \mathbb{R};\ x \geq -7\ e\ x \neq 0, temos:$

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left[\cos(2x) + \log x^2 + \sqrt{x+7}\right] \leq 1$$

$Se\ x > 2, então\ (x^{10} - 1024) > 0. Logo,$

$$-\underbrace{(x^{10} - 1024)}_{f(x)} \leq \underbrace{(x^{10} - 1024).\operatorname{sen}\left[\cos(2x) + \log x^2 + \sqrt{x+7}\right]}_{g(x)} \leq \underbrace{(x^{10} - 1024)}_{h(x)}$$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = -\lim_{x\to 2^+}(x^{10} - 1024) = -(2^{10} - 1024) = -(1024 - 1024) = 0.$
$\lim_{x\to 2^+} h(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^{10} - 1024) = (2^{10} - 1024) = (1024 - 1024) = 0.$
$Como\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ quando\ x\ está\ próximo\ de\ 2,$ ***pela direita*** $de\ 2, e$
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} h(x)\ então, pelo\ Teorema\ do\ Confronto,$

$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = 0.$$

$Se\ x < 2, então\ (x^{10} - 1024) < 0. Logo,$

$$\underbrace{(x^{10} - 1024)}_{f(x)} \leq \underbrace{(x^{10} - 1024).\operatorname{sen}\left[\cos(2x) + \log x^2 + \sqrt{x+7}\right]}_{g(x)} \leq \underbrace{-(x^{10} - 1024)}_{h(x)}$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\lim_{x\to 2^-}(x^{10} - 1024) = -(2^{10} - 1024) = -(1024 - 1024) = 0.$

$$\lim_{x\to 2^-} h(x) = \lim_{x\to 2^-} (x^{10} - 1024) = (2^{10} - 1024) = (1024 - 1024) = 0.$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 2, ***pela esquerda*** *de* 2, *e* $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} h(x)$ *então, pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0$$

Como $\lim_{x\to 2^-} g(x) = \lim_{x\to 2^+} g(x)$, *então* $\lim_{x\to 2} g(x)$ *existe e* $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 2} \left((x^{10} - 1024).\text{sen}\left[\cos(2x) + \log x^2 + \sqrt{x+7}\right]\right) = 0.$$

***Questão* 5.**

a) Se a reta tangente a $y = f(x)$ *em* $(2,1)$ *passar pelo ponto* $(0,2)$, *encontre* $f(2)$ *e* $f'(2)$.

Se o ponto $(2,1)$ *pertence ao gráfico da função* $f(x)$, *então* $f(2) = 1$.
Se a reta tangente passa pelos pontos $(2,1)$ *e* $(0,2)$, *então o coeficiente angular desta reta é numericamente igual à derivada da função no ponto de abscissa* $x = 2$. *Logo,*

$$f'(2) = m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-1}{0-2} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto, $f(2) = 1$ *e* $f'(2) = -1/2$.

b) Encontre, usando a definição de derivada, a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, *no ponto* $(0,1)$.
$*$ *Obs.: o ponto* $(0,1)$ *pertence ao gráfico da curva.*

Pela definição de derivada, o coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto de abscissa 0 *é dada pela expressão:*

$$\begin{aligned}
m = f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2h+1}} - 1}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 - \sqrt{2h+1}}{h\sqrt{2h+1}} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{1 - \sqrt{2h+1}}{h\sqrt{2h+1}} . \frac{1 + \sqrt{2h+1}}{1 + \sqrt{2h+1}}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 - (2h+1)}{h\sqrt{2h+1}.\left(1 + \sqrt{2h+1}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2h}{h\sqrt{2h+1}.\left(1 + \sqrt{2h+1}\right)} \quad ; * \textit{Se } h \to 0, \textit{então } h \neq 0. \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-2}{\sqrt{2h+1}.\left(1 + \sqrt{2h+1}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{0+1}.\left(1+\sqrt{0+1}\right)}$$
$$= \frac{-2}{1.(1+1)}$$
$$= -\frac{2}{2}$$
$$= -1.$$

Equação da reta tangente a curva $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ *no ponto* $(0,1)$ *e coeficiente angular igual a* -1:

$$y - 1 = -1(x - 0)$$
$$y = -x + 1$$

1.2 1ª Prova – 05 de Agosto de 2017

Questão 1.

$a)$ *Dadas as funções* $f(x) = \sqrt[3]{x+5} - 2$ *e* $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$, *determine, se existirem, os limites* $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 3} g(x)$ *e* $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$b)$ *Calcule, em função de* k, *o limite* $\lim_{x\to k} \frac{x^3 - kx^2 + x - k}{x^2 + (1-k)x - k}$.

Questão 2.

$a)$ *Calcular* $\lim_{x\to 1^-} [\![x^2 + x - 2]\!]$.

$b)$ *Determine a de modo que a função dada por* $f(x) = \begin{cases} 3.\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2000}, & se\ x < 1000 \\ \log_a x, & se\ x \geq 1000 \end{cases}$ *seja contínua.*

Questão 3.

$a)$ *Para quais valores de* $c \in \mathbb{R}$ *a função* $f(x) = \begin{cases} x^{1000} + 200x^{99} + c^3, & se\ x \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(\sqrt{3} + x), & se\ x < 0 \end{cases}$ é *contínua em* $x = 0$?

$b)$ *Mostre que* $\ln(x) = e^{-x}$ *possui uma raiz no intervalo* $I = [1,2]$.

Questão 4.

$a)$ *As assíntotas horizontais do gráfico da função* $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+2}}{2x-3}$ *ao se interceptarem com as retas cujas equações são dadas por* $|x| = 3$, *formam um polígono convexo. Calcule sua área.*

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 1} [\operatorname{sen}(2x).\cos(3x).\operatorname{sen}(8x).\cos(10x)].[\log(x^3) + x^2 - 1]$.

Questão 5.

$a)$ *Se uma equação de uma reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* $a = -1$ é *dada por* $y = -2x + 3$, *encontre* $f(-1)$ *e* $f'(-1)$.

$b)$ *Encontre, usando a definição de derivada em um ponto, a equação da reta tangente à curva* $y = \frac{5x}{1+x^2}$ *no ponto* $(2,2)$.

***Questão* 1.**

a) Dadas as funções $f(x) = \sqrt[3]{x+5} - 2$ *e* $g(x) = \sqrt{x+1} - 2$, *determine, se existirem, os limites* $\lim_{x\to 3} f(x)$, $\lim_{x\to 3} g(x)$ *e* $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left[\sqrt[3]{x+5} - 2\right] &= \lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x+5} - \lim_{x\to 3} 2 \\
&= \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x+5)} - \lim_{x\to 3} 2 \\
&= \sqrt[3]{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 5} - \lim_{x\to 3} 2 \\
&= \sqrt[3]{3+5} - 2 \\
&= \sqrt[3]{8} - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3} g(x) = \lim_{x\to 3}\left[\sqrt{x+1} - 2\right] &= \lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} - \lim_{x\to 3} 2 \\
&= \sqrt{\lim_{x\to 3}(x+1)} - \lim_{x\to 3} 2 \\
&= \sqrt{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1} - \lim_{x\to 3} 2 \\
&= \sqrt{3+1} - 2 \\
&= \sqrt{4} - 2 \\
&= 2 - 2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{\sqrt{x+1} - 2} \quad ; \quad \textit{Indeterminação } "\frac{0}{0}"$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt[3]{x+5} - 2}{\sqrt{x+1} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt{x+1} + 2} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4}\right] \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{\left(\sqrt[3]{(x+5)^3} - 2^3\right).\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{\left(\sqrt{(x+1)^2} - 2^2\right).\left(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4\right)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{(x+5-8).\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(x+1-4).\left(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4\right)} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{(x-3).\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(x-3).\left(\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4\right)} \; ; * \; \begin{matrix} \textit{Se } x \to 3, \textit{então } x \neq 3 \textit{ e,} \\ \textit{portanto, } (x-3) \neq 0. \end{matrix} \\
&= \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1} + 2}{\sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\sqrt[3]{x+5} + 4} \\
&= \frac{\lim_{x\to 3} \sqrt{x+1} + \lim_{x\to 3} 2}{\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{(x+5)^2} + 2\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x+5} + \lim_{x\to 3} 4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 1} + \lim_{x\to 3} 2}{\sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 5\right)^2} + 2\sqrt[3]{\lim_{x\to 3} x + \lim_{x\to 3} 5} + \lim_{x\to 3} 4}$$

$$= \frac{\sqrt{3+1} + 2}{\sqrt[3]{(3+5)^2} + 2\sqrt[3]{3+5} + 4}$$

$$= \frac{\sqrt{4} + 2}{\sqrt[3]{(8)^2} + 2\sqrt[3]{8} + 4}$$

$$= \frac{4}{4+4+4}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

$b)$ $Calcule, em\ função\ de\ k, o\ limite\ \lim_{x\to k} \frac{x^3 - kx^2 + x - k}{x^2 + (1-k)x - k}.$

$$\lim_{x\to k} \frac{x^3 - kx^2 + x - k}{x^2 + (1-k)x - k} = \lim_{x\to k} \frac{x(x^2+1) - k(x^2+1)}{(x+1)(x-k)}$$

$$= \lim_{x\to k} \frac{(x^2+1)(x-k)}{(x+1)(x-k)} \ ; \ * \begin{array}{l} Se\ x \to k, então\ x \neq k\ e, \\ portanto, (x-k) \neq 0. \end{array}$$

$$= \lim_{x\to k} \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$= \frac{\lim_{x\to k}(x^2+1)}{\lim_{x\to k}(x+1)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to k} x^2 + \lim_{x\to k} 1}{\lim_{x\to k} x + \lim_{x\to k} 1}$$

$$= \frac{k^2+1}{k+1} \ ; \quad k \neq -1.$$

***Questão* 2.**

$a)$ $Calcular\ \lim_{x\to 1^-} [\![x^2 + x - 2]\!].$

$* \ (x^2 + x - 2) = (x+2)(x-1)$

$Estudo\ de\ sinal\ da\ função\ (x^2 + x - 2):$

$$++++++(-2)----(1)+++++ \quad (x^2 + x - 2)$$

$Se\ x \to 1^-, então\ (x^2 + x - 2) < 0\ e\ (x^2 + x - 2) \to 0^-. Logo, [\![x^2 + x - 2]\!] = -1.$

$$\lim_{x\to 1^-} [\![x^2 + x - 2]\!] = \lim_{x\to 1^-} (-1) = -1.$$

$b)$ *Determine a de modo que a função dada por* $f(x) = \begin{cases} 3.\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2000}, & se\ x < 1000 \\ \log_a x, & se\ x \geq 1000 \end{cases}$ *seja contínua.* $*$ *(em* $\mathbb{R}$*)*

A função f*, expressa por sentenças, é contínua em* $(-\infty, 1000)$*, pois a função composta* $3\operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{2000}$ *é uma composição entre função trigonométrica e polinomial, ambas contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, a função composta também é contínua em* $\mathbb{R}$*. Contudo, esta sentença é válida para* $x < 1000$*.*

Analisando a segunda sentença, considerando $a > 0$ *e* $a \neq 1$*, a função* $\log_a x$ *é contínua em seu domínio, isto é, para* $x > 0$ *e, portanto, como esta sentença é válida para* $x \geq 1000$*, então* f *é contínua em* $(1000, \infty)$*.*

Para que f *seja contínua em* $\mathbb{R}$ *é condição necessária e suficiente que* f *seja contínua em* $x = 1000$*. Logo, pela definição de continuidade de uma função em um número, devemos ter:*

$$\lim_{x \to 1000} f(x) = f(1000)$$

$f(1000) = \log_a 1000.$

$\lim\limits_{x \to 1000^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1000^+} [\log_a x] = \log_a 1000;$

$\lim\limits_{x \to 1000^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1000^-} \left[3.\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2000}\right)\right] = 3.\operatorname{sen}\left(\dfrac{1000\pi}{2000}\right) = 3.\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = 3.$

$$\lim_{x \to 1000} f(x) = f(1000) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \lim\limits_{x \to 1000^+} f(x) = f(1000) & (1) \\ e & \\ \lim\limits_{x \to 1000^-} f(x) = f(1000) & (2) \end{array}$$

Como a igualdade em (1) *está satisfeita, então* f *sera contínua em* $x = 1000$ *se a igualdade em* (2) *for satisfeita. Logo,*

$$\begin{gathered} \lim_{x \to 1000^-} f(x) = f(1000) \\ 3 = \log_a 1000 \\ 3 = \log_a 10^3 \\ 3 = 3.\log_a 10 \\ 1 = \log_a 10 \\ a^1 = 10 \\ \therefore a = 10. \end{gathered}$$

Portanto, para $a = 10$ f *é contínua em* $x = 1000$ *e, pela análise inicial conclui-se que* f *é contínua em* $\mathbb{R}$*.*

***Questão* 3.**

$a)$ *Para quais valores de* $c \in \mathbb{R}$ *a função* $f(x) = \begin{cases} x^{1000} + 200x^{99} + c^3, & se\ x \geq 0 \\ \operatorname{arctg}(\sqrt{3} + x), & se\ x < 0 \end{cases}$ *é contínua em* $x = 0$*?*

Pela definição de continuidade de uma função em um número, para que f seja contínua em $x = 0$ é necessário que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$f(0) = 0^{1000} + 200 \times 0^{99} + c^3 = 0 + 0 + c^3 \therefore f(0) = c^3.$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^{1000} + 200x^{99} + c^3) = 0 + 0 + c^3 = c^3;$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [\operatorname{arctg}(\sqrt{3} + x)] = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} + 0) = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) & (1) \\ e & \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) & (2) \end{matrix}$$

Como a igualdade em (1) está satisfeita, então f sera contínua em $x = 0$ se a igualdade em (2) for satisfeita. Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$
$$\frac{\pi}{3} = c^3$$
$$\therefore c = \sqrt[3]{\frac{\pi}{3}}.$$

b) Mostre que $\ln(x) = e^{-x}$ *possui uma raiz no intervalo* $I = [1,2]$.

Seja $f(x) = \ln x - e^{-x}$, uma função definida pela diferença entre funções logarítmica e exponencial, ambas contínuas em seus domínios e, portanto, f é contínua em seu domínio. Logo, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Como f é contínua em $(0,\infty)$, então f é contínua no intervalo fechado $I = [1,2]$.

$f(1) = \ln 1 - e^{-1} = 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}. \quad f(1) < 0$

$f(2) = \ln 2 - e^{-2} = \ln 2 - \frac{1}{e^2}; \quad f(2) > 0.$

$*$ *Obs.:* $\sqrt{e} < 2 \Rightarrow \ln\sqrt{e} < \ln 2 \therefore \frac{1}{2} < \ln 2$; $\frac{1}{e^2} < \frac{1}{2} < \ln 2$. *Portanto,* $\left(\ln 2 - \frac{1}{e^2}\right) > 0.$

Como f é contínua no intervalo fechado $[1,2]$ e 0 é um número entre $f(1)$ e $f(2)$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in (1,2)$ tal que $f(c) = 0$. Logo,

$$f(c) = 0 \Longrightarrow \ln c - e^{-c} = 0 \therefore \ln c = e^{-c}.$$

Com isso, a equação $\ln x = e^{-x}$ *possui uma raiz no intervalo* $I = [1,2]$.

***Questão* 4.**

a) As assíntotas horizontais do gráfico da função $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 2}}{2x - 3}$ *ao se interceptarem com as retas cujas equações são dadas por* $|x| = 3$, *formam um polígono convexo. Calcule sua área.*

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{3}{2}\right\}$$

A reta $y = L$ *é uma assíntota do gráfico da função* f *se, somente se*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{2x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)} \quad ; \quad * \begin{array}{l} Se\ x \to -\infty, então \\ \sqrt{x^2} = |x| = -x. \end{array}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}$$

$$= -\frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 4 + \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty} 2 - \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x}}$$

$$= -\frac{\sqrt{4+0}}{2-0}$$

$$= -1.$$

Portanto, a reta $y = -1$ *é assíntota horizontal do gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+2}}{2x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)} \quad ; \quad * \begin{array}{l} Se\ x \to \infty, então \\ \sqrt{x^2} = |x| = x. \end{array}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}}{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{2}{x^2}}}{2-\frac{3}{x}}$$

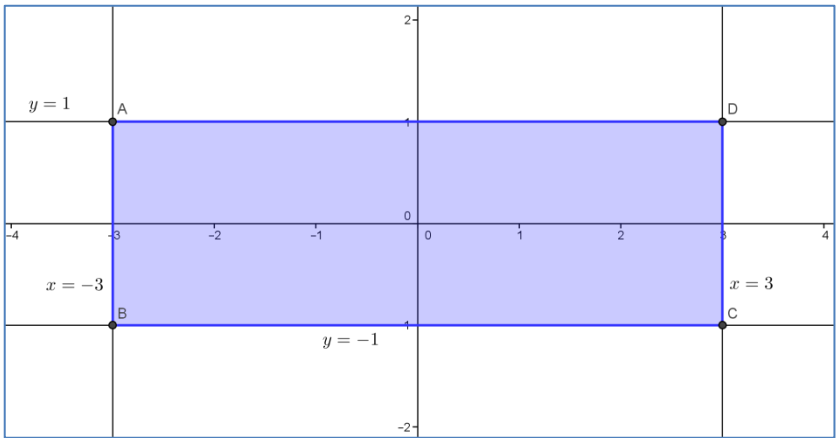
$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 2 - \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+0}}{2-0}$$

$$= 1.$$

Portanto, a reta $y = 1$ *é assíntota horizontal do gráfico da função* f.

As retas dadas por $|x| = 3$ *são as retas* $x = -3$ *e* $x = 3$. *Logo, o polígono convexo formado é um retângulo, como mostra a figura abaixo:*



Área do polígono formado:

$$A = b \times h = [3 - (-3)] \times [1 - (-1)] = 6 \times 2 = 12u.A$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x \to 1} [\text{sen}(2x) . \cos(3x) . \text{sen}(8x) . \cos(10x)] . [\log(x^3) + x^2 - 1]$.

Considerações iniciais:

1) *O produto de funções limitadas é uma função limitada.*

2) *Não podemos afirmar categoricamente que o conjunto imagem da função* $F(x) = [\text{sen}(2x) . \cos(3x) . \text{sen}(8x) . \cos(10x)]$ *contém os valores* 1 *e* -1.

3) *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que* $-1 \leq a < b \leq 1$, *onde* $Im(F) = [a, b]$

$*$ *Obs.: Caso tenham colocado* $-1 \leq F(x) \leq 1$ ***não se preocupem***!!!

Então, $\forall x \in \mathbb{R}$ ...

$$a \leq F(x) \leq b$$

Se $x > 1$, *então* $[\log(x^3) + x^2 - 1] > 0$. *Logo,*

$$\underbrace{a.[\log(x^3) + x^2 - 1]}_{f(x)} \leq \underbrace{F(x).[\log(x^3) + x^2 - 1]}_{g(x)} \leq \underbrace{b.[\log(x^3) + x^2 - 1]}_{h(x)}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} a.[\log(x^3) + x^2 - 1] = a.[\log(1) + 1^2 - 1] = a(0 + 1 - 1) = 0.$$
$$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} b.[\log(x^3) + x^2 - 1] = b.[\log(1) + 1^2 - 1] = a(0 + 1 - 1) = 0.$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 1, ***pela direita*** *de* 1, *e* $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} h(x)$ *então, pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = 0.$$

Se $x < 1$, *então* $[\log(x^3) + x^2 - 1] < 0$. *Logo,*

$$\underbrace{b.[\log(x^3) + x^2 - 1]}_{f(x)} \leq \underbrace{F(x).[\log(x^3) + x^2 - 1]}_{g(x)} \leq \underbrace{a.[\log(x^3) + x^2 - 1]}_{h(x)}$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} b.[\log(x^3) + x^2 - 1] = b.[\log(1) + 1^2 - 1] = a(0 + 1 - 1) = 0.$
$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} a.[\log(x^3) + x^2 - 1] = a.[\log(1) + 1^2 - 1] = a(0 + 1 - 1) = 0.$
Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 1, ***pela esquerda*** *de* 1, *e* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} h(x)$ *então, pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = 0.$$

Como $\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$, *então* $\lim_{x\to 1} g(x)$ *existe e* $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 1}[\operatorname{sen}(2x).\cos(3x).\operatorname{sen}(8x).\cos(10x)].[\log(x^3) + x^2 - 1] = 0$$

***Questão* 5**

a) Se uma equação de uma reta tangente à curva $y = f(x)$ *no ponto* $a = -1$ *é dada por* $y = -2x + 3$, *encontre* $f(-1)$ *e* $f'(-1)$.

Equação da genérica da reta tangente à curva $y = f(x)$ *no ponto em que* $x = a$:

$$y - f(a) = f'(a).(x - a)$$

Onde $f'(a)$ *é o coeficiente angular da reta tangente e* $(a, f(a))$ *é o ponto de tangencia da reta com a curva.*

Pela equação da reta, temos que $f'(-1) = -2$ *e como o ponto* $(-1, f(-1))$ *pertence à reta, então ...*

$$f(-1) = -2(-1) + 3$$
$$f(-1) = 2 + 3$$
$$f(-1) = 5.$$

b) Encontre, usando a definição de derivada em um ponto, a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{5x}{1 + x^2}$ *no ponto* $(2,2)$.

$*$ *Obs.: o ponto* $(2,2)$ *pertence à curva!*

O coeficiente angular da reta tangente, pela definição de derivada, é dado pela expressão:

$$m = f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{5(2 + h)}{1 + (2 + h)^2} - 2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(2 + h) - 2[1 + (2 + h)^2]}{h[1 + (2 + h)^2]}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{10 + 5h - 2 - 8 - 8h - 2h^2}{h[1 + (2 + h)^2]}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3h - 2h^2}{h[1 + (2 + h)^2]} \; ; * \, Se \; h \to 0, então \; h \neq 0.$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-3 - 2h}{1 + (2 + h)^2}$$

$$= \frac{-3 - 0}{1 + 2^2}$$

$$= -\frac{3}{5}.$$

$Equação \; da \; reta \; tangente$ à $curva \; no \; ponto \; (2,2) \; e \; coeficiente \; angular \; -\frac{3}{5}$:

$$y - 2 = -\frac{3}{5}(x - 2)$$

$$y = -\frac{3}{5}x + \frac{16}{5}$$

1.3 2ª Prova – 01 de Setembro de 2017

Questão 1.

$a)$ *No próximo capítulo estudaremos o conceito de função crescente (uma função é dita crescente num intervalo I se* $f(x_1) < f(x_2)$ *quando* $x_1 < x_2$ *em I) e veremos que uma função é crescente num intervalo I se, e somente se, a derivada de* f *é positiva em qualquer ponto desse intervalo. Determine o(s) intervalo(s) no(s) qual(is) a função* $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1000$ *é crescente.*

$b)$ *Mostre que, para todo número real* $a, a > 0$ *e* $a \neq 1$, *a função* $f(x) = a^{\frac{x^2+1}{x-1}}$ *tem duas tangentes horizontais.*

Questão 2.

$a)$ *Determine os pontos nos quais a função* $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$ *é diferenciável.*

$b)$ *Determine as retas tangentes ao gráfico de* $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ *que passam pelo ponto* $P(-4,0)$.

Questão 3.

$a)$ *Suponha que* f *seja injetora, derivável e que* f^{-1} *seja derivável. Mostre então que* $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$.

$b)$ *Seja* $f(x) = x + e^x$. *Use o item* (a) *para calcular* $(f^{-1})'(1)$.

Questão 4.

$a)$ *Determine o ponto no qual o gráfico da função* $y = \operatorname{arcsec}(x)$ *é interceptado pela reta* $y = |f'(0)|$, *onde* $f(x) = \arccos(x + \operatorname{arctg} x)$.

$b)$ *Encontre a derivada da função inversa da função* $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, *na qual* $y = \sec x$.

Questão 5.

$a)$ *Encontre a derivada da função* $f(x) = 3^{\cos(x^2)} + \operatorname{sen}(2x+1) \,.\, \operatorname{tg}^2(2x)$

$b)$ *Seja* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável, com* $f(0) = 0, f'(0) = 1$ *e* $G(x) = \pi^{f(x)}$. *Calcule* $\lim_{x \to 0} \frac{G(x) - 1}{x}$.

***Questão* 1**

a)No próximo capítulo estudaremos o conceito de função crescente (uma função é dita crescente num intervalo I se $f(x_1) < f(x_2)$ quando $x_1 < x_2$ em I) e veremos que uma função é crescente num intervalo I se, e somente se, a derivada de f é positiva em qualquer ponto desse intervalo. Determine o(s) intervalo(s) no(s) qual(is) a função $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1000$ é crescente.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Dado que f é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, então,

$$f'(x) = 3.x^{3-1} - \frac{3}{2}.2.x^{2-1} - 6.1.x^{1-1} + 0$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \quad D(f') = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 3(x^2 - x - 2)$$
$$f'(x) = 3(x+1)(x-2)$$

O estudo de sinal da função derivada é dado pelo estudo do sinal de uma função parabólica, com duas raízes reais distintas. Logo,

$$- - - - - - (-1) + + + + + + + + + + + \quad 3(x+1)$$
$$- - - - - - - - - - - - - (2) + + + + + + \quad (x-2)$$
$$+ + + + + + (-1) - - - - (2) + + + + + + \quad f'(x) = 3(x+1)(x-2)$$

Pelo estudo do sinal acima, e pela definição de função crescente dada inicialmente, concluímos que $f'(x) > 0$, se $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Portanto f é crescente nos intervalos $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

b)Mostre que, para todo número real a, $a > 0$ e $a \neq 1$, a função $f(x) = a^{\frac{x^2+1}{x-1}}$ tem duas tangentes horizontais.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x \neq 1\}$$

Seja $u = \frac{x^2+1}{x-1}$, então $y = f(u) = a^u$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df}{du} = \frac{d}{du}[a^u] = a^u.\ln a$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2+1}{x-1}\right] = \frac{2x.(x-1) - (x^2+1).1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}.$$

Portanto,

$$f'(x) = a^u.\ln a\,.\frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = a^{\frac{x^2+1}{x-1}}.\ln a.\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} \quad ; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq 1\}$$

Se f possui duas retas tangentes horizontais ao seu gráfico, então devem existir x_1 e x_2, ambos pertecentes ao domínio de f, tais que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$. Isto é, o coeficiente angular da reta tangente, por ser horizontal, é nulo.

$*$ *Obs.*: $\forall x \in D(f), a^{\frac{x^2+1}{x-1}}.\ln a \neq 0.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0\ ;\ x \neq 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4.1.(-1)$$
$$\Delta = 4 + 4$$
$$\Delta = 8$$
$$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 1 - \sqrt{2} \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{matrix}$$

Portanto, existem pontos com abscissas x_1 e x_2, tais que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ e, consequentemente, f possui duas retas tangentes horizontais.

Questão 2

a) Determine os pontos nos quais a função $f(x) = \left|\frac{x-1}{x+2}\right|$ *é diferenciável.*

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq -2\}$$

$$\begin{array}{ll} - - - - - - - - - - (1) + + + + + + + & (x-1) \\ - - - (-2) + + + + + + + + + + + + & (x-2) \\ + + + (-2) - - - - (1) + + + + + + + & \frac{x-1}{x-2} \end{array}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+2}, & x < -2 \text{ ou } x \geq 1 \\ -\frac{x-1}{x+2}, & -2 < x < 1 \end{cases}$$

Como f é uma função definida por partes onde suas sentenças são funções racionais e, portanto, contínuas e diferenciáveis em seus domínios, então f é contínua e diferenciável em $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$.

Analisando a continuidade e a diferenciabilidade de f em -2 e 1, temos:

Dizemos que uma função f é contínua no número a se, somente se,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow \begin{matrix} \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \\ e \\ \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) \end{matrix}$$

$$f(1) = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{x+2} = \frac{\lim_{x\to 1^+}(x-1)}{\lim_{x\to 1^+}(x+2)} = \frac{1-1}{1+2} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{x+2} = -\frac{\lim_{x\to 1^-}(x-1)}{\lim_{x\to 1^-}(x+2)} = -\frac{1-1}{1+2} = -\frac{0}{3} = 0.$$

Como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$, *então* f *é contínua em* 1.

$$f'_+(1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1+h-1}{1+h+2} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h}{h+3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h+3}$$
$$= \frac{\lim_{h\to 0^+} 1}{\lim_{h\to 0^+}(h+3)} = \frac{1}{3}.$$

$$f'_-(1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{1+h-1}{1+h+2} - 0}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{-\frac{h}{h+3}}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^-} -\frac{1}{h+3}$$
$$= -\frac{\lim_{h\to 0^-} 1}{\lim_{h\to 0^-}(h+3)} = -\frac{1}{3}.$$

Como as derivadas laterais em 1 *existe, porém são diferentes, então* f *não é diferenciável em* 1.

Como $-2 \notin D(f)$, *então* f *é descontínua em* -2 *e, portanto,* f *não é diferenciável em* -2.

Portanto, concluimos que f *é contínua em* $(-\infty,-2) \cup (-2,\infty)$ *e* f *é diferenciável em* $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1,\infty)$.

b) Determine as retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ *que passam pelo ponto* $P(-4,0)$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq -1\}$

Equação geral de uma reta que passa pelo ponto $P(-4,0)$:

$$y - 0 = m\big(x - (-4)\big)$$
$$y = m(x+4)$$

Se existe reta tangente ao gráfico de f que passa por P e é tangente à f no ponto $(x, f(x))$, então o coeficiente angular da reta tangente neste ponto é dado por $m = f'(x)$. Logo,

$$f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x.(1)}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$

Substituindo o ponto $(x, f(x))$ e $m = f'(x)$, temos:

$$y = m(x+4)$$

$$f(x) = f'(x).(x+4)$$

$$\frac{2x}{x+1} = \frac{2}{(x+1)^2}.(x+4)\ ;\ \ x \neq -1$$

$$x(x+1) = (x+4)$$

$$x^2 + x = x + 4$$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = -2 \quad e \quad x_2 = 2$$

Logo, as retas tangentes ao gráfico de f nos pontos $A(x_1, f(x_1))$ e $B(x_2, f(x_2))$ passam pelo ponto $P(-4,0)$.

Pontos $A\ (-2,4)$ e $B\left(2, \frac{4}{3}\right)$.

Coeficiente angular das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos A e B:

No ponto A:

$$f'(-2) = \frac{2}{(-2+1)^2} = \frac{2}{(-1)^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Equação da reta tangente: $y = 2(x+4) \implies \boldsymbol{y = 2x + 8}$

No ponto B:

$$f'(2) = \frac{2}{(2+1)^2} = \frac{2}{(3)^2} = \frac{2}{9}.$$

Equação da reta tangente: $y = \frac{2}{9}(x+4) \implies \boldsymbol{y = \frac{2}{9}x + \frac{8}{9}}.$

Questão 3

a) Suponha que f seja injetora, derivável e que f^{-1} seja derivável. Mostre então que $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Se f é uma função invertível, isto é, possui função inversa f^{-1}, então

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

Por derivação implícita e regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left[f\left(f^{-1}(x)\right)\right] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$f'\left(f^{-1}(x)\right).(f^{-1})'(x) = 1$$
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

b) Seja $f(x) = x + e^x$. Use o item (a) para calcular $(f^{-1})'(1)$.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(1)\right)}$$

$$f^{-1}(1) = y$$
$$f\left(f^{-1}(1)\right) = f(y)$$
$$1 = f(y)$$
$$1 = y + e^y$$
$$\therefore y = 0.$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)}$$

$f'(x) = 1 + e^x$
$f'(0) = 1 + e^0$
$f'(0) = 1 + 1 = 2.$

$$\textit{Portanto,} \quad (f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$$

Questão 4

a) Determine o ponto no qual o gráfico da função $y = \operatorname{arcsec}(x)$ é interceptado pela reta $y = |f'(0)|$, onde $f(x) = \arccos(x + \operatorname{arctg} x)$.

$y = \operatorname{arcsec}(x)$; $D(y) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ e $Im(y) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$

Seja $u = x + \operatorname{arctg} x$ e $y = f(u) = \arccos(u)$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$
$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)$$
$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-(x+\operatorname{arctg} x)^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$f'(0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{1-(0+\operatorname{arctg} 0)^2}}.\left(1+\frac{1}{1+0^2}\right)$$
$$f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{1-0}}.(1+1)$$
$$f'(0) = -2.$$

A interseção da função $y = \operatorname{arcsec} x$ *com a reta* $y = |f'(0)| = 2$ *é o ponto*:

$$2 = \operatorname{arcsec} x$$
$$\sec(2) = \sec(\operatorname{arcsec} x)$$
$$\sec(2) = x$$

Ponto $P(\sec(2), 2)$.

b)Encontre a derivada da função inversa da função $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, *na qual* $y = \sec x$.

Seja a função inversa de f *dada por* $f^{-1}: (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, *onde* $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$, *então* $x = \sec(y)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sec y)}$$
$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{\sec y . \operatorname{tg} y}$$

$*$ *Identidade trigonométrica*: $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \therefore \operatorname{tg} y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$.

Como $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, *então* $\operatorname{tg} y > 0$. *Logo,*

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{\sec y . \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

Como dito inicialmente ... se $y = f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec} x$, *então* $x = \sec(y)$. *Portanto,*

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} x] = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Questão 5

a)Encontre a derivada da função $f(x) = 3^{\cos(x^2)} + \operatorname{sen}(2x+1) . \operatorname{tg}^2(2x)$

Seja $g(x) = 3^{\cos(x^2)}$, $h(x) = \operatorname{sen}(2x+1)$ *e* $i(x) = \operatorname{tg}^2(2x)$

$$f(x) = g(x) + h(x).i(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + h'(x).i(x) + h(x).i'(x)$$

$g(x) = 3^{\cos(x^2)}$, *considere* $u = x^2, v = \cos u$ *e* $y = g(v) = 3^v$. *Então,*

$$g'(x) = \frac{dg}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$g'(x) = 3^v.\ln 3.(-\operatorname{sen} u).(2x)$$
$$g'(x) = -2x.3^{\cos(x^2)}.\ln 3.\operatorname{sen}(x^2)$$

$h(x) = \operatorname{sen}(2x+1)$, *considere* $u = 2x+1$ *e* $y = h(u) = \operatorname{sen} u$. *Então,*

$$h'(x) = \frac{dh}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$h'(x) = (\cos u).2$$
$$h'(x) = 2\cos(2x+1)$$

$i(x) = \operatorname{tg}^2(2x)$, *considere* $u = 2x, v = \operatorname{tg} u$ *e* $y = i(v) = v^2$. *Então,*

$$i'(x) = \frac{di}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$i'(x) = 2v.\sec^2 u.2$$
$$i'(x) = 4.\operatorname{tg}(2x).\sec^2(2x)$$

$$f'(x) = -2x.3^{\cos(x^2)}.\ln 3.\operatorname{sen}(x^2) + 2\cos(2x+1).\operatorname{tg}^2(2x) + 4.\operatorname{sen}(2x+1)\operatorname{tg}(2x).\sec^2(2x)$$

b) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivável, com* $f(0) = 0, f'(0) = 1$ *e* $G(x) = \pi^{f(x)}$. *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{G(x)-1}{x}$.

$$G(0) = \pi^{f(0)} = \pi^0 = 1.$$

Pela definição de derivada de uma função em um ponto, temos

$$G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0}$$
$$G'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{G(x) - 1}{x}.$$

Pela Regra da Cadeia, obtemos:

$$G'(x) = \pi^{f(x)}.\ln \pi.f'(x)$$
$$G'(0) = \pi^{f(0)}.\ln \pi.f'(0)$$
$$G'(0) = \pi^0.\ln \pi.1$$
$$G'(0) = \ln \pi.$$

Portanto, $\lim_{x\to 0} \frac{G(x)-1}{x} = G'(0) = \ln \pi.$

1.4 2ª Prova – 02 de Setembro de 2017

Questão 1.

$a)$*Mostre que para todo número real* k *o gráfico da função* $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + k$ *tem duas tangentes paralelas à reta* $y = 2x + k$.

$b)$*Considerando que existe um número real representado por* $\boldsymbol{e}$ *tal que* $\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1$, *mostre que* $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$.

Questão 2.

$a)$*Calcule a derivada de* $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right)$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}$.

Questão 3.

$a)$*Encontre os pontos de interseção das curvas* $x^2 + y^2 = 64$ *e* $x + y = 0$ *e mostre que as retas tangentes às curvas acima são ortogonais nesses pontos.*

$b)$*Onde a reta normal à curva* $x^2 + xy + y^2 = 3$ *no ponto* $(1,1)$ *intercepta-a uma segunda vez?*

Questão 4.

$a)$*Determine uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \operatorname{arccossec}(e^{x+1})$ *no ponto de abscissa* $x = 0$.

$b)$*Calcule a derivada da função* $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}}$.

Questão 5.

$a)$*Usando a definição, calcule a derivada da função* $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$b)$*Mostre que qualquer reta tangente ao gráfico de* $xy = a^2$ *determina com os eixos coordenados um triângulo de área igual a* $2a^2$.

***Questão* 1.**

a)Mostre que para todo número real k o gráfico da função
$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 4x + k$ *tem duas tangentes paralelas* à *reta* $y = 2x + k$.

Como f é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, *então se f possui duas tangentes paralelas* à *reta* $y = 2x + k$ *implica dizer que existem números c e d, com* $c, d \in \mathbb{R}$ *tais que* $f'(c) = f'(d) = 2$.

$$f'(x) = -2x^3 + 5x + 4$$

$f'(-2) = -2.(-2)^3 + 5.(-2) + 4 = 16 - 10 + 4 = 10.$
$f'(-1) = -2.(-1)^3 + 5.(-1) + 4 = 2 - 5 + 4 = 1$
$f'(0) = -2.(0)^3 + 5.(0) + 4 = 0 + 0 + 4 = 4.$

Como f' é *uma função polinomial e, portanto, contínua em* $\mathbb{R}$, *então* f' é *contínua nos intervalos fechados* $[-2,-1]$ *e* $[-1,0]$. *Como* 2 é *um número entre* $f'(-2)$ *e* $f'(-1)$, *assim como, entre* $f'(-1)$ *e* $f'(0)$, *então pelo Teorema do Valor Intermediário existem números c e d, com* $c \in (-2,-1)$ *e* $d \in (-1,0)$ *tais que* $f'(c) = f'(d) = 2$.

Portanto, o gráfico da função f tem duas tangentes paralelas à *reta* $y = 2x + k$.

– – – –

***Questão* 2.**

$a)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right)$.

Sejam $u = x^2 + 3\operatorname{sen} x$, $v = e^u$ *e* $f(v) = \operatorname{arctg}(v)$. *Pela Regra da Cadeia, temos*:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{1+v^2}.e^u.(2x + 3\cos x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+e^{2x^2+6\operatorname{sen} x}}.e^{x^2+3\operatorname{sen} x}.(2x + 3\cos x)$$

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}$.

$f(x) = \operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right)$

$f(0) = \operatorname{arctg}\left(e^{0^2+3.\operatorname{sen} 0}\right) = \operatorname{arctg}(e^0) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

Pela definição de derivada de uma função em um número a, *temos*:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Em $a = 0$, *temos*:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right) - \frac{\pi}{4}}{x}.$$

Onde $f'(x)$ *foi calculado no item* (a). *Logo*,

$$f'(0) = \frac{1}{1+e^{2.(0)^2+6\operatorname{sen} 0}}.e^{0^2+3\operatorname{sen} 0}.(2.0 + 3\cos 0)$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+e^0}.e^0.(0 + 3)$$

$$f'(0) = \frac{1}{1+1}.1.3$$

$$f'(0) = \frac{3}{2}$$

Portanto, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}\left(e^{x^2+3\operatorname{sen} x}\right) - \frac{\pi}{4}}{x} = \dfrac{3}{2}$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Encontre os pontos de interseção das curvas* $x^2 + y^2 = 64$ *e* $x + y = 0$ *e mostre que as retas tangentes às curvas acima são ortogonais nesses pontos.*

Interseção entre as curvas:

$$x^2 + y^2 = 64$$

$$x^2 + (-x)^2 = 64$$
$$2x^2 = 64$$
$$x^2 = 32$$
$$x = \pm 4\sqrt{2}$$
$$\therefore y = \mp 4\sqrt{2}$$

Pontos: $A(4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ *e* $B(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$.

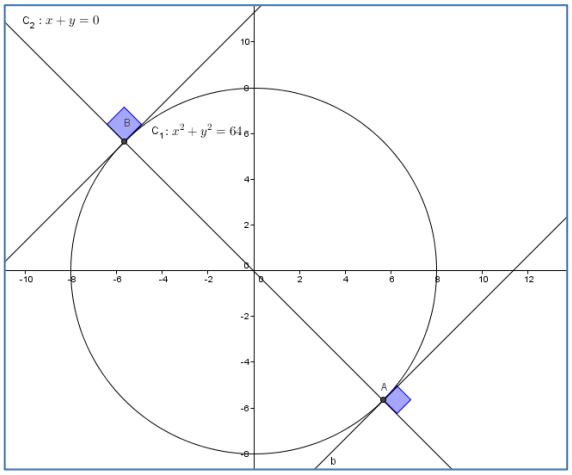
Coeficientes angulares das retas tangentes à curva em ambos os pontos:

Por derivação implícita, temos:

$$C_1: x^2 + y^2 = 64$$
$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(64)$$
$$2x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4\sqrt{2},-4\sqrt{2})} = -\frac{4\sqrt{2}}{(-4\sqrt{2})} = 1 \; ; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4\sqrt{2},4\sqrt{2})} = -\frac{(-4\sqrt{2})}{4\sqrt{2}} = 1$$

$$C_2: x + y = 0$$
$$\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$1 + \frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -1$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4\sqrt{2},-4\sqrt{2})} = -1 \quad ; \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-4\sqrt{2},4\sqrt{2})} = -1$$

Como nos pontos A e B os coeficientes angulares das retas tangentes à curva $x^2 + y^2 = 64$ *são iguais a* 1 *e à curva* $x + y = 0$ *iguais a* -1 *o produto desses coeficiente angulares é igual à* -1 *e, portanto, as retas tangentes à essas curvas nos pontos de interseção são perpendiculares (ortogonais).*



(*Ilustração da questão*)

$b)$ *Onde a reta normal à curva* $x^2 + xy + y^2 = 3$ *no ponto* $(1,1)$ *intercepta-a uma segunda vez?* $*$ *Ponto* $(1,1)$ *pertence à curva!*

Por derivação implícita, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(3)$$
$$2x + y + x.\frac{dy}{dx} + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = -\frac{2 + 1}{1 + 2}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = -1$$

Como $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}$ *é o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto* $(1,1)$, *então o coeficiente angular da reta normal é dado por* $m_n = -\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)}} = 1.$

Equação da reta normal:

$$y - 1 = 1.(x - 1)$$
$$y = x$$

Interseção da reta normal com a curva:

$$x^2 + xy + y^2 = 3$$
$$x^2 + x.x + x^2 = 3$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$\therefore x_1 = -1 \ e \ x_2 = 1$$
$$y_1 = -1 \ e \ y_2 = 1$$

Como o ponto $(1,1)$ *já é o ponto dado, então a reta normal intercepta a curva uma segunda vez no ponto* $(-1,-1)$.

***Questão* 4.**

$a)$ *Determine uma equação reduzida da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \text{arccossec}(e^{x+1})$ *no ponto de abscissa* $x = 0$.

Ponto em questão: $f(0) = \text{arccossec}(e^{0+1}) = \text{arccossec}(e)$. $P(0, \text{arccossec}(e))$

Sejam $u = x + 1, v = e^u$ *e* $f(v) = \text{arccossec}(v)$. *Pela Regra da Cadeia, temos:*

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{v\sqrt{v^2-1}}.e^u.1$$
$$f'(x) = -\frac{e^{x+1}}{e^{x+1}\sqrt{e^{2x+2}-1}}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{e^{2x+2}-1}}$$
$$f'(0) = -\frac{1}{\sqrt{e^2-1}} = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e^2-1}$$

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto P:

$$y - \text{arccossec}(e) = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e^2-1}(x-0)$$
$$y = -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e^2-1}.x + \text{arccossec}(e)$$

b) Calcule a derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{\text{sen}\sqrt[3]{x}}$.

Sejam $u = \sqrt[3]{x}, v = \sin u$ *e* $f(v) = \sqrt[3]{v}$. *Pela Regra da Cadeia, temos:*

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{3}.v^{-\frac{2}{3}}.\cos(u).\frac{1}{3}.x^{-\frac{2}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}}.\cos(u).\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$
$$f'(x) = \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{9\sqrt[3]{x^2.\text{sen}^2\sqrt[3]{x}}}$$

***Questão* 5.**

a) Usando a definição, calcule a derivada da função $f(x) = \text{tg}\, x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{tg}(x+\Delta x)-\text{tg}\, x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\text{tg}\, x+\text{tg}\,\Delta x}{1-\text{tg}\, x\,.\,\text{tg}\,\Delta x}-\text{tg}\, x}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\text{tg}\, x+\text{tg}\,\Delta x-\text{tg}\, x+\text{tg}^2\, x\,.\,\text{tg}\,\Delta x}{1-\text{tg}\, x\,.\,\text{tg}\,\Delta x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{tg}\,\Delta x+\text{tg}^2\, x\,.\,\text{tg}\,\Delta x}{\Delta x(1-\text{tg}\, x\,.\,\text{tg}\,\Delta x)}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \,.\, (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x.\,(1 - \operatorname{tg} x \,.\, \Delta x)}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x}$$

$$* \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} . \frac{1}{\cos \Delta x}\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\cos \Delta x} = 1 \times 1 = 1.$$

$$* \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x} = \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} 0} = \frac{\sec^2 x}{1 - 0} = \sec^2 x.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{tg} \Delta x}$$
$$f'(x) = 1 \times \sec^2 x$$
$$f'(x) = \sec^2 x$$

$b)$ *Mostre que qualquer reta tangente ao gráfico de* $xy = a^2$ *determina com os eixos coordenados um triângulo de área igual a* $2a^2$.

$$y = \frac{a^2}{x} = a^2 x^{-1}$$
$$y' = -a^2 x^{-2}$$
$$y' = -\frac{a^2}{x^2}$$

Considere o ponto (x_0, y_0) *pertencente à curva dada e, portanto,* $x_0 y_0 = a^2$.
O coeficiente angular da reta tangente à curva nesse ponto é $m = -\frac{a^2}{x_0^2}$.

Equação da reta tangente:

$$y - y_0 = -\frac{a^2}{x_0^2}(x - x_0)$$
$$y = -\frac{a^2}{x_0^2} x + \frac{a^2}{x_0} + y_0$$
$$y = -\frac{a^2}{x_0^2} x + y_0 + y_0$$
$$y = -\frac{a^2}{x_0^2} x + 2y_0$$

Interseções com os eixos coordenados:

$*$ *Com o eixo* $-y$:

$$y = -\frac{a^2}{x_0^2} . 0 + 2y_0$$
$$y = 2y_0$$

Ponto $A(0, 2y_0)$

$*$ *Com o eixo-x*:

$$0 = -\frac{a^2}{x_0^2}x + 2y_0$$

$$x = \frac{2y_0x_0^2}{a^2}$$

$$Ponto\ B\left(\frac{2y_0x_0^2}{a^2}, 0\right)$$

Área do triângulo formado pelos pontos A, B *e* $(0,0)$:

$$S = \frac{1}{2}.(2y_0).\left(\frac{2y_0x_0^2}{a^2}\right) = \frac{2y_0^2x_0^2}{a^2} = \frac{2(x_0y_0)^2}{a^2} = \frac{2(a^2)^2}{a^2} = 2a^2.$$

1.5 3ª Prova – 06 de Outubro de 2017

$Questão\ 1.$

$a)\ Calcule\ a\ derivada\ da\ função\ f(x) = x^{x^x}.$

$b)\ Calcule\ \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{x}{n}+1\right)^n.$

$Questão\ 2.$

$a)\ Determine\ o\ valor\ de\ k, de\ modo\ que\ \frac{d}{dx}\left[\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh}(x)}{1-\operatorname{tgh}(x)}}\right] = k.e^{kx}.$

$b)\ Calcule\ a\ derivada\ de\ f(x) = (e^{2x}+7)^{\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}.$

$Questão\ 3.$

$a)\ Uma\ escada\ de\ 10m\ de\ comprimento\ está\ apoiada\ em\ uma\ parede\ e\ desliza\ sobre\ esta\ a\ uma\ taxa\ de\ 1m/h. Calcule\ a\ taxa\ a\ que\ o\ ângulo\ entre\ a\ escada\ e\ a\ parede\ está\ crescendo\ quando\ a\ base\ da\ escada\ está\ a\ 6m\ da\ parede.$

$b)\ Seja\ f(x) = \sqrt{x}. Ache\ dy\ e\ \Delta y\ em\ x = 9, sendo\ dx = \Delta x = -0{,}1\ e\ esboce\ o\ gráfico\ da\ função, mostrando\ dy\ e\ \Delta y.$

$Questão\ 4.$

$a)\ Determine\ a\ derivada\ da\ função\ f(x) = \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(x)}.$

$b) Encontre\ o\ valor\ de\ k\ para\ que\ a\ inclinação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ da\ função\ f(x) = \operatorname{sen}[\ln(1+k.\operatorname{sen}(\pi x))]\ no\ ponto\ x = 1\ seja\ 5.$

$Questão\ 5.$

$a) Determine\ os\ valores\ máximos\ e\ mínimos\ absolutos\ da\ função\ f(x) = 1-(x-3)^{2/3}, no\ intervalo\ [-5{,}4].$

$b) Qual\ das\ retas\ tangentes\ à\ curva\ y = x^3+x^2+x+4, nos\ pontos\ de\ abscissas\ contidas\ no\ intervalo\ [-1{,}1]\ possui\ menor\ inclinação?$

***Questão* 1.**

$a)$ *Calcule a derivada da função* $f(x) = x^{x^x}$.

$$D(f) = \mathbb{R}_+ \; ; \;\; Im(f) = \mathbb{R}_+$$

$$\ln f(x) = \ln x^{x^x}$$
$$\ln f(x) = x^x . \ln x$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{d}{dx}[x^x . \ln x]$$

$*$ *Seja* $g(x) = x^x$, *tal que* $D(g) = \mathbb{R}_+$ *e* $Im(g) = \mathbb{R}_+$. *Então ...*

$$\ln g(x) = \ln x^x$$
$$\ln g(x) = x . \ln x$$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln g(x)] = \frac{d}{dx}[x . \ln x]$$
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = 1 . \ln x + x . \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = g(x)[\ln x + 1] \; ; x > 0$$
$$g'(x) = \frac{d}{dx}[x^x] = x^x . (\ln x + 1)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{d}{dx}[x^x . \ln x]$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^x . (\ln x + 1) . \ln x + x^x . \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = f(x) . [x^x . (\ln x + 1) . \ln x + x^x . x^{-1}]$$
$$f'(x) = x^{x^x}[x^x . (\ln x + 1) . \ln x + x^x . x^{-1}]$$
$$f'(x) = x^{x^x + x}[\ln x . (\ln x + 1) + x^{-1}]$$

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n$.

Seja $b = \frac{x}{n}$, *onde* $n = \frac{x}{b}$. *Se* $n \to +\infty$, *então* $b \to 0$. *Ajustando o limite, temos*:

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n = \lim_{b \to 0} (1 + b)^{x/b} = \lim_{b \to 0} \left[(1 + b)^{1/b}\right]^x = \left[\lim_{b \to 0} (1 + b)^{1/b}\right]^x$$

$*$ *Obs.: Limite Fundamental Exponencial* $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = \lim\limits_{n \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Portanto,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{n} + 1\right)^n = \left[\lim_{b \to 0} (1 + b)^{1/b}\right]^x = e^x.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Determine o valor de* k, *de modo que* $\frac{d}{dx}\left[\sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh}(x)}{1-\operatorname{tgh}(x)}}\right] = k.e^{kx}$.

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}} = \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}.\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1+\operatorname{tgh} x}} = \sqrt[4]{\frac{(1+\operatorname{tgh} x)^2}{1-\operatorname{tgh}^2 x}};$$

$*$ *Identidade Hiperbólica*: $1-\operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{(1+\operatorname{tgh} x)^2}{\operatorname{sech}^2 x}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{\operatorname{sech} x}}$$

$$\frac{1+\operatorname{tgh} x}{\operatorname{sech} x} = \frac{1+\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}}{\frac{2}{e^x+e^{-x}}} = \frac{\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}}{\frac{2}{e^x+e^{-x}}} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

$$f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

Como $f'(x) = k.e^{kx}$, *temos que* $k = \frac{1}{2}$.

$b)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = (e^{2x}+7)^{\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}$. $D(f) = \mathbb{R}$ *e* $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

$$\ln f(x) = \ln(e^{2x}+7)^{\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}$$
$$\ln f(x) = \csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right).\ln(e^{2x}+7)$$

Por derivação logarítmica, temos:

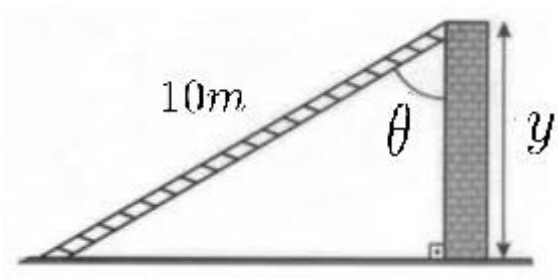
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right).\operatorname{cotg}\left(\sqrt[3]{x^2}\right).\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.\ln(e^{2x}+7) + \csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right).\frac{1}{e^{2x}+7}.e^{2x}.2$$

$$f'(x) = 2f(x).\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right).\left[-\frac{\operatorname{cotg}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{3\sqrt[3]{x}}.\ln(e^{2x}+7) + \frac{e^{2x}}{e^{2x}+7}\right]$$

$$f'(x) = 2(e^{2x}+7)^{\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}.\csc\left(\sqrt[3]{x^2}\right).\left[-\frac{\operatorname{cotg}\left(\sqrt[3]{x^2}\right)}{3\sqrt[3]{x}}.\ln(e^{2x}+7) + \frac{e^{2x}}{e^{2x}+7}\right]$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Uma escada de* $10m$ *de comprimento está apoiada em uma parede e desliza sobre esta a uma taxa de* $1m/h$. *Calcule a taxa a que o ângulo entre a escada e a parede está crescendo quando a base da escada está a* $6m$ *da parede.*



Do enunciado, temos $\frac{dy}{dt} = -1\,m/h$. *A relação entre o ângulo entre a parede e a escada e a altura de apoio da mesma é dada por:*

$$\cos\theta = \frac{y}{10}$$
$$y = 10\cos\theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$
$$-1 = -10\,\text{sen}\,\theta\,.\frac{d\theta}{dt}$$

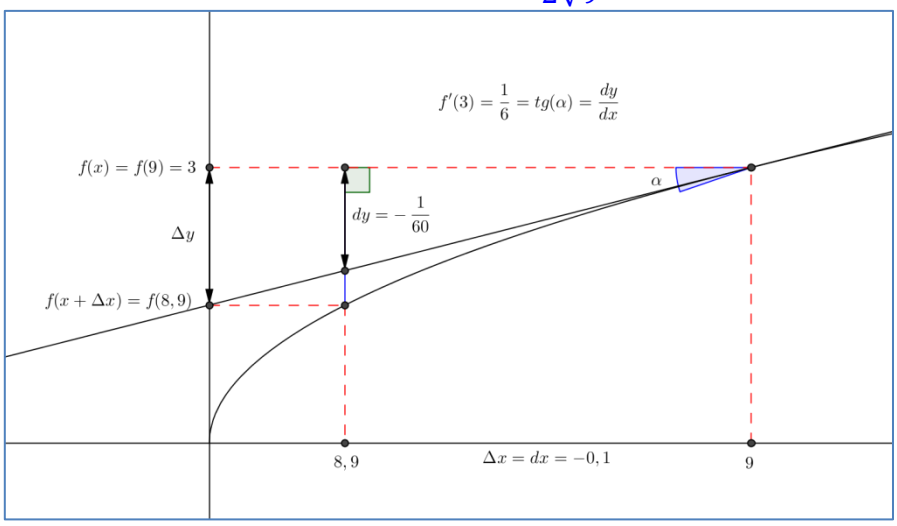
Quando a base da escada está a 6m da parede, temos $\text{sen}\,\theta = \frac{6}{10}$ *e, portanto,*

$$-1 = -10.\frac{6}{10}.\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}rad/h$$

Logo, o ângulo está aumentando à taxa de $\frac{1}{6}rad/h$ *quando a base da escada está a 6m da parede.*

b) Seja $f(x) = \sqrt{x}$. *Ache* dy *e* Δy *em* $x = 9$, *sendo* $dx = \Delta x = -0{,}1$ *e esboce o gráfico da função, mostrando* dy *e* Δy.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(9 - 0{,}1) - f(9) = f(8{,}9) - f(9) = \sqrt{8{,}9} - 3.$$
$$dy = f'(x).dx = f'(9).(-0{,}1) = \frac{1}{2\sqrt{9}}.(-0{,}1) = -\frac{1}{60}.$$



***Questão* 4.**

$a)$ *Determine a derivada da função* $f(x) = \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln(x)}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}.\cos x.\ln(x) - \ln(\operatorname{sen} x).\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\operatorname{cotg}(x).\ln(x) - \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{x}}{(\ln x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{x.\operatorname{cotg}(x).\ln(x) - \ln(\operatorname{sen} x)}{x.(\ln x)^2}$$

$b)$*Encontre o valor de k para que a inclinação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \operatorname{sen}[\ln(1 + k.\operatorname{sen}(\pi x))]$ *no ponto* $x = 1$ *seja* 5.

$f'(x) = \cos[\ln(1 + k.\operatorname{sen}(\pi x))].\dfrac{1}{1 + k.\operatorname{sen}(\pi x)}.k.\cos(\pi x).\pi$

$f'(1) = \cos[\ln(1 + k.\operatorname{sen}(\pi))].\dfrac{1}{1 + k.\operatorname{sen}(\pi)}.k.\cos(\pi).\pi$

$f'(1) = \cos[\ln(1 + k.0)].\dfrac{1}{1 + k.0}.k.(-1).\pi$

$f'(1) = \cos[\ln(1)].(-k\pi)$

$f'(1) = \cos(0).(-k\pi)$

$f'(1) = -k\pi$

$$f'(1) = 5 \Longrightarrow -k\pi = 5 \therefore k = -\frac{5}{\pi}.$$

***Questão* 5.**

$a)$*Determine os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = 1 - (x - 3)^{2/3}$, *no intervalo* $[-5,4]$.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$

Como f *é definida pela diferença entre funções contínuas em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, consequentemente, contínua no intervalo fechado* $[-5,4]$. *Logo, pelo Teorema do Valor Extremo,* f *assume um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $f(d)$ *em certos números* c *e* d *em* $[-5,4]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(-5) = 1 - (-5 - 3)^{2/3} = 1 - (-8)^{2/3} = 1 - \sqrt[3]{64} = 1 - 4 = -3.$

$f(4) = 1 - (4 - 3)^{2/3} = 1 - (1)^{2/3} = 1 - 1 = 0.$

2. *Os valores de f nos números críticos de f em* $(-5,4)$:

"*Um número crítico de uma função f é um número c, no domínio de f, onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe.*"

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-3}}\ ;\ \ D(f') = \{x \in \mathbb{R}\ ; x \neq 3\}$$

$f'(x)$ não existe em $x = 3$, e como este número pertence ao intervalo $(-5,4)$, então 3 é número crítico de f no intervalo.

$f(3) = 1 - (3-3)^{2/3} = 1 - (0)^{2/3} = 1 - 0 = 1.$

Nota-se que $\nexists x \in D(f); f'(x) = 0$ e, portanto, 3 é o único número crítico de f no intervalo analisado.

3. *Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluímos que -3 é o valor mínimo absoluto e 1 é o valor máximo absoluto de f no intervalo $[-5,4]$.*

b) Qual das retas tangentes à curva $y = x^3 + x^2 + x + 4$, nos pontos de abscissas contidas no intervalo $[-1,1]$ possui menor inclinação?

$*$ Em outras palavras, encontre o valor mínimo absoluto de $f'(x)$ no intervalo fechado $[-1,1]$.

$$y = f(x) \Longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$$

Como f' é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$, então f' é contínua no intervalo fechado $[-1,1]$. Logo, pelo Teorema do Valor Extremo, f' assume um valor máximo absoluto $f'(c)$ e um valor mínimo absoluto $f'(d)$ em certos números c e d em $[-1,1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f' nos extremos do intervalo:*

$f'(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$
$f'(1) = 3(1)^2 + 2(1) + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$

2. *Os valores de f' nos números críticos de f' em $(-1,1)$:*

"*Um número crítico de uma função f' é um número c no domínio de f', onde ou $f''(c) = 0$ ou onde $f''(c)$ não existe*". (*Adaptação da definição!*)

$f''(x) = 6x + 2$

Como f' é derivável em $\mathbb{R}$, se f' possui algum número crítico c, então $f''(c)$ existe e, portanto, $f''(c) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow 6x + 2 = 0 \therefore x = -\frac{1}{3} \in (-1,1)$$

$$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

3. *Comparando os valores obtidos concluímos que das retas tangente à curva* $y = x^3 + x^2 + x + 1$, *nos pontos de abscissas contidas no intervalo* $[-1,1]$ *a que tangencia à curva no ponto de abscissa* $x = -1/3$ *possui a menor inclinação, sendo esta inclinação igual ao menor valor obtido nas etapas* 1 *e* 2, *ou seja, o valor mínimo absoluto da inclinação é* $2/3$.

1.6 3ª Prova – 07 de Outubro de 2017

$Questão$ 1.

$a)$ $O\ volume\ de\ um\ icosaedro\ regular\ (poliedro\ convexo\ com\ 20\ faces, 12\ vértices\ e\ 30\ arestas)$ é $dado\ pela\ fórmula$

$$y = \frac{5}{12}\left(3 + \sqrt{5}\right)x^3,$$

$onde\ o\ y\ representa\ o\ volume\ e\ o\ x\ representa\ o\ comprimento\ de\ uma\ aresta. Se\ um\ icosaedro\ possui\ 4\ cm\ de\ aresta\ e\ ela\ sofre\ um\ correspondente\ aumento\ de\ 0{,}1cm, use\ diferenciais\ para\ estimar\ o\ correspondente\ aumento\ do\ volume\ do\ sólido. Este\ aumento\ sofrido\ pelo\ volume\ que\ percentual\ representa\ do\ volume\ inicial?$

$b) Prove\ que\ e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}.$

$Questão$ 2.

$a) Sejam\ u(x)\ e\ v(x)\ funções\ diferenciáveis. Mostre\ que\ se\ y = u^v, então$
$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.v'.\ln(u).$

$b) Use\ diferenciação\ logarítmica\ para\ calcular\ a\ derivada\ da\ função$

$$y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^5}.\sqrt[3]{(x-3)^7}}$$

$Questão$ 3.

$a)$ $Determine\ se\ o\ gráfico\ da\ função\ y = \ln[\sec(x).\mathrm{tg}(x)]\ tem\ reta\ tangente\ horizontal.$

$b) Dada\ a\ função\ f(x) = [\ln(x)]^3, determine\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ do\ gráfico\ de\ f'(x)\ onde\ a\ reta\ normal$ é $vertical.$

$Questão$ 4.

$a) Faça\ uma\ aproximação\ linear\ para\ estimar\ o\ valor\ de\ (1{,}0002)^{50}.$

$b)$ A área $de\ um\ círculo\ de\ raio\ maior\ que\ 5\ diminui\ a\ uma\ taxa\ de\ 1cm^2/s.$
$Calcule\ a\ que\ taxa\ o\ lado\ do\ triângulo\ equilátero\ inscrito\ neste\ círculo\ está\ diminuindo, quando\ o\ círculo\ tem\ 5cm\ de\ raio.$

$Questão$ 5.

$a)$ $Determine\ os\ valores\ máximos\ e\ mínimos\ absolutos\ da\ função$
$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & se - 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2, & se\ 2 < x \leq 3 \end{cases}$ $no\ intervalo\ [1{,}3].$

$b)$ $Seja\ f(x) = \mathrm{tgh}(x)\,.\,Determine\ para\ quais\ valores\ de\ k\ o\ gráfico\ de\ y = f(x)$ $tem\ dois\ pontos\ onde\ a\ reta\ tangente\ tem\ inclinação\ k, ou\ seja, onde\ f'(x) = k$ $tem\ duas\ soluções\ distintas.$

***Questão* 1**

a) O volume de um icosaedro regular (poliedro convexo com 20 faces, 12 vértices e 30 arestas) é dado pela fórmula

$$y = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right)x^3,$$

onde o y representa o volume e o x representa o comprimento de uma aresta. Se um icosaedro possui 4 cm de aresta e ela sofre um correspondente aumento de 0,1cm, use diferenciais para estimar o correspondente aumento do volume do sólido. Este aumento sofrido pelo volume que percentual representa do volume inicial?

Como a variação da medida da aresta é muito pequena quando comparada à medida inicial, podemos dizer que a variação do volume é aproximadamente igual a diferencial do volume. Isto é,

$$\Delta y \approx dy,$$

onde $dy = y'(x).dx$.

$y'(x) = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right).3x^2$

$y'(4) = \frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right).3.(4)^2 = 20\left(3+\sqrt{5}\right).$

$dx = \Delta x = 0{,}1cm = \frac{1}{10}cm.$

Logo,

$$\Delta y \approx dy = 20\left(3+\sqrt{5}\right)\times\frac{1}{10}$$
$$\Delta y \approx 2\left(3+\sqrt{5}\right)cm^3$$

O aumento relativo ou percentual sofrido pelo volume é dado por:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{dy}{y} = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\frac{5}{12}\left(3+\sqrt{5}\right).4^3} = \frac{24}{5\times 4^3} = \frac{24}{5\times 64} = \frac{3}{40} = \frac{3}{4}\times\frac{1}{10} = 0{,}075 = 7{,}5\%.$$

b) Prove que $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$.

Podemos provar o número este limite de duas formas, sendo que ambas são equivalentes: uma partindo da função exponencial e^x *e a outra partindo da função logarítmica* $\ln x$ *(demonstrada no livro e mostrada a seguir).*

** Obs.: A primeira maneira de demonstrar encontra-se no final desta resolução para fim de aprendizado.*

Sabe-se que dado $f(x) = \ln x$, *temos* $f'(x) = 1/x$. *Assim,* $f'(1) = 1$.
Da definição de derivada como um limite, temos:

$$f'(1) = \lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}.\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x}.$$

Por causa de $f'(1) = 1$, *temos*

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = 1$$

Como o limite da função composta $\ln(1+x)^{1/x}$ *existe, então pela propriedade do limite de função composta, temos*

$$\lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

E pela continuidade da função exponencial, temos

$$e^{\ln\left[\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x}\right]} = e^1$$

$$\lim_{x \to 0}(1+x)^{1/x} = e$$

***Questão* 2.**

a) Sejam $u(x)$ *e* $v(x)$ *funções diferenciáveis. Mostre que se* $y = u^v$, *então* $y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.v'.\ln(u)$.

Em outras palavras, mostre o resultado da derivação logarítmica!

Tomando o logarítmo natural em ambos os lados da equação $y = u^v$, *usando as propriedades dos logarítmos e derivando implicitamente, temos*

$$\ln y = \ln u^v$$
$$\ln y = v.\ln u$$
$$\frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}[v.\ln(u)]$$
$$\frac{y'}{y} = v'.\ln(u) + v.\frac{u'}{u}$$
$$\frac{y'}{y} = v.u^{-1}.u' + v'.\ln(u)$$
$$y' = y.[v.u^{-1}.u' + v'.\ln(u)]$$
$$y' = u^v[v.u^{-1}.u' + v'.\ln(u)]$$
$$y' = v.u^{v-1}.u' + u^v.v'.\ln(u).$$

b) Use diferenciação logarítmica para calcular a derivada da função

$$y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^5}.\sqrt[3]{(x-3)^7}}.\ D(y) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 2\ e\ x \neq 3\}$$

$$y = \frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{(x-2)^{\frac{5}{4}}.(x-3)^{\frac{7}{3}}}$$

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{(x-1)^{\frac{2}{5}}}{(x-2)^{\frac{5}{4}}.(x-3)^{\frac{7}{3}}}\right|$$
$$\ln|y| = \ln|x-1|^{\frac{2}{5}} - \ln|x-2|^{\frac{5}{4}} - \ln|x-3|^{\frac{7}{3}}$$
$$\ln|y| = \frac{2}{5}\ln|x-1| - \frac{5}{4}\ln|x-2| - \frac{7}{3}\ln|x-3|$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{5}.\frac{1}{x-1} - \frac{5}{4}.\frac{1}{x-2} - \frac{7}{3}.\frac{1}{x-3}$$
$$y' = y.\left[\frac{2}{5(x-1)} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{7}{3(x-3)}\right]$$
$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^5}.\sqrt[3]{(x-3)^7}}.\left[\frac{2}{5(x-1)} - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{7}{3(x-3)}\right]$$

$*$ *Obs.: Não há necessidade em manipular o termo entre colchetes. Contudo,*

$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^5}.\sqrt[3]{(x-3)^7}}.\left[\frac{24(x-2)(x-3) - 75(x-1)(x-3) - 140(x-1)(x-2)}{60(x-1)(x-2)(x-3)}\right]$$
$$y' = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^5}.\sqrt[3]{(x-3)^7}}.\frac{-191x^2 + 600x - 361}{60(x-1)(x-2)(x-3)}$$

***Questão* 3.**

a) Determine se o gráfico da função $y = \ln[\sec(x).\mathrm{tg}(x)]$ *tem reta tangente horizontal.*

$$D(y) = \left\{x \in \mathbb{R}\,; 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$y' = \frac{1}{\sec(x).\mathrm{tg}(x)}.[\sec(x).\mathrm{tg}(x).\mathrm{tg}(x) + \sec(x).\sec^2(x)]$$
$$y' = \frac{\sec(x)\,[\mathrm{tg}^2(x) + \sec^2(x)]}{\sec(x).\mathrm{tg}(x)}\ ;\ \sec(x) \neq 0, \forall x \in D(y).$$
$$y' = \frac{\mathrm{tg}^2(x) + \sec^2(x)}{\mathrm{tg}(x)}$$

Caso o gráfico da função $y = f(x)$ *tenha reta tangente horizontal em* c*, então* $f'(c) = 0$.

$$y' = 0 \Longrightarrow \sec^2(x) + \mathrm{tg}^2(x) = 0$$
$$1 + \mathrm{tg}^2(x) + \mathrm{tg}^2(x) = 0$$
$$1 + 2\,\mathrm{tg}^2(x) = 0$$
$$\mathrm{tg}^2(x) = -\frac{1}{2}$$

A equação acima não possui solução em $\mathbb{R}$ *e, portanto, o gráfico da função dada não possui reta tangente horizontal.*

b) Dada a função $f(x) = [\ln(x)]^3$*, determine as abscissas dos pontos do gráfico de* $f'(x)$ *onde a reta normal é vertical.*

Em síntese, determine as abscissas dos pontos onde $f''(x) = 0$. *Isto implica dizer que a reta tangente ao gráfico de* $f'(x)$ *é horizontal e, consequentemente, a normal é vertical.*

$$D(f) = \mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 0\}$$

$$f'(x) = 3.[\ln(x)]^2.\frac{1}{x} \qquad D(f') = D(f)$$

$$f''(x) = 3.\left[2.\ln(x).\frac{1}{x}.\frac{1}{x} + \ln^2(x).\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] \qquad D(f'') = D(f') = D(f).$$

$$f''(x) = \frac{3}{x^2}[2\ln(x) - \ln^2(x)]$$

$$f''(x) = \frac{3.\ln(x).[2 - \ln(x)]}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \quad ou \\ 2 - \ln(x) = 0 \end{cases} \quad \therefore x = 1 \;\; ou \;\; x = e^2$$

Portanto, nos pontos cujas abscissas são 1 *e* e^2 *a reta normal ao gráfico de* f' *é vertical.*

***Questão* 4.**

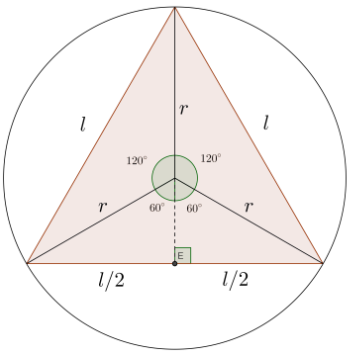
a) Faça uma aproximação linear para estimar o valor de $(1{,}0002)^{50}$.

Tomemos $f(x) = x^{50}$, *tal que* $f(1) = 1$ *e* $f'(x) = 50x^{49}$. *Assim,* $f'(1) = 50$.

A aproximação linear ou linearização de f *em* 1 *é dada por*:

$$L(x) = f(1) + f'(1).(x - 1)$$
$$L(x) = 1 + 50.(x - 1)$$
$$L(1{,}0002) = 1 + 50.(0{,}0002)$$
$$L(1{,}0002) = 1{,}01$$
$$f(1{,}0002) \approx L(1{,}0002)$$
$$(1{,}0002)^{50} \approx 1{,}01.$$

b) A área de um círculo de raio maior que 5 *diminui a uma taxa de* $1cm^2/s$. *Calcule a que taxa o lado do triângulo equilátero inscrito neste círculo está diminuindo, quando o círculo tem* $5cm$ *de raio.*



$$sen(60°) = \frac{(l/2)}{r}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l}{2r}$$

$$l = r\sqrt{3}$$

A relação entre o lado (l) *do triângulo equilátero inscrito no círculo de raio* (r) é:

$$l = r\sqrt{3}$$

Sabe-se que $A_{círculo} = \pi r^2$ *e* $\frac{dA_{círculo}}{dt} = -1\ cm^2/s$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}.\frac{dr}{dt}$$

$$-1 = (2\pi r).\frac{dr}{dt}$$

No instante em que $r = 5cm$, *temos*

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{10\pi} cm/s$$

Por fim,

$$\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dr}.\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = \sqrt{3}.\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = -\frac{\sqrt{3}}{10\pi} cm/s$$

Logo, o lado do triângulo equilátero inscrito no círculo de raio maior que 5, *está diminuindo a uma taxa de* $\sqrt{3}/10\pi\ cm/s$ *quando o círculo tem* 5*cm de raio.*

***Questão* 5.**

a) Determine os valores máximos e mínimos absolutos da função
$f(x) = \begin{cases} 3x - 4, & se - 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 2, & se\ 2 < x \leq 3 \end{cases}$ *no intervalo* [1,3].

A função f *definida por partes é formada por funções polinomiais e, portanto, contínuas e deriváveis em* $\mathbb{R}$. *Logo, podemos afirmar que* f *é contínua em* $(1,2) \cup (2,3)$.

Para que f *seja contínua no intervalo fechado* [1,3], *a função* f *deve satisfazer as seguintes condições*:

1. f *deve ser contínua em* 2 $\left(\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)\right)$;
2. f *deve ser contínua à direita de* 1 $\left(\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)\right)$;
3. f *deve ser contínua à esquerda de* 3 $\left(\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3)\right)$.

Analisando a continuidade de f *em* $x = 2$, *temos*
$f(2) = 3 \times 2 - 4 = 6 - 4 = 2$.
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(3x - 4) = 3 \times 2 - 4 = 6 - 4 = 2$.
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(x^2 - 2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.
Logo, $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ *e ainda*, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. *Portanto*, f *é contínua em* 2.

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x-4) = 3\times 1 - 4 = 3 - 4 = -1.$
$f(1) = 3\times 1 - 4 = 3 - 4 = -1.$
$Como\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1), então\ f\ é\ contínua\ à\ direita\ de\ 1.$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2-2) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7.$
$f(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7.$
$Como\ \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3), então\ f\ é\ contínua\ à\ esquerda\ de\ 3.$

$Assim, f\ é\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [1,3]\ e, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Extremo,$
$f\ assume\ um\ valor\ máximo\ absoluto\ f(c)\ e\ um\ valor\ mínimo\ absoluto\ f(d)\ em$
$certos\ números\ c\ e\ d\ em\ [1,3].$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos$

$1.\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo$

$$\boldsymbol{f(1) = -1 \quad e \quad f(3) = 7}$$

$2.\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ de\ f\ em\ (1,3)$

"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f\ é\ um\ número\ c, no\ domínio\ de\ f, onde\ ou$
$f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$".

$Como\ a\ função\ f\ é\ definida\ por\ partes\ e\ suas\ funções\ são\ contínuas\ e\ deriváveis$
$em\ \mathbb{R}, uma\ expressão\ para\ a\ derivada\ de\ f\ é:$

$$f'(x) = \begin{cases} 3, & se\ 1 < x < 2 \\ 2x, & se\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \therefore x = 0.$

$*\ No\ entanto, 0 \notin (2,3)\ e, portanto,$ não é $número\ crítico\ de\ f\ em\ (1,3).$

$Analisando\ as\ derivadas\ laterais\ de\ f\ em\ x = 2, temos:$

$f'_-(2) = 3$
$f'_+(2) = 2\times 2 = 4.$

$*\ Obs.: Estes\ mesmos\ resultados\ são\ obtidos\ usando\ a\ definição\ de\ derivadas$
$laterais.$

$Como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, porém\ são\ diferentes, então\ f\ não\ é\ derivável$
$em\ 2. Isto\ é, f'(2)\ não\ existe. Ademais, 2 \in (1,3)\ e, portanto,$ é $número\ crítico\ de\ f$
$em\ (1,3).$

$$\boldsymbol{f(2) = 2}$$

$Comparando\ os\ valores\ obtidos\ nas\ etapas\ 1\ e\ 2, concluímos\ que\ 7\ é\ o\ valor$
$máximo\ absoluto\ e - 1\ é\ o\ valor\ mínimo\ absoluto\ de\ f\ em\ [1,3].$

$b)\ Seja\ f(x) = \mathrm{tgh}(x). Determine\ para\ quais\ valores\ de\ k\ o\ gráfico\ de\ y = f(x)$
$tem\ dois\ pontos\ onde\ a\ reta\ tangente\ tem\ inclinação\ k, ou\ seja, onde\ f'(x) = k$
$tem\ duas\ soluções\ distintas.$

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2(x) = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$$
$$f'(x) = k \Longrightarrow \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2 = k\ ;\ \ k > 0$$
$$2^2 = k(e^x + e^{-x})^2$$
$$4 = k\left(e^{2x} + 2 + \frac{1}{e^{2x}}\right)$$
$$4 = k\left(\frac{e^{4x} + 2e^{2x} + 1}{e^{2x}}\right)$$
$$4e^{2x} = k.e^{4x} + 2ke^{2x} + k$$
$$k.e^{4x} + (2k-4)e^{2x} + k = 0$$

Seja $y = e^{2x}; y > 0$. *Então,*

$$k.y^2 + (2k-4).y + k = 0$$
$$\Delta = (2k-4)^2 - 4.k.k$$
$$\Delta = 4k^2 - 16k + 16 - 4k^2$$
$$\Delta = -16k + 16$$

Para que a equação possui duas soluções distintas, $\Delta > 0$. *Ou seja,*

$$-16k + 16 > 0$$
$$\therefore k < 1$$

Como foi definido inicialmente $k > 0$, *então* $0 < k < 1$.

– –

Comentário:

– –

Caso não tenham entendido a questão, peço-lhes que vejam a função $\operatorname{tgh}(x)$. É *uma função ímpar, isto é,* $f(x) = -f(-x)$. *Logo,*

$$f'(x) = -f'(-x).(-1)$$
$$f'(x) = f'(-x)$$

Ou seja, para cada valor x *e seu simétrico* $-x$, *os valores da derivada são iguais, exceto se* $x = -x$, *ou seja, em* $x = 0$ *temos um valor único. De tal modo que,* $f'(0) = 1$. *Mas vale ressaltar que não é qualquer valor de* $k \neq 1$ *que* $f'(x) = k$ *admite duas soluções distintas, como foi resolvido acima.*

$$f'(x) = \operatorname{sech}^2(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Por esta razão (imagem da função f'*) é que o valor de* k *está limitado superiormente por* 1 *e inferiormente por valores positivos maiores que* 0.

$*$ *Obs.: Responder de imediato a questão usando essa informação do conjunto imagem da função derivada não é a forma esperada de resolução. Essa informação é mais valiosa para esclarecimento dos resultados.*

Questão 1b (Informação Adicional)

$*$ *Mostrando o limite fundamental exponencial usando a função* $f(x) = e^x$.

Dado $f(x) = e^x$, *temos* $f'(x) = e^x$ *e, portanto,* $f(0) = f'(0) = e^0 = 1$.

Pela definição de derivada de uma função no ponto, temos:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Façamos a substituição $x = e^h - 1$.
$*$ *Obs.: Se* $h \to 0$, *então* $x \to 0$.

$$x = e^h - 1 \Longrightarrow e^h = 1 + x \therefore h = \ln(1+x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{1}{x}.\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x)^{1/x}} = 1$$

Como o limite existe, podemos dizer que o limite do quociente é o quociente dos limites e, portanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\ln(1+x)^{1/x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} 1}{\lim\limits_{x \to 0} [\ln(1+x)^{1/x}]} = 1$$

Então ...

$$\lim_{x \to 0} \left[\ln(1+x)^{1/x}\right] = 1$$

Seja $g(x) = \ln x$ *e* $h(x) = (1+x)^{1/x}$ *e que* $\lim\limits_{x \to 0} g\big(h(x)\big) = 1$. *Logo, como o limite da função composta existe, podemos dizer que*

$$\lim_{x \to 0} g\big(h(x)\big) = g\left(\lim_{x \to 0} h(x)\right) = 1$$

$$\ln\left[\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right] = 1$$

$$e^{\ln\left[\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x}\right]} = e^1$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

1.7 4ª Prova – 10 de Novembro de 2017

Questão 1.

$a)$ *Prove que para todo* a *e* b, $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$.

$b)$ *Mostre que um polinômio de grau* 3 *tem no máximo três raizes reais.*

Questão 2.

$a)$ *Encontre os intervalos nos quais* $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \cos 2x$ *, com* $0 \leq x \leq 2\pi$, *é crescente ou decrescente, e determine se existirem os valores de máximo e mínimo local.*

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} (3x + 1)^{\operatorname{cotg} 5x}$.

Questão 3.

$a)$ *Determine para quais valores de* α *a equação* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + \alpha}{x - \alpha}\right)^x = e$, *é verdadeira.*

$b)$ *Encontre* f *sabendo que* $f'(t) = 3e^t - \operatorname{senh} t + \dfrac{1}{1 + t^2}$, *com* $f(0) = 1$.

Questão 4. *Em relação a um certo plano cartesiano, uma curva de um autódromo é o gráfico da função* $y = x^2 - 5$, *com* $0 \leq x \leq 3$. *Determine o ponto da curva para o qual um equipamento avaliador de desempenho colocado na origem do sistema deve apontar, levando em conta que a eficiência do equipamento é máxima quando a distância entre ele e o carro é mínima.*

Questão 5. *Considere a função* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ *e determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Prove que para todo* a *e* b, $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$.

$*$ *Se* $a = b$, *então a prova é imediata. Contudo, se* $a \neq b$, *então considere* $f(x) = \operatorname{sen} x$.

f *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$;
2. f *é derivável no intervalo aberto* (a, b);

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\cos(c) = \frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{b - a}$$

Contudo, $-1 \leq \cos(c) \leq 1$, *ou ainda,* $|\cos(c)| \leq 1$. *Com isso, temos*

$$|\cos(c)| = \left|\frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{b - a}\right| \leq 1$$

Portanto,

$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$$

$b)$ *Mostre que um polinômio de grau* 3 *tem no máximo três raizes reais.*

Seja $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *um função polinomial de grau* 3, *contínua e derivável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* p *é contínua em quaisquer intervalos fechados* $I \subset \mathbb{R}$.

Suponhamos que o polinômio $p(x)$ *tenha quatro raízes reais* x_1, x_2, x_3 *e* x_4, *tais que* $p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 0$. *Com isso,* p *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. p *é contínua nos intervalos fechados* $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ *e* $[x_3, x_4]$;
2. p *é derivável nos intervalos abertos* $(x_1, x_2), (x_2, x_3)$ *e* (x_3, x_4);
3. $p(x_1) = p(x_2), p(x_2) = p(x_3)$ *e* $p(x_3) = p(x_4)$

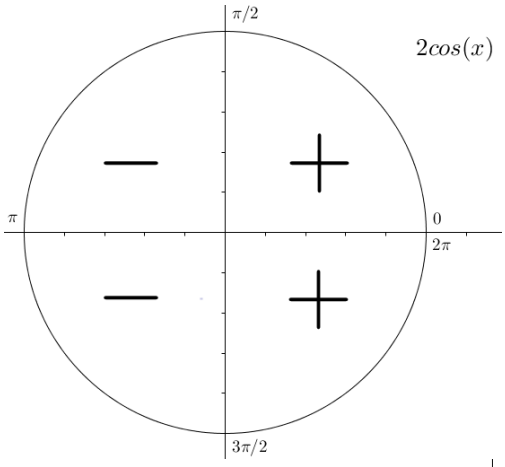
Então, pelo Teorema de Rolle, existem números $x_5 \in (x_1, x_2), x_6 \in (x_2, x_3)$ *e* $x_7 \in (x_3, x_4)$ *tais que* $p'(x_5) = p'(x_6) = p'(x_7) = 0$. *Isto é, a derivada da função* $p(x)$ *possui três raízes reais. No entanto,* $p'(x) = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$ *é uma função polinomial de grau* 2 *que, por Bháskara, possui, no máximo, duas raízes reais.*

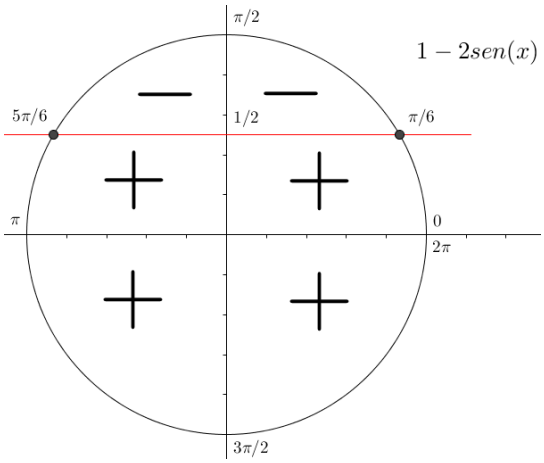
Com a explicação anterior, concluimos que $p'(x)$ *não possui três raízes reais* (x_5, x_6 *e* x_7) *e, por contradição, o polinômio* $p(x)$ *de grau* 3 *possui, no máximo, três raízes reais.*

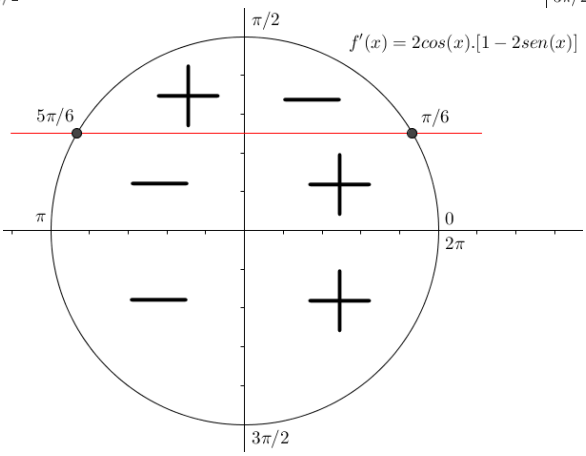
***Questão* 2.**

a) Encontre os intervalos nos quais $f(x) = 2\,\text{sen}\,x + \cos 2x$ *, com* $0 \leq x \leq 2\pi$*, é crescente ou decrescente, e determine se existirem os valores de máximo e mínimo local.*

$$f'(x) = 2\cos x - 2\,\text{sen}(2x)$$
$$f'(x) = 2\cos x - 2.2.\,\text{sen}\,x\,.\cos x$$
$$f'(x) = 2\cos x\,(1 - 2\,\text{sen}\,x)$$







Pelo Teste Crescente/Decrescente, se $f'(x) > 0$ *em um intervalo, então* f *é crescente nele e, se* $f'(x) < 0$ *em um intervalo, então* f *é decrescente nele.*

Logo, pelo estudo do sinal da derivada da função f*, temos:*

f *é crescente em* $(0, \pi/6) \cup (\pi/2, 5\pi/6) \cup (3\pi/2, 2\pi)$ *e*
f *é decrescente em* $(\pi/6, \pi/2) \cup (5\pi/6, 3\pi/2)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, os números críticos $\pi/6$ *e* $5\pi/6$ *estão associados a pontos de máximo local enquanto que os números críticos* $\pi/2$ *e* $3\pi/2$ *estão associados a pontos de mínimo local.*

Valores máximos locais: $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \\ f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\,\text{sen}\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3} = 2.\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{cases}$

Valores mínimos locais: $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 2 + (-1) = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\,\text{sen}\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = -2 + (-1) = -3 \end{cases}$

b) Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\text{cotg}\,5x}$.

Observe que ,quando $x \to 0$, *temos* $3x + 1 \to 1$ *e* $\text{cotg}\,5x \to \pm\infty$ *a depender se* $x \to 0^+$ *ou se* $x \to 0^-$, *assim, o limite é indeterminado. Considere*

$$y = (3x+1)^{\text{cotg}\,5x}$$

Então

$$\ln y = \ln[(3x+1)^{\text{cotg}\,5x}] = \text{cotg}(5x).\ln(3x+1)$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(3x+1)}{\text{tg}(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{3x+1}}{5.\sec^2(5x)} = \frac{3}{5}.$$

Como o $\lim\limits_{x\to 0}\ln y$ *existe, então os limites laterais também existem e são iguais. Logo, usando o fato de que* $y = e^{\ln y}$, *temos*:

$$\lim_{x\to 0}(3x+1)^{\text{cotg}\,5x} = \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\ln y} = e^{\frac{3}{5}}.$$

***Questão* 3.**

a) Determine para quais valores de α *a equação* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x = e$, *é verdadeira.*

Quando $x \to \infty$, *temos* $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} \to 1$, *assim o limite dado é indeterminado. Considere*

$$y = \left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x$$

Então

$$\ln y = \ln\left[\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x\right] = x.\ln\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-\alpha}{x+\alpha}.\frac{-2\alpha}{(x-\alpha)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\alpha x^2}{x^2-\alpha^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{x^2}} = 2\alpha.$$

Usando o fato de $y = e^{\ln y}$, *temos*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\ln y} = e^{2\alpha}$$

Então,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right)^x = e$$
$$e^{2\alpha} = e^1$$
$$\therefore \alpha = \frac{1}{2}.$$

b) Encontre f sabendo que $f'(t) = 3e^t - \operatorname{senh} t + \dfrac{1}{1+t^2}$, *com* $f(0) = 1$.

A antiderivada mais geral da função $f'(t)$ *é dada pela expressão:*

$$f(t) = 3e^t - \cosh t + \operatorname{arctg} t + C$$

Como $f(0) = 1$, *então ...*

$$f(0) = 1$$
$$3e^0 - \cosh 0 + \operatorname{arctg} 0 + C = 1$$
$$3 - 1 + 0 + C = 1$$
$$C = -1$$

Logo,

$$f(t) = 3e^t - \cosh t + \operatorname{arctg} t - 1$$

Questão 4. *Em relação a um certo plano cartesiano, uma curva de um autódromo é o gráfico da função* $y = x^2 - 5$, *com* $0 \le x \le 3$. *Determine o ponto da curva para o qual um equipamento avaliador de desempenho colocado na origem do sistema deve apontar, levando em conta que a eficiência do equipamento é máxima quando a distância entre ele e o carro é mínima.*

Seja $P(x, y)$ *a localização do carro na curva do autódromo e* $O(0,0)$ *a localização do equipamento avaliador de desempenho. A distância* $d(O, P) = f(x)$ *é dada pela expressão:*

$$f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$
$$[f(x)]^2 = x^2 + y^2$$

Sabendo-se que $y = x^2 - 5$, *temos:*

$$[f(x)]^2 = x^2 + (x^2 - 5)^2$$

Considere $F(x) = [f(x)]^2$, *então*

$$F(x) = x^2 + (x^2 - 5)^2\ ;\quad 0 \le x \le 3$$

Como F é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. *Então, F é contínua no intervalo fechado* $[0,3]$. *Logo, pelo Teorema do Valor Extremo, F possui um valor máximo absoluto* $F(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $F(d)$ *em algum número c e d em* $[0,3]$.

Usando o Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de F nos extremos do intervalo:*
$F(0) = 0^2 + (0^2 - 5)^2 = 25.$
$F(3) = 3^2 + (3^2 - 5)^2 = 25.$
2. *Os valores de F nos números críticos de F em* $(0,3)$:
$F'(x) = 2x + 2.(x^2 - 5).(2x)$
$F'(x) = 2x(2x^2 - 9)$

$*$ *Números críticos de F ocorre onde* $F'(x) = 0$, *portanto*, $x = \left\{-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right\}$ *são os números críticos de F. Contudo, apenas* $\frac{3\sqrt{2}}{2} \in (0,3)$. *Logo,*

$$F\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2} - 5\right)^2 = \frac{9}{2} + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$$

Comparando os valores obtidos, concluímos que $19/4$ *é o valor mínimo absoluto e* 25 *é o valor máximo absoluto de F no intervalo* $[0,3]$. *Contudo, a eficiência do equipamento é máxima quando a distância f é mínima, e como* $F(x) = [f(x)]^2$,

$$f(x) = \sqrt{F(x)}$$

temos que $f(3\sqrt{2}/2) = \sqrt{19}/2$ *é o valor mínimo absoluto da distância entre o equipamento e o carro.*

Portanto, o equipamento deve apontar para o ponto da curva cuja abscissa é $x = 3\sqrt{2}/2$ *e a ordenada é* $y = x^2 - 5 = -1/2$. *Ponto* $P(3\sqrt{2}/2, -1/2)$.

***Questão* 5**. *Considere a função* $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ *e determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x \neq 0\}$

Interseções com os eixos coordenados:

$*$ *Como* $0 \notin D(f)$, *então* $f(0)$ *não está definido e, portanto, não há interseção com o eixo das ordenadas.*

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. *Pelo mesmo motivo anterior, concluimos que f não possui interseção com o eixo das abscissas.*

Portanto, f não possui interseções com os eixos coordenados!

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*:

Pelo teste C/D (Crescimento e Decrescimento), se $f' > 0$ *para todo* $x \in I$, *onde I é um intervalo, então f é crescente em I e, se* $f' < 0$ *para todo* $x \in I$, *então f é decrescente em I.*

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x.e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}(x-1)}{x} \quad ; \quad D(f') = D(f).$$

Estudo do sinal da função derivada:

$$\begin{array}{l}
+++++++++++++++++++ \quad e^{\frac{1}{x}} \\
----------(1)++++ \quad (x-1) \\
---------(0)+++++++++ \quad x \\
+++++++++(0)--(1)++++ \quad f'(x)
\end{array}$$

f é crescente onde $f' > 0$, ou seja, f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ e f é decrescente onde $f' < 0$, ou seja, f é decrescente em $(0,1)$.

(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;*

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \quad ; \quad D(f'') = D(f)$$

Estudo do sinal de $f''(x)$:

$$\begin{array}{l}
+++++++++++++++++ \quad e^{\frac{1}{x}} \\
------(0)++++++ \quad x^3 \\
------(0)++++++ \quad f''(x)
\end{array}$$

O gráfico da função f possui concavidade voltada para cima onde $f'' > 0$, ou seja, em $(0, \infty)$ e possui concavidade voltada para baixo onde $f'' < 0$, ou seja, em $(-\infty, 0)$.

(iii) *Assíntotas*

Assíntotas Verticais: $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

$*$ *Obs.: Estas assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função.*

Analisando as descontinuidade de f em 0, temos:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x.e^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x \to 0^-} x \times \lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \times 0 = 0.$$

$*$ *Obs.: Se $x \to 0^-$, então $1/x \to -\infty$ e, portanto, $e^{1/x} \to 0$.*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}}\right) ; \textit{Produto indeterminado } "0 \times \infty"$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(xe^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right).e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$$

Logo, a reta $x=0$ *é assíntota vertical do gráfico de* f.

Assíntotas Horizontais: $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x.e^{\frac{1}{x}}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x.e^{\frac{1}{x}}\right)=-\infty$$

$*$ *Obs.: Se* $x\to\pm\infty$, *então* $\frac{1}{x}\to 0$ *e, portanto,* $e^{\frac{1}{x}}\to 1$.

Logo, o gráfico de f *não possui assíntotas horizontais.*

Assíntotas Oblíquas:

Dizemos que a reta $y=ax+b$ *é assíntota oblíqua ao gráfico da função* f *se, somente se,* $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

Onde $a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, *com* $a\neq 0$, *e* $b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]$.

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x.e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[x.e^{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}};$$

$*$ *Usando a regra da L'Hôspital ...*

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}e^{\frac{1}{x}}=1.$$

Portanto, a reta $y=x+1$ *é assíntota oblíqua ao gráfico da função* f.

(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem*;

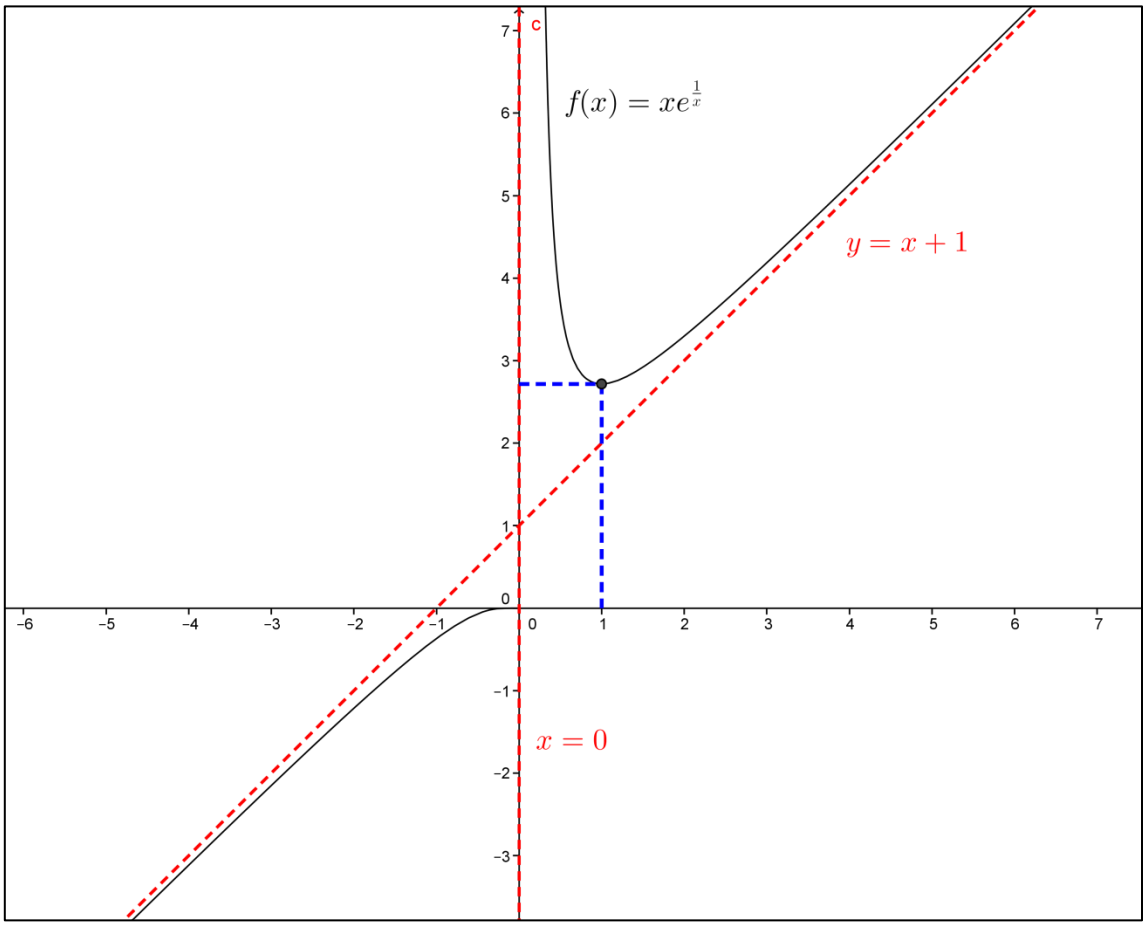
Pelo Teste da Primeira Derivada, $(1,f(1))$ *é um ponto de mínimo relativo. Ponto de mínimo*: $(1,e)$.

Como $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ *e* $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, *então o ponto* $(1,e)$ *não é nem ponto de máximo e nem de mínimo absoluto do gráfico de* f. *Logo,* f *não possui pontos de máximou ou mínimo absolutos.*

(v) $Os\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem;$

$Embora\ ocorra\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ em\ x = 0, o\ mesmo\ não\ pertence\ ao\ domínio\ da\ função\ f. Portanto, f\ não\ possui\ pontos\ de\ inflexão.$

(vi) $O\ gráfico\ de\ f(x).$



1.8 4ª Prova – 11 de Novembro de 2017

Questão 1.

$a)$ *Seja* f *contínua e derivável em* $[0,1]$.*Sabe-se que em* $(0, f(0))$,*o gráfico de* f *tem reta tangente com equação* $y = 2x + 3$,*e em* $(1, f(1))$ *tem equação* $y = 4x + 5$. *Mostre que para algum número* $0 < x < 1$, *a reta tangente ao gráfico de* f *tem equação* $f(x) = 6x + b$, *onde* b *é uma constante*.

$b)$ *Mostre que* $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$, *tem pelo menos uma raiz entre* 0 *e* 1.

Questão 2.

$a)$ *Encontre os intervalos nos quais* $f(x) = \ln|1 - \ln x|$ *é crescente ou decrescente, e determine se existir os valores de máximo e mínimo local.*

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$.

Questão 3.

$a)$ *Determine para quais valores de* α *e* β *a equação* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + \alpha + \dfrac{\beta}{x^2}\right) = 0$ *é verdadeira.*

$b)$ *Encontre a primitiva mais geral da função* $f(x) = \sqrt[4]{x^3} - x\sqrt[3]{x^5} + 3\cosh x$.

Questão 4. *Um triângulo é dito central, se um dos vértices é o centro e dois de seus lados são raios de uma circunferência. Determine o triângulo central de uma circunferência de raio* 1 *de área máxima.*

Questão 5. *Considere a função* $f(x) = x^2 \ln x$ *e determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Seja* f *contínua e derivável em* $[0,1]$.*Sabe-se que em* $(0, f(0))$,*o gráfico de* f *tem reta tangente com equação* $y = 2x + 3$,*e em* $(1, f(1))$ *tem equação* $y = 4x + 5$. *Mostre que para algum número* $0 < x < 1$, *a reta tangente ao gráfico de* f *tem equação* $f(x) = 6x + b$, *onde* b *é uma constante*.

Como a reta $y = 2x + 3$ *é tangente ao gráfico de* f *em* $(0, f(0))$,*então este ponto pertence à reta tangente. Logo,* $f(1) = 2 \times 0 + 3 = 3$.
Assim como a reta $y = 5x + 4$ *é tangente ao gráfico de* f *em* $(1, f(1))$.*Logo,* $f(1) = 5 \times 1 + 4 = 9$.

f *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:
1. f *é contínua em* $[0,1]$;
2. f *é deri´vavel em* $(0,1)$;
Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum número $c \in (0,1)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$
$$f'(c) = \frac{9 - 3}{1}$$
$$f'(c) = 6$$

Portanto, no ponto $(c, f(c))$ *o gráfico de* f *possui uma reta tangente cuja equação é dada por*:

$y - f(c) = f'(c).(x - c)$
$y = 6.(x - c) + f(c)$
$y = 6x - 6c + f(c)$ (*o termo em destaque é uma constante*)
$y = 6x + b$

$b)$ *Mostre que* $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$, *tem pelo menos uma raiz entre* 0 *e* 1.

Seja $f(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - a - b - c$.

Considere $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax - bx - cx + d$, *a primtiva da função* f.
F *é uma função polinomial contínua e derivável em* $\mathbb{R}$.*Logo,* F *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. F *é contínua em* $[0,1]$;
2. F *é derivável em* $(0,1)$;
3. $F(0) = F(1) = d$.

Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x \in (0,1)$ *tal que* $F'(x) = 0$.
Contudo, $F'(x) = f(x)$. *Logo,*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx - a - b - c = 0$$
$$4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$$

***Questão* 2.**

a) Encontre os intervalos nos quais $f(x) = \ln|1 - \ln x|$ *é crescente ou decrescente, e determine se existir os valores de máximo e mínimo local.*

$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 0 \text{ e } x \neq e\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 - \ln x}.\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

$(0) + + + + + + (e) + + + + + +\ \ x$

$(0) - - - - - - (e) + + + + + +\ \ (\ln x - 1)$

$(0) - - - - - - (e) + + + + + +\ \ f'(x)$

Pelo teste C/D, *conclui-se que*

f *é crescente em* (e, ∞) *e* f *é decrescente em* $(0, e)$.

Embora haja mudança no comportamento de decrescente para crescente em $x = e$, *este número não pertence ao domínio de* f. *Portanto, não há valores de máximo ou mínimo local no gráfico da função* f.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x}$. *Indeterminação do tipo* "$\frac{\infty}{\infty}$"

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\operatorname{cossec}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\sec^2 x} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^2 x}{-\operatorname{sen}^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}\ ; \textit{Indeterminação } "\frac{0}{0}" \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-2\cos x\,.\sin x}{-2\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{-2\cos x\,.\sin x}{-2.(-\cos x).\sin x} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (-1) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$*$ *Obs.: Este limite poderia ser resolvido rapidamente usando a informação* $\operatorname{cotg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg} x$. *Contudo, o foco desta avaliação é a Regra de L'Hôspital.*

***Questão* 3.**

a) Determine para quais valores de α *e* β *a equação* $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{x^3} + \alpha + \dfrac{\beta}{x^2}\right) = 0$ *é verdadeira.*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{x^3}+\alpha+\frac{\beta}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x+\alpha x^3+\beta x}{x^3}\right);\ Indeterminação\ "\frac{0}{0}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 2x+\alpha x^3+\beta x}{x^3}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+3\alpha x^2+\beta}{3x^2}$$

Como o limite inicialmente existe e vale zero, então é correto afirmar que

$$\lim_{x\to 0}(2\cos 2x+3\alpha x^2+\beta)=0$$
$$2\cos 0+3\alpha.0^2+\beta=0$$
$$2+0+\beta=0$$
$$\beta=-2.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+3\alpha x^2+\beta}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+3\alpha x^2-2}{3x^2}\ ;\ Indeterminação\ "\frac{0}{0}"$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-4\operatorname{sen} 2x+6\alpha x}{6x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x+6\alpha}{6}$$
$$=\frac{-8\cos 0+6\alpha}{6}$$
$$=\frac{-8+6\alpha}{6}$$
$$=-\frac{4}{3}+\alpha.$$

Como o limite existe e vale zero, então ...

$$-\frac{4}{3}+\alpha=0\ \therefore\ \alpha=\frac{4}{3}.$$

b) Encontre a primitiva mais geral da função $f(x)=\sqrt[4]{x^3}-x\sqrt[3]{x^5}+3\cosh x$.

$$f(x)=x^{\frac{3}{4}}-x.x^{\frac{5}{3}}+3\cosh x$$
$$f(x)=x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{8}{3}}+3\cosh x$$

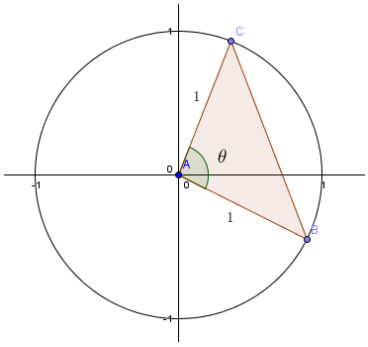
A primitiva mais geral da função f é dada por:

$$F(x)=\frac{1}{1+\frac{3}{4}}.x^{\frac{3}{4}+1}-\frac{1}{1+\frac{8}{3}}.x^{\frac{8}{3}+1}+3\operatorname{senh} x+C$$

$$F(x)=\frac{4}{7}.x^{\frac{7}{4}}-\frac{3}{11}.x^{\frac{11}{3}}+3\operatorname{senh} x+C$$

***Questão* 4.**

Um triângulo é dito central, se um dos vértices é o centro e dois de seus lados são raios de uma circunferência. Determine o triângulo central de uma circunferência de raio 1 de área máxima.



Sabendo-se das medidas de dois lados de um triângulo e o ângulo adjacente a eles, a área do triângulo é dado pela expressão $A = \frac{1}{2} a.b.\operatorname{sen}\theta$ *, onde a e b são as medidas dos lados conhecidos e* θ *o ângulo entre esses lados do triângulo. Pela ilustração acima, temos:*

$$A(\theta) = \frac{1}{2} 1^2.\operatorname{sen}\theta \quad ; \quad \mathbf{0 < \theta < \pi}$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta$$

$*$ *Notoriamente o valor de* θ *que maximiza a função* $A(\theta)$ *é* $\frac{\pi}{2}$ *, de modo que* $\operatorname{sen}\theta$ *assume valor máximo igual a 1 neste valor. Contudo, usando os conceitos do Cálculo 1, pelo teste da Primeira Derivada, temos:*

$$A'(\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta : \quad (0) + + + + + + (\pi/2) - - - - - (\pi)$$

Pelo estudo do sinal da função derivada, concluimos que $\theta = \pi/2$ *é um número crítico associado a um ponto de máximo local.*

***Questão* 5.** *Considere a função* $f(x) = x^2 \ln x$ *e determine:*

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento;*
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;*
(iii) *As assíntotas, se existirem;*
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem;*
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem;*
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

Primeiramente ...

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} ; x > 0\}$.

Interseções com os eixos coordenados: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \therefore x = 1$. *Ponto* $A(1,0)$

(i) *Intervalos de crescimento e decrescimento*:

$f'(x) = 2x.\ln x + x^2.\frac{1}{x}$; $D(f') = D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 0\}$.
$f'(x) = 2x.\ln x + x$
$f'(x) = x(2\ln x + 1)$

Pelo Teste C/D da primeira derivada, temos que f é crescente onde $f' > 0$ e, f é decrescente onde $f' < 0$. Logo, do estudo do sinal de f' obtemos:

$(0) + + + + + + + + + + + + + + + + + \quad x$
$(0) - - - - \left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + + + + + + + + + + \quad (2\ln x + 1)$
$(0) - - - - \left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + + + + + + + + + + \quad f'(x)$

Com isso, conclui-se que f é crescente em $\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty\right)$ e f é decrescente em $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*:

$f''(x) = 2\ln x + 1 + x.\frac{2}{x}$; $D(f'') = D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 0\}$
$f''(x) = 2\ln x + 3$

f possui concavidade voltada para cima onde $f'' > 0$ e concavidade voltada para baixo onde $f'' < 0$. Pelo estudo do sinal de f'', temos:

$(0) - - - - - \left(e^{-\frac{3}{2}}\right) + + + + + + + + + + + \quad f''(x)$

Portanto, f possui concavidade voltada cima em $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}, \infty\right)$ e f possui concavidade voltada para baixo em $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$.

(iii) *Assíntotas*:

$-$*Verticais*: *A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Logo, pelo domínio de f devemos verificar se a descontinuidade em $x = 0$ é uma descontinuidade infinita (que dá nome às assíntotas verticais!):

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2.\ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0.$$

Como o limite existe, então $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico da função f e, portanto, a função não possui assíntotas verticais.

$-$Horizontais: A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal se, somente se,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

Como $D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; x > 0\}$, então nesta verificação de assíntota horizontal levamos em consideração apenas $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2.\ln x = \infty$$

Como o limite não existe, então f não possui assíntotas horizontais!

$-$Oblíquas: A reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua se, somente se,

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0;$$

Onde $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$, com $a \neq 0$.

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2.\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} x.\ln x = \infty.$$

Como o valor de a é indefinido, conclui-se que não há assíntota oblíqua ao gráfico da função f.

$*$ Portanto, não há quaisquer assíntotas no gráfico de f.

(iv) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem:

Resgatando o estudo do sinal da primeira derivada no item (i):

$$(0) - - - - \left(e^{-\frac{1}{2}}\right) + + + + + + + + + + \quad f'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, o ponto de abscissa $x = e^{-1/2}$ é um ponto de mínimo local e, além disso, com base no domínio de f e no comportamento de crescimento e decrescimento temos que $\forall x \in D(f), f(x) \geq f\left(e^{-1/2}\right)$. Portanto, o ponto em questão também é um ponto de mínimo absoluto.

$$f\left(e^{-1/2}\right) = \left(e^{-1/2}\right)^2.\ln\left(e^{-1/2}\right) = e^{-1}.\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$

Ponto de mínimo local e absoluto de f: $B\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e}\right)$

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *então não há valor limitação superior do conjunto* $Im(f)$ *da função* f. *Logo,* f *não possui valores máximos locais ou máximo absoluto.*

(v) *Os pontos de inflexão, se existirem:*

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f *se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de* c.

Pelo estudo do sinal de $f''(x)$, *temos:*

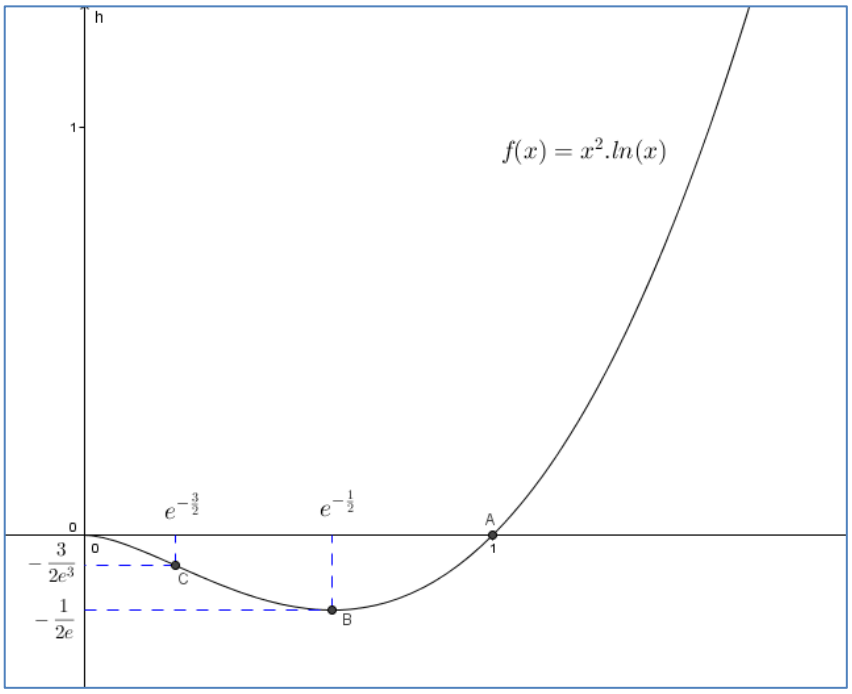
$$(0) - - - - - \left(e^{-\frac{3}{2}}\right) + + + + + + + + + + + \quad f''(x)$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x = e^{-\frac{3}{2}}$ *e este número pertence ao domínio da função, então o ponto* $C\left(e^{-3/2}, f\left(e^{-3/2}\right)\right)$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f.

$$f\left(e^{-3/2}\right) = \left(e^{-3/2}\right)^2 . \ln\left(e^{-3/2}\right) = e^{-3} . \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

Ponto de inflexão: $C\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$.

(vi) *Esboço do gráfico:*



1.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 24 de Novembro de 2017

Questão 1.

$a)$ *Encontre os números a e b para que* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1.$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+9}}{5x}.$

Questão 2.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to\frac{1}{3}}\ln\left[\!\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]\!\right].$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}\sqrt[5]{x}.e^{\cos\frac{\pi}{x}}.$

Questão 3.

$a)$ *Dada a função* $f(x)=\begin{cases} k-x, & se\ x\leq\pi \\ k.\operatorname{sen}x, & se\ x>\pi \end{cases}$. *Encontre os valores de k para que a função f seja contínua.*

$b)$ *Seja m um número real pertencente ao domínio de uma função* $y=f(x)$. *Determine* $f(m)$ *e* $f'(m)$, *sabendo que a equação da tangente ao gráfico de f no ponto em que* $x=m$ é $y=kx+j$.

Questão 4.

$a)$ *Calcule a derivada de* $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(e^x)+x^5}{\ln(\operatorname{tg}^2 x)}.$

$b)$ *Calcule a derivada da função* $f(x)=e^{\sec x}.\csc x$, *no ponto em que* $y=\frac{2e^2}{\sqrt{3}}.$

Questão 5.

$a)$ *Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de* $(x^2+y^2)^3=8x^2y^2$ *no ponto* $(-1,1)$.

$b)$ *Sendo f diferenciável, use diferenciação implícita para mostrar que a derivada de sua função inversa* f^{-1} é $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$. *Usando este resultado, calcule* $(f^{-1})'(1)$, *tal que* $f(x)=x+e^x$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Encontre os números a e b para que* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1.$

Como o limite do quociente existe e $\lim_{x\to 0} x=0$, *então* $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+b}-2\right)=0.$

Logo,

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+b}-2\right)=0$$
$$\lim_{x\to 0}\sqrt{ax+b}-\lim_{x\to 0}2=0$$
$$\sqrt{b}-2=0$$
$$\sqrt{b}=2$$
$$b=4$$

Com a informação anterior, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{ax+4}-2}{x}.\frac{\sqrt{ax+4}+2}{\sqrt{ax+4}+2}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{x.\left(\sqrt{ax+4}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}a}{\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{ax+4}+2\right)}$$
$$=\frac{a}{4}$$

Do enunciado, este limite existe e vale 1, portanto ...

$$\frac{a}{4}=1\Longrightarrow a=4$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+9}}{5x}$. *Indeterminação tipo* "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+9}}{5x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x+9}}{5x}.\frac{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}}{\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}}\right]$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-(x+9)}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{5x\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{5\left(\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x+9}\right)}$$
$$=\frac{\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}1}{5.\left[\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2+9}+\lim_{x\to 0}\sqrt{x+9}\right]}$$
$$=\frac{0-1}{5.\left[\sqrt{9}+\sqrt{9}\right]}$$
$$=-\frac{1}{30}.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \ln\left[\!\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]\!\right]$.

Seja $f(x) = \ln\left[\!\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]\!\right]$. *Então, considerando a composição de funções envolvidas, temos:*

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}\,;\ \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) \geq 1\right\}$$

Uma vez que $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]$ *existe e,*

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\right] = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{72} < 1$$

Então,

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \ln\left[\!\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)\right]\!\right] \text{ não existe!}$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x}.e^{\cos\frac{\pi}{x}}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, *com* $x \neq 0$, *temos*

$$-1 \leq \cos\frac{\pi}{x} \leq 1$$

Tomando a base da função exponencial $e^{\cos\frac{\pi}{x}}$, *sendo positiva e maior que* 1, *então*

$$e^{-1} \leq e^{\cos\frac{\pi}{x}} \leq e^{1}$$

Se $x > 0$, *então* $\sqrt[5]{x} > 0$. *Logo,*

$$\underbrace{\sqrt[5]{x}.e^{-1}}_{\substack{\downarrow \\ f(x)}} \leq \underbrace{\sqrt[5]{x}.e^{\cos\frac{\pi}{x}}}_{\substack{\downarrow \\ g(x)}} \leq \underbrace{\sqrt[5]{x}.e}_{\substack{\downarrow \\ h(x)}}$$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{x}.e^{-1} = \sqrt[5]{0}.e^{-1} = 0.$

$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{x}.e = \sqrt[5]{0}.e = 0.$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0, ***pela direita*** *de* 0, *e* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x)$ *então, pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0.$$

Se $x < 0$, *então* $\sqrt[5]{x} < 0$. *Logo,*

$$\underbrace{\sqrt[5]{x}.e}_{\substack{\downarrow \\ f(x)}} \leq \underbrace{\sqrt[5]{x}.e^{\cos\frac{\pi}{x}}}_{\substack{\downarrow \\ g(x)}} \leq \underbrace{\sqrt[5]{x}.e^{-1}}_{\substack{\downarrow \\ h(x)}}$$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[5]{x}.e = \sqrt[5]{0}.e = 0.$
$\lim_{x\to 0^-} h(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[5]{x}.e^{-1} = \sqrt[5]{0}.e^{-1} = 0.$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de 0, ***pela esquerda*** *de 0, e $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$ então, pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0.$$

Como $\lim_{x\to 0^-} g(x) = \lim_{x\to 0^+} g(x)$, então $\lim_{x\to 0} g(x)$ existe e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[5]{x}.e^{\cos\frac{\pi}{x}} = 0$$

***Questão* 3.**

a) Dada a função $f(x) = \begin{cases} k - x, & se\ x \leq \pi \\ k.\operatorname{sen} x, & se\ x > \pi \end{cases}$. Encontre os valores de k para que a função f seja contínua.

f é uma função definida por partes, onde a função $(k - x)$ é polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$ e a função $k.\operatorname{sen} x$ é trigonométrica, também contínua em $\mathbb{R}$. Logo, em detrimento dos intervalos para os quais estas funções estão definidas, concluimos que f é contínua em $(-\infty, \pi) \cup (\pi, \infty)$.

Para que f seja contínua em $\mathbb{R}$, é condição necessária e suficiente q f seja contínua em $x = \pi$. Logo,

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi) \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi) & (1) \\ e & \\ \lim_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi) & (2) \end{array}$$

$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-} (k - x) = k - \pi$
$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} k.\operatorname{sen} x = k.\operatorname{sen}\pi = 0$

Como a igualdade em (1) está satisfeita, então f será contínua em $x = \pi$ se a igualdade em (2) for satisfeita. Logo,

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi)$$
$$k - \pi = 0$$
$$\therefore k = \pi.$$

b) Seja m um número real pertencente ao domínio de uma função $y = f(x)$. Determine $f(m)$ e $f'(m)$, sabendo que a equação da tangente ao gráfico de f no ponto em que $x = m$ é $y = kx + j$.

Se a reta $y = kx + j$ é tangente ao gráfico da função f em $x = m$, então o ponto de tangencia é $(m, f(m))$ que pertence a reta. Logo,

$$f(m) = km + j$$

A derivada da função f no número $x = m$, dado por $f'(m)$ é numericamente igual ao coeficente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(m, f(m))$. Portanto,

$$f'(m) = k.$$

Questão 4.

a) Calcule a derivada de $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(e^x) + x^5}{\ln(\operatorname{tg}^2 x)}$.

$$f'(x) = \frac{[e^x.\cos(e^x) + 5x^4].\ln(\operatorname{tg}^2 x) - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.2\operatorname{tg} x.\sec^2 x.[\operatorname{sen}(e^x) + x^5]}{[\ln(\operatorname{tg}^2 x)]^2}$$

$$f'(x) = \frac{[e^x.\cos(e^x) + 5x^4].\operatorname{tg} x.\ln(\operatorname{tg}^2 x) - 2\sec^2 x.[\operatorname{sen}(e^x) + x^5]}{\operatorname{tg} x.[\ln(\operatorname{tg}^2 x)]^2}$$

b) Calcule a derivada da função $f(x) = e^{\sec x}.\csc x$ *, no ponto em que* $y = \dfrac{2e^2}{\sqrt{3}}$.

$$f(x) = e^{\sec x}.\csc x = e^2.\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}\,; \sec x = 2 \text{ e } \csc x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\sec x = 2 \Longrightarrow \cos x = \dfrac{1}{2} \therefore x = \dfrac{\pi}{3}$.

$\csc\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Portanto, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2e^2}{\sqrt{3}}$. *Calculando a derivada de f em* $x = \dfrac{\pi}{3}$, *temos:*

$f'(x) = e^{\sec x}.\sec x.\operatorname{tg} x.\csc x + e^{\sec x}.(-\csc x.\operatorname{cotg} x)$

$f'(x) = e^{\sec x}.\csc x.[\sec x.\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x]$

$f'(x) = f(x).[\sec x.\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x]$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{3}\right).\left[\sec\dfrac{\pi}{3}.\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} - \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{3}\right]$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2e^2}{\sqrt{3}}.\left[2.\sqrt{3} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{10e^2}{3}$.

Questão 5.

a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ *no ponto* $(-1,1)$.

Verifica-se que o ponto $(-1,1)$ *pertence à curva dada acima.*

Por derivação implícita, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2)^3 = 8.\frac{d}{dx}(xy)^2$$
$$3.(x^2+y^2)^2.(2x+2yy') = 16.(xy).(1+xy')$$
$$y'.[6y(x^2+y^2)^2 - 16x^2y] = 16xy - 6x(x^2+y^2)^2$$
$$y' = \frac{16xy - 6x(x^2+y^2)^2}{6y(x^2+y^2)^2 - 16x^2y}$$
$$y' = \frac{8xy - 3x(x^2+y^2)^2}{3y(x^2+y^2)^2 - 8x^2y}$$

No ponto $(-1,1)$, *temos*:

$$y'_{(-1,1)} = \frac{-8+3(1+1)^2}{3(1+1)^2-8}$$
$$y'_{(-1,1)} = \frac{-8+12}{12-8}$$
$$y'_{(-1,1)} = \frac{4}{4} = 1.$$

Equação da reta tangente ao gráfico da curva dada no ponto $(-1,1)$:

$$y - 1 = 1.\big(x-(-1)\big)$$
$$y = x + 2$$

$b)$ *Sendo* f *diferenciável, use diferenciação implícita para mostrar que a derivada de sua função inversa* f^{-1} é $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$. *Usando este resultado, calcule* $(f^{-1})'(1)$, *tal que* $f(x) = x + e^x$.

Sabe-se que dada uma função f *invertível, cuja inversa é dada por* f^{-1}, *temos que* $(f \circ f^{-1})(x) = x$. *Isto é,*

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = x$$

Usando o fato de f *é derivável e invertível, tal que* $f'(x) \neq 0, \forall x \in D(f)$, *aplicando a diferenciação implícita, obtemos*:

$$\frac{d}{dx}\big[f\big(f^{-1}(x)\big)\big] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$f'\big(f^{-1}(x)\big).(f^{-1})'(x) = 1$$
$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Sendo $f(x) = x + e^x$, *e* $f'(x) = 1 + e^x$, *com* $f'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *a derivada da inversa de* f *em* $x = 1$ *é dada por*:

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(1)\big)}$$

Sabe-se que $f\big(f^{-1}(1)\big) = 1$. *Assumindo que* $f^{-1}(1) = c$, *temos*:

$$f(c) = 1$$

$$c + e^c = 1$$
$$\therefore c = 0.$$

Ou seja, $f^{-1}(1) = 0$. *Portanto,*

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}.$$

1.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 25 de Novembro de 2017

$Questão\ 1$

$a)\ Calcule\ \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}-1}{x}.$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{|x^2-2x-3|}.$

$Questão\ 2$

$a)\ Calcule\ \lim_{x\to \infty} \frac{[\![x^2+\pi]\!]}{[\![x^2]\!]}.$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2.(sen\, x+cos^3\, x)}{(x^2+1)(x-3)}.$

$Questão\ 3$

$a)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ para\ mostrar\ que\ 2^x=\frac{10}{x}, para\ algum\ x>0.$

$b)\ Usando\ a\ definição\ de\ derivada\ de\ uma\ função, determine\ a\ derivada\ de\ f(x)=\frac{x+1}{x-1}.$

$Questão\ 4$

$a)\ Seja\ f\ uma\ função\ derivável\ em\ \mathbb{R}. Calcule\ a\ derivada\ de\ g(x)=sen\left(e^{f(x^2)}\right).$

$b)\ Considere\ a\ função\ f(x)=\sqrt{tg\, x+\sqrt{tg\, x+\sqrt{tg\, x}}}, e\ determine\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right), dando\ a\ resposta\ sob\ à\ forma\ f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a\sqrt{2}+3}{a\sqrt{2+2\sqrt{2}}}.$

$Questão\ 5$

$a)\ Encontre\ os\ pontos\ no\ gráfico\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=8, onde\ as\ retas\ tangentes\ têm\ inclinação\ igual\ a-1.$

$b)\ Mostre\ que\ a\ reta\ tangente\ à\ curva\ \left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2\ no\ ponto\ (a,b)\ é\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2.$

***Questão* 1.**

$a)$ $Calcule$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(1+e^{\pi}x)^2}+\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}+1}{\sqrt[3]{(1+e^{\pi}x)^2}+\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}+1}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+e^{\pi}x-1}{x.\left[\sqrt[3]{(1+e^{\pi}x)^2}+\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}+1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi}x}{x.\left[\sqrt[3]{(1+e^{\pi}x)^2}+\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}+1\right]};\quad \begin{array}{c}Se\ x\to 0, então\\ x\neq 0.\end{array}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\pi}}{\sqrt[3]{(1+e^{\pi}x)^2}+\sqrt[3]{1+e^{\pi}x}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}e^{\pi}}{\sqrt[3]{\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+e^{\pi}x)\right]^2}+\sqrt[3]{\lim\limits_{x\to 0}(1+e^{\pi}x)}+\lim\limits_{x\to 0}1}$$

$$=\frac{e^{\pi}}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}$$

$$=\frac{e^{\pi}}{3}.$$

$b)$ $Calcule$ $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x+1}{|x^2-2x-3|}$.

$*\ x^2-2x-3=(x+1)(x-3).\quad |x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3, & se\ x\leq -1\ ou\ x\geq 3\\ -(x^2-2x-3), & se -1<x<3\end{cases}.$

$Se\ x\to -1^+, então\ x>-1\ e, portanto, |x^2-2x-3|=-(x^2-2x-3).$

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{|x^2-2x-3|}=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{-(x^2-2x-3)}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+1}{-(x+1)(x-3)};\quad \begin{array}{c}Se\ x\to -1, então\ x\neq -1.\\ Logo, (x+1)\neq 0\end{array}$$

$$=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{-(x-3)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to -1^+}1}{-\lim\limits_{x\to -1^+}x+\lim\limits_{x\to -1^+}3}$$

$$=\frac{1}{-(-1)+3}=\frac{1}{4}.$$

***Questão* 2.**

$a)$ $Calcule$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[\![x^2+\pi]\!]}{[\![x^2]\!]}$.

$Sabe\text{-}se\ que\ \ x-1\leq [\![x]\!]\leq x. Logo, temos$

$$x^2+\pi-1\leq [\![x^2+\pi]\!]\leq x^2+\pi\quad e$$
$$x^2-1\leq [\![x^2]\!]\leq x^2$$

Como todos os membros dessas inequações são funções positivas, e ainda, $x^2+\pi > x^2$. *Portanto,*

$$\underbrace{\frac{x^2+\pi-1}{x^2-1}}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{[\![x^2+\pi]\!]}{[\![x^2]\!]}}_{g(x)} \leq \underbrace{\frac{x^2+\pi}{x^2}}_{h(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\pi-1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{\pi}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{x^2} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1}$$
$$= 1.$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+\pi}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\pi}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{x^2} = 1+0 = 1.$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para qualquer* x *pertencente aos reais e ainda,* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 1$, *pelo Teorema do Confronto, temos* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 1$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[\![x^2+\pi]\!]}{[\![x^2]\!]} = 1.$$

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2.(sen\, x + cos^3\, x)}{(x^2+1)(x-3)}$.

$*$ *Obs.: A soma de funções limitadas é uma função limitada.*
Como a imagem das funções $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos^3 x$ *é limitada ao intervalo* $[-1,1], \forall x \in \mathbb{R}$,
então

$$a \leq \operatorname{sen} x + \cos^3 x \leq b,$$

onde a *e* b *representam os limites inferior e superior da imagem da função* $\operatorname{sen} x + \cos^3 x$, *respectivamente.*
Sabendo-se que $\frac{x^2}{x^2+1} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e se* $x \to -\infty$, *então* $(x-3) < 0$ *temos* $\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} < 0$. *Portanto,*

$$\underbrace{\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}.a}_{h(x)} \geq \underbrace{\frac{x^2.(\operatorname{sen} x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}}_{g(x)} \geq \underbrace{\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}.b}_{f(x)}$$

Logo, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* $x < 3$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{b.x^2}{x^3-3x^2+x-3}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{b}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} \frac{b}{x}}{\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^3}}$$
$$= \frac{0}{1-0+0-0}$$
$$= 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a.x^2}{x^3 - 3x^2 + x - 3}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{a}{x}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3}}$$
$$= \frac{\lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x}}{\lim_{x\to-\infty} 1 - \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} - \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{x^3}}$$
$$= \frac{0}{1-0+0-0}$$
$$= 0.$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *para qualquer* $x < 3$, *e ainda,* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$, *pelo Teorema do Confronto, temos* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.
Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2.(\operatorname{sen} x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)} = 0.$$

***Questão* 3.**

a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que $2^x = \frac{10}{x}$, *para algum* $x > 0$.

Considere a função $f(x) = 2^x - \frac{10}{x}$, *definida pela diferença entre funções contínuas em todos os números do seus domínios e, portanto,* f *é contínua em seu domínio, isto é,* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x \neq 0$.

$$f(1) = 2 - 10 = -8 \quad e \quad f(5) = 32 - 2 = 30$$

Como f *é contínua em* $\mathbb{R} - \{0\}$, *então* f *é contínua no intervalo fechado* $[1,5]$ *e* 0 *é um número entre* $f(1)$ *e* $f(5)$. *Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $x \in (1,5)$, $x > 0$, *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja,*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow 2^x - \frac{10}{x} = 0 \therefore 2^x = \frac{10}{x}, \text{para algum } x > 0 \text{ e } x \in (1,5).$$

b) Usando a definição de derivada de uma função, determine a derivada de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Pela definição de função derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{x+\Delta x+1}{x+\Delta x-1} - \frac{x+1}{x-1}}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+1)(x-1) - (x+\Delta x-1)(x+1)}{\Delta x.[(x+\Delta x-1)(x-1)]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+1)(x-1) + \Delta x(x-1) - (x-1)(x+1) - \Delta x(x+1)}{\Delta x.[(x+\Delta x-1)(x-1)]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x.[(x-1) - (x+1)]}{\Delta x.[(x+\Delta x-1)(x-1)]}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$$
$$= \frac{-2}{(x-1)(x-1)}$$
$$= -\frac{2}{(x-1)^2}.$$

***Questão* 4.**

a) Seja f uma função derivável em $\mathbb{R}$. Calcule a derivada de $g(x) = sen\left(e^{f(x^2)}\right)$.

Seja $u = x^2, v = f(u), z = e^v$ e $y = g(z) = \text{sen}(z)$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dz}.\frac{dz}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$g'(x) = \cos(z).e^v.f'(u).2x$$

$$g'(x) = 2x.f'(x^2).e^{f(x^2)}.\cos\left(e^{f(x^2)}\right)$$

b) Considere a função $f(x) = \sqrt{tg\,x + \sqrt{tg\,x + \sqrt{tg\,x}}}$, e determine $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$, dando a resposta sob à forma $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{a\sqrt{2}+3}{a\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\,x + \sqrt{\text{tg}\,x + \sqrt{\text{tg}\,x}}}}.\left[\sec^2 x + \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\,x + \sqrt{\text{tg}\,x}}}.\left(\sec^2 x + \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\,x}}.\sec^2 x\right)\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2f(x)}.\left[\sec^2 x + \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\,x + \sqrt{\text{tg}\,x}}}.\left(\sec^2 x + \frac{1}{2\sqrt{\text{tg}\,x}}.\sec^2 x\right)\right]$$

Em $x = \frac{\pi}{4}$, temos $\text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ e $\sec^2\frac{\pi}{4} = \text{tg}^2\frac{\pi}{4} + 1 = 1 + 1 = 2$.

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}.\left[2+\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{1}}}.\left(2+\frac{1}{2\sqrt{1}}.2\right)\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}.\left[2+\frac{1}{2\sqrt{2}}.(2+1)\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}.\left[\frac{4\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\sqrt{2}+3}{4\sqrt{2+2\sqrt{2}}}.$$

***Questão* 5.**

a) Encontre os pontos no gráfico $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8$, *onde as retas tangentes têm inclinação igual a* -1.

Por derivação implícita, obtemos:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{d}{dx}(8)$$
$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}.\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

As retas tangentes têm coeficiente angular igual a -1 nos pontos onde

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

Logo,

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow y = x\,; x \neq 0.$$

Voltando à expressão da curva substituindo $y = x$, *temos:*

$$x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 8$$
$$2.x^{\frac{2}{3}} = 8$$
$$x^{\frac{2}{3}} = 4$$
$$x = 4^{\frac{3}{2}}$$
$$x = \pm\sqrt{4^3}$$
$$x = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

Logo, os pontos em questão são $A(-8,-8)$ *e* $B(8,8)$.

$b)$ *Mostre que a reta tangente* à *curva* $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ *no ponto* (a,b) é $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$.

Por derivação implícita, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{d}{dx}(2)$$

$$n.\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}.\frac{1}{a} + n.\left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}.\frac{1}{b}.\frac{dy}{dx} = 0$$

No ponto (a,b), *obtemos*:

$$n.\left(\frac{a}{a}\right)^{n-1}.\frac{1}{a} + n.\left(\frac{b}{b}\right)^{n-1}.\frac{1}{b}.\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} = 0$$

$$\frac{n}{a} + \frac{n}{b}.\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} = 0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} = -\frac{b}{a}$$

Equação da reta tangente à *curva no ponto* (a,b):

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$\frac{y - b}{b} = -\frac{x - a}{a}$$

$$\frac{y}{b} - 1 = -\frac{x}{a} + 1$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$$

1.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 24 de Novembro de 2017

Questão 1.

$a)$ *Encontre a derivada de* $f(x) = \ln\ln\ln x$ *e encontre seu domínio.*

$b)$ *Determine a interseção da reta dada por* $x = \lim_{w\to\infty}(2+w)^{\frac{2}{w}}$, *com o gráfico da função* $y = \log_{\frac{1}{e}} x$.

Questão 2.

$a)$ *Uma válvula despeja água em um reservatório à uma taxa de* $10m^3/min$. *O reservatório tem uma forma cônica com* $16m$ *de profundidade e* $8m$ *de diãmetro. O reservatório apresenta um vazamento. No instante em que a profundidade da água é* $12m$, *observa-se que o nível da água está subindo à uma taxa de* $\frac{1}{3}m/min$. *A que taxa a água está vazando neste instante?*

$b)$ *Estime* $\operatorname{tg} 44°$.

Questão 3.

$a)$ *Seja* f *diferenciável em* $(0,1)$ *e contínua em* $[0,1]$ *com* $f(0) = 0$ *e* $f(1) = 1$. *Mostre que existe* $c \in (0,1)$ *tal que* $f(c) = \frac{1}{2}$. *Use isto para mostrar que existem* x *e* y *em* $(0,1)$ *tais que* $\frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y)} = 2$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Questão 4.

$a)$ *Um sólido é construído acoplando-se a um cilindro circular reto de raio* r *e altura* h, *uma semiesfera de raio* r. *Deseja-se que a área da superfície do sólido seja* 5π. *Determine* r *e* h *para que o volume deste sólido seja máximo.*

$b)$ *Encontre a primitiva mais geral de* $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x} + \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} - \csc^2 x$.

Questão 5.

Considere a função $f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$. *Sabendo que* $f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ *e* $f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$. *Determine:*

(i) *As interseções do gráfico de* f *com os eixos coordenados, caso existam;*
(ii) *Os intervalos de crescimento e decrescimento;*

(iii) $Os\ intervalos\ onde\ a\ concavidade$ é $voltada\ para\ cima\ ou\ para\ baixo$;
(iv) $As\ assíntotas, se\ existirem$;
(v) $Os\ pontos\ de\ máximo\ e\ de\ mínimo\ relativos\ e\ absolutos, se\ existirem$;
(vi) $Os\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem$;
(vii) $O\ gráfico\ de\ f(x)$.

***Questão* 1.**

a) Encontre a derivada de $f(x) = \ln\ln\ln x$ *e encontre seu domínio.*

Considere $u = \ln x$, $v = \ln u$ *e* $y = f(v) = \ln v$. *Pela Regra da Cadeia, temos:*

$$f'(x) = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$f'(x) = \frac{1}{v}.\frac{1}{u}.\frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln x.\ln(\ln x)}$$

Domínio da função derivada: $D(f') = \{x \in \mathbb{R}; x > 1 \text{ e } x \neq e\}$.

b) Determine a interseção da reta dada por $x = \lim_{w\to\infty}(2+w)^{\frac{2}{w}}$, *com o gráfico da função* $y = \log_{\frac{1}{e}} x$.

$$\lim_{w\to\infty}(2+w)^{\frac{2}{w}} = \lim_{w\to\infty} e^{\ln(2+w)^{\frac{2}{w}}} = e^{\lim_{w\to\infty}\frac{2\ln(2+w)}{w}}.$$

$$\lim_{w\to\infty}\frac{2\ln(2+w)}{w} = \lim_{w\to\infty}\frac{2.\frac{1}{2+w}.1}{1} = \lim_{w\to\infty}\frac{2}{2+w} = 0.$$

$$x = \lim_{w\to\infty}(2+w)^{\frac{2}{w}} = e^{\lim_{w\to\infty}\frac{2\ln(2+w)}{w}} = e^0 = 1.$$

$$y = \log_{\frac{1}{e}} x = \log_{\frac{1}{e}} 1 = 0.$$

Insterseção: ponto (1,0).

***Questão* 2.**

a) Uma válvula despeja água em um reservatório à uma taxa de $10m^3/min$. *O reservatório tem uma forma cônica com* 16*m de profundidade e* 8*m de diãmetro. O reservatório apresenta um vazamento. No instante em que a profundidade da água é* 12*m, observa-se que o nível da água está subindo à uma taxa de* $\frac{1}{3}m/min$. *A que taxa a água está vazando neste instante?*

Seja V_e *o volume de água que entre no reservatório,* V *o volumte de água que permanece dentro do reservatório e* V_s *o volume de água que estáa vazando. Logo,*

$$V_s = V_e - V$$

Derivando a expressão em relação ao tempo;

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{dV_e}{dt} - \frac{dV}{dt}$$

Onde,

$\frac{dV_s}{dt} = taxa\ de\ volume\ de\ água\ que\ está\ vazando;$
$\frac{dV_e}{dt} = taxa\ de\ volume\ de\ água\ que\ está\ sendo\ despejando\ no\ reservatório; e$
$\frac{dV}{dt} = taxa\ de\ volume\ de\ água\ que\ permanece\ no\ reservatório.$

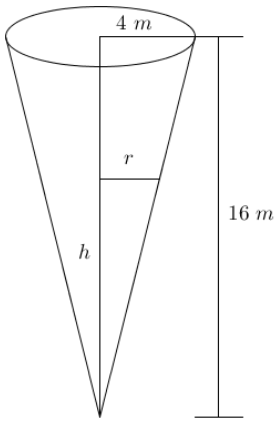
$Do\ enunciado, temos\ \frac{dV_e}{dt} = 10\,m^3/min\ \ e\ que\ \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=12m} = \frac{1}{3}m/min.$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia,$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt}$$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h\ \ ;\ \ por\ semelhança\ de\ triângulos: \frac{16}{4} = \frac{h}{r} \therefore r = \frac{h}{4}.$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{4}\right)^2.h \Longrightarrow V(h) = \frac{1}{48}\pi.h^3$$



$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}.\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi.h^2.\frac{dh}{dt}$$
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=12m} = \frac{1}{16}\pi.12^2.\frac{1}{3}$$
$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=12m} = 3\pi\,m^3/min$$

$Então\ ...$

$$\frac{dV_s}{dt} = \frac{dV_e}{dt} - \frac{dV}{dt}$$
$$\frac{dV_s}{dt} = (10 - 3\pi)\,m^3/min$$

É $a\ taxa\ com\ a\ qua\ está\ vazando\ água\ no\ reservatório\ no\ momento\ em\ que\ a\ profundidade\ da\ água$ é $12m.$

$b)\ Estime\ \mathrm{tg}\,44°.$

$Considere\ f(x) = \mathrm{tg}\,x, de\ modo\ que, f'(x) = \sec^2 x\ .$

$Para\ x = 45° = \frac{\pi}{4}rad, temos\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ \ e\ \ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2. Queremos\ estimar\ f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right).$

$Contudo, para\ pequenos\ valores\ de\ \Delta x, por\ diferenciais, temos:$

$$\Delta y \cong dy$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) \cong f'(x).dx$$

$Com\ x = \frac{\pi}{4}\ e\ \Delta x = dx = -\frac{\pi}{180}, obtemos:$

$$f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right) \cong f'\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) - 1 \cong 2.\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) \cong 1 - \frac{\pi}{90}$$

$Como\ f\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{180}\right) = \operatorname{tg} 44°, então\ \operatorname{tg} 44° \cong 1 - \frac{\pi}{90}.$

***Questão* 3.**

$a)\ Seja\ f\ diferenciável\ em\ (0,1)\ e\ contínua\ em\ [0,1]\ com\ f(0) = 0\ e\ f(1) = 1.$
$Mostre\ que\ existe\ c \in (0,1)\ tal\ que\ f(c) = \frac{1}{2}. Use\ isto\ para\ mostrar\ que\ existem$
$x\ e\ y\ em\ (0,1)\ tais\ que\ \frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y)} = 2.$

$Como\ f$ é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0,1]\ e\ \frac{1}{2}$ é $um\ número\ entre\ f(0)\ e\ f(1),$
$pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, existe\ algum\ número\ c \in (0,1)\ tal\ que$
$f(c) = \frac{1}{2}.$

f é $uma\ função\ que\ satisfaz\ as\ seguintes\ hipóteses:$

$1.\ f$ é $contínua\ em\ [0,c]\ e\ em\ [c,1];$
$2.\ f$ é $derivável\ em\ (0,c)\ e\ em\ (c,1);$

$Então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ existem\ números\ x\ e\ y, com\ x \in (0,c)\ e$
$y \in (c,1)\ tais\ que:$

$$f'(x) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} = \frac{\frac{1}{2} - 0}{c} = \frac{1}{2c}.$$

$$f'(y) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - c} = \frac{1}{2(1 - c)}.$$

$$\frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{2c}} + \frac{1}{\frac{1}{2(1-c)}} = 2c + 2(1 - c) = 2c + 2 - 2c = 2.$$

$Portanto, \frac{1}{f'(x)} + \frac{1}{f'(y)} = 2.$

$b)$ *Calcule* $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Observe que ,quando $n \to 0$, *temos* $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$ *,assim, o limite é indeterminado. Considere*

$$y = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Então

$$\ln y = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

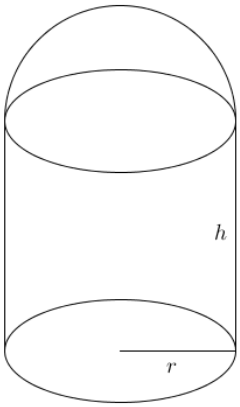
$$\lim_{n\to\infty}\ln y = \lim_{n\to\infty}\left[n.\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}.\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

Como o $\lim_{n\to\infty}\ln y$ *existe e usando o fato de que* $y = e^{\ln y}$, *temos*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} e^{\ln y} = e^{\lim_{n\to\infty}\ln y} = e^1 = e.$$

***Questão* 4.**

$a)$ *Um sólido é construído acoplando-se a um cilindro circular reto de raio* r *e altura* h, *uma semiesfera de raio* r. *Deseja-se que a área da superfície do sólido seja* 5π. *Determine* r *e* h *para que o volume deste sólido seja máximo.*



A área da superfície do sólido construído é dado pela soma das áreas da base e lateral do cilindro com a área da semiesfera. Logo,

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 5\pi$$

$$r^2 + 2rh + 2r^2 = 5$$

$$h = \frac{5 - 3r^2}{2r} \quad (I)\,; \quad r > 0$$

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

$$V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 . \left(\frac{5 - 3r^2}{2r}\right)$$

$$V(r) = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{5\pi}{2} r - \frac{3}{2}\pi r^3$$

$$V'(r) = 2\pi r^2 + \frac{5\pi}{2} - \frac{9\pi}{2} r^2$$

$$V'(r) = \frac{5\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} r^2$$

Estudo do sinal da primeira derivada ...

$$(0) + + + +(1) - - - - - \quad V'(r)$$

Pelo teste da primeira derivada, $r = 1$ *é um número crítico associado a um valor máximo local da função* V *e como* $V(1) \geq V(r)$*, com* $r > 0$*, então* $V(1)$ *é o valor máximo absoluto de* V*. Logo,*

$$r = 1 \Longrightarrow h = \frac{5 - 3}{2} = 1 \therefore r = h = 1$$

Para $r = h = 1$ *o sólido terá volume máximo.*

b) Encontre a primitiva mais geral de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x} + \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}} - \csc^2 x.$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}-1} - 2x^{\frac{1}{3}-1} + e^{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}} . 2 + \frac{1}{2} . \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} - \csc^2 x$$

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{2}{3}} + e^{\sqrt{x}} . \frac{1}{2\sqrt{x}} . 2 + \frac{1}{2} . \frac{2x}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} - \csc^2 x$$

A primitva mais geral de $f(x)$ *é dada por:*

$$F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 2e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(x^2) + \operatorname{cotg} x + C$$

***Questão* 5.**

Considere a função $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$. *Sabendo que* $f'(x) = \dfrac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$ *e* $f''(x) = \dfrac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$. *Determine*:

(i) *As interseções do gráfico de* f *com os eixos coordenados, caso existam*;
(ii) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(iii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iv) *As assíntotas, se existirem*;
(v) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem*;
(vi) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vii) *O gráfico de* $f(x)$.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$. *Obs.*: f *é uma função ímpar*.

(i) *As interseções do gráfico de* f *com os eixos coordenados, caso existam*;

$f(0) = 0$ *e* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. *Interseção com os eixos coordenados*: $A(0,0)$

(ii) *Intervalos de crescimento e decrescimento*:

$$f'(x) = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

Pelo Teste C/D da primeira derivada, temos que f *é crescente onde* $f' > 0$ *e,* f *é decrescente onde* $f' < 0$. *Logo, do estudo do sinal de* f' *obtemos*:

$$\begin{array}{ll}
+++++++++++++(0)++++++++++++++ & x^2 \\
---(-\sqrt{3})+++++++++++++++(\sqrt{3})--- & (3-x^2) \\
+++++++++(-1)++++++(1)+++++++ & (1-x^2)^2 \\
---(-\sqrt{3})++(-1)++(0)++(1)++(\sqrt{3})--- & f'(x)
\end{array}$$

Com isso, conclui-se que f *é crescente em* $(-\sqrt{3},-1) \cup (-1,1) \cup (1,\sqrt{3})$ *e* f *é decrescente em* $(-\infty,-\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3},\infty)$.

(iii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}$$

f *possui concavidade voltada para cima onde* $f'' > 0$ *e concavidade voltada para baixo onde* $f'' < 0$. *Pelo estudo do sinal de* f'', *temos*:

$$\begin{array}{ll}
----------(0)++++++++++++ & 2x \\
+++++++++++++++++++++++++++++ & (x^2+3) \\
----(-1)++++++++++(1)----- & (1-x^2)^3
\end{array}$$

$$+ + + + (-1) - - - - (0) + + + + (1) - - - - - \quad f''(x)$$

Portanto, f possui concavidade voltada cima em $(-\infty,-1) \cup (0,1)$
e f possui concavidade voltada para baixo em $(-1,0) \cup (1,\infty)$.

(iv) *Assíntotas*:

Verticais: A reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Logo, pelo domínio de f devemos verificar se a descontinuidade em $x = \pm 1$ *é uma descontinuidade infinita*:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{-1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1-x^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = -\infty \quad e \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{-1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1-x^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = \infty$$

Logo, a reta $x = -1$ *é assíntota vertical do gráfico da função* f.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1-x^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty \quad e \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overbrace{x^3}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{1-x^2}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = \infty$$

Logo, a reta $x = 1$ *é assíntota vertical do gráfico da função* f.

Horizontais: A reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se, somente se,*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{2}x\right) = \infty$$

Como o limite não existe, então f não possui assíntotas horizontais!

Oblíquas: A reta $y = ax + b$ *é uma assíntota oblíqua se, somente se,*

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0;$$

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2} = -x + \frac{x}{1-x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-x)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{-2x}=0;$$

Portanto, a reta $y=-x$ é assíntota oblíqua do gráfico da função f.

(v) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem:*

Resgatando o estudo do sinal da primeira derivada:

$$---\left(-\sqrt{3}\right)++(-1)++(0)++(1)++\left(\sqrt{3}\right)---\quad f'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, o ponto de abscissa $x=-\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo local e o ponto de abscissa $x=\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local. Contudo, conforme analisado anteriormente, $\lim_{x\to1^+}f(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to1^-}f(x)=\infty$. Portanto, f não possui valores máximos ou mínimos absolutos.

Como f é uma função ímpar, isto é, $f(x)=-f(-x)$, então $f\left(\sqrt{3}\right)=-f\left(-\sqrt{3}\right)$.

$$f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^3}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{3\sqrt{3}}{3-1}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\therefore f\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Ponto de mínimo local: $B\left(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Ponto de máximo local: $C\left(\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Obs.: Embora 0 seja um número crítico de f, não ocorre mudança no sinal da derivada de f em torno de 0 e, portanto, $\left(0,f(0)\right)$ não é ponto nem de máximo e nem de mínimo local.

(vi) *Os pontos de inflexão, se existirem:*

Dizemos que o ponto $\left(c,f(c)\right)$ é ponto de inflexão do gráfico da função f se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de c.

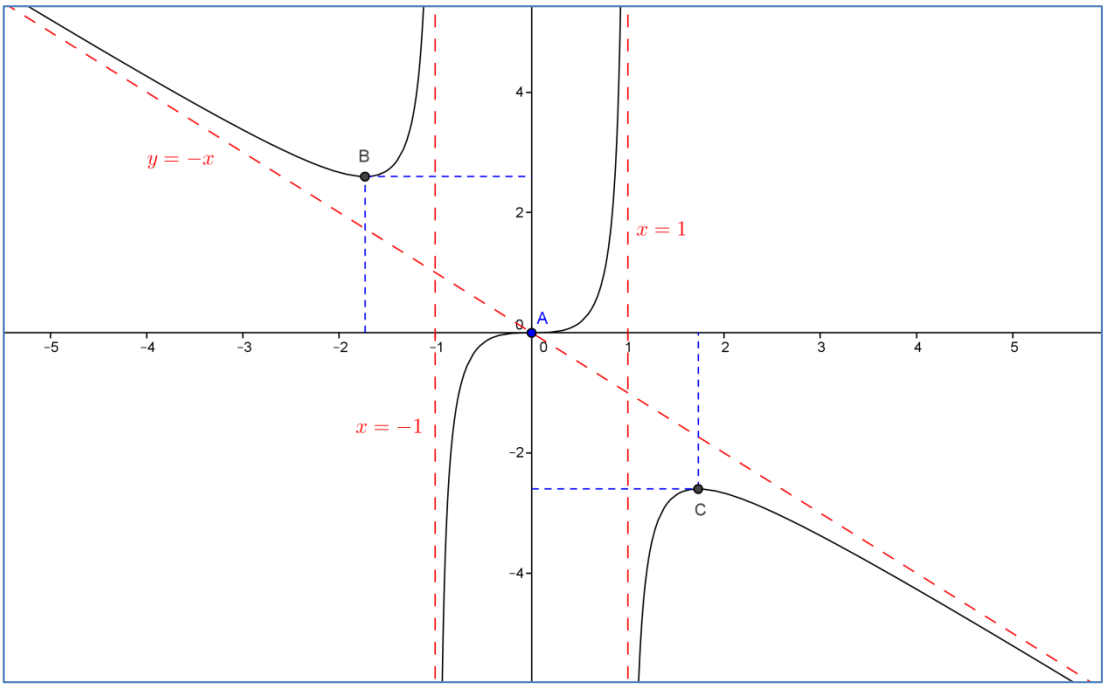
Pelo estudo do sinal de $f''(x)$, temos:

$$++++(-1)----(0)++++(1)-----\quad f''(x)$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x=0$ e este número pertence ao domínio da função, então o ponto $(0,0)$ é ponto de inflexão do gráfico da função f.

Embora ocorra mudança na direção da concavidade do gráfico de f em torno de $x=-1$ e de $x=1$, estes números não pertencem ao domíni de f, logo não há pontos nessas abscissas.

$(vii)\ Esboço\ do\ gráfico$:



1.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 25 de Novembro de 2017

Questão 1

$a)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}$ *e encontre o domínio da função obtida.*

$b)$ *Determine a interseção da reta dada por* $y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$, *com o gráfico da função* $y = \log_2 x$.

Questão 2.

$a)$ *Uma solução está passando por um funil cônico de* $24cm$ *de profundidade e* $16cm$ *de diâmetro. A solução filtrada cai em um recipiente cilíndrico de* $12cm$ *de diâmetro. A que taxa o nível da solução está subindo no cilindro, quando a profundidade da solução no filtro é* $12cm$, *se seu nível está descendo a uma taxa de* $1\,cm/min$?

$b)$ *Considere a curva definida pela equação* $x^2y + 3\ln(1-y) + x^4 = 1$. *Calcule* f' *e encontre a aproximação linear à curva no ponto* $(1,0)$.

Questão 3.

$a)$ *Mostre que existe um* $x \in (0,1)$ *tal que* $5x^4 - 4x + 1 = 0$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Questão 4.

$a)$ *Dois pontos* A *e* B *estão diametralmente opostos nas margens de um lago circular de* $1km$ *de diâmetro. Um homem deseja ir do ponto* A *até o ponto* B. *Ele pode remar à* $2\,km/h$ *e caminhar à* $4km/h$. *Encontre o menor tempo possível que esse homem gasta para ir de* A *até* B.

$b)$ *Encontre a primitiva mais geral de* $f(x) = \pi\sqrt[3]{x^7} + \frac{e^x}{1+4e^x} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} + \frac{x^2}{1+x^6}$.

Questão 5. *Considere a função* $f(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$. *Sabendo que* $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ *e* $f''(x) = \dfrac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, *determine*:

(i) *As interseções do gráfico de* f *com os eixos coordenados, caso existam*;
(ii) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(iii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iv) *As assíntotas, se existirem*;

(v) $Os\ pontos\ de\ máximo\ e\ de\ mínimo\ relativos\ e\ absolutos, se\ existirem;$
(vi) $Os\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem;$
(vii) $O\ gráfico\ de\ f(x).$

***Questão* 1.**

$a)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = \dfrac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$ *e encontre o domínio da função obtida.*

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$
Imagem da função f: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$, *ou ainda*, $Im(f) = \mathbb{R}_+$

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\right]$$
$$\ln f(x) = \ln(x+1)^2 + \ln(x-1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x+4)^3 - \ln e^x$$
$$\ln f(x) = 2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{d}{dx}\left[2\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x-1) - 3\ln(x+4) - x\right]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\left[\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right]$$

Domínio da função derivada: $D(f') = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$

$b)$ *Determine a interseção da reta dada por* $y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^x$, *com o gráfico da função* $y = \log_2 x$.

$$y = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x ;$$ *Seja* $n = x+1 \Longrightarrow x = n-1$. *Se* $x \to +\infty$, *então* $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1}\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \\
&= e \times 1 \\
&= e.
\end{aligned}$$

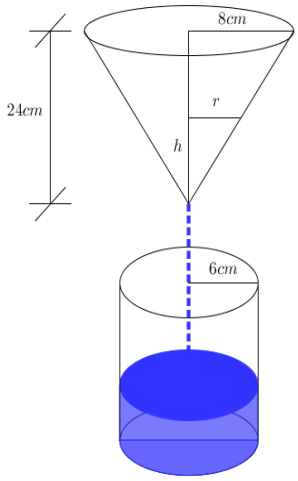
$y = \log_2 x \Longrightarrow e = \log_2 x \therefore x = 2^e$. *Interseção: ponto* $(2^e, e)$.

***Questão* 2.**

a) Uma solução está passando por um funil cônico de 24cm de profundidade e 16cm de diâmetro. A solução filtrada cai em um recipiente cilíndrico de 12cm de diâmetro. A que taxa o nível da solução está subindo no cilindro, quando a profundidade da solução no filtro é 12cm, se seu nível está descendo a uma taxa de 1 cm/min?

Sabe-se que a quantidade de solução, isto é, o volume filtrado pelo funil é o igual ao volume que está entrando no cilindro. Portanto, a taxa de variação do volume no funil cônico é igual à taxa de variação do volume no cilindro. Ou seja,

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = \frac{dV_{cilindro}}{dt}$$



Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = \frac{dV_{cone}}{dh} \cdot \frac{dh_{cone}}{dt}$$

Por semelhança de triângulo, temos $\frac{24}{8} = \frac{h}{r} \Longrightarrow r = \frac{h}{3}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h$$
$$V(h) = \frac{\pi}{27}h^3$$
$$\frac{dV_{cone}}{dh} = \frac{\pi}{9}h^2$$

No momento em que a profundidade da solução é 12cm, $\frac{dV_{cone}}{dh} = 16\pi\, cm^3/cm$ *e* $\frac{dh_{cone}}{dt} = 1\, cm/min$. *Logo, a taxa de variação do volume no funil cônico é:*

$$\frac{dV_{cone}}{dt} = 16\pi\ cm^3/min$$

Com relação ao recipiente cilíndrico, temos:

$$\frac{dV_{cilindro}}{dt} = \frac{dV_{cilindro}}{dh} \cdot \frac{dh_{cilindro}}{dt}$$

Sabe-se que o volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ *e, portanto,* $\frac{dV}{dh} = \pi r^2$.

Logo,

$$\frac{dV_{cilindro}}{dt} = \pi r^2 . \frac{dh_{cilindro}}{dt}$$

$$16\pi = \pi.6^2.\frac{dh_{cilindro}}{dt}$$
$$\frac{dh_{cilindro}}{dt} = \frac{4}{9}cm/min$$

Portanto, o nível da solução está subindo no cilindro a taxa de $4/9\ cm/min$.

$b)$ *Considere a curva definida pela equação* $x^2y + 3\ln(1-y) + x^4 = 1$. *Calcule* f' *e encontre a aproximação linear à curva no ponto* $(1,0)$.

Ponto $(1,0)$ *pertence à curva. Por derivação implícita, temos*:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}[3\ln(1-y)] + \frac{d}{dx}(x^4) = \frac{d}{dx}(1)$$
$$2xy + x^2.\frac{dy}{dx} + 3.\frac{1}{1-y}.\left(-\frac{dy}{dx}\right) + 4x^3 = 0$$
$$\left(x^2 - \frac{3}{1-y}\right).\frac{dy}{dx} = -(2xy + 4x^3)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(2xy+4x^3)(1-y)}{x^2(1-y)-3}$$

No ponto $(1,0)$: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,0)} = -\frac{(0+4)(1-0)}{1(1-0)-3} = \frac{-4}{-2} = 2.$

A aproximação linear à curva no ponto $(1,0)$ *é a linearização, ou melhor, reta tangente à curva no ponto* $(1,0)$.

Equação da reta tangente:

$$y - 0 = 2(x-1)$$
$$y = 2x - 2$$

***Questão* 3**.

$a)$ *Mostre que existe um* $x \in (0,1)$ *tal que* $5x^4 - 4x + 1 = 0$.

Seja $f(x) = 5x^4 - 4x + 1$. *Considere* $F(x) = x^5 - 2x^2 + x + C$, *a primtiva mais geral da função* f.

F *é uma função polinomial contínua e derivável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* F *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. F *é contínua em* $[0,1]$;
2. F *é derivável em* $(0,1)$;
3. $F(0) = F(1) = C$.

Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x \in (0,1)$ *tal que* $F'(x) = 0$. *Contudo,* $F'(x) = f(x)$. *Logo,*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow 5x^4 - 4x + 1 = 0$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Observe que ,quando $x \to 0^+$, *temos* $1/\ln x \to 0$ *e* $\operatorname{sen} x \to 0$, *assim, o limite é indeterminado. Considere*

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Então

$$\ln y = \ln\left[(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = \frac{1}{\ln x}.\ln(\operatorname{sen} x)$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

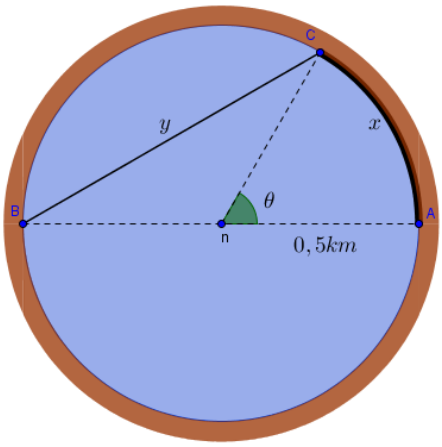
$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}.\cos x\right) = 1.$$

Como o $\lim_{x\to 0^+} \ln y$ *existe, e usando o fato de que* $y = e^{\ln y}$, *temos:*

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y} = e^1 = e.$$

***Questão* 4.**

$a)$ *Dois pontos A e B estão diametralmente opostos nas margens de um lago circular de* $1km$ *de diâmetro. Um homem deseja ir do ponto A até o ponto B. Ele pode remar à* $2\,km/h$ *e caminhar à* $4\,km/h$. *Encontre o menor tempo possível que esse homem gasta para ir de A até B.*



Considere que o trecho caminhado pelo homem seja representado pelo arco de medida x, medido a partir do ponto A até um certo ponto C, e seja y a o trecho que o homem percorre remando, partindo do ponto C até o ponto B. O tempo total gasto (t) para ir do ponto A até o ponto B é igual à soma dos tempos gastos para percorrer as distâncias x (t_x) *e y* (t_y). *Logo,*

$$t = t_x + t_y$$

$$t = \frac{x}{v_{caminhando}} + \frac{y}{v_{remando}}$$

O comprimento do arco x é dado por:

$$x = r.\theta = 0{,}5\theta = \frac{\theta}{2}.$$

O comprimento y é dado pela Lei dos Cossenos:

$$y^2 = r^2 + r^2 - 2.r.r.\cos(\pi - \theta)$$
$$y^2 = 2r^2(1 + \cos\theta)$$
$$y^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2(1 + \cos\theta)$$
$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1 + \cos\theta}$$

Com isso,

$$t(\theta) = \frac{\frac{\theta}{2}}{4} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{1 + \cos\theta}}{2}$$

$$t(\theta) = \frac{\theta}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{1 + \cos\theta} \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Como t é uma função contínua no intervalo fechado $[0,\pi]$, *então pelo Teorema do Valor Extremo t assume um valor máximo absoluto* $t(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $t(d)$ *em certos números c e d em* $[0,\pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de t nos extremos do intervalo:*

$$t(0) = \frac{0}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{1 + \cos 0} = 0 + \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{2} = \frac{1}{2}h$$
$$t(\pi) = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{1 + \cos\pi} = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{0} = \frac{\pi}{8}h$$

2. *Os valores de t nos números críticos de t em* $(0,\pi)$:

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe.*"

$$t'(\theta) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\frac{-\operatorname{sen}\theta}{2\sqrt{1 + \cos\theta}} \quad D(t') = \{\theta \in \mathbb{R} \mid 0 < \theta < \pi\}$$

Como t é derivável, se t possui um número crítico c, então $t'(c)$ *existe e, portanto,* $t'(c) = 0$.

$$t'(\theta) = 0 \Longrightarrow \frac{\sqrt{2}.\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}} = 1$$

$$\sqrt{2}.\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1+\cos\theta}$$

$$2.\operatorname{sen}^2\theta = 1+\cos\theta$$

$$2(1-\cos^2\theta) = (1+\cos\theta)$$

$$2(1+\cos\theta)(1-\cos\theta) = (1+\cos\theta)$$

$$2(1-\cos\theta) = 1$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$t\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi + 6\sqrt{3}}{24}h$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluímos que o menor tempo possível que o homem gasta parair do ponto A ao ponto B é $\frac{\pi}{8}h$.

b) Encontre a primitiva mais geral de $f(x) = \pi\sqrt[3]{x^7} + \frac{e^x}{1+4e^x} + \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x} + \frac{x^2}{1+x^6}$.

$$f(x) = \pi.x^{\frac{7}{3}} + \frac{1}{4}.\frac{4e^x}{1+4e^x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}.(-1).(\cos x - \operatorname{sen} x) + \frac{1}{3}.\frac{3x^2}{1+(x^3)^2}$$

A primitiva mais geral de $f(x)$ *é dada pela expressão:*

$$F(x) = \pi.\frac{1}{1+\frac{7}{3}}.x^{\frac{7}{3}+1} + \frac{1}{4}.\ln(1+4e^x) - \ln(\operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C$$

$$F(x) = \frac{3\pi}{10}.x^{\frac{10}{3}} + \frac{1}{4}\ln(1+4e^x) - \ln(\operatorname{sen} x + \cos x) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3) + C$$

Questão 5. Considere a função $f(x) = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$. *Sabendo que* $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ *e* $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, *determine:*

(i) As interseções do gráfico de f com os eixos coordenados, caso existam;
(ii) Os intervalos de crescimento e decrescimento;
(iii) Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;
(iv) As assíntotas, se existirem;
(v) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem;
(vi) Os pontos de inflexão, se existirem;
(vii) O gráfico de $f(x)$.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$.

(i) *As interseções do gráfico de f com os eixos coordenados, caso existam;*

$f(0) = \dfrac{2.0^2 + 0 + 2}{0^2 + 1} = \dfrac{2}{1} = 2.$ *Ponto* $A(0,2)$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -15 < 0.$ *Não há interseções com o eixo x.*

(ii) *Intervalos de crescimento e decrescimento:*

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

Pelo Teste C/D da primeira derivada, temos que f é crescente onde $f' > 0$ e, f é decrescente onde $f' < 0$. Logo, do estudo do sinal de f' obtemos:

$- - - - - - - - - (-1) + + + + + (1) - - - - - - - \quad (1 - x^2)$
$+ \quad (x^2 + 1)^2$
$- - - - - - - - - (-1) + + + + + (1) - - - - - - - \quad f'(x)$

Com isso, conclui-se que f é crescente em $(-1,1)$ e f é decrescente em $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

(iii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo:*

$$f''(x) = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

f possui concavidade voltada para cima onde $f'' > 0$ e concavidade voltada para baixo onde $f'' < 0$. Pelo estudo do sinal de f'', temos:

$- - \; - - - - - - - - - - \; -(0) + + + + + + + + + + + \quad 2x$
$+ + (-\sqrt{3}) - - - - - - - - - - - - - - - (\sqrt{3}) + + \quad (x^2 - 3)$
$+ + + + + + \; +(-1) + \; + + + + (1) + + + + + + \quad (x^2 + 1)^3$
$- - (-\sqrt{3}) + +(-1) + +(0) - -(1) - -(\sqrt{3}) + + \quad f''(x)$

Portanto, f possui concavidade voltada cima em $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, \infty)$ e f possui concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$.

(iv) *Assíntotas:*

Verticais: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Contudo, f é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto não há assíntotas verticais no gráfico de f.

Horizontais: A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal se, somente se,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2.$$

Logo, a reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico da função f.

Oblíquas: A reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua se, somente se,

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0;$$

Onde $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, a \neq 0$ *e* $b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1+\frac{2}{x}}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-\frac{2}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{4}{x^3}}{2} = 0.$$

Portanto, não há assíntota oblíqua no gráfico da função f.

(v) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem:

Resgatando o estudo do sinal da primeira derivada:

$$- - - - - - - - - (-1) + + + + + (1) - - - - - - - - \quad f'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, o ponto de abscissa $x = -1$ é um ponto de mínimo local e o ponto de abscissa $x = 1$ é um ponto de máximo local. Contudo, conforme analisado anteriormente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$. Com isso, $f(-1)$ é o valor mínimo absoluto e $f(1)$ é o valor máximo absoluto de f, uma vez que $\forall x \in \mathbb{R}\ f(-1) \leq f(x) \leq f(1)$

$$f(-1) = \frac{2.(-1)^2+(-1)+2}{(-1)^2+1} = \frac{2-1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$f(1) = \frac{2x^2+x+2}{x^2+1} = \frac{2.(1)^2+1+2}{1^2+1} = \frac{2+1+2}{1+1} = \frac{5}{2}$$

Ponto de mínimo local e absoluto: $B\left(-1, \frac{3}{2}\right)$

Ponto de máximo local e absoluto: $C\left(1, \frac{5}{2}\right)$

(vi) *Os pontos de inflexão, se existirem*:

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f *se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de* c.

Pelo estudo do sinal de $f''(x)$, *temos*:

$$- - (-\sqrt{3}) + +(-1) + +(0) - -(1) - -(\sqrt{3}) + + \quad f''(x)$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$ *e estes números pertencem ao domínio de* f, *então os pontos com essas abscissas são pontos de inflexão de* f.

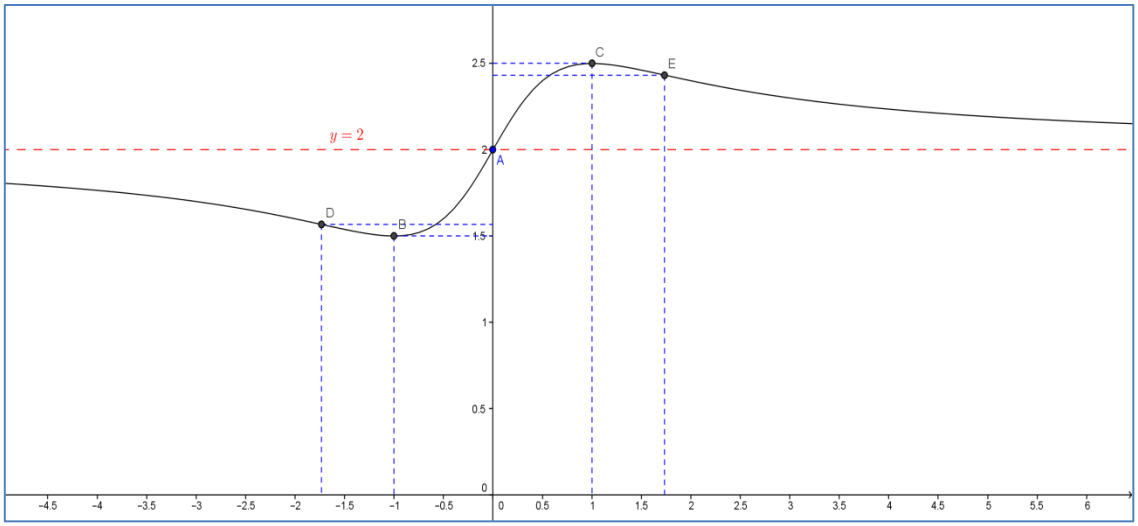
$$f(-\sqrt{3}) = \frac{2.(-\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3}) + 2}{(-\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{8 - \sqrt{3}}{4}$$

$$f(0) = \frac{2.0^2 + 0 + 2}{0^2 + 1} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$f(\sqrt{3}) = \frac{2.(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}) + 2}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{8 + \sqrt{3}}{4}$$

Pontos de inflexão: $A(0,2), D\left(-\sqrt{3}, \frac{8 - \sqrt{3}}{4}\right)$ *e* $E\left(\sqrt{3}, \frac{8 + \sqrt{3}}{4}\right)$

(vii) *Esboço do gráfico*:



1.13 Prova Final – 01 de Dezembro de 2017

Questão 1.

a) Dê a equação da reta na qual todos os pontos têm para abscissa o valor de $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$.

b) Determine a soma das abscissas dos pontos de intersecção das assíntotas horizontais do gráfico da função $y=\frac{\sqrt{ex^2+1}}{x+\pi}$ *com o gráfico de* $f(x)=\operatorname{senh} x$.

Questão 2.

a) Sendo $f(x)=\frac{x.\cos x}{(x+1)\operatorname{sen} x}$, *use diferenciação logarítmica para calcular* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Determine os limites laterais de $f(x)=-|x^2-x|+2$, *em torno de* $x=1$.

Questão 3.

a) Prove que existe raiz real da equação $\ln(x)=e^{-x}$.

b) A lei geral dos gases diz que $PV=nRT$, *onde* P *é a pressão em* Pa, V *o volume em* m^3, n *o número de mols do gás,* R *a constante dos gases perfeitos, e* T *a temperatura em Kelvin*(K). *Suponha que a pressão está baixando à* $3\,Pa/s$, *o volume está aumentando à* $2m^3/s$, *e o número de mols aumentando à* $4\,mols/s$. *Quão rápido a temperatura está diminuindo quando a pressão é de* $60Pa$, *o volume é* $100m^3$, *o número de mols é* 30, *e a temperatura é de* $200K$?

Questão 4.

a) Use aproximação linear para estimar o valor de $(3{,}9)^{1{,}5}$.

b) Calcule usando a definição, a derivada de $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

Questão 5.

a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ *é dizer que* $y=\sec^{-1}x \Leftrightarrow \sec y = x$ *e* $0\le y\le \pi, y\ne \frac{\pi}{2}$. *Use esta definição para mostrar que* $\frac{d(\sec^{-1}x)}{dx}=\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.

b) Calcule a equação da reta tangente à hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *no ponto* (x_0,y_0).

Questão 6.

a) Sendo α *e* β *positivos, determine o valor máximo de* $f(x)=x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ *para* $0\le x\le 1$.

$b)$ $Mostre\ que\ qualquer\ função\ cúbica\ tem\ sempre\ um\ ponto\ de\ inflexão.$

$Questão\ 7.$

$a)$ $Encontre\ a\ primitiva\ mais\ geral\ de\ f(x) = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \cosh x.$

$b)$ $Calcule\ a\ derivada\ de\ f(x) = e^{2x}p(\operatorname{sen} x), onde\ p(x) = x^2 + x + 1.$

$Questão\ 8.$

$a)$ $Calcule\ \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\pi} [\![\frac{e}{x}]\!].$

$b)$ $Encontre\ todos\ os\ valores\ de\ b \in \mathbb{R}\ para\ os\ quais\ a\ função\ f: (1,3) \to \mathbb{R}$
$dada\ por\ f(x) = x^2 [\![x]\!] - b[\![x]\!].$

$Questão\ 9.$

$a)$ $Calcule\ a\ equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ da\ função\ f(x) = 2^x - x^2$
$no\ ponto\ (4,0).$

$b)$ $Encontre\ as\ dimensões\ do\ retângulo\ com\ maior\ área\ que\ pode\ ser\ inscrito$
$em\ um\ triângulo\ equilátero, sabendo\ que\ um\ dos\ ladoss\ do\ retângulo\ está$
$sobre\ a\ base\ do\ triângulo.$

$Questão\ 10.$

$a)$ $Seja\ f: [1,2017] \to \mathbb{R}, contínua\ em\ [1,2017]\ e\ derivável\ em\ (1,2017), tal\ que\ a$
$reta\ secante\ que\ passa\ pelos\ pontos\ \big(1, f(1)\big)\ e\ \big(2017, f(2017)\big)\ intercepta\ o$
$gráfico\ de\ f\ em\ um\ ponto\ z \in (1,2017). Mostre\ que\ existem\ c\ e\ d\ tais\ que$
$f'(c) = f'(d) = \frac{f(2017) - f(1)}{2016}.$

$b)$ $Calcule\ \lim_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x} . \frac{a^x - 1}{a - 1}\right)^{\frac{1}{x}}, onde\ a > 0\ e\ a \neq 1.$

***Questão* 1**

a) Dê a equação da reta na qual todos os pontos têm para abscissa o valor de $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^3+x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\ ;\quad \begin{array}{l} Se\ x\to 1, então\ x\neq 1 \\ Logo, (x-1)\neq 0 \end{array}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}(x^3+x^2+x+1)}{\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 1}x^3+\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x+1}{\lim_{x\to 1}x^2+\lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}1}$$

$$=\frac{1^3+1^2+1+1}{1^2+1+1}$$

$$=\frac{4}{3}.$$

A equação da reta na qual todos os pontos têm abscissa $\frac{4}{3}$ *é dada por* $x=\frac{4}{3}$.

Questão 1

b) Determine a soma das abscissas dos pontos de intersecção das assíntotas horizontais do gráfico da função $y = \frac{\sqrt{ex^2+1}}{x+\pi}$ *com o gráfico de* $f(x) = \operatorname{senh} x$.

A reta $y = L$ *é assíntota horizontal ao gráfico de uma função* f *se, somente se*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

$*$ *Obs.:* $\sqrt{x^2} = |x|$. *Se* $x \to -\infty$, *então* $|x| = -x$ *e, se* $x \to \infty$, *então* $|x| = x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} y &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{ex^2+1}}{x+\pi} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(e+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{\pi}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{e+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{\pi}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{e+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{\pi}{x}} \\
&= -\frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} e + \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{\pi}{x}} \\
&= -\frac{\sqrt{e+0}}{1+0} \\
&= -\sqrt{e}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{ex^2+1}}{x+\pi} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(e+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{\pi}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{e+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1+\frac{\pi}{x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{e+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{\pi}{x}} \\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty} e + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{\pi}{x}} \\
&= \frac{\sqrt{e+0}}{1+0} \\
&= \sqrt{e}.
\end{aligned}$$

Logo, as retas $y = -\sqrt{e}$ *e* $y = \sqrt{e}$ *são as assíntotas horizontais do gráfico da função dada.*

Usando o fato de que a função $f(x) = \operatorname{senh} x$ *é ímpar e que* $Im(f) = \mathbb{R}$, *se* $f(c) = \sqrt{e}$, *então* $f(-c) = -f(c) = -\sqrt{e}$. *Logo, a soma das abscissas dos pontos de interseção das assíntotas horizontais com o gráfico da função* f *é nula. Isto é,* $(c) + (-c) = 0$.

Questão 2

a) Sendo $f(x) = \frac{x\cos x}{(x+1)\operatorname{sen} x}$, *use diferenciação logarítmica para calcular* $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ e } x \neq k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\}$.

A função f *é contínua e derivável em seu domínio e, portanto, derivável em* $\frac{\pi}{2}$. *Contudo,* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ *e, consequentemente, o cuidado em aplicar a diferenciação logarítmica deve ser tomado, uma vez que* $\ln|f(x)|$ *tem por base* $f(x) \neq 0$.

Considere $\ln|f(x)| = \ln\left|\frac{x\cos x}{(x+1)\operatorname{sen} x}\right| = \ln\left|\frac{x\operatorname{cotg} x}{x+1}\right|$

$\ln|f(x)| = \ln|x| + \ln|\operatorname{cotg} x| - \ln|x+1|$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln|f(x)|] = \frac{d}{dx}[\ln|x|] + \frac{d}{dx}[\ln|\operatorname{cotg} x|] - \frac{d}{dx}[\ln|x+1|]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{cotg} x}.(-\operatorname{cossec}^2 x) - \frac{1}{x+1}.(1)$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x} - \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{x\operatorname{cotg} x}{(x+1)}\left[\frac{(x+1)\operatorname{cotg} x - x(x+1)\operatorname{cossec}^2 x - x\operatorname{cotg} x}{x.\operatorname{cotg} x.(x+1)}\right]$$

$$f'(x) = \frac{[\operatorname{cotg} x - \operatorname{cossec}^2 x](x+1) - x\operatorname{cotg} x}{(x+1)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left[\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - x\operatorname{cossec}^2\frac{\pi}{2}\right]\left(\frac{\pi}{2}+1\right) - \frac{\pi}{2}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\left[0 - \frac{\pi}{2}\times 1^2\right]\left(\frac{\pi+2}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\times 0}{\left(\frac{\pi+2}{2}\right)^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{\pi+2}.$$

***Questão* 2**

$b)$ *Determine os limites laterais de* $f(x) = -|x^2 - x| + 2$, *em torno de* $x = 1$.

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & se\ x \leq 0\ ou\ x \geq 1 \\ -(x^2 - x), & se\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2, & se\ x \leq 0\ ou\ x \geq 1 \\ x^2 - x + 2, & se\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} (x^2 - x + 2) \\ &= \lim_{x \to 1^-} x^2 - \lim_{x \to 1^-} x + \lim_{x \to 1^-} 2 \\ &= 1^2 - 1 + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} (-x^2 + x + 2) \\ &= -\lim_{x \to 1^+} x^2 + \lim_{x \to 1^+} x + \lim_{x \to 1^+} 2 \\ &= -(1^2) + 1 + 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Como os limites laterais em 1 *existem e são igausi, então* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *existe e* $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Questão 3

$a)$ *Prove que existe raiz real da equação* $\ln(x) = e^{-x}$.

Considere $f(x) = \ln(x) - e^{-x}$, *com* $x > 0$. f *é uma função contínua em seu domínio, isto é,* f *é contínua em* $(0,\infty)$ *e, portanto, é contínua em qualquer intervalo fechado* $I \subset (0,\infty)$. *Sabe-se ainda que*:

$$f(1) = \ln(1) - e^{-1} = 0 - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} < 0$$
$$f(e) = \ln(e) - e^{-e} = 1 - \frac{1}{e^e} > 0$$

Como f *é contínua no intervalo fechado* $[1,e]$, *e* 0 *é um número entre* $f(1)$ *e* $f(e)$, *então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $x \in (1,e)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja,*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \ln(x) = e^{-x}$$

Portanto, a equação dada possui solução real.

Questão 3

$b)$ $A\ lei\ geral\ dos\ gases\ diz\ que\ PV = nRT, onde\ P$ é $a\ pressão\ em\ Pa, V\ o\ volume\ em\ m^3, n\ o\ número\ de\ mols\ do\ gás, R\ a\ constante\ dos\ gases\ perfeitos, e\ T\ a\ temperatura\ em\ Kelvin(K). Suponha\ que\ a\ pressão\ está\ baixando$ à $3\,Pa/s, o\ volume\ está\ aumentando$ à $2m^3/s, e\ o\ número\ de\ mols\ aumentando$ à $4\,mols/s.\ Quão\ rápido\ a\ temperatura\ está\ diminuindo\ quando\ a\ pressão$ é $de\ 60Pa, o\ volume$ é $100m^3, o\ número\ de\ mols$ é $30, e\ a\ temperatura$ é $de\ 200K?$

$Da\ lei\ geral\ dos\ gases, temos:$

$$\frac{PV}{nT} = R = constante$$

$Derivando\ implicitamente\ em\ relação\ ao\ tempo, obtemos:$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{PV}{nT}\right) = \frac{d}{dt}(R)$$

$$\frac{\left(\frac{dP}{dt}.V + P.\frac{dV}{dt}\right).nT - PV.\left(\frac{dn}{dt}.T + n.\frac{dT}{dt}\right)}{(nT)^2} = 0$$

$$\left(\frac{dP}{dt}.V + P.\frac{dV}{dt}\right).nT - PV.\left(\frac{dn}{dt}.T + n.\frac{dT}{dt}\right) = 0$$

$Substituindo\ as\ informações\ fornecidas\ no\ enunciado, temos:$

$$(3 \times 100 + 60 \times 2).30 \times 200 - 60 \times 100.\left(4 \times 200 + 30.\frac{dT}{dt}\right) = 0$$

$$(300 + 120).6000 = 6000.\left(800 + 30.\frac{dT}{dt}\right)$$

$$420 = 800 + 30.\frac{dT}{dt}$$

$$-380 = 30.\frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{38}{3}K/s$$

***Questão* 4**

$a)$ *Use aproximação linear para estimar o valor de* $(3{,}9)^{1{,}5}$.

Considere a função $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{1{,}5}$, *temos* $f(4) = 8$, $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ *e* $f'(4) = 3$.

A proximação linear ou linearização de f *em* 4 *é dada pela expressão*:

$$L(x) = f(4) + f'(4)(x - 4)$$
$$L(x) = 8 + 3(x - 4)$$

Como a distância entre os números reais 4 *e* 3,9 *é pequena, então, podemos dizer que* $f(3{,}9) \cong L(3{,}9)$. *Ou seja,*

$$(3{,}9)^{1{,}5} \cong 8 + 3(3{,}9 - 4)$$
$$(3{,}9)^{1{,}5} \cong 7{,}7$$

Questão 4

$b)$ *Calcule usando a definição, a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Pela definição de derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}} \right]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x.\left[\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x.\left[\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}\right]}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{(x+\Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x+0)^2} + \sqrt[3]{x}.\sqrt[3]{(x+0)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Portanto, a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ *é* $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Questão 5

a) Uma maneira de definir $\sec^{-1} x$ *é dizer que* $y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow \sec y = x$ *e* $0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{\pi}{2}$. *Use esta definição para mostrar que* $\dfrac{d(\sec^{-1} x)}{dx} = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$.

Uma forma de definir a derivada da função inversa é pela expressão

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Tal que $y = \sec^{-1} x$ *e* $x = \sec y$. *Logo,*

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\sec y)} = \frac{1}{\sec y \,.\, \mathrm{tg}\, y}$$

Sabe-se que $\mathrm{tg}^2 y = \sec^2 y - 1$ *e, portanto,* $\mathrm{tg}\, y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$.

Contudo, $0 \leq y \leq \pi$ *e, portanto,* $\mathrm{tg}\, y = \begin{cases} \sqrt{\sec^2 y - 1}, & 0 \leq y < \frac{\pi}{2} \\ -\sqrt{\sec^2 y - 1}, & \frac{\pi}{2} < y \leq \pi \end{cases}$.

Entretanto, o produto $\sec y \,.\, \mathrm{tg}\, y$ *é positivo uma vez que* $\sec y > 0$ *se* $0 \leq y < \frac{\pi}{2}$ *e* $\sec y < 0$ *se* $\frac{\pi}{2} < y \leq \pi$. *Portanto, para esta definição, temos:*

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|\sec y| . \sqrt{\sec^2 y - 1}} \; ; \quad \textit{Lembrando que } x = \sec y \ldots$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x| . \sqrt{x^2 - 1}}$$

Questão 5

$b)$ *Calcule a equação da reta tangente à hipérbole* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ *no ponto* (x_0, y_0).

O ponto (x_0,y_0) *satisfaz a equação da hipérbole, logo*:

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

Derivando implicitamente a equação da hiperbole, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{b^2}\right)=1$$

$$\frac{2x}{a^2}-\frac{2y}{b^2}.\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}$$

No ponto (x_0, y_0), *temos* $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_0,y_0)}=\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_0}{y_0}$. *A equação da reta tangente é dada por*:

$$y-y_0=\frac{b^2}{a^2}.\frac{x_0}{y_0}(x-x_0)$$

$$a^2yy_0-a^2y_0^2=b^2xx_0-b^2x_0^2$$

Dividindo todos os membros por a^2b^2, *temos*:

$$\frac{yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=\frac{xx_0}{a^2}-\frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}$$

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1$$

Questão 6

$a)$ *Sendo* α *e* β *positivos, determine o valor máximo de* $f(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$ *para* $0 \leq x \leq 1$.

f *é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,1]$. *Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de* f *no intervalo fechado* $[0,1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo:*

$f(0) = 0$ *e* $f(1) = 0$.

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,1)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

Como f *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$, *se* f *possui algum número crítico* c *em* $(0,1)$ *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta} - \beta x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta} = \beta x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}$$

$$\alpha x^{\alpha}.x^{-1}(1-x)^{\beta} = \beta x^{\alpha}(1-x)^{\beta}(1-x)^{-1}$$
$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{1-x} \Rightarrow x(\alpha+\beta) = \alpha \therefore x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad ; com\ \alpha > 0\ e\ \beta > 0, \qquad \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in (0,1).$$

$$f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{b}$$
$$f\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right) = \frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+\beta)^{\alpha}} \cdot \frac{\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\beta}} = \frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\frac{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,1]$.

Questão 6

$b)$ *Mostre que qualquer função cúbica tem sempre um ponto de inflexão.*

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é um ponto de inflexão do gráfico de uma função se ocorre mudança no sentido da concavidade da função em torno de* c*, ou seja, se há mudança no sinal da segunda derivada de* f *em* c.

Considere a função cúbica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$*, uma função polinomial contínua e derivável em* $\mathbb{R}$*. Temos então:*

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$

Estudo do sinal de f'':

Se $a > 0$*, então:*

$$- - - - \left(-\frac{b}{3a}\right) + + + + \quad f''$$

Se $a < 0$*, então:*

$$+ + + + \left(-\frac{b}{3a}\right) - - - - - \quad f''$$

Em ambas situações, ocorre mudança no sinal da segunda derivada f *em* $x = -\frac{b}{2a}$*, ou seja, ocorre mudança no sentido da concavidade da função e, portanto, qualquer função cúbica tem sempre um ponto de inflexão.*

Questão 7

$a)$ *Encontre a primitiva mais geral de* $f(x) = \frac{x^3 - 3\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} + \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \cosh x.$

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x}} - 3.\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right).e^{\frac{1}{x}} + 2.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}} + \cosh x$$

$$f(x) = x^{\frac{5}{2}} - 3x^{\frac{1}{6}} - e^{\frac{1}{x}}.\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2.\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} + \cosh x$$

A primitiva mais geral de $f(x)$ *é dada pela expressão*:

$$F(x) = \frac{1}{1+\frac{5}{2}}.x^{\frac{5}{2}+1} - 3.\frac{1}{1+\frac{1}{6}}.x^{\frac{1}{6}+1} - e^{\frac{1}{x}} + 2\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{x}\right) + \mathrm{senh}\,x + C$$

$$F(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{18}{7}x^{\frac{7}{6}} - e^{\frac{1}{x}} + 2\,\mathrm{arcsen}\left(\sqrt{x}\right) + C$$

***Questão* 7**

$b)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = e^{2x}p(\operatorname{sen} x)$, *onde* $p(x) = x^2 + x + 1$.

$f'(x) = e^{2x}.2.p(\operatorname{sen} x) + e^{2x}.p'(\operatorname{sen} x).\cos x$

Dado $p(x)$, *então* $p(\operatorname{sen} x) = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1$, *e sabendo-se que* $p'(x) = 2x + 1$, $p'(\operatorname{sen} x) = 2\operatorname{sen} x + 1$. *Logo,*

$f'(x) = 2e^{2x}.(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1) + e^{2x}.\cos x.(2\operatorname{sen} x + 1)$

$f'(x) = e^{2x}[2(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1) + \cos x.(2\operatorname{sen} x + 1)]$

Ou ainda,

$f'(x) = 2e^{2x}\left[\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x + 1 + \operatorname{sen} x.\cos x + \frac{\cos x}{2}\right]$

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

$a)\ Calcule\ \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\pi}\left[\!\left[\frac{e}{x}\right]\!\right].$

$Para\ todo\ x \in \mathbb{R}, com\ x \neq 0, temos:$

$$\frac{e}{x} - 1 < \left[\!\left[\frac{e}{x}\right]\!\right] \leq \frac{e}{x}$$

$Se\ x > 0, então\ \frac{x}{\pi} > 0. Logo,$

$$\frac{x}{\pi}\left(\frac{e}{x} - 1\right) < \frac{x}{\pi}\left[\!\left[\frac{e}{x}\right]\!\right] \leq \frac{x}{\pi}.\frac{e}{x}$$

$$\underbrace{\frac{e-x}{\pi}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{x}{\pi}\left[\!\left[\frac{e}{x}\right]\!\right]}_{g(x)} \leq \underbrace{\frac{e}{\pi}}_{h(x)}$$

$Como\ f(x) < g(x) \leq h(x)\ quando\ x\ está\ próximo\ de\ 0, pela\ direita\ de\ 0\ e,$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = e/\pi\ , então, pelo\ Teorema\ do\ Confronto,$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \frac{e}{\pi} \therefore \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\pi}\left[\!\left[\frac{e}{x}\right]\!\right] = \frac{e}{\pi}.$$

Questão 8

$b)$ *Encontre todos os valores de* $b \in \mathbb{R}$ *para os quais a função* $f: (1,3) \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = x^2[\![x]\!] - b[\![x]\!]$.

A função f *tem em sua composição a função* $[\![x]\!]$ *que é contínua para todo* x *real, com* $x \neq \mathbb{Z}$. *Logo, no intervalo* $(1,3)$ *em que* f *está definida, o único número inteiro neste intervalo é o* 2. *Logo, podemos afirmar que* f *é contínua em* $(1,2) \cup (2,3)$. *E para que* f *seja contínua em* $(1,3)$, *a continuidade de* f *em* 2 *deve ser satisfeita, isto é,* $\lim_{x \to 2} f(2) = f(2)$.

$f(2) = 2^2[\![2]\!] - b[\![2]\!] = 4 \times 2 - b \times 2 = 8 - 2b.$

$*$ *Se* $x \to 2^+$, *então* $x > 2$ *e, portanto,* $[\![x]\!] = 2$. *Logo,*

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2[\![x]\!] - b[\![x]\!]) = 2^2 \times 2 - b \times 2 = 8 - 2b.$

$*$ *Se* $x \to 2^-$, *então* $x < 2$ *e, portanto,* $[\![x]\!] = 1$. *Logo,*

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2[\![x]\!] - b[\![x]\!]) = 2^2 \times 1 - b \times 1 = 4 - b.$

Logo, para que f *seja contínua em* 2 $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$, *uma vez que* $\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$. *Com isso,*

$$4 - b = 8 - 2b$$
$$2b - b = 8 - 4$$
$$b = 4$$

Portanto, para $b = 4$ *a função* f *é contínua em* $(1,3)$.

$\boldsymbol{Questão}$ **9**

$a)$ $Calcule\ a\ equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ da\ função\ f(x) = 2^x - x^2$ $no\ ponto\ (4{,}0)$.

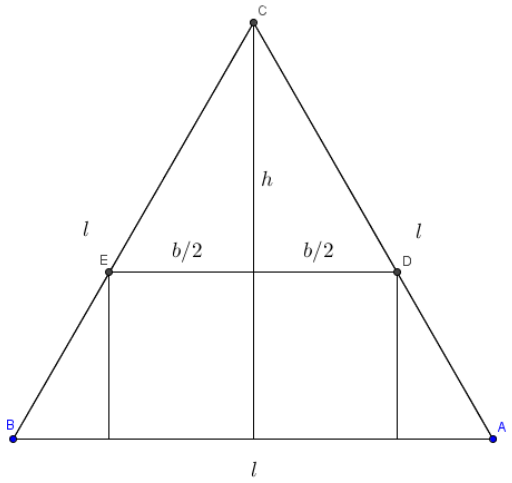
$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2x$
$f'(4) = 2^4 \ln 2 - 2 \times 4$
$f'(4) = 16 \ln 2 - 8$
$f'(4) = 8(2 \ln 2 - 1)$
$f'(4) = 8(\ln 4 - 1)$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f\ no\ ponto\ (4{,}0)$:

$$y - 0 = 8(\ln 4 - 1).(x - 4)$$
$$y = 8(\ln 4 - 1)x - 32(\ln 4 - 1)$$

Questão 9

b) Encontre as dimensões do retângulo com maior área que pode ser inscrito em um triângulo equilátero, sabendo que um dos lados do retângulo está sobre a base do triângulo.



A área do retângulo inscrito no triângulo equilátero e dado por:

$$A = b \times \left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - h\right) \; ; \quad Onde \; \frac{l\sqrt{3}}{2} \text{ é a altura do triângulo equilátero.}$$

Por semelhança dos triângulos ΔABC e ΔDEC, temos:

$$\frac{h}{b} = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Longrightarrow h = \frac{b\sqrt{3}}{2}.$$

Com isso, a expressão da área do retângulo em função da base é:

$$A(b) = b\left(\frac{l\sqrt{3}}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \; ; \quad b > 0$$

$$A(b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(bl - b^2)$$

$$A'(b) = \frac{\sqrt{3}}{2}(l - 2b)$$

Estudo do sinal da função derivada:

$$+ + + + + + \left(\frac{l}{2}\right) - - - - - - - - \quad A'(b)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, para $b = \frac{l}{2}$ e, portanto, $h = \frac{l\sqrt{3}}{4}$, o retângulo inscrito no triângulo equilátero de lado l possui a maior área.

Questão 10

a) Seja $f: [1,2017] \to \mathbb{R}$, *contínua em* $[1,2017]$ *e derivável em* $(1,2017)$, *tal que a reta secante que passa pelos pontos* $(1, f(1))$ *e* $(2017, f(2017))$ *intercepta o gráfico de* f *em um ponto* $z \in (1,2017)$. *Mostre que existem* c *e* d *tais que* $f'(c) = f'(d) = \frac{f(2017)-f(1)}{2016}$.

Os pontos $(1, f(1)), (z, f(z))$ *e* $(2017, f(2017))$ *são colineares, isto é, pertencem a uma mesma reta. Logo, o coeficiente angular da reta que passa por dois destes pontos quaisquer é igual ao coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos* $(1, f(1))$ *e* $(2017, f(2017))$. *Ou seja:*

$$\frac{f(z)-f(1)}{z-1} = \frac{f(2017)-f(z)}{2017-z} = \frac{f(2017)-f(1)}{2016} \quad (I)$$

f *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:*

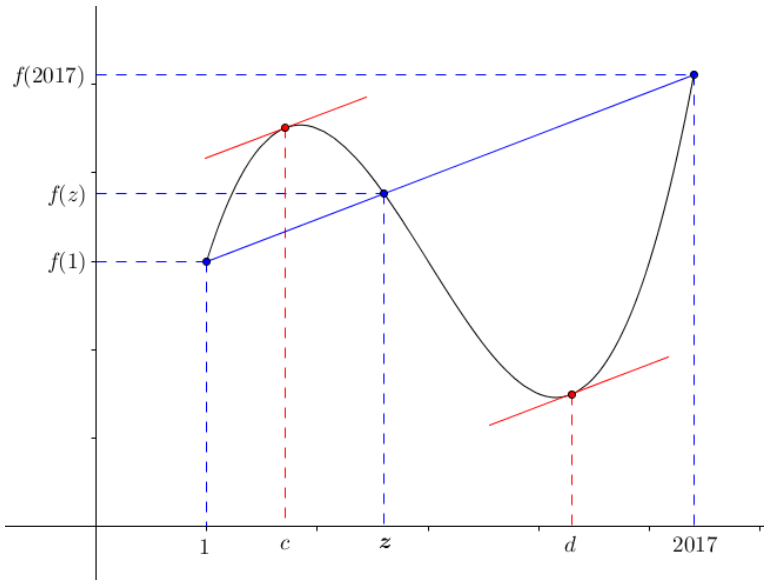
1. f *é contínua em* $[1,z]$ *e* $[z,2017]$;
2. f *é derivável em* $(1,z)$ *e* $(z,2017)$;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existem números c *e* d, *com* $c \in (1,z)$ *e* $d \in (z,2017)$ *tais que*

$$f'(c) = \frac{f(z)-f(1)}{z-1} \quad e \quad f'(d) = \frac{f(2017)-f(z)}{2017-z}$$

Com a relação expressa em (I), *concluimos que* $f'(c) = f'(d) = \dfrac{f(2017)-f(1)}{2016}$.

Na figura a seguir é representada a situação descrita no enunciado desta questão.



Questão 10

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$, *onde* $a>0$ *e* $a\neq 1$.

Primeiramente, aplicando a regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x-1}{ax-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x\ln a}{a-1}=\infty.$$

Com isso, se $x\to\infty$, $\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)\to\infty$ *e* $\frac{1}{x}\to 0$. *Logo, o limite é indeterminado.*
Considere

$$y=\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Então

$$\ln y=\ln\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.\ln\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)=\frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{a^x-1}{x}\right)-\ln(a-1)\right]$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{x}\left[\ln\left(\frac{a^x-1}{x}\right)-\ln(a-1)\right]\right\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{a^x-1}{x}\right)-\ln(a-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{a^x-1}.\frac{x.a^x\ln a-(a^x-1)}{x^2}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x.a^x\ln a-a^x+1}{x(a^x-1)}\quad;\quad \textit{dividindo por } xa^x, \textit{temos}:$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln a-\frac{1}{x}+\frac{1}{xa^x}}{1-\frac{1}{a^x}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\ln a-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{xa^x}}{\lim_{x\to\infty}1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{a^x}}=\frac{\ln a-0+0}{1-0}=\ln a.$$

Como o $\lim_{x\to\infty}\ln y$ *existe e usando o fato de que* $y=e^{\ln y}$, *temos*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}.\frac{a^x-1}{a-1}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to\infty}e^{\ln y}=e^{\lim_{x\to\infty}\ln y}=e^{\ln a}=a.$$

Capítulo 19

2017.2

2.1 1ª Prova – 23 de Fevereiro de 2018

$Questão\ 1.$

$a) Se\ |f(x)| \leq M\ e\ \lim_{x\to a} g(x) = 0, mostre\ que\ \lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = 0.$

$$b) Calcule\ \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5}{x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

$Questão\ 2.$

$$a) Determine, se\ existir, \lim_{x\to 0} \left[\!\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]\!\right].$$

$$b) Calcule\ \lim_{x\to-\infty} 2^x \cos x.$$

$Questão\ 3.$

$a) Determine\ o\ valor\ de\ k\ para\ que\ a\ função\ seguinte\ seja\ contínua\ em\ x = 0.$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+a^3} - a}{x}, & se\ x \neq 0 \\ k, & se\ x = 0. \end{cases}$$

$b) Mostre\ que\ existe\ algum\ número\ cujo\ cubo\ é\ igual\ a\ si\ próprio\ subtraído\ de$ $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right).$

$Questão\ 4.$

$$a) Calcule\ \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{[\![x^3+1000]\!]}.$$

$b) Determine\ a\ área\ do\ polígono\ convexo\ formado\ pela\ região\ limitada\ pelas$ $assíntotas\ horizontais\ do\ gráfico\ de\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{2x^3+1}}\ e\ as\ retas\ cujas$ $equações\ são\ dadas\ por\ |x| = 5.$

$Questão\ 5.$

$a) Suponha\ que\ a\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f\ no\ ponto\ x = 1\ passa\ no\ ponto\ (4{,}9)\ e\ que\ f(1) = 3. Determine\ f'(1).$

$b) Encontre\ o\ ponto\ de\ interseção\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f(x) = x - \frac{1}{x}\ no\ ponto\ (1{,}0)\ com\ o\ eixo\ y.$

***Questão* 1.**

$a)Se\ |f(x)| \leq M\ e\ \lim_{x\to a} g(x) = 0, mostre\ que\ \lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = 0.$

Pela desigualdade modular, temos

$$-M \leq f(x) \leq M$$

$$-M.g(x) \leq f(x)g(x) \leq M.g(x)$$

$\lim_{x\to a}\big(-M.g(x)\big) = -M.\lim_{x\to a} g(x) = -M.0 = 0$
$\lim_{x\to a}\big(M.g(x)\big) = M.\lim_{x\to a} g(x) = M.0 = 0$

Como $-M.g(x) \leq f(x)g(x) \leq M.g(x)$ *quando x está próximo de a e ainda,*
$\lim_{x\to a}\big(M.g(x)\big) = \lim_{x\to a}\big(-M.g(x)\big) = 0$, *então pelo Teorema do Confronto*

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = 0.$$

$b)Calcule\ \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \dfrac{x^5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5}{x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$

$$\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^5 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5}{x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left[x^4 + x^3.\frac{1}{\sqrt{2}} + x^2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + x.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right]}{\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} \left[x^4 + x^3.\frac{1}{\sqrt{2}} + x^2.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + x.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} x^4 + \frac{1}{\sqrt{2}}.\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} x^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3.\lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}} x + \lim_{x\to\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

$$= 5.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4$$

$$= \frac{5}{4}.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Determine, se existir,* $\lim_{x\to 0}\left[\!\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]\!\right]$.

Sabe-se que $(x^2-1)\geq -1$ *e* $(x^2+1)\geq 1, \forall x\in\mathbb{R}$ *e que ambas são funções pares e, consequentemente, o quociente também é uma função par. Dessa forma, temos:*

$$\frac{x^2-1}{x^2+1}\geq -1, \forall x\in\mathbb{R}$$

Sendo $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ *e que* $f(0)=-1$, *temos a seguinte análise:*

se $x\to 0^+$, *então* $f(x)\to -1^+$ *e, portanto,* $\lim_{x\to 0^+}[\![f(x)]\!]=-1$ *e,*

se $x\to 0^-$, *então* $f(x)\to -1^+$ *e, portanto,* $\lim_{x\to 0^-}[\![f(x)]\!]=-1$.

Como os limites laterais em 0 *existem e são iguais, então* $\lim_{x\to 0}[\![f(x)]\!]$ *existe e* $\lim_{x\to 0}[\![f(x)]\!]=-1$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 0}\left[\!\left[\frac{x^2-1}{x^2+1}\right]\!\right]=-1.$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to -\infty} 2^x\cos x$.

$\forall x\in\mathbb{R}$, *temos:*

$$-1\leq \cos x\leq 1$$

Como 2^x *é uma função exponencial crescente, então ...*

$$\underbrace{-2^x}_{f(x)}\leq \underbrace{2^x\cos x}_{g(x)}\leq \underbrace{2^x}_{h(x)}$$

Obs.: Se $x\to -\infty$, *então* $2^x\to 0$. *Logo,*

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}(-2^x)=0 \quad e \quad \lim_{x\to -\infty} h(x)=\lim_{x\to -\infty}(2^x)=0$$

Se $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ *quando* $x\to -\infty$ *e* $\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} h(x)=0$, *pelo Teorema do Confronto,* $\lim_{x\to -\infty} g(x)=0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x\cos x=0.$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine o valor de* k *para que a função seguinte seja contínua em* $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x}, & se\ x \neq 0 \\ k, & se\ x = 0. \end{cases}$$

Para que f *seja contínua em* $x = 0$ *é condição necessária e suficiente que*

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$$

Onde $f(0) = k$. *Logo*, $k = \lim_{x \to 0} f(x)$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt[3]{x + a^3} - a}{x} . \frac{\sqrt[3]{(x + a^3)^2} + a\sqrt[3]{x + a^3} + a^2}{\sqrt[3]{(x + a^3)^2} + a\sqrt[3]{x + a^3} + a^2} \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + a^3 - a^3}{x.\left[\sqrt[3]{(x + a^3)^2} + a\sqrt[3]{x + a^3} + a^2\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x.\left[\sqrt[3]{(x + a^3)^2} + a\sqrt[3]{x + a^3} + a^2\right]}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + a^3)^2} + a\sqrt[3]{x + a^3} + a^2}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{(x + a^3)^2} + a.\lim_{x \to 0} \sqrt[3]{x + a^3} + \lim_{x \to 0} a^2}$$

$$= \frac{1}{a^2 + a^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{3a^2}$$

Portanto, para $k = \dfrac{1}{3a^2}$ *a função* f *é contína em* $x = 0$.

$b)$ *Mostre que existe algum número cujo cubo é igual a si próprio subtraído de* $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$.

$* \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -(-1) = 1.$

Expressando algebricamente o enunciado da questão temos a seguinte equação:

$$x^3 = x - 1$$

Considere a função polinomial $f(x) = x^3 - x + 1$, *contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua em qualquer intervalo fechado* I *contido em* $\mathbb{R}$.

$f(-2) = (-2)^3 - (-2) + 1 = -8 + 2 + 1 = -5$
$f(0) = 0^3 - 0 + 1 = 0 - 0 + 1 = 1.$

Como f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[-2,0]$ *e* 0 *é um número entre* $f(-2)$ *e* $f(0)$, *pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $x \in (-2,0)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja,*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - x + 1 = 0$$
$$x^3 = x - 1$$

Logo, existe algum número cujo cubo é igual a si próprio subtraído de 1.

***Questão* 4.**

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{[\![x^3+1000]\!]}$.

Sabendo-se que $(x-1) < [\![x]\!] \leq x$, *então ...*

$$x^3 + 999 < [\![x^3 + 1000]\!] \leq x^3 + 1000$$

$$\frac{1}{x^3+999} > \frac{1}{[\![x^3+1000]\!]} \geq \frac{1}{x^3+1000}$$

Como $(x^2+1) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ...

$$\underbrace{\frac{x^2+1}{x^3+999}}_{h(x)} > \underbrace{\frac{x^2+1}{[\![x^3+1000]\!]}}_{g(x)} \geq \underbrace{\frac{x^2+1}{x^3+1000}}_{f(x)}$$

$$f(x) \leq g(x) < h(x)$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1000} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1000}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1000}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+999} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{999}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{999}{x^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Como $f(x) \leq g(x) < h(x)$ *quando* $x \to \infty$ *e* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 0$, *pelo Teorema do Confronto,* $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{[\![x^3+1000]\!]} = 0.$$

b)Determine a área do polígono convexo formado pela região limitada pelas assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{2x^3+1}}$ *e as retas cujas equações são dadas por* $|x| = 5$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é assíntota horizontal ao gráfico da função* f *se, somente se,* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{2x^3+1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}} \\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}} \\
&= \frac{\sqrt{1+0+0}}{\sqrt[3]{2+0}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+1}}{\sqrt[3]{2x^3+1}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}}{\sqrt[3]{x^3\left(2+\frac{1}{x^3}\right)}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{2+\frac{1}{x^3}}} \\
&= \frac{-\sqrt{\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{\sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty}2+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}}} \\
&= -\frac{\sqrt{1+0+0}}{\sqrt[3]{2+0}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto, as retas $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ *e* $y = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ *são as assíntotas horizontais do gráfico da função* f. *Juntamente com as retas* $x = 5$ *e* $x = -5$, *isto é*, $|x| = 5$, *delimitam um polígono convexo (retângulo) cuja área* S *é*:

$$S = (5 - (-5)) \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\right) = \frac{20}{\sqrt[3]{2}} = 10\sqrt[3]{4}\ u.A$$

***Questão* 5.**

a) Suponha que a reta tangente ao gráfico de f *no ponto* $x = 1$ *passa no ponto* $(4,9)$ *e que* $f(1) = 3$. *Determine* $f'(1)$.

Definimos $f'(1)$ *como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* f *no ponto de abscissa* $x = 1$. *Sabendo-se que os pontos* $(1, f(1))$ *e* $(4,9)$ *pertencem a reta tangente ao gráfico de* f *no ponto de abscissa* $x = 1$, *então o coeficiente angular de uma reta conhecido dois pontos é dado por*:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - f(1)}{4 - 1} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2.$$

Com isso, concluimos que $f'(1) = 2$.

b) Encontre o ponto de interseção da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x - \frac{1}{x}$ *no ponto* $(1,0)$ *com o eixo* y.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f *no ponto* $(1,0)$ *é* $f'(1)$ *dado por*:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + \Delta x - \frac{1}{1 + \Delta x} - 0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x.(1 + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 + 2\Delta x + \Delta x^2 - 1}{\Delta x.(1 + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x.(1 + \Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 + \Delta x}{1 + \Delta x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f *no ponto* $(1,0)$:

$$\begin{aligned} y - 0 &= 2(x - 1) \\ y &= 2x - 2 \end{aligned}$$

Interseção da reta tangente com o eixo y: *Ponto* $(0, -2)$.

2.2 1ª Prova – 24 de Fevereiro de 2018

Questão 1.

$a)$ *Sabendo que* f *e* g *são funções tais que* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+2g(x)\big)=5$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=2$, *encontre* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)g(x)\big)$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to k}\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}}{x-k}$.

Questão 2.

$a)$*Estude a continuidade de* $f(x)=[\![\cos x]\!]$ *com* $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{\cos x}{x}$.

Questão 3.

$a)$ *Determine o maior intervalo ou união de intervalos, em que a função* $f(x)=\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-3}$ *é contínua.*

$b)$*Mostre que a função* $f(x)=100\pi^{-\frac{x}{100}}-\dfrac{x^4}{100}$ *possui alguma raíz real.*

Questão 4.

$a)$ *Encontre* $\lim_{x\to\infty}f(x)$, *se para todo* $x>1$, $\dfrac{10.2^x-21}{2^{x+1}}<f(x)<\dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

$b)$*Encontre as assíntotas horizontais de* $f(x)=\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$.

Questão 5.

$a)$ *Seja* $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$, *use a definição de derivada para encontrar* $f'(1)$ *e determine a equação da reta tangente à* $y=f(x)$ *no ponto de abscissa* 1.

$b)$ *Encontre uma equação da reta tangente à curva* $y=2x^2+3$ *que seja paralela a reta dada por* $8x-y+3=0$.

***Questão* 1.**

a) Sabendo que f e g são funções tais que $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+2g(x)\big)=5$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=2$, *encontre* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)g(x)\big)$.

Considere o seguinte quociente:

$$\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)-g(x)}=1+\frac{3g(x)}{f(x)-g(x)}$$

Como $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+2g(x)\big)$ *e* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)$ *existem, com este último diferente de zero, então o limite do quociente é o quociente dos limites e, como* $\lim_{x\to+\infty}1$ *existe, conclui-se pelo segundo membro da igualdade acima que* $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ *também existe. Logo,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)+2g(x)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{3g(x)}{f(x)-g(x)}$$

$$\frac{\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+2g(x)\big)}{\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{\lim_{x\to+\infty}3g(x)}{\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)}$$

$$\frac{5}{2}=1+\frac{3\lim_{x\to+\infty}g(x)}{2}$$

$$5=2+3\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=1$$

Como $\lim_{x\to+\infty}g(x)$ *existe, então* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)$. *Ou seja,* $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ *existe. Com isso,*

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}g(x)$$

$$2=\lim_{x\to+\infty}f(x)-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=3.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to+\infty}f(x)\times\lim_{x\to+\infty}g(x)=3\times1=3.$$

$b)\ Calcule\ \lim_{x\to k}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}}{x-k}.$

$$\lim_{x\to k}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}}{x-k}=\lim_{x\to k}\left[\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{k}}{x-k}\cdot\frac{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2k}+\sqrt[4]{xk^2}+\sqrt[4]{k^3}}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2k}+\sqrt[4]{xk^2}+\sqrt[4]{k^3}}\right]$$

$$=\lim_{x\to k}\frac{(x-k)}{(x-k).\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2k}+\sqrt[4]{xk^2}+\sqrt[4]{k^3}\right)}\ ;\ *\ Se\ x\to k, então\ x\neq k\ e,\ portanto, (x-k)\neq 0.$$

$$=\lim_{x\to k}\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2k}+\sqrt[4]{xk^2}+\sqrt[4]{k^3}}$$

$$=\frac{\lim_{x\to k}1}{\sqrt[4]{\lim_{x\to k}x^3}+\sqrt[4]{\lim_{x\to k}(x^2k)}+\sqrt[4]{\lim_{x\to k}(xk^2)}+\sqrt[4]{\lim_{x\to k}k^3}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{k^3}+\sqrt[4]{k^3}+\sqrt[4]{k^3}+\sqrt[4]{k^3}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt[4]{k^3}}.\ *\ Obs.: k>0.$$

***Questão* 2.**

$a)Estude\ a\ continuidade\ de\ f(x)=[\![\cos x]\!]\ com\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$

$*\ Se\ x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right[, então\ 0\leq\cos x<1\ e, portanto, [\![\cos x]\!]=0;$

$*\ Se\ x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right], então\ 0\leq\cos x<1\ e, portanto, [\![\cos x]\!]=0.$

$*\ Se\ x=0, então\ \ [\![\cos x]\!]=[\![\cos 0]\!]=[\![1]\!]=1.$

$Logo,$

$$f(x)=[\![\cos x]\!]=\begin{cases}0, & se\ -\frac{\pi}{2}\leq x<0\ ou\ 0<x\leq\frac{\pi}{2}\\ 1, & se\ x=0\end{cases}.$$

$Como\ f\ é\ constante\ em\ \left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right], então\ f\ é\ contínua\ em\ \left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right].$
$Analisando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ 0, temos:$

1) $f(0)=1$
2) $\lim_{x\to 0}f(x)=0.$

$Como\ \lim_{x\to 0}f(x)\neq f(0), então\ f\ é\ descontínua\ em\ 0. Logo, conclui\text{-}se\ que\ f\ é$
$contínua\ em\ \left[-\frac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\frac{\pi}{2}\right].$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ *temos*:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Se $x < 0$, *então* $\frac{1}{x} < 0$. *Com isso ...*

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{x} \geq \frac{1}{x}$$

Reescrevendo ...

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

Considere $f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \frac{\cos x}{x}$ *e* $h(x) = -\frac{1}{x}$. *Dessa forma,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* $x < 0$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$, *então pelo Teorema do Confronto,* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. *Ou seja,*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos x}{x} = 0.$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Determine o maior intervalo ou união de intervalos, em que a função* $f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x - 3}$ *é contínua.*

Como f *é uma função racional, cujo numerador configura uma função raíz e ambas são ditas contínuas para todo o número de seus domínios, então o maior intervalo ou união de intervalos em que* f *é contínua é definido pelo seu domínio.*

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,; 25 - x^2 \geq 0 \;\; e \; x - 3 \neq 0\}$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R};\; -5 \leq x \leq 5 \; e \; x \neq 3\}$$

Portanto, f *é contínua em* $[-5,3[\cup]3,5]$.

$b)$ *Mostre que a função* $f(x) = 100\pi^{-\frac{x}{100}} - \frac{x^4}{100}$ *possui alguma raíz real.*

Considere os seguintes valores de f:

$* \; f(0) = 100\pi^{-\frac{0}{100}} - \frac{0^4}{100} = 100\,; \quad f(0) > 0$

$* \; f(-100) = 100\pi^{-\frac{(-100)}{100}} - \frac{100^4}{100} = 100\pi - 100^3\,; \quad f(-100) < 0$

Como f *é uma função definida pela diferença de funções contínuas em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[-100,0]$.

Como f é contínua no intervalo fechado $[-100,0]$ e 0 é um número entre $f(-100)$ e $f(0)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in (-100,0)$ tal que $f(c) = 0$. Portanto, f possui uma raíz real.

Questão 4.

a) Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$, *se para todo* $x > 1$, $\dfrac{10.2^x - 21}{2^{x+1}} < f(x) < \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

Considere $g(x) = \dfrac{10.2^x - 21}{2^{x+1}}$ *e* $h(x) = \dfrac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$. *Então, para todo* $x > 1$ $g(x) < f(x) < h(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{10.2^x - 21}{2^x.2} = \lim_{x\to\infty}\left(5 - \frac{21}{2^x.2}\right) = \lim_{x\to\infty} 5 - \lim_{x\to\infty} \frac{21}{2^x.2} = 5 - 0 = 5.$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} = \frac{\lim_{x\to\infty} 5}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}} = \frac{5}{\sqrt{1-0}} = \frac{5}{1} = 5.$$

Se $g(x) < f(x) < h(x)$ *quando* $x > 1$ *e* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 5$, *pelo Teorema do Confronto*, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$.

b) Encontre as assíntotas horizontais de $f(x) = \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$.

Dizemos que a reta $y = L$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f se, somente se,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}}\right] \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+ax-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2+bx}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{b}{x}\right)}} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = |x|. \text{Se } x \to \infty, \text{então } |x| \\
&\quad = x. \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x(a-b)}{x\sqrt{1+\frac{a}{x}}+x\sqrt{1+\frac{b}{x}}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1+\frac{b}{x}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} a - \lim\limits_{x\to\infty} b}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{x}} + \sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{x}}}$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}}$$

$$= \frac{a-b}{2}.$$

Logo, a reta $y = \frac{a-b}{2}$ *é assíntota horizontal ao gráfico de* f.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[\left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx}\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+ax-(x^2+bx)}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2+ax} + \sqrt{x^2+bx}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(a-b)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{a}{x}\right)} + \sqrt{x^2\left(1+\frac{b}{x}\right)}} \quad ; \quad \sqrt{x^2} = |x|. \text{Se } x \to -\infty, \text{ então } |x| = -x.$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(a-b)}{-x\sqrt{1+\frac{a}{x}} - x\sqrt{1+\frac{b}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{a-b}{-\sqrt{1+\frac{a}{x}} - \sqrt{1+\frac{b}{x}}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-\infty} a - \lim\limits_{x\to-\infty} b}{-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{a}{x}} - \sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{b}{x}}}$$

$$= \frac{a-b}{-\sqrt{1+0} - \sqrt{1+0}}$$

$$= \frac{a-b}{-2}$$

$$= \frac{b-a}{2}.$$

Logo, a reta $y = \frac{b-a}{2}$ *é assíntota horizontal ao gráfico de* f.

***Questão* 5.**

a) Seja $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$, *use a definição de derivada para encontrar* $f'(1)$ *e determine a equação da reta tangente à* $y = f(x)$ *no ponto de abscissa* 1.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > -3\}$$

Pela definição de derivada:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{(1+h)+3}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+3}}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{\sqrt{h+4}} - \dfrac{1}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2-\sqrt{h+4}}{2h\sqrt{h+4}} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{2-\sqrt{h+4}}{2h\sqrt{h+4}} \cdot \frac{2+\sqrt{h+4}}{2+\sqrt{h+4}}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4-(h+4)}{2h\sqrt{h+4}.\left(2+\sqrt{h+4}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{2h\sqrt{h+4}.\left(2+\sqrt{h+4}\right)} \quad ; \; *Se\ h \to 0, então\ h \neq 0 \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{2\sqrt{h+4}.\left(2+\sqrt{h+4}\right)} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{0+4}.\left(2+\sqrt{0+4}\right)} \\
&= \frac{-1}{4(2+2)} \\
&= -\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Equação da reta tangente à $y = f(x)$ *no ponto* $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{16}(x-1)$$

$$y = -\frac{1}{16}x + \frac{9}{16}$$

b) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 + 3$ *que seja paralela a reta dada por* $8x - y + 3 = 0$.

Obs.: A reta dada em questão possui coeficiente angular igual a 8.

Primeiramente devemos encontrar o ponto sobre o gráfico da curva $y = 2x^2 + 3$ *cuja reta tangente tenha coeficiente angular igual a* 8, *isto é, seja paralela a reta dada por* $y = 8x + 3$.

Contudo, sabe-se que o coeficiente angular de uma reta tangente à uma

$curva\ y = f(x)\ num\ ponto\ P\big(a, f(a)\big)$ é $numericamente\ igual\ ao\ valor\ da\ derivada\ da\ função\ neste\ ponto, ou\ seja, m = f'(a), onde\ m$ é $o\ coeficiente\ angular\ da\ reta.$

$Pela\ definição\ de\ derivada$:

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(a+h)^2 + 3 - (2a^2 + 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3 - 2a^2 - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4ah + 2h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4a + 2h)}{h}\ ; \quad *Se\ h \to 0, então\ h \neq 0 \\
&= \lim_{h\to 0} (4a + 2h) \\
&= 4a.
\end{aligned}
$$

$Como\ a\ reta\ tangente$ é $paralela$ à $y = 8x + 3, então\ f'(a) = 4a = 8. Portanto,$ $a = 2. Ponto\ P(2,11).$

$Equação\ da\ reta\ tangente$:

$$y - 11 = 8(x - 2)$$
$$y = 8x - 5$$

2.3 2ª Prova – 23 de Março de 2018

Questão 1.

$a)$ *Se* f *for uma função diferenciável e* $g(x) = xf(x)$, *use a definição de derivada para mostrar que* $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

$b)$ *Considere os pontos de abscissas a e -a do gráfico da curva* $y = x^2$, *onde* $a \neq 0$. *Encontre as equações das retas tangentes ao gráfico nestes pontos e em seguida determine o valor de a tal que as retas tangentes nestes pontos sejam ortogonais.*

Questão 2.

$a)$ *Seja* $P(x) = x(x-2018)(x+2018)$, *mostre que* $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2018} + \dfrac{1}{x+2018}$. *Conclua que* $P'(1009) = -(1009)^2$.

$b)$ *Encontre, se existir, o(s) ponto(s) da curva* $y = x + e^x - e^{2x}$ *tal que a reta tangente ao gráfico neste(s) ponto(s) são horizontais.*

Questão 3.

$a)$ *Há uma reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = 3^x 2^{\operatorname{tg} x}$ *no ponto de ordenada* 1. *Determine a área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de eixos, o ponto de ordenada* 1 *e a interseção da citada reta com o eixo das abscissas.*

$b)$ *Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ *no ponto de abscissa* $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Questão 4.

$a)$ *Determine a derivada de* $y = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{cotg}(3x)}\right)$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3+x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

Questão 5.

$a)$ *Mostre, usando derivação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo dado por* $x^2 + y^2 = 25$ *é perpendicular a reta que contém o ponto P e a origem.*

$b)$ *Considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo* 1*cm e um ângulo agudo* θ, *com cateto oposto* h. *Determine a taxa de variação de* θ *em relação à* h *quando* $h = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,cm$.

***Questão* 1.**

a) Se f for uma função diferenciável e $g(x) = xf(x)$, use a definição de derivada para mostrar que $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

Como f é uma função diferenciável, então

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Pela definição de derivada,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)f(x + \Delta x) - xf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x[f(x + \Delta x) - f(x)] + \Delta x f(x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{x.[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} + \frac{\Delta x.f(x + \Delta x)}{\Delta x}\right] \\ &= x.\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x)\ ; \\ &= x.f'(x) + f(x) \end{aligned}$$

Logo, $g'(x) = xf'(x) + f(x)$.

b) Considere os pontos de abscissas a e -a do gráfico da curva $y = x^2$, onde $a \neq 0$. Encontre as equações das retas tangentes ao gráfico nestes pontos e em seguida determine o valor de a tal que as retas tangentes nestes pontos sejam ortogonais.

Pontos $A(a, a^2)$ e $B(-a, a^2)$.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da curva $y = x^2$ nos pontos A e B são numericamente iguais ao valor da derivada da função da curva nas abscissas a e -a, respectivamente m_A e m_B. Logo,

$$y' = 2x \Longrightarrow \begin{matrix} m_A = 2a \\ m_B = -2a \end{matrix}$$

Equações das retas tangentes nestes pontos:

No ponto A: $y - a^2 = 2a(x - a) \Longrightarrow y = 2ax - a^2$
No ponto B: $y - a^2 = -2a\big(x - (-a)\big) \Longrightarrow y = -2ax - a^2$.

Para que estas retas sejam ditas ortogonais, o produto de seus coeficientes angulares deve ser igual a -1. Com isso ...

$$\begin{gathered} m_A.m_B = -1 \\ (2a).(-2a) = -1 \end{gathered}$$

$$-4a^2 = -1$$
$$a^2 = \frac{1}{4}$$
$$a = \pm\frac{1}{2}$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Seja* $P(x) = x(x-2018)(x+2018)$, *mostre que* $\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2018} + \frac{1}{x+2018}$. *Conclua que* $P'(1009) = -(1009)^2$.

$$\begin{aligned} P'(x) &= \frac{d}{dx}[x(x-2018)(x+2018)] \\ &= \frac{dx}{dx}.[(x-2018)(x+2018)] + x.\frac{d}{dx}[(x-2018)(x+2018)] \\ &= 1.(x-2018)(x+2018) + x[1.(x+2018) + 1.(x-2018)] \\ &= (x-2018)(x+2018) + x(x+2018) + x(x-2018) \end{aligned}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{(x-2018)(x+2018) + x(x+2018) + x(x-2018)}{x(x-2018)(x+2018)}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{(x-2018)(x+2018)}{x(x-2018)(x+2018)} + \frac{x(x+2018)}{x(x-2018)(x+2018)} + \frac{x(x-2018)}{x(x-2018)(x+2018)}$$

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2018} + \frac{1}{x+2018}.$$

$$P'(1009) = (1009-2018)(1009+2018) + 1009(1009+2018) + 1009(1009-2018)$$

$*$ *Sendo* $2018 = 2 \times 1009$ ...

$$P'(1009) = (-1009)(3 \times 1009) + 1009(3 \times 1009) + 1009(-1009)$$
$$P'(1009) = -3 \times (1009)^2 + 3 \times (1009)^2 - (1009)^2$$
$$P'(1009) = -(1009)^2.$$

$b)$ *Encontre, se existir, o(s) ponto(s) da curva* $y = x + e^x - e^{2x}$ *tal que a reta tangente ao gráfico neste(s) ponto(s) são ortogonais.* (*horizontais*!)

$$y' = 1 + e^x - 2e^{2x}$$

Se a reta tangente ao gráfico da curva em determinado ponto é horizontal, então o coeficiente angular é nulo. Ou seja, $y' = 0$.

$$y' = 0 \Longrightarrow -2e^{2x} + e^x + 1 = 0$$

Seja $e^x = a, a > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. *Com essa substituição, obtemos*:

$$-2a^2 + a + 1 = 0$$

$$\Delta = 9$$
$$a = \frac{-1 \pm 3}{-4} \therefore a = 1.$$

$a = e^x \Longrightarrow x = \ln a = \ln 1 = 0.$

Logo, no ponto de abscissa $x = 0$ *há reta tangente horizontal. Ponto* $(0,0)$.

***Questão* 3.**

a) Há uma reta tangente ao gráfico da função $f(x) = 3^x 2^{\operatorname{tg} x}$ *no ponto de ordenada* 1. *Determine a área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de eixos, o ponto de ordenada* 1 *e a interseção da citada reta com o eixo das abscissas.*

Obs.: O produto de funções exponenciais com bases distintas da forma $a^x b^y$ *assume o valor* 1 *se, somente se,* $x = y = 0$, *com* $a \neq b$.

Neste caso, o ponto de ordenada 1 *do gráfico da função* $f(x) = 3^x 2^{\operatorname{tg} x}$ *tem abscissa tal que:*

$$x = 0 \text{ e } \operatorname{tg} x = 0$$

Logo, $x = 0$ *satisfaz simultaneamente a condição acima. O ponto em questão é o ponto* $A = (0,1)$.

$f'(x) = 3^x \ln 3 \,.\, 2^{\operatorname{tg} x} + 3^x 2^{\operatorname{tg} x} \ln 2 \,.\, \sec^2 x$
$f'(x) = f(x).[\ln 3 + \ln 2 \,.\, \sec^2 x]$
$f'(0) = f(0).[\ln 3 + \ln 2 \,.\, \sec^2 0]$
$f'(0) = 1.(\ln 3 + \ln 2)$
$f'(0) = \ln 6.$

Equação da reta tangente ao gráfico de f *no ponto* $(0,1)$:

$$y - 1 = \ln 6 \,.\, (x - 0)$$

Interseção da reta tangente com o eixo das abscissas: Ponto $B\left(-\frac{1}{\ln 6}, 0\right)$.

Área do triângulo formado pelos pontos A, B *e* O:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln 6} \cdot 1 = \frac{1}{2 \ln 6} = \frac{1}{\ln 36} \; u.A$$

b) Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ *no ponto de abscissa* $x = \frac{3\pi}{4}$.

Dado que $|x| = \sqrt{x^2}$, *e que* $\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$, *pela Regra da Cadeia, temos:*

$$f'(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}.\sec^2 x$$

O ponto de abscissa $x = \frac{3\pi}{4}$ *é o ponto* $P\left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$ *e o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* f *neste ponto é* $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, *dado por*:

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{\left|\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right|}.\sec^2\frac{3\pi}{4} = \frac{-1}{|-1|}.\left(\sqrt{2}\right)^2 = -2.$$

Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de f *no ponto* P *é*:

$$y - 1 = -2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$y = -2x + \frac{3\pi}{2} + 1$$
$$y = -2x + \frac{3\pi + 2}{2}$$

***Questão* 4.**

$a)$ *Determine a derivada de* $y = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\operatorname{cotg}(3x)}\right)$.

Sejam $u = 3x, v = \operatorname{cotg}(u)$, $z = \sqrt{v}$ *e* $y = f(z) = \operatorname{sen}(z)$. *Pela Regra da Cadeia,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$
$$y' = \cos(z).\frac{1}{2\sqrt{v}}.[-\operatorname{cossec}^2(u)].3$$
$$y' = -\frac{3\operatorname{cossec}^2(3x).\cos\left(\sqrt{\operatorname{cotg}(3x)}\right)}{2\sqrt{\operatorname{cotg}(3x)}}$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(3+x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$.

Seja $f(x) = \operatorname{sen}(3+x)^2$ *uma função composta contínua e derivável em seu domínio, isto é, nos reais. Logo, pela definição de derivada num ponto temos*:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou ainda, fazendo $x = a + h$ *e, portanto,* $h = x - a$, *ajustando o limite temos*:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Em analogia à esta expressão o limite a ser calculado inicialmente sugere

$a = 0. Portanto,$

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x}$$

$Contudo, pela\ Regra\ da\ Cadeia,$

$$f'(x) = 2.(3 + x).\cos(3 + x)^2$$

$$f'(0) = 6 \cos 9$$

$Logo,$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(3 + x)^2 - \operatorname{sen} 9}{x} = 6 \cos 9.$$

***Questão* 5.**

$a) Mostre, usando\ derivação\ implícita, que\ qualquer\ reta\ tangente\ em\ um\ ponto\ P\ a\ um\ círculo\ dado\ por\ x^2 + y^2 = 25\ é\ perpendicular\ a\ reta\ que\ contém\ o\ ponto\ P\ e\ a\ origem.$

$Por\ derivação\ implícita, temos:$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$Dado\ um\ ponto\ P(x_0, y_0)\ tal\ que\ x_0^2 + y_0^2 = 25, isto\ é, P\ é\ um\ ponto\ do\ círculo\ citado\ anteriormente, temos\ que\ o\ coeficiente\ angular\ m_1\ da\ reta\ tangente\ em\ P\ é\ dado\ por:$

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x_0}{y_0}$$

$Contudo, o\ coeficiente\ angular\ m_2\ da\ reta\ que\ contém\ o\ ponto\ P\ e\ a\ origem\ é\ dado\ por$

$$m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}$$

$Contudo, o\ produto\ dos\ coeficientes\ angulares\ m_1\ e\ m_2\ é\ tal\ que\ m_1.m_2 = -1.$
$Ou\ seja, a\ reta\ tangente\ em\ qualquer\ ponto\ P\ do\ círculo\ x^2 + y^2 = 25\ é\ perpendicular\ a\ reta\ que\ contém\ o\ ponto\ P\ e\ a\ origem.$

$b)$ *Considere um triângulo retângulo com hipotenusa medindo* $1cm$ *e um ângulo agudo* θ, *com cateto oposto* h. *Determine a taxa de variação de* θ *em relação à* h *quando* $h = \frac{\sqrt{3}}{2} cm$.

A relação entre θ, h *e a hipotenusa que mede* $1cm$ *é dada por*:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{h}{1}$$
$$\operatorname{sen}\theta = h$$
$$\theta = \operatorname{arcsen}(h)$$

A taxa de variação de θ *em relação à* h, *denotada por* $\frac{d\theta}{dh}$ *ou* $\theta'(h)$ *é dada por*:

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{1}{\sqrt{1-h^2}}$$

Quando $h = \frac{\sqrt{3}}{2} cm$, *temos*:

$$\frac{d\theta}{dh} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\, rad/cm.$$

2.4 2ª Prova – 24 de Março de 2018

Questão 1.

$a)$*Determine onde a função* $f(x) = |x-1| + |x+2|$ é *diferenciável e encontre* $f'(x)$.

$b)$*Use a definição de derivada, para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar.*

Questão 2.

$a)$*As parábolas* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = ax^2 + bx - \frac{3}{4}$ *se tangenciam num ponto cuja reta tangente comum tem coeficiente angular igual* à 1. *Determine a e b.*

$b)$*Determine para quais valores de x o gráfico de* $f(x) = x + 2\,\mathrm{sen}\,x$ *tem uma reta tangente horizontal.*

Questão 3.

$a)$*Calcule o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico de* $f(x) = 2^{\sec x}$, *no ponto do gráfico em que* $x = \frac{\pi}{3}$. *Dividindo este coeficiente angular por* $8\sqrt{3}$ *obteremos o coeficiente angular de uma outra reta a qual passa pelo ponto* $(1{,}0)$. *Determine a área do triângulo cujos vértices são a origem, o ponto* $(1{,}0)$ *e a interseção da segunda reta com o eixo das ordenadas.*

$b)$*Sendo* $f(x) = 2|\mathrm{sen}\,x||\cos x|$, *determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de f no ponto em que* $x = \frac{5\pi}{6}$.

Questão 4.

$a)$*Mostre que a função* $y = e^{2x}(A.\cos 3x + B.\mathrm{sen}\,3x)$, *satisfaz a equação* $y'' - 4y' + 13y = 0$.

$b)$*Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{\mathrm{sen}\,(3x)} - 1}{x}$.

Questão 5.

$a)$*Encontre as equações de ambas as retas tangentes* à *elipse* $x^2 + 4y^2 = 36$ *que passam pelo ponto* $(12{,}3)$.

$b)$*Determine todos os pontos onde a reta tangente ao gráfico de* $y = \mathrm{arcsen}\left(\dfrac{1}{2 + x^2}\right)$ é *horizontal.*

***Questão* 1.**

$a)$ *Determine onde a função* $f(x) = |x-1| + |x+2|$ *é diferenciável e encontre* $f'(x)$.

$*$ *Obs.:* f *é definida como a soma de funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)-(x+2), & se\ x \leq -2 \\ -(x-1)+(x+2), & se -2 < x < 1 \\ (x-1)+(x+2), & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x-1, & se\ x \leq -2 \\ 3, & se -2 < x < 1 \\ 2x+1, & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

Expressando f *como uma função definida por partes onde estas são funções polinomiais e, portanto, contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$,, *então* f *é diferenciável em* $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1,\infty)$. *Contudo, é necessário analisar a diferenciabilidade de* f *em* $x = -2$ *e em* $x = 1$.

$$f'_-(-2) = \lim_{x\to -2^-} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2x-1-3}{x+2} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2(x+2)}{x+2} = -2.$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x\to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{3-3}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{0}{x+2} = 0.$$

Como as derivadas laterais em $x = -2$ *existem, porém são diferentes, então* f *não é diferenciável em* $x = -2$.

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{0}{x-1} = 0.$$

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1-3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2.$$

Como as derivadas laterais em $x = 1$ *existem, porém são diferentes, então* f *não é diferenciável em* $x = 1$.

Logo, f *é contínua em* $\mathbb{R}$, *mas diferenciável em* $(-\infty,-2) \cup (-2,1) \cup (1,\infty)$ *ou* $\mathbb{R} - \{-2,1\}$.

$b)$ *Use a definição de derivada, para mostrar que a derivada de uma função par é uma função ímpar.*

Sendo f *uma função par, então* $f(x) = f(-x)$. *Pela definição de função derivada:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}$$

$*\ Obs.: A\ variação\ \Delta x\ é\ o\ equivalente\ ao\ h\ tanto\ usado\ na\ literatura. Por\ questão\ didática\ represento\ aqui\ por\ \Delta x.$

$*\ Obs.: Independente\ desta\ variação\ ser\ positiva\ ou\ negativa, a\ definição\ de\ função\ derivada\ é\ inalterada, ocorrendo\ apenas\ um\ ajuste\ no\ limite\ como\ mostrado\ na\ expressão\ acima. Basta\ imaginar\ que\ h = -\Delta x, por\ exemplo,\ e\ a\ expressão\ volta\ a\ ser\ o\ que\ vocês\ conhecem\ por$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

$\ldots Voltando\ à\ resolução\ da\ questão \ldots$

$Usando\ a\ expressão\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{-\Delta x}\ substituindo\ o\ x\ por\ -x, temos:$

$$f'(-x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-x - \Delta x) - f(-x)}{-\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(-(x + \Delta x)\big) - f(-x)}{-\Delta x}$$

$Como\ f(-x) = f(x), então\ f\big(-(x + \Delta x)\big) = f(x + \Delta x). Logo,$

$$f'(-x) = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\big(-(x + \Delta x)\big) - f(-x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= -f'(x).$$

$\therefore f'(x) = -f'(-x).$

$Portanto, f'(x) = -f'(-x), isto\ é, a\ derivada\ de\ uma\ função\ par\ é\ uma\ função\ ímpar.$

Questão 2.

$a) As\ parábolas\ f(x) = x^2\ e\ g(x) = ax^2 + bx - \frac{3}{4}\ se\ tangenciam\ num\ ponto\ cuja\ reta\ tangente\ comum\ tem\ coeficiente\ angular\ igual\ à\ 1. Determine\ a\ e\ b.$

$Se\ f\ e\ g\ se\ tangenciam\ num\ ponto\ P(x, y)\ cuja\ reta\ tangente\ em\ P\ tem\ coeficiente\ angular\ igual\ à\ 1\ sendo\ esta\ reta\ comum\ a\ ambas\ as\ curvas, então\ a\ derivada\ de\ f\ em\ P\ é\ igual\ 1, assim\ como\ a\ derivada\ de\ g\ em\ P\ também\ é\ igual\ a\ 1.$

$$f'(x) = 2x\ ;\quad f'(x) = 1 \Longrightarrow 2x = 1 \therefore x = \frac{1}{2}\quad e\quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Com isso, temos $P\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. *Sabendo-se que este é um ponto comum às parábolas, então* $g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ *e pelo fato anteriormente explicado,* $g'\left(\frac{1}{2}\right)=1$. *Logo,*

$$g\left(\frac{1}{2}\right)=a.\frac{1}{4}+b.\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Longrightarrow a+2b=4\ (I)$$

$$g'(x)=2ax+b;\quad g'\left(\frac{1}{2}\right)=2a.\frac{1}{2}+b=1\Longrightarrow a+b=1\ (II)$$

$$\begin{cases}a+2b=4\\a+b=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a+2b=4\\b=3\end{cases}\ \therefore\ \boldsymbol{b=3\ e\ a=-2}.$$

Portanto, $g(x)=-2x^2+3x-\frac{3}{4}$.

b) Determine para quais valores de x *o gráfico de* $f(x)=x+2\operatorname{sen}x$ *tem uma reta tangente horizontal.*

$$D(f)=\mathbb{R}.$$

$$f'(x)=1+2\cos x$$

Nos pontos do gráfico de f *onde a reta tangente é horizontal, isto é, possui coeficiente angular nulo são os pontos onde* $f'(x)=0$. *Logo,*

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\ \therefore\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, com\ k\in\mathbb{Z}$$

***Questão* 3.**

a) Calcule o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico de $f(x)=2^{\sec x}$, *no ponto do gráfico em que* $x=\frac{\pi}{3}$. *Dividindo este coeficiente angular por* $8\sqrt{3}$ *obteremos o coeficiente angular de uma outra reta a qual passa pelo ponto* $(1,0)$. *Determine a área do triângulo cujos vértices são a origem, o ponto* $(1,0)$ *e a interseção da segunda reta com o eixo das ordenadas.*

$$D(f)=\left\{x\in\mathbb{R}\,;x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad com\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$f'(x)=2^{\sec x}.\ln 2\,.\sec x\,.\operatorname{tg}x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2^{\sec\frac{\pi}{3}}.\ln 2\,.\sec\frac{\pi}{3}.\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2^2.\ln 2\,.2.\sqrt{3}$$

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sqrt{3}.\ln 2$

Obs.: $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *é o coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico de* f *no ponto em que* $x = \frac{\pi}{3}$.

Dividindo $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *por* $8\sqrt{3}$, *obtemos* $\ln 2$ *que é o coeficiente angular da segunda reta mencionada que passa pelo ponto* $(1,0)$. *A equação desta segunda reta é:*

$$y - 0 = \ln 2\,(x - 1)$$

$$y = x.\ln 2 - \ln 2$$

A interseção dessa reta com o eixo das ordenadas é o ponto $(0, -\ln 2)$. *A área do triângulo formado por este ponto juntamente com a origem* $(0,0)$ *e o ponto* $(1,0)$ *é:*

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}.(\ln 2).(1) = \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}\ u.A$$

b) Sendo $f(x) = 2|\operatorname{sen} x||\cos x|$, *determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de* f *no ponto em que* $x = \frac{5\pi}{6}$.

$f(x) = 2|\operatorname{sen} x||\cos x| = 2.|\operatorname{sen} x\,.\cos x| = |\operatorname{sen} 2x|$

Ponto em que $x = \frac{5\pi}{6}$: $\quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \left|\operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Ponto* $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Dado que $|x| = \sqrt{x^2}$, *e que* $\frac{d}{dx}|x| = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$.

Seja $u = 2x, v = \operatorname{sen} u$ *e* $f(v) = |v|$. *pela Regra da Cadeia temos:*

$$f'(x) = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{v}{|v|}.\cos u\,.2$$

$$f'(x) = 2\cos 2x\,.\frac{\operatorname{sen} 2x}{|\operatorname{sen} 2x|}$$

$$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right|}. = 2.\left(\frac{1}{2}\right).\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|}. = -1.$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -1\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$y = -x + \frac{5\pi + 3\sqrt{3}}{6}$$

***Questão* 4.**

a) Mostre que a função $y = e^{2x}(A.\cos 3x + B.\operatorname{sen} 3x)$, *satisfaz a equação* $y'' - 4y' + 13y = 0$.

$y' = 2\boldsymbol{e^{2x}(A.\cos 3x + B.\operatorname{sen} 3x)} + 3e^{2x}(B.\cos 3x - A.\operatorname{sen} 3x)$
$\boldsymbol{y'} = 2\boldsymbol{y} + 3e^{2x}(B.\cos 3x - A.\operatorname{sen} 3x)$

$y'' = 2y' + 6e^{2x}(B.\cos 3x - A.\operatorname{sen} 3x) - 9\boldsymbol{e^{2x}(A.\cos 3x + B.\operatorname{sen} 3x)}$
$y'' = 2y' + 6e^{2x}(B.\cos 3x - A.\operatorname{sen} 3x) - 9\boldsymbol{y}$
$y'' = 2y' + \boldsymbol{6e^{2x}(B.\cos 3x - A.\operatorname{sen} 3x) + 4y} - 13y$
$y'' = 2y' + \boldsymbol{2[2y + 3e^{2x}(B.\cos 3x - A.\operatorname{sen} 3x)]} - 13y$
$y'' = 2y' + \boldsymbol{2y'} - 13y$
$y'' = 4y' - 13y$
$y'' - 4y' + 13y = 0.$

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2^{\operatorname{sen}(3x)} - 1}{x}$.

Seja $f(x) = 2^{\operatorname{sen}(3x)}$ *uma função composta contínua e derivável em seu domínio, isto é, nos reais. Logo, pela definição de derivada num ponto temos*:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ou ainda, fazendo $x = a + h$ *e, portanto,* $h = x - a$, *ajustando o limite temos*:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Em analogia à esta expressão o limite a ser calculado inicialmente sugere $a = 0$. *Portanto,*

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{2^{\operatorname{sen}(3x)} - 1}{x}$$

Contudo, pela Regra da Cadeia,

$$f'(x) = 3.\cos(3x).2^{\operatorname{sen}(3x)}.\ln 2$$

$$f'(0) = 3\ln 2 = \ln 8.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{\operatorname{sen}(3x)} - 1}{x} = \ln 8.$$

***Questão* 5.**

a)Encontre as equações de ambas as retas tangentes à elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ *que passam pelo ponto* $(12,3)$.

Equação reta qualquer que passa pelo ponto $(12,3)$:

$$y - 3 = m(x - 12)$$

Onde m é o coeficiente angular da reta. Entretanto, caso existam retas tangentes à elipse num ponto (x, y) *que passam pelo ponto* $(12,3)$, *então nesses pontos de tangência o coeficiente angular é numericamente igual ao valor da derivada nestes pontos. Logo, por derivação implícita, temos*:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4y^2) = \frac{d}{dx}(36)$$
$$2x + 8y.y' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{4y}$$

Substituindo na equação da reta, temos:

$$y - 3 = -\frac{x}{4y}(x - 12)$$
$$4y^2 - 12y = -x^2 + 12x$$
$$12x + 12y = x^2 + 4y^2$$

Partindo da premissa que existe reta tangente, então o ponto de tangência satisfaz a condição $x^2 + 4y^2 = 36$ *(pertece à elipse). Logo*:

$$12x + 12y = 36$$
$$x + y = 3 \ (I)$$

Os pontos da elipse cuja reta tangente passa pelo ponto $(12,3)$ *satisfaz a equação I.*

$$x^2 + 4y^2 = 36$$
$$x^2 + 4(3 - x)^2 = 36$$
$$x^2 + 4(9 - 6x + x^2) = 36$$
$$5x^2 - 24x + 36 = 36$$
$$5x^2 - 24x = 0$$
$$x(5x - 24) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad e \quad x_2 = \frac{24}{5}$$

Esses valores, segundo a equação I, correspondem aos pontos $(0,3)$ *e* $\left(\frac{24}{5}, -\frac{9}{5}\right)$.
Nestes pontos, os coeficientes angulares das reta tangentes são:

$$y'_{(0,3)} = -\frac{0}{12} = 0 \quad e \quad y'_{\left(\frac{24}{5},-\frac{9}{5}\right)} = -\frac{\frac{24}{5}}{\left(-\frac{36}{5}\right)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

Equações das retas tangentes:

$r: y - 3 = 0(x - 12)$

$r: y = 0.$

$s: y - 3 = m(x - 12)$

$s: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 12)$

$s: y = \frac{2}{3}x - 5$

b) Determine todos os pontos onde a reta tangente ao gráfico de $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2 + x^2}\right)$ *é horizontal.* $D(y) = \mathbb{R}$

Seja $u = 2 + x^2, v = u^{-1}$ *e* $y = \operatorname{arcsen} v$. *Pela Regra da Cadeia, temos:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) \cdot (2x)$$

$$y' = -\frac{2x}{(2 + x^2)^2 \sqrt{1 - \frac{1}{(2 + x^2)^2}}}$$

$$y' = -\frac{2x}{(2 + x^2)\sqrt{x^4 + 4x^2 + 3}} \quad ; \quad D(y') = \mathbb{R}$$

No ponto do gráfico de y onde a reta tangente é horizontal a derivada é nula.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \therefore x = 0$$

$y(0) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2 + 0^2}\right) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$. *O ponto em questão é o ponto* $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

2.5 3ª Prova – 27 de Abril de 2018

Questão 1.

$a)$ *Use derivação logarítmica para calcular a derivada de* $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

Questão 2.

Um reservatório de água tem $10m$ *de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com* 30 *cm de comprimento da base,* 80 *cm de extensão no topo e* 50 *cm de altura. Se este reservatório for preenchido com água a uma taxa de* $0{,}2\,m^3/min$, *determine a velocidade na qual o nível da água está subindo quando estiver a* 30 *cm de profundidade.*

Questão 3.

$a)$ *Use aproximações lineares para estimar o valor de* $\ln(1{,}09)$.

$b)$ *Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}}$, *no ponto em que a ordenada é* 1.

Questão 4.

$a)$ *Encontre os valores de máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$, *para* $x \in [0,4]$.

$b)$ *Dois radares posicionados à* $1km$ *de distância um do outro, ao longo de uma avenida detectam o horário que os carros atravessam cada radar. Considerando que a velocidade instantânea máxima permitida na avenida é de* $60\,km/h$, *determine qual o tempo mínimo em que um condutor pode passar entre os dois radares, sem que a velocidade instantânea permitida seja ultrapassada.*

Questão 5.

$a)$ *Mostre que* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{2}$.

$b)$ *Seja* $f(x) = \ln|\cos(\ln x)|$. *Encontre* f', *o domínio de* f *e* f'.

***Questão* 1.**

$a)$ *Use derivação logarítmica para calcular a derivada de* $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$.

$$D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$
$$y > 0 \ se \ x > 0 \quad e \quad y < 0 \ se \ x < 0$$

$$\ln y = \ln\left[\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\ln y = \frac{1}{3}[\ln|x| + \ln(x^2+1) - \ln(x-1)^2]$$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{3}[\ln|x| + \ln(x^2+1) - \ln(x-1)^2]\right\}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2(x-1)}{(x-1)^2}\right]$$

$$y' = \frac{y}{3}\left[\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2}{x-1}\right]$$

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+5}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{5}$$

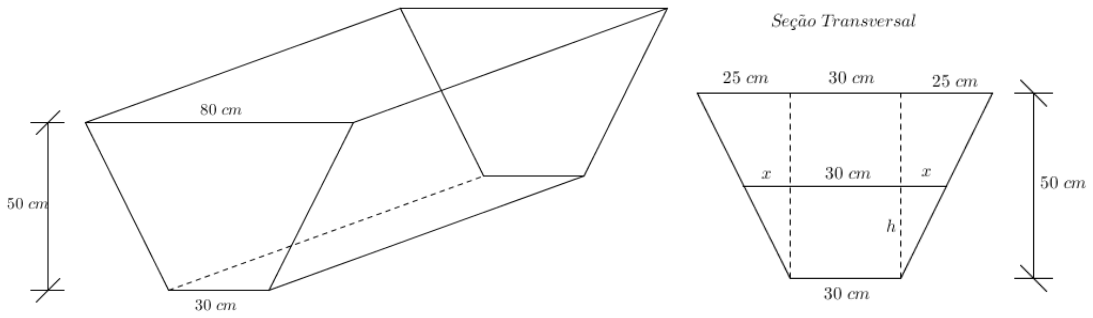
$$= e \times (1+0)^5$$

$$= e.$$

$*$ *Limite fundamental exponencial*: $\lim\limits_{n\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

***Questão* 2.**

Um reservatório de água tem $10m$ *de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com* 30 *cm de comprimento da base,* 80 *cm de extensão no topo e* 50 *cm de altura. Se este reservatório for preenchido com água a uma taxa de* $0{,}2\,m^3/min$*, determine a velocidade na qual o nível da água está subindo quando estiver a* 30 *cm de profundidade.*



O volume de água dentro do reservatório no momento em que o nível da água é h, com $h \in [0,50]$, é dado pelo produto da área transversal do reservatório pelo seu comprimento.

$*$ Obs.: As medidas devem estar na mesma unidade!

$$V = \frac{(B+b)h}{2} \times L = \frac{[(30+2x)+30]h}{2} \times 1000$$

$$V = 500h(60+2x)$$

$$V = 1000h(30+x)$$

Por semelhança de triângulo, observando a seção transversal, temos:

$$\frac{h}{x} = \frac{50}{25} \Longrightarrow x = \frac{h}{2}$$

Com isso, $\quad V = 1000h\left(30 + \frac{h}{2}\right) = 500(60h + h^2)$

Pela Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$0{,}2 \times 10^6 = 500(60+2h) \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{400}{60+2h}$$

Quando o nível da água estiver a 30 cm de profundidade, temos:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=30cm} = \frac{400}{60+2\times 30} = \frac{400}{120} = \frac{10}{3} cm/min$$

Portanto, o nível da água estará subindo à taxa de 10/3 cm/min.

***Questão* 3.**

a) Use aproximações lineares para estimar o valor de $\ln(1{,}09)$.

Considere a função $f(x) = \ln x$ *, com* $x > 0$*. Temos,* $f(1) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ *e* $f'(1) = 1$.

A aproximação linear ou lineariazação de f *em* 1 *é dada pela expressão:*

$$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1)$$
$$L(x) = 0 + 1.(x-1)$$
$$L(x) = x - 1$$

Para valores em torno de 1*, próximos a* 1*, podemos dizer que* $f(x) \cong L(x)$. *Portanto,*

$$f(1{,}09) \cong L(1{,}09) = 1{,}09 - 1 = 0{,}09.$$

Ou seja, $\ln(1{,}09) \cong 0{,}09$.

b) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}}$*, no ponto em que a ordenada é* 1.

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x} = 1$$

$$1 + \operatorname{tgh} x = 1 - \operatorname{tgh} x$$

$$2\operatorname{tgh} x = 0 \Rightarrow \operatorname{tgh} x = 0 \therefore x = 0 \quad Ponto\ (0{,}1)$$

Como $Im(\operatorname{tgh} x) = (-1{,}1)$ *então* f *está definida em* $\mathbb{R}$ *e* $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\ln f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}} = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+\operatorname{tgh} x}{1-\operatorname{tgh} x}\right) = \frac{1}{4}[\ln(1+\operatorname{tgh} x) - \ln(1-\operatorname{tgh} x)]$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln f(x)] = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{4}[\ln(1+\operatorname{tgh} x) - \ln(1-\operatorname{tgh} x)]\right\}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{4}\left[\frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\operatorname{tgh} x} - \frac{-\operatorname{sech}^2 x}{1-\operatorname{tgh} x}\right]$$

$$f'(x) = \frac{f(x)}{4}\left[\frac{\operatorname{sech}^2 x}{1+\operatorname{tgh} x} + \frac{\operatorname{sech}^2 x}{1-\operatorname{tgh} x}\right]$$

$$f'(0) = \frac{f(0)}{4}\left[\frac{\operatorname{sech}^2 0}{1+\operatorname{tgh} 0} + \frac{\operatorname{sech}^2 0}{1-\operatorname{tgh} 0}\right]$$

$$f'(0) = \frac{1}{4}\left[\frac{1^2}{1+0} + \frac{1^2}{1-0}\right] = \frac{1}{2}.$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1)$:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$$
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

***Questão* 4.**

a) Encontre os valores de máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$, *para* $x \in [0,4]$.

f é definida pela diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[0,4]$ e, pelo Teorema do Valor Extremo, f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $[a,b]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f nos extremos do intervalo:*

$f(0) = 0 - 2\operatorname{arctg} 0 = 0.$
$f(4) = 4 - 2\operatorname{arctg} 4\,.\quad f(4) > 0.\ (*\ Obs.: 2\operatorname{arctg} 4 < \pi)$

2. *Os valores de f nos números críticos de f em* $(0,4)$:

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe*"

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} \quad D(f') = \mathbb{R}$$

Como f é derivável em $\mathbb{R}$, se f possui um número crítico c, então $f'(c)$ existe e, portanto, $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \frac{2}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow 1 + x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \therefore x = 1.$$

$*\ Obs.: x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, *contudo* $-1 \notin (0,4)$. *Logo, apenas* $x = 1$ *é solução.*

$$f(1) = 1 - 2\operatorname{arctg} 1 = 1 - 2.\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2} < 0$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 *e* 2, *concluimos que* $\left(1-\frac{\pi}{2}\right)$ *é o valor mínimo absoluto e* $(4-2\operatorname{arctg}4)$ *é o valor máximo absoluto de* f *em* $[0,4]$.

$b)$ *Dois radares posicionados* à $1km$ *de distância um do outro, ao longo de uma avenida detectam o horário que os carros atravessam cada radar. Considerando que a velocidade instantânea máxima permitida na avenida é de* $60\,km/h$, *determine qual o tempo mínimo em que um condutor pode passar entre os dois radares, sem que a velocidade instantânea permitida seja ultrapassada.*

Seja $S(t)$ *a função que descreve o deslocamento* s *de um carro em determinado tempo* t, *com* s *em km e* t *em horas. A velocidade instantânea* v *dada por* $S'(t)$ *é tal que* $S(t) \leq 60\,km/h$.

S *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:
1. s *é contínua em* $[0,t]$;
2. s *é derivável em* $(0,t)$;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (0,t)$ *tal que*

$$S'(c) = \frac{S(t)-S(0)}{t-0}$$

Como $S'(c)$ *é a velocidade instantânea* v *e, considerando* $S(0)$ *o local em que está o primeiro radar e* $S(t)$ *o local em que está posicionado o segundo radar, então* $S(t)-S(0) = 1km$. *Logo,*

$$S'(c) = v \leq 60 \Longrightarrow \frac{1}{t} \leq 60 \therefore t \geq \frac{1}{60}h = 1min.$$

Portanto, o tempo mínimo em que um condutor pode passar entre os dois radares, sem que a velocidade instantânea permitida seja ultrapassada é $1min$.

***Questão* 5.**

$a)$ *Mostre que* $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, *tal que* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Calculemos a derivada de f:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} - 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}.(1+x)}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x}.(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}.(1+x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}.(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}.(1+x)}$$

$$f'(x) = 0.$$

Se $f'(x) = 0$ *para todo em* $[0,\infty[$, *então* f *é constante em* $[0,\infty[$. *Isto é,* $f(x) = C$, *onde* C *é uma constante.*

$$f(0) = \operatorname{arcsen}(-1) - 2\operatorname{arctg} 0 = -\frac{\pi}{2}$$

Portanto, $f(x) = -\frac{\pi}{2}$ *para* $x \geq 0$. *Ou seja,*

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$$

$b)$ *Seja* $f(x) = \ln|\cos(\ln x)|$. *Encontre* f', *o domínio de* f *e* f'.

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ e \ \ln x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, com \ k \in \mathbb{N}\right\}$$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ e \ x \neq e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, com \ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\ln x)}.[-\operatorname{sen}(\ln x)].\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}.$$

$$D(f') = D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \ e \ x \neq e^{\frac{\pi}{2}+k\pi}, com \ k \in \mathbb{N}\right\}.$$

2.6 3ª Prova – 28 de Abril de 2018

Questão 1.

$a)$ *Use derivação logarítmica para calcular a derivada de* $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n$.

Questão 2.

O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 *mm, enquanto o das horas tem* 4 *mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros* à 1*hora*?

Questão 3.

$a)$ *Use diferenciais para encontrar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura* h, *raio interno* r *e espessura* Δr. *Determine o erro envolvido nesta fórmula.*

$b)$ *Determine uma equação para a reta que tangencia o gráfico da função* $f(x) = \operatorname{senh}(\log_2 x^3)$, *no ponto do gráfico em que* $f(x) = 0$.

Questão 4.

$a)$ *Encontre os valores de máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}(2x)$, *para* $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$b)$ *Mostre que* $f(x) = \operatorname{senh} x - \cos x$, *possui exatamente uma raíz real.*

Questão 5.

$a)$ *Sejam* f *e* g *deriváveis em* (a,b) *e contínuas em* $[a,b]$, *tais que* $f(a) = g(a)$ *e* $f'(x) < g'(x)$ *para* $x \in (a,b)$. *Mostre que* $f(b) < g(b)$.

$b)$ *Calcule a derivada de* $y = (\ln x)^{\cos x}$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Use derivação logarítmica para calcular a derivada de* $y = \dfrac{(x+1)^3\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \ e \ x \neq 3\}$. $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

$$\ln y = \ln\left[\frac{(x+1)^3\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}\right]$$

$$\ln y = \ln(x+1)^3 + \ln(x-2)^{\frac{3}{2}} - \ln(x-3)^{\frac{2}{5}}$$

$$\ln y = 3\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-2| - \frac{2}{5}\ln|x-3|$$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[3\ln|x+1|] + \frac{d}{dx}\left[\frac{3}{2}\ln|x-2|\right] - \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{5}\ln|x-3|\right]$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{x+1} + \frac{3}{2(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}$$

$$y' = y\left[\frac{3}{x+1} + \frac{3}{2(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right]$$

$$y' = \frac{(x+1)^3\sqrt{(x-2)^3}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \cdot \left[\frac{3}{x+1} + \frac{3}{2(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}\right]$$

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{b}{n}\right)^n$.

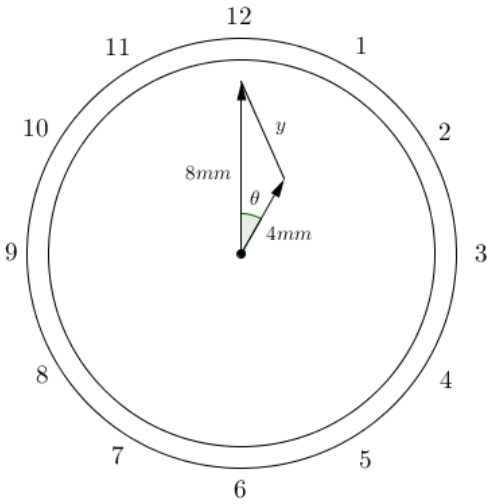
Considere $x = \dfrac{b}{n} \Longrightarrow n = \dfrac{b}{x}$. *Se* $n \to \infty$, *então* $x \to 0$. *Ajustando o limite, temos*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{1/x}\right]^b = \left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right]^b = e^b.$$

$*$ *Limite exponencial fundamental*: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$

***Questão* 2.**

O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8 *mm, enquanto o das horas tem* 4 *mm de comprimento. Quão rápido está variando a distância entre a ponta dos ponteiros à* 1*hora*?



A distância entre a ponta dos ponteiros dos minutos e das horas representada por y é dada pela Lei dos Cossenos pela expressão:

$$y^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \times 4 \times 8 \times \cos\theta$$
$$y^2 = 80 - 64\cos\theta$$
$$y = 4\sqrt{5 - 4\cos\theta}$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Onde,

$$\frac{dy}{d\theta} = 4 . \frac{1}{2\sqrt{5 - 4\cos\theta}} . (4\,\mathrm{sen}\,\theta) = \frac{8.\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{5 - 4\cos\theta}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{min} - \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{h} = \frac{2\pi\ rad}{60\ min} - \frac{\pi/6\ rad}{60\ min} = \frac{11\pi}{360} rad/min.$$

No momento e que o ponteiros marcam 1h, o ângulo θ entre eles é 30° $= \frac{\pi}{6}$. *Logo,*

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{8.\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{6}}{\sqrt{5 - 4\cos\frac{\pi}{6}}} = \frac{4}{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{13}} = \frac{4\sqrt{65 + 26\sqrt{3}}}{13} mm/rad$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4\sqrt{65 + 26\sqrt{3}}}{13} . \frac{11\pi}{360} = \frac{11\pi\sqrt{65 + 26\sqrt{3}}}{1170} mm/min$$

É o quão rápido a distância entre a ponta dos ponteiros está variando à 1h.

***Questão* 3.**

a) Use diferenciais para encontrar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr. Determine o erro envolvido nesta fórmula.

Volume do cilindro: $V = \pi r^2 h$

Por diferenciais temos:

$$\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r) \cong V'(r).dr = 2\pi rh.\Delta r$$

Logo, o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr é igual $2\pi rh\Delta r$.

Entretanto, o volume exato dessa camada, isto é, ΔV é dado por:

$\Delta V = V(r + \Delta r) - V(r)$
$\Delta V = \pi(r + \Delta r)^2 h - \pi r^2 h$
$\Delta V = \pi r^2 h + 2\pi rh.\Delta r + \pi \Delta r^2.h - \pi r^2 h$
$\Delta V = 2\pi rh.\Delta r + \pi \Delta r^2.h$

O erro envolvido na fórmula do volume aproximado é $\pi h(\Delta r)^2$.

b) Determine uma equação para a reta que tangencia o gráfico da função $f(x) = \operatorname{senh}(\log_2 x^3)$, *no ponto do gráfico em que* $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \log_2 x^3 = 0 \therefore x = 1.$ *Ponto* $(1,0)$.

$$f'(x) = \cosh(\log_2 x^3).\frac{1}{x^3.\ln 2}.3x^2$$

$$f'(x) = \frac{3}{x.\ln 2}\cosh(\log_2 x^3)$$

$$f'(1) = \frac{3}{\ln 2}\cosh(\log_2 1) \;\; ; \;\; \cosh(0) = 1.$$

$$f'(1) = \frac{3}{\ln 2}.$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f em $(1,0)$:

$$y - 0 = \frac{3}{\ln 2}(x - 1)$$

$$y = \frac{3}{\ln 2}(x - 1)$$

***Questão* 4.**

a) Encontre os valores de máximos e mínimos absolutos de $f(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}(2x)$,
para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua no intervalo fechado $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Pelo Teorema do Valor Extremo, f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em certos números c e d em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de f nos extremos do intervalo:*

$f(0) = 2\cos 0 + \operatorname{sen} 0 = 2.$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen}\pi = 0.$

2. *Os valores de f nos números críticos de f em* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe."

$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 2\cos(2x)$
$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x)$
$f'(x) = -2(2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1) \quad ; \quad D(f') = \mathbb{R}$

Como f é derivável em $\mathbb{R}$, se f possui número crítico c, então $f'(c)$ existe e, portanto, $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad ; \quad \Delta = 1 + 8 = 9$

$$\operatorname{sen} x = \frac{-1 \pm 3}{4} \quad \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad ou \ \operatorname{sen} x = -1.$$

Considerando o intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *a equação* $\operatorname{sen} x = -1$ *não possui solução e,* $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ *possui solução com* $x = \frac{\pi}{6}$. *Portanto,* $x = \frac{\pi}{6}$ *é o número crítico de f no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluimos que 0 é o valor mínimo absoluto e $3\sqrt{3}/2$ é o valor máximo absoluto de f em $[0, \pi/2]$.

$b)$ *Mostre que* $f(x) = \operatorname{senh} x - \cos x$, *possui exatamente uma raíz real.*

f *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua em qualquer intervalo fechado* $I \subset \mathbb{R}$. *Sabendo-se que a função* $\operatorname{senh} x$ *é ímpar, e calculando o valor de* f *em* $-\frac{\pi}{2}$ *e em* $\frac{\pi}{2}$, *temos*:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{senh}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{senh}\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{senh}\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Usando o fato de que a função $\operatorname{senh} x$ *é ímpar, temos* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Como f *é contínua no intervalo fechado* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e* 0 *é um número entre* $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ *e* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, *então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *tal que* $f(a) = 0$. *Isto implica dizer que* f *possui uma raíz real.*

Suponha que f *possui duas raízes reais* a *e* b *tais que* $f(a) = f(b) = 0$, *com* $a \neq b$. *Então,* f *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. f *é contínua no intervalo fechado* $[a, b]$;
2. f *é derivável no intervalo aberto* (a, b);
3. $f(a) = f(b)$

Pelo Teorema de Rolle, existe algum $c \in (a, b)$ *tal que* $f'(c) = 0$. *Contudo,*

$$f'(x) = \cosh x + \operatorname{sen} x$$

Como $f'(0) = 1$ *e,* $\cosh x \geq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ *tendo seu valor mínimo* 1 *em* $x = 0$, *e* $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$, *então* $f'(x) = 0$ *não possui solução real.*

Logo, f *não possui duas raízes reais e, como demonstrado pelo Teorema do Valor Intermediáiro,* f *posui uma raíz real. Portanto,* f *possui exatamente uma raíz real.*

***Questão* 5.**

$a)$ *Sejam* f *e* g *deriváveis em* (a, b) *e contínuas em* $[a, b]$, *tais que* $f(a) = g(a)$ *e* $f'(x) < g'(x)$ *para* $x \in (a, b)$. *Mostre que* $f(b) < g(b)$.

f *e* g *são funções que satisfazem as seguintes hipóteses*:

1. f *e* g *são contínuas no intervalo fechado* $[a, b]$;
2. f *e* g *são deriváveis no intervalo aberto* (a, b);

Então, pelo Terema do Valor Médio, existe algum número c em (a,b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad e \quad g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Contudo, $f'(c) < g'(c)$ *e* $f(a) = g(a)$. *Logo,*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{g(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) < g(b) - f(a)$$

$$f(b) < g(b)$$

$b)$ *Calcule a derivada de* $y = (\ln x)^{\cos x}$.

Domínio de f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \ e \ x \neq e\}$.

$\ln y = \ln(\ln x)^{\cos x} = \cos x \,.\, \ln(\ln x)$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{d}{dx}[\cos x \,.\, \ln(\ln x)]$$

$$\frac{y'}{y} = -\operatorname{sen} x \,.\, \ln(\ln x) + \cos x \,.\, \frac{1}{\ln x} \,.\, \frac{1}{x}$$

$$y' = y\left[-\operatorname{sen} x \,.\, \ln(\ln x) + \frac{\cos x}{x.\ln x}\right]$$

$$y' = (\ln x)^{\cos x}\left[-\operatorname{sen} x \,.\, \ln(\ln x) + \frac{\cos x}{x.\ln x}\right]$$

2.7 4ª Prova – 18 de Maio de 2018

Questão 1.

$a)$ *Determine o maior intervalo onde a função* $f(x) = e^x - x^e$ *é crescente e onde é decrescente. Conclua que* $e^\pi > \pi^e$.

$b)$ *Encontre os números a e b tal que, a função* $f(x) = axe^{bx^2}$ *tenha um valor máximo local* 1 *em* $x = 2$.

Questão 2.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$.

$b)$ *Mostre que uma função polinomial de grau três tem exatamente um ponto de inflexão.*

Questão 3.

$a)$ *Sabe-se que* $f'(x) = \sec^2 x$ *e que o gráfico de* f *passa pelo ponto* $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3} + 1\right)$. *Em que ponto do intervalo* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *o gráfico de* f *intercepta o gráfico de* $g(x) = \sec x$?

$b)$ *Se* f' *for contínua, mostre que* $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x)$.

Questão 4. *Um sólido é formado acoplando-se a um cilindro circular reto de altura* h *e raio* r, *uma semiesfera de raio* r. *Deseja-se que a área da superfície do sólido seja igual a* 5π. *Determine* r *e* h, *para que o volume deste sólido seja máximo.*

Questão 5.

Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{9 - x^2}$. *Sabendo que* $f'(x) = -\dfrac{x^2(x^2 - 27)}{(9 - x^2)^2}$ *e* $f''(x) = -\dfrac{18x(x^2 + 27)}{(x^2 - 9)^3}$ *determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

***Questão* 1.**

a) Determine o maior intervalo onde a função $f(x) = e^x - x^e$ *é crescente e onde é decrescente. Conclua que* $e^\pi > \pi^e$.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

$f'(x) = e^x - e.x^{e-1}$
$f'(x) = 0 \Longrightarrow e^x = e.x^{e-1} \therefore x = \{1, e\}$
$f''(x) = e^x - e(e-1).x^{e-2}$

$f''(1) = e - e(e-1)\ ;\ \ f''(1) < 0$
$f''(e) = e^e - e(e-1).e^{e-2} = e^e\left[1 - 1 + \frac{1}{e}\right] = e^{e-1};\ \ f''(e) > 0.$

Pelo Teste da Segunda Derivada, $(1, f(1))$ *é ponto de máximo local e o ponto* $(e, f(e))$ *é ponto de mínimo local. Com isso, temos o seguinte estudo de sinal da primeira derivada:*

$$(0) + + + + + (1) - - - - - - (e) + + + + + + + \quad f'(x)$$

Logo, f *é crescente em* $(0,1) \cup (e, \infty)$.

Como f *é crescente em* (e, ∞)*, então para* $x > e, f(x) > f(e)$*. Tomemos como exemplo* $x = \pi$*, tal que* $\pi > e$*. Logo,*

$$f(\pi) > f(e)$$
$$e^\pi - \pi^e > e^e - e^e$$
$$e^\pi - \pi^e > 0$$
$$e^\pi > \pi^e$$

b) Encontre os números a e b tal que, a função $f(x) = axe^{bx^2}$ *tenha um valor máximo local* 1 *em* $x = 2$.

$$f(2) = 1 \Longrightarrow 2ae^{4b} = 1$$

f *é uma função definida pelo produto de uma função polinomial contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$*, por uma função exponencial também contínua e derivável em* $\mathbb{R}$*. Logo,* f *é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$.

"*Se* f *possui um máximo ou mínimo local em c e* $f'(c)$ *existir, então* $f'(c) = 0$"
(*Teorema de Fermat*)

Daqui concluimos que $f'(2) = 0$*. Com isso, temos*

$f'(x) = ae^{bx^2} + ax.(2bx).e^{bx^2}$

$f'(2) = ae^{4b} + 8abe^{4b}$

$f'(2) = e^{4b}(a + 8ab) = 0 \therefore (a + 8ab) = 0$

$$a(1+8b)=0 \implies \begin{cases} a=0 \text{ (não satisfaz a condição!)} \\ b=-\dfrac{1}{8} \end{cases} \quad \therefore b=-\frac{1}{8}.$$

$$2ae^{4.\left(-\frac{1}{8}\right)}=1 \implies 2ae^{-\frac{1}{2}}=1 \therefore a=\frac{\sqrt{e}}{2}.$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$.

Se $x\to 0$, *então* $(x-\operatorname{arcsen} x)\to 0$ *e* $\operatorname{sen}^3 x\to 0$, *logo o limite é indeterminado. Aplicando a regra de L'Hôspital, temos*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\operatorname{sen}^2 x\,.\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}.(-2x)}{3(2\operatorname{sen} x\,.\cos^2 x-\operatorname{sen}^3 x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\operatorname{sen} x\,(6\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{(6\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$=-(1)\times\frac{1}{(6.\cos^2 0-\operatorname{sen}^2 0)\sqrt{(1-0^2)^3}}$$

$$=-\frac{1}{6}.$$

$b)$ *Mostre que uma função polinomial de grau três tem exatamente um ponto de inflexão.*

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é um ponto de inflexão do gráfico de uma função se ocorre mudança no sentido da concavidade da função em torno de* c, *ou seja, se há mudança no sinal da segunda derivada de* f *em* c.

Considere a função cúbica $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, *uma função polinomial contínua e derivável em* $\mathbb{R}$. *Temos então:*

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f''(x)=6ax+2b$$

Estudo do sinal de f'':

Se $a > 0$, então: *Se $a < 0$, então:*

$$- - - - \left(-\frac{b}{3a}\right) + + + + \quad f'' \qquad\qquad + + + + \left(-\frac{b}{3a}\right) - - - - - \quad f''$$

Em ambas situações, ocorre mudança no sinal da segunda derivada f em $x = -\frac{b}{2a}$, ou seja, ocorre mudança no sentido da concavidade da função e, portanto, qualquer função cúbica tem um ponto de inflexão.

Não há mais do que um ponto de inflexão numa função cúbica, uma vez que a segunda derivada de f é uma função polinomial do 1º grau com somente uma raíz real, justamente onde ocorre mudança de sinal de f''. Portanto, f possui exatamente um ponto de inflexão

***Questão* 3.**

a) Sabe-se que $f'(x) = \sec^2 x$ e que o gráfico de f passa pelo ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}+1\right)$. Em que ponto do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ o gráfico de f intercepta o gráfico de $g(x) = \sec x$?

A primitiva mais geral de $f'(x)$ é $f(x) = \operatorname{tg} x + C$, onde C é uma constante. Além disso, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}+1$. Com isso,

$$\sqrt{3}+1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + C \Longrightarrow \sqrt{3}+1 = \sqrt{3} + C \therefore C = 1$$

Logo, $f(x) = \operatorname{tg} x + 1$.

Interseção entre f e g:

$$\begin{gathered} f(x) = g(x) \\ \operatorname{tg} x + 1 = \sec x \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 1 = \frac{1}{\cos x} \\ \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} \ ; \ \cos x \neq 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x = 1 \\ (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1^2 \\ 1 + 2\operatorname{sen} x . \cos x = 1 \\ 2\operatorname{sen} x . \cos x = 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \therefore x = 0. \ \textit{Ponto } (0,1) \end{gathered}$$

O ponto do intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ onde o gráfico de f intercepta o gráfico da função g é o ponto $(0,1)$.

$b)$ *Se* f' *for contínua, mostre que* $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f'(x)$.

Usando a regra de L'Hôspital, temos:

$*$ *Obs.: O limite é na variável* h *e, portanto, a regra de L'Hôspital deve levar em consideração que as derivadas são em relação à* h *e não em relação à* x.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-(-1).f'(x-h)}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)+f'(x-h)}{2}$$

$$=\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2}$$

$$=\frac{f'(x)+f'(x)}{2}$$

$$=\frac{2f'(x)}{2}$$

$$=f'(x).$$

***Questão* 4.**

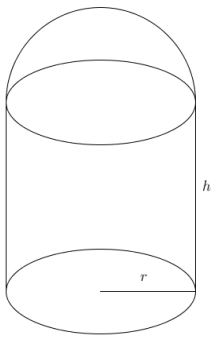
Um sólido é formado acoplando-se a um cilindro circular reto de altura h *e raio* r, *uma semiesfera de raio* r. *Deseja-se que a área da superfície do sólido seja igual a* 5π. *Determine* r *e* h, *para que o volume deste sólido seja máximo.*

A área da superfície do sólido é dado pela soma da área da base e lateral do cilindro circular reto e a área da superfície da semiesfera. Logo,

$$A_s=\pi r^2+2\pi rh+2\pi r^2=5\pi$$
$$3r^2+2rh=5$$
$$h=\frac{5-3r^2}{2r}$$

O volume do sólido é dado pela soma dos volumes do cilindro e da semiesfera. Logo,

$$V=\pi r^2h+\frac{2}{3}\pi r^3$$
$$V=\pi r^2\left(\frac{5-3r^2}{2r}\right)+\frac{2}{3}\pi r^3$$
$$V=\pi\left(\frac{5r-3r^3}{2}+\frac{2r^3}{3}\right)$$
$$V=\frac{\pi}{6}(15r-9r^3+4r^3)$$



$$V(r) = \frac{\pi}{6}(15r - 5r^3)$$
$$V'(r) = \frac{\pi}{6}(15 - 15r^2)\ ; r > 0$$

Estudo do sinal de $V'(r)$:

$$(0) + + + + + (1) - - - - - \quad V'(r)$$

Pelo teste C/D *concluimos que para* $r = 1$ *a função volume tem seu valor máximo local e, como para* $r > 0, V(r) \leq V(1)$, *então para* $r = 1$ *o volume será o máximo absoluto possível.*

Neste caso, temos para $r = 1$ *e* $h = \dfrac{5-3}{2} = 1$ *o sólido com volume máximo.*

***Questão* 5.**

Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{9 - x^2}$. *Sabendo que* $f'(x) = -\dfrac{x^2(x^2-27)}{(9-x^2)^2}$ *e* $f''(x) = -\dfrac{18x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}$ *determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 3\}$.

Obs.: f *é uma função ímpar, isto é,* $f(x) = -f(-x)$.

As interseções do gráfico de f *com os eixos coordenados, caso existam*;

$f(0) = 0$ *e* $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. *Interseção com os eixos coordenados*: $A(0,0)$

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*:

$$f'(x) = -\frac{x^2(x^2-27)}{(9-x^2)^2}$$

Pelo Teste C/D *da primeira derivada, temos que* f *é crescente onde* $f' > 0$ *e,* f *é decrescente onde* $f' < 0$. *Logo, do estudo do sinal de* f' *obtemos*:

$$- - - - - - - - - - - - - (0) - - - - - - - - - - - - - \quad -x^2$$
$$+ + + (-3\sqrt{3}) - - - - - - - - - - - - - - - (3\sqrt{3}) + + + \quad (x^2 - 27)$$
$$+ + + + + + + + + + (-3) + + + + + (3) + + + + + + + + \quad (9 - x^2)^2$$
$$- - - (-3\sqrt{3}) + + (-3) + + (0) + + (3) + + (3\sqrt{3}) - - - \quad f'(x)$$

Com isso, conclui-se que f é crescente em $\left(-3\sqrt{3},-3\right) \cup (-3,3) \cup \left(3,3\sqrt{3}\right)$ e f é decrescente em $\left(-\infty,-3\sqrt{3}\right) \cup \left(3\sqrt{3},\infty\right)$.

(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo:*

$$f''(x) = -\frac{18x(x^2+27)}{(x^2-9)^3}$$

f possui concavidade voltada para cima onde $f'' > 0$ e concavidade voltada para baixo onde $f'' < 0$. Pelo estudo do sinal de f'', temos:

$$\begin{array}{l}
+++++++++++(0)----------\quad -18x \\
+++++++++++++++++++++++++++(x^2+27) \\
++++(-3)-----\ -----(3)++++++\quad (x^2-9)^3 \\
++++(-3)----(0)++++(3)-----\quad f''(x)
\end{array}$$

Portanto, f possui concavidade voltada cima em $(-\infty,-3) \cup (0,3)$ e f possui concavidade voltada para baixo em $(-3,0) \cup (3,\infty)$.

(iii) *Assíntotas:*

Verticais: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Logo, pelo domínio de f devemos verificar se a descontinuidade em $x = \pm 3$ é uma descontinuidade infinita:

$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{\overbrace{x^3}^{-27}}{\underbrace{9-x^2}_{0^+}} = -\infty \quad e \lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{\overbrace{x^3}^{-27}}{\underbrace{9-x^2}_{0^-}} = \infty$$

Logo, a reta $x = -3$ é assíntota vertical do gráfico da função f.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{\overbrace{x^3}^{27}}{\underbrace{9-x^2}_{0^-}} = -\infty \quad e \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{\overbrace{x^3}^{27}}{\underbrace{9-x^2}_{0^+}} = \infty$$

Logo, a reta $x = 3$ é assíntota vertical do gráfico da função f.

Horizontais: A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal se, somente se,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{9-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{9-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2}{-2x} = \lim_{x\to\infty} \left(-\frac{3}{2}x\right) = \infty$$

Como o limite não existe, então f não possui assíntotas horizontais!

Oblíquas: A reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua se, somente se,

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0;$$

$$f(x) = \frac{x^3}{9-x^2} = -x + \frac{9x}{9-x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9x}{9-x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9}{-2x} = 0;$$

Portanto, a reta $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico da função f.

(iv) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem:

Resgatando o estudo do sinal da primeira derivada:

$$- - -\left(-3\sqrt{3}\right) + + (-3) + +(0) + +(3) + +\left(3\sqrt{3}\right) - - - \quad f'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, o ponto de abscissa $x = -3\sqrt{3}$ é um ponto de mínimo local e o ponto de abscissa $x = 3\sqrt{3}$ é um ponto de máximo local. Contudo, conforme analisado anteriormente, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty$. Portanto, f não possui valores máximos ou mínimos absolutos.

Como f é uma função ímpar, então $f\left(3\sqrt{3}\right) = -f\left(-3\sqrt{3}\right)$.

$$f\left(3\sqrt{3}\right) = \frac{\left(3\sqrt{3}\right)^3}{9-\left(3\sqrt{3}\right)^2} = \frac{81\sqrt{3}}{9-27} = \frac{81\sqrt{3}}{-18} = -\frac{9\sqrt{3}}{2} \therefore f\left(-3\sqrt{3}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

Ponto de mínimo local: $B\left(-3\sqrt{3}, \frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

Ponto de máximo local: $C\left(3\sqrt{3}, -\frac{9\sqrt{3}}{2}\right)$

Obs.: Embora 0 seja um número crítico de f, não ocorre mudança no sinal da derivada de f em torno de 0 e, portanto, $(0, f(0))$ não é ponto nem de máximo e nem de mínimo local.

(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*:

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f *se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de* c.

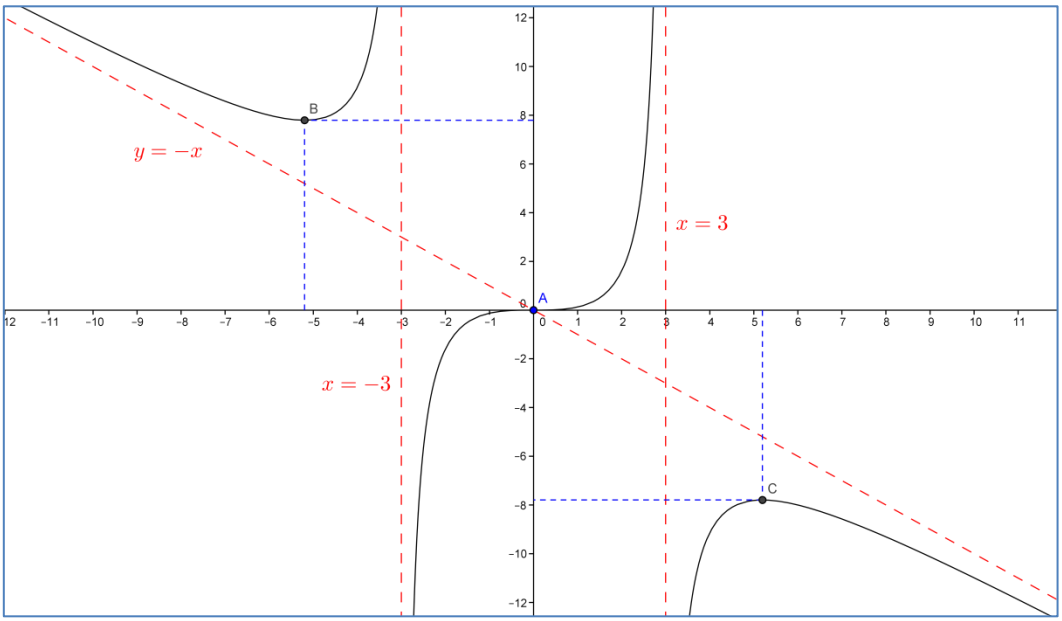
Pelo estudo do sinal de $f''(x)$, *temos*:

$$++++(-3)----(0)++++(3)-----\quad f''(x)$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x = 0$ *e este número pertence ao domínio da função, então o ponto* $A(0,0)$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f.

Embora ocorra mudança na direção da concavidade do gráfico de f *em torno de* $x = -3$ *e de* $x = 3$, *estes números não pertencem ao domíni de* f, *logo não há pontos nessas abscissas*.

(vi) *Esboço do gráfico*:



2.8 4ª Prova – 19 de Maio de 2018

Questão 1.

$a)$ *Seja* $f: [0,2018] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[0,2018]$ *e derivável em* $(0,2018)$ *satisfazendo* $f'(x)f'(2018-x) \leq 0\ \forall x \in (0,2018)$. *Sabendo que existe no máximo um c tal que* $f'(c) = 0$ *e que* $f''(c) > 0$, *se* $f'(c) = 0$ *encontre os intervalos onde* f *é crescente e decrescente*.

$b)$ *Seja* $f(x) = \ln(1 - \ln x)$. *Determine o domínio, os intervalos de crescimento e decrescimento, a concavidade e os pontos de inflexão de* f.

Questão 2.

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}}$.

$b)$ *Determine, se existir, o ponto de inflexão da função* $f(x) = x|x|$.

Questão 3.

$a)$ *Seja* $f''(x) = -4\cos(2x)$, *com* $f(0) = 1$ *e* $f'(0) = 0$. *As retas* $y = \dfrac{1}{2}$ *e* $y = -\dfrac{1}{2}$, *interceptam o gráfico de* f *em pontos que são os vértices de um polígono. Determinea área desse polígono, com* $x \in [0, \pi]$.

$b)$ *Sejam* f, g *funções diferenciáveis, tais que* $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} g'(x) = 1$ *e* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. *Calcule* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x^2 - 1)}{g(x^3 - 1)}$.

Questão 4. *Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de* 9*m de largura até uma fábica situada do outro lado do rio,* 30*m do rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de* R\$5,00 *o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa* R\$4,00 *o metro. Qual o percurso mais econômico possível?*

Questão 5.

Seja $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$. *Sabendo que* $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ *e* $f''(x) = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$ *determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $f(x)$.

***Questão* 1.**

a) Seja $f: [0,2018] \to \mathbb{R}$ *contínua em* $[0,2018]$ *e derivável em* $(0,2018)$ *satisfazendo* $f'(x)f'(2018-x) \leq 0\ \forall x \in (0,2018)$. *Sabendo que existe no máximo um c tal que* $f'(c) = 0$ *e que* $f''(c) > 0$, *se* $f'(c) = 0$ *encontre os intervalos onde* f *é crescente e decrescente.*

Se $f'(c) = 0$, *então c é um número crítico de* f *em* $(0,2018)$ *e como* $f''(c) > 0$, *pelo Teste da Segunda Derivada* $(c, f(c))$ *é um ponto de mínimo local e, com isso, para* $x \in (0,c)$ *temos* $f'(x) < 0$ *e para* $x \in (c, 2018)$ *temos* $f'(x) > 0$.

Contudo, a expressão $f'(x)f'(2018-x) \leq 0$ *nos fornece para o valor médio do intervalo,* $x = 1009$, *a seguinte inequação:*

$$f'(1009).f'(2018-1009) \leq 0$$
$$[f'(1009)]^2 \leq 0$$
$$\therefore f'(1009) = 0 \implies c = 1009.$$

Logo, f *é crescente em* $(1009,2018)$ *e decrescente em* $(0,1009)$.

b) Seja $f(x) = \ln(1 - \ln x)$. *Determine o domínio, os intervalos de crescimento e decrescimento, a concavidade e os pontos de inflexão de* f.

Domínio de f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e\}$

$$f'(x) = \frac{1}{1-\ln x}.\left(-\frac{1}{x}\right)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)}$$

Pelo Teste C/D da primeira derivada, temos que f *é crescente onde* $f' > 0$ *e,* f *é decrescente onde* $f' < 0$. *Logo, do estudo do sinal de* f' *obtemos:*

Estudo do sinal de f':

$(0) + + + + + + + + + + + + + (e)$ $\quad x$
$(0) - - - - - - - - - - - - - (e)$ $\quad (\ln x - 1)$
$(0) - - - - - - - - - - - - - (e)$ $\quad f'(x)$

Pelo teste C/D concluimos que f *é estritamente decrescente em seu domínio, ou seja,* f *é decrescente em* $(0,e)$.

$$f''(x) = -\frac{1}{[x(\ln x - 1)]^2}.\left(\ln x - 1 + x.\frac{1}{x}\right)$$
$$f''(x) = -\frac{\ln x}{[x(\ln x - 1)]^2}$$

f *possui concavidade voltada para cima onde* $f'' > 0$ *e concavidade voltada para baixo onde* $f'' < 0$. *Pelo estudo do sinal de* f'', *temos:*

$(0) + + + \ +(1) - \ - - -(e) \quad (-\ln x)$
$(0) + + + + + + + + + +(e) \quad [x(\ln x - 1)]^2$
$(0) + + + + \ (1) \ - - - -(e) \quad f''(x)$

Portanto, f possui concavidade voltada para cima em $(0,1)$ e concavidade voltada para baixo em $(1,e)$

Como ocorre mudança na direção da concavidade de f em 1, então o ponto $(1, f(1))$ é ponto de inflexão do gráfico de f. Ponto de inflexão: $(1,0)$.

***Questão* 2.**

a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}}$.

Se $x \to 0^+$, $\operatorname{sen} x \to 0^+$ e $(1-\cos x) \to 0^+$, logo o limite é indeterminado. Usando a regra de L'Hôspital, temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{1-\cos x}}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x \,.\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{2\cos x \,.\sqrt{1-\cos x}}{\operatorname{sen} x} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x \,.\sqrt{1-\cos^2 x}}{\operatorname{sen} x \,.\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x \,.\sqrt{\operatorname{sen}^2 x}}{\operatorname{sen} x\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x \,.\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos x}{\sqrt{1+\cos x}}$$

$$= \frac{2.\cos 0}{\sqrt{1+\cos 0}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

b) Determine, se existir, o ponto de inflexão da função $f(x) = x|x|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

f é uma função definida por partes onde estas são funções polinomiais, e portanto, contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua e diferenciável em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(-x^2) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \quad e \quad f(0) = 0.$$

Ainda temos que f é contínua em 0, pois $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$. Com isso, f é contínua em $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h|$$

Se $h \to 0^+$, então $h > 0$ e $|h| = h$. Logo $\lim_{h\to 0^+} |h| = \lim_{h\to 0^+} h = 0$.
Se $h \to 0^-$, então $h < 0$ e $|h| = -h$. Logo $\lim_{h\to 0^-} |h| = \lim_{h\to 0^-}(-h) = 0$.

Portanto, f é derivável em 0 e, juntamente com análise inicial temos que f é derivável em $\mathbb{R}$.

Uma fórmula para f' é dada por

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

Conforme dito anteriormente, se f é derivável em $\mathbb{R}$, então f' é contínua em $\mathbb{R}$. Contudo, f' é derivável em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$f''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h)}{h}$$

Se $h \to 0^+$, então $h > 0$ e $f'(h) = 2h$. Logo,

$$f''_+(0) \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 2 = 2.$$

Se $h \to 0^-$, então $h < 0$ e $f'(h) = -2h$. Logo,

$$f''_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-2h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-2) = -2.$$

Como esses limites existem e são diferentes, então $f''(0)$ não existe. Contudo, ocorre mudança no sinal de f'' em torno de 0, isto é, ocorre mudança na direção daconcavidade f em torno de 0 e este pertence ao domínio de f, então o ponto $(0, f(0))$ é ponto de inflexão de f. Ponto de inflexão $(0,0)$.

Uma fórmula para f'' é dada por

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & x > 0 \\ -2, & x < 0 \end{cases}$$

***Questão* 3.**

$a)$ *Seja* $f''(x) = -4\cos(2x)$, *com* $f(0) = 1$ *e* $f'(0) = 0$. *As retas* $y = \frac{1}{2}$ *e* $y = -\frac{1}{2}$, *interceptam o gráfico de* f *em pontos que são os vértices de um polígono. Determinea área desse polígono, com* $x \in [0, \pi]$.

A primitiva mais geral de f'' *é dada por* $f'(x) = -2\,\text{sen}(2x) + C$, *onde* C *é uma constante e, repetindo o procedimento, a primitiva mais geral de* f' *é dada por* $f(x) = \cos(2x) + Cx + D$, *onde* D *também éuma constante.*

$f'(0) = 0 \Longrightarrow -2\,\text{sen}(0) + C = 0 \therefore C = 0.$

$f(0) = 1 \Longrightarrow \cos(0) + D = 1 \therefore D = 0.$

$f(x) = \cos(2x)$

Interseções de f *com as retas* $y = \frac{1}{2}$ *e* $y = -\frac{1}{2}$ *com* $x \in [0, \pi]$:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} \;\; e \;\; 2x = \frac{5\pi}{3} \therefore x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow \cos(2x) = -\frac{1}{2} \Longrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} \;\; e \;\; 2x = \frac{4\pi}{3} \therefore x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

Pontos de interseção: $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ $B\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$ $C\left(\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$ *e* $D\left(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

O polígono formado é um trapézio cujas bases são os segmentos $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *e altura dada pela distância entre as retas* $y = \frac{1}{2}$ *e* $y = -\frac{1}{2}$.

Área do polígono:

$$S = \frac{(b + B)h}{2} = \frac{\left[\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\right]\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} = \frac{\pi}{2}\; u.A$$

$b)$ *Sejam* f, g *funções diferenciáveis, tais que* $\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} g'(x) = 1$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. *Calcule* $\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{g(x^3 - 1)}$.

Se $x \to 1, (x^2 - 1) \to 0$ *e* $(x^3 - 1) \to 0$. *Logo* $f(x^2 - 1) \to 0$ *e* $g(x^3 - 1) \to 0$. *Assim, o limite é indeterminado. Usando a regra de L'Hôspital temos*

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x^2 - 1)}{g(x^3 - 1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x.f'(x^2 - 1)}{3x^2.g'(x^3 - 1)}$$

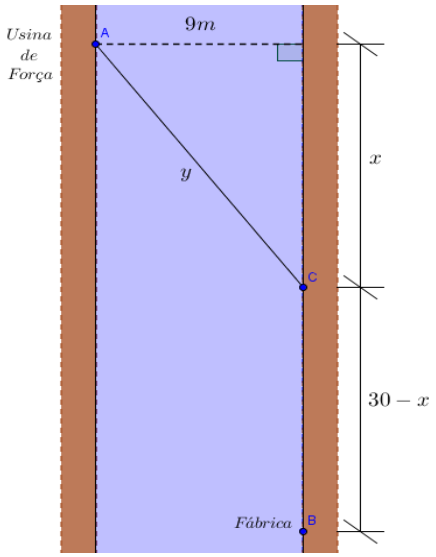
Se $x \to 1$, *então* $f'(x^2-1) \to 1$ *e* $g'(x^3-1) \to 1$. *Logo,*

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x.f'(x^2-1)}{3x^2.g'(x^3-1)} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x) \times \lim_{x\to 1} f'(x^2-1)}{\lim_{x\to 1}(3x^2) \times \lim_{x\to 1} g'(x^3-1)} = \frac{2\times 1}{3\times 1} = \frac{2}{3}.$$

***Questão* 4.**

Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 9*m de largura até uma fábica situada do outro lado do rio,* 30*m do rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R*$5,00 *o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R*$4,00 *o metro. Qual o percurso mais econômico possível?*

Considere que a usina de força está situado num ponto A à margem esquerda do rio e a fábrica num ponto B na margem oposta distante 30*m do ponto mais próximo da usina de força. Considere também que o percurso mais econômico pode ser realizado estendendo o cabo pelo rio até um ponto C na margem direita do rio situado à x metros do ponto mais próximo da usina de força e que os* $(30-x)$ *metros restantes o cabo será estendido por terra, conforme disposto na ilustração a seguir.*



O custo total C, em reais, para estender o cabo até a fábrica é dado por:

$$C = 5y + 4(30-x)\ ; \quad 0 \le x \le 30$$

Onde $y = \sqrt{9^2+x^2} = \sqrt{81+x^2}$. *Logo,*

$$C(x) = 5\sqrt{81+x^2} + 4(30-x)$$

Como C é uma função contínua no intervalo fechado $[0,30]$, *então pelo Teorema do Valor Extremo C assume um valor máximo absoluto* $C(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $C(d)$ *em certos número c e d em* $[0,30]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado temos

1. *Os valores de C nos extremos do intervalo*:

$C(0) = 5\sqrt{81+0} + 4(30-0) = 45 + 120 = 165$
$C(30) = 5\sqrt{81+30^2} + 4(30-30) = 5\sqrt{3^2(9+100)} = 15\sqrt{109}$

2. *Os valores de C nos números críticos de C em* (0,30):

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe.*"

$$C'(x) = \frac{5x}{\sqrt{81+x^2}} - 4$$

Como C é derivável em (0,30) *se C possui algum número crítico c, então* $C'(c)$ *existe e, portanto,* $C'(c) = 0$.

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{5x}{\sqrt{81+x^2}} = 4$$

$$\frac{25x^2}{81+x^2} = 16 \Longrightarrow 25x^2 = 9^2 4^2 + 16x^2 \Longrightarrow 9x^2 = 9^2.4^2 \Rightarrow x^2 = 9.4^2 \therefore x = 12m$$

$C(12) = 5\sqrt{81+144} + 4(30-12) = 5\sqrt{225} + 4(18) = 75 + 72 = 147$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 *e* 2, *concluimos que o percurso mais econômico para estender o cabo da usina de força até a fábrica custará* R$147,00 *e para tanto o cabo deve ser estendido pelo rio até um ponto C, na margem direita do rio, distante* 12*m do ponto mais próximo da fábrica e mais* 18*m de cabo estendido por terra do ponto C até o ponto B onde está situada a fábrica. Os comprimentos de cabo estendido pelo rio e pela terra são* 15*m e* 18*m, respectivamente*.

***Questão* 5**.

Seja $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$. *Sabendo que* $f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$ *e* $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$ *determine*:

(*i*) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(*ii*) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(*iii*) *As assíntotas, se existirem*;
(*iv*) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem*;
(*v*) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(*vi*) *O gráfico de* $f(x)$.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$.

As interseções do gráfico de f com os eixos coordenados, caso existam;

$f(0) = \dfrac{(0-1)^3}{(0+1)^2} = \dfrac{-1}{1} = -1$. *Interseção com o eixo y:* $A(0,-1)$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^3 = 0 \therefore x = 1$. *Interseção com o eixo x:* $B(1,0)$

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento:*

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

Pelo Teste C/D da primeira derivada, temos que f é crescente onde $f' > 0$ e, f é decrescente onde $f' < 0$. Logo, do estudo do sinal de f' obtemos:

$$\begin{array}{ll}
+++++++++++++++++(1)+++++++ & (x-1)^2 \\
---(-5)+++++++++++++++++++ & (x+5) \\
----------(-1)++++++++++++++ & (x+1)^3 \\
+++(-5)----(-1)+++++(1)+++++++ & f'(x)
\end{array}$$

Com isso, conclui-se que f é crescente em $(-\infty,-5) \cup (-1,\infty)$ e f é decrescente em $(-5,-1)$.

(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo:*

$$f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

f possui concavidade voltada para cima onde $f'' > 0$ e concavidade voltada para baixo onde $f'' < 0$. Pelo estudo do sinal de f'', temos:

$$\begin{array}{ll}
----------(1)+++++++ & 24(x-1) \\
+++++++(-1)++++++++++++++ & (x+1)^4 \\
-------(-1)------(1)+++++++ & f''(x)
\end{array}$$

Portanto, f possui concavidade voltada cima em $(1,\infty)$ e f possui concavidade voltada para baixo em $(-\infty,-1) \cup (-1,1)$.

(iii) *Assíntotas:*

Verticais: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Logo, pelo domínio de f devemos verificar se a descontinuidade em $x = -1$ é uma descontinuidade infinita:

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{(x-1)^3}^{-8}}{\underbrace{(x+1)^2}_{0^+}} = -\infty \quad e \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{\overbrace{(x-1)^3}^{-8}}{\underbrace{(x+1)^2}_{0^+}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = -1$ *é assíntota vertical do gráfico da função* f.

Horizontais: A reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se, somente se,*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3(x-1)^2}{2(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{6(x-1)}{2} = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3(x-1)^2}{2(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{6(x-1)}{2} = -\infty.$$

Como o limite não existe, então f *não possui assíntotas horizontais!*

Oblíquas: A reta $y = ax + b$ *é uma assíntota oblíqua se, somente se,*

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0;$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1} = (x-5) + \frac{12x+4}{x^2+2x+1}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x-5)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12x+4}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{12}{2x+2} = 0.$$

Portanto, a reta $y = x - 5$ *é assíntota oblíqua do gráfico da função* f.

(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem:*

Resgatando o estudo do sinal da primeira derivada:

$$+++(-5)----(-1)+++++(1)+++++++ \qquad f'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, o ponto de abscissa $x = -5$ *é um ponto de máximo local. Contudo, conforme analisado anteriormente,* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. *Portanto,* f *não possui valores máximos ou mínimos absolutos.*

$$f(-5) = \frac{(-5-1)^3}{(-5+1)^2} = \frac{-6^3}{16} = \frac{-(2^3.3^3)}{16} = \frac{-8\times 27}{16} = -\frac{27}{2}$$

Ponto de máximo local: $C\left(-5, -\frac{27}{2}\right)$

Obs.: Embora 1 *seja um número crítico de* f, *não ocorre mudança no sinal da derivada de* f *em torno de* 1 *e, portanto,* $(1, f(1))$ *não é ponto nem de máximo e nem de mínimo local.*

(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*:

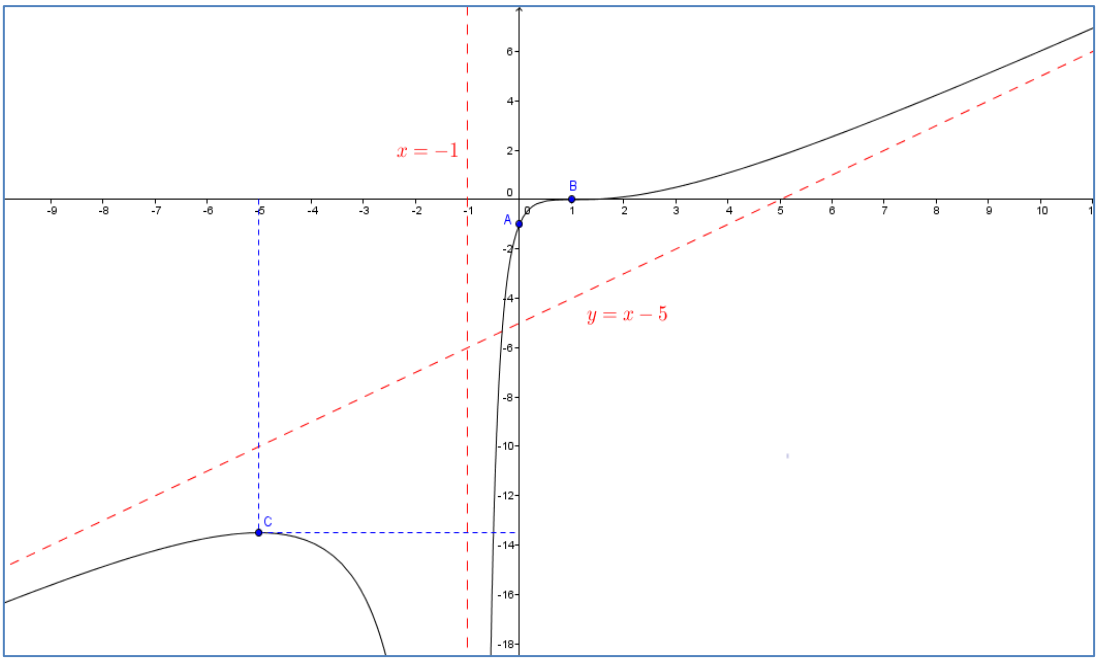
Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f *se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de* c.

Pelo estudo do sinal de $f''(x)$, *temos*:

$$-------(-1)------(1)+++++++ \quad f''(x)$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x = 1$ *e este número pertence ao domínio da função, então o ponto* $B(1,0)$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f.

(vi) *Esboço do gráfico*:



2.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 25 de Maio de 2018

Questão 1.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} x^2 \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos\left(\frac{\operatorname{sen} x+2}{x^3}\right)}$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x)-\operatorname{sen}(a-x)}{x}$.

Questão 2.

$a)$ *Seja* $f(x) = [\![\ln x]\!]$ *em* $[1, e^2)$. *Escreva* f *em duas sentenças e em seguida calcule* $\lim_{x\to e^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to e^+} f(x)$.

$b)$ *Mostre que* $f(x) = x^3 + 2^{-x} + \operatorname{sen} x$ *tem ao menos uma raiz real em* $[-4, -1]$.

Questão 3.

$a)$ *Para quais valores de* a, é *contínua* à *direita*, *a função* f *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{5}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x-3}\right), & se\ x \neq 3 \\ a, & se\ x = 3 \end{cases}$$

$b)$ *Determine o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* $f(x) = 2^{\operatorname{arcsec}(x^2)}$ *no ponto em que* $x = \sqrt{2}$.

Questão 4.

$a)$ *Use a definição de derivada para determinar onde* $f(x) = |x-9|$ é *derivável*.

$b)$ *Seja* $f(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)\operatorname{arcsen}(e^x)$. *Derive* f *e encontre o domínio de* f *e* f'.

Questão 5.

$a)$ *Se* $f(x) = \frac{e^x}{2x^2+x+1}$, *encontre a equação da reta tangente ao gráfico de* f *quando* $x = 0$.

$b)$ *Encontre uma equação da reta tangente* à *hipérbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *no ponto da hipérbole com abscissa* $2a$ *e ordenada positiva*.

***Questão* 1.**

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos\left(\frac{\operatorname{sen} x+2}{x^3}\right)}$.

$\forall x \in \mathbb{R}, com\ x \neq 0, temos$:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\operatorname{sen} x + 2}{x^3}\right) \leq 1$$

$Como\ 0 < \frac{1}{\pi} < 1, então\ a\ função\ exponencial\ é\ descrescente. Portanto,$

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos\left(\frac{\operatorname{sen} x+2}{x^3}\right)} \geq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1}$$

$$\frac{1}{\pi} \leq \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos\left(\frac{\operatorname{sen} x+2}{x^3}\right)} \leq \pi$$

$Como\ x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}, com\ x \neq 0, então$

$$\underbrace{\frac{x^2}{\pi}}_{f(x)} \leq \underbrace{x^2\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos\left(\frac{\operatorname{sen} x+2}{x^3}\right)}}_{g(x)} \leq \underbrace{x^2\pi}_{h(x)}$$

$* \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\pi} = 0 \quad e \quad \lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} x^2\pi = 0.$

$Como\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ quando\ x\ está\ próximo\ de\ 0\ (exceto\ possivelmente\ em\ 0)$
$e\ \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0, então, pelo\ Teorema\ do\ Confronto$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \therefore \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{1}{\pi}\right)^{\cos\left(\frac{\operatorname{sen} x+2}{x^3}\right)} = 0.$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen}(a-x)}{x}$.

$* \operatorname{sen}(a+x) = \operatorname{sen} a . \cos x + \operatorname{sen} x . \cos a$
$* \operatorname{sen}(a-x) = \operatorname{sen} a . \cos x - \operatorname{sen} x . \cos a$
$* \operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen}(a-x) = 2 \operatorname{sen} x . \cos a$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(a+x) - \operatorname{sen}(a-x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \operatorname{sen} x . \cos a}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x\to 0} 2 \cos a$$

$$= 1 \times 2 \cos a$$

$$= 2 \cos a.$$

***Questão* 2.**

a) Seja $f(x) = [\![\ln x]\!]$ *em* $[1, e^2)$. *Escreva* f *em duas sentenças e em seguida calcule* $\lim_{x\to e^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to e^+} f(x)$.

Os valores inteiros de $\ln x$ *estão associados às potências do número e. Ou seja,* $e^0, e^1 \dots e^n$, *com* $n \in \mathbb{N}$. *Logo, considerando o intervalo* $[1, e^2)$, *a função composta* $f(x) = [\![\ln x]\!]$ *pode ser escrita na seguinte forma:*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se\ 1 \le x < e \\ 1, & se\ e \le x < e^2 \end{cases}$$

$\lim_{x\to e^-} f(x) = \lim_{x\to e^-} 0 = 0.$
$\lim_{x\to e^+} f(x) = \lim_{x\to e^+} 1 = 1.$

Como os limites laterais em $x = e$ *existem, mas são diferentes, então não existe* $\lim_{x\to e} f(x)$.

b) Mostre que $f(x) = x^3 + 2^{-x} + \operatorname{sen} x$ *tem ao menos uma raiz real em* $[-4, -1]$.

f *é definida pela soma de funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, consequentemente, contínua no intervalo fechado* $[-4, -1]$. *Sabe-se que*

$f(-4) = (-4)^3 + 2^{-4} + \operatorname{sen}(-4) = -64 + \frac{1}{16} - \operatorname{sen}(4).\quad f(-4) < 0$
$f(-1) = (-1)^3 + 2^1 + \operatorname{sen}(-1) = -1 + 2 - \operatorname{sen}(1) = 1 - \operatorname{sen}(1).\quad f(-1) > 0$

Como f *é contínua no intervalo fechado* $[-4, -1]$ *e* 0 *é um número entre* $f(-4)$ *e* $f(-1)$, *então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $x \in (-4, -1)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Ou seja,* f *possui ao menos uma raiz real em* $[-4, -1]$.

***Questão* 3.**

a) Para quais valores de a, *é contínua à direita, a função* f *dada por*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{5}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x-3}\right), & se\ x \ne 3 \\ a, & se\ x = 3 \end{cases}$$

Para que f *seja contínua à direita de* 3, *a equação* $\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$ *deve ser satisfeita. Logo,*

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\left[\frac{3}{2} + \frac{5}{\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x-3}\right)\right];$$

Se $x \to 3^+$, *então* $\frac{2}{x-3} \to \infty$ *e, portanto,* $\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x-3}\right) \to \frac{\pi}{2}$.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{3}{2} + \frac{5}{\pi} \lim_{x\to 3^+} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{x-3}\right)\right] = \frac{3}{2} + \frac{5}{\pi}.\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Como $f(3) = a$, então, para que f seja contínua à direita de $3, a = 4$.

b) Determine o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de $f(x) = 2^{\operatorname{arcsec}(x^2)}$ no ponto em que $x = \sqrt{2}$.

$$f'(x) = 2^{\operatorname{arcsec}(x^2)}.\ln 2\,.\frac{1}{x^2\sqrt{(x^2)^2 - 1}}.(2x)$$

$$f'(\sqrt{2}) = 2^{\operatorname{arcsec}(2)}.\ln 2\,.\frac{1}{2\sqrt{(2)^2 - 1}}.2\sqrt{2}$$

$$f'(\sqrt{2}) = 2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2\,.\frac{1}{2\sqrt{3}}.2\sqrt{2}$$

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2\,.\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f no ponto em que $x = \sqrt{2}$ é dado por:

$$m_n = -\frac{1}{f'(\sqrt{2})} = -\frac{\sqrt{3}}{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2\,.\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2^{\frac{\pi}{3}}.2.\ln 2} = -\frac{\sqrt{6}}{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}.$$

***Questão* 4.**

a) Use a definição de derivada para determinar onde $f(x) = |x - 9|$ é derivável.

Se $x - 9 > 0$, então $|x - 9| = x - 9$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h - 9 > 0$ e portanto $|x + h - 9| = x + h - 9$. Consequentemente, para $x > 9$ temos

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{|x+h-9| - |x-9|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-9-(x-9)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x > 9$.

Analogamente, para $x < 9$ temos $|x - 9| = -x + 9$ e podemos escolher h suficientemente pequeno para que $x + h - 9 < 0$, e assim $|x + h - 9| = -(x + h - 9)$. Portanto, para $x < 9$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h-9| - |x-9|}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x-h+9-(-x+9)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-1) = -1.$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x < 9$.

Para $x = 9$ *temos de averiguar*

$$f'(9) = \lim_{h\to 0} \frac{f(9+h)-f(9)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

Se $h \to 0^+$, *então* $|h| = h$ *e, portanto,* $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$

Se $h \to 0^-$, *então* $|h| = -h$ *e, portanto,* $\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1.$

Uma vez que esses limites são diferentes, $f'(9)$ *não existe. Logo, f é diferenciável para todo x, exceto* 9.

Uma fórmula para f' *é dada por*

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & se\ x > 9 \\ -1, & se\ x < 9 \end{cases}$$

b) Seja $f(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)\text{arcsen}(e^x)$. *Derive f e encontre o domínio de f e* f'.

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (1-x^2) \geq 0 \ \wedge\ -1 \leq e^x \leq 1\}$
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}.(-2x).\text{arcsen}(e^x) + \sqrt{1-x^2}.\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}.(e^x)$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\text{arcsen}(e^x) + e^x.\sqrt{\frac{1-x^2}{1-e^{2x}}}$$

$D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

***Questão* 5.**

a) Se $f(x) = \frac{e^x}{2x^2+x+1}$, *encontre a equação da reta tangente ao gráfico de f quando* $x = 0$.

$$f(0) = \frac{e^0}{2.(0)^2+0+1} = \frac{1}{1} = 1. \quad Ponto\ (0,1)$$

$$f'(x) = \frac{e^x(2x^2+x+1)-(4x+1).e^x}{(2x^2+x+1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{e^0(2.0^2 + 0 + 1) - (4.0 + 1).e^0}{(2.0^2 + 0 + 1)^2}$$
$$f'(0) = \frac{1 - 1}{1}$$
$$f'(0) = 0.$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1)$:

$$y - 1 = 0.(x - 0)$$
$$y = 1$$

$b)$ *Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *no ponto da hipérbole com abscissa* $2a$ *e ordenada positiva.*

Ponto de abscissa $2a$ *e ordenada positiva*:

$$\frac{(2a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow 4 - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y^2 = 3b^2 \therefore y = b\sqrt{3}. \quad Ponto\ (2a, b\sqrt{3}).$$

Derivando implicitamete a equação da hipérbole, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{a^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{b^2}\right) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2}{a^2}.\frac{x}{y}$$

No ponto $(2a, b\sqrt{3})$: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2a,b\sqrt{3})} = \frac{b^2}{a^2}.\frac{2a}{b\sqrt{3}} = \frac{2b}{a\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}.b}{3a}$

Equação da reta tangente à hipérbole no ponto $(2a, b\sqrt{3})$:

$$y - b\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}.b}{3a}(x - 2a)$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}.b}{3a}x - \frac{4\sqrt{3}.b}{3} + b\sqrt{3}$$

$$y = \frac{2\sqrt{3}.b}{3a}x - \frac{b\sqrt{3}}{3}$$

2.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 26 de Maio de 2018

Questão 1.

$a)$ *Sabendo que* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)^2 = 4$ *e* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2 = 2$ *encontre* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

Questão 2.

$a)$ *Seja* $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$. *Mostre que* $\lim_{x\to 2} f(x)$ *existe, mas que não é igual a* $f(2)$.

$b)$ *Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.*

Questão 3.

$a)$ *Sendo*

$$f(x) = \begin{cases} 3x+6a, & se\ x < -3 \\ 3ax-7b, & se -3 \le x \le 3 \\ x-12b, & se\ 3 < x \end{cases}$$

Ache os valores das constantes a e b que tornam a função contínua em $\mathbb{R}$. *Tome a como coeficiente angular e b como coeficiente linear de uma reta e descubra suas interseções com o gráfico da circunferência centrada na origem e com raio* 1, *caso estas interseções existam.*

$b)$ *Encontre uma equação para a reta normal a curva* $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{2-x^2}}$ *nos pontos onde a ordenada é* 1.

Questão 4.

$a)$ *Use a definição de derivada para estudar a diferenciabilidade de* $f(x) = x|x|$.

$b)$ *O gráfico de* $f(x) = \arccos(e^{2x})$ *é tangenciado pela reta* $y = -x + b$, *onde b é uma constante, em algum ponto P. Determine a abscissa de P.*

$Questão$ 5.

$a)$ $Sendo\ y = \operatorname{sen}^2 x\ , determine\ \dfrac{d^3y}{dx^3}.$

$b)$ $Encontre\ todos\ os\ pontos\ sobre\ a\ curva\ x^2y^2 + xy = 2, onde\ a\ inclinação$
$da\ reta\ tangente$ é -1.

***Questão* 1.**

a) Sabendo que $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)^2 = 4$ *e* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2 = 2$ *encontre* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$.

Considere o seguinte quociente:

$$\frac{\left(f(x)+g(x)\right)^2}{\left(f(x)-g(x)\right)^2} = \frac{[f(x)]^2 + 2.f(x).g(x) + [g(x)]^2}{[f(x)]^2 - 2.f(x).g(x) + [g(x)]^2} = 1 + \frac{4f(x)g(x)}{\left(f(x)-g(x)\right)^2}$$

Como $\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)^2$ *e* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2$ *existem, com este último diferente de zero, então o limite do quociente é o quociente dos limites e, como* $\lim_{x\to 0} 1$ *existe, conclui-se pelo segundo membro da igualdade acima que* $\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$ *também existe. Logo,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(f(x)+g(x)\right)^2}{\left(f(x)-g(x)\right)^2} = \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0}\frac{4.f(x)g(x)}{\left(f(x)-g(x)\right)^2}$$

$$\frac{\lim_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)^2}{\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{\lim_{x\to 0}\left(4.f(x)g(x)\right)}{\lim_{x\to 0}\left(f(x)-g(x)\right)^2}$$

$$\frac{4}{2} = 1 + \frac{4\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)}{2}$$

$$2 = 1 + 2\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(f(x)g(x)\right) = \frac{1}{2}$$

b) Calcule $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}}{\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}\right)}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}}+1} \quad ; \; Obs.: \begin{array}{l} Para\ x>0\ x=\sqrt{x^2} \\ e\ x^2=\sqrt{x^4} \end{array}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}+1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}+1}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

***Questão* 2.**

$a)$ $Seja\ f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]. Mostre\ que\ \lim_{x\to 2} f(x)\ existe, mas\ que\ não\ é\ igual\ a\ f(2).$

$*\ Se\ x \to 2^+, x > 2\ e\ -x < -2\ e\ portanto\ [\![x]\!] = 2\ e\ [\![-x]\!] = -3. Com\ isso,$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}([\![x]\!] + [\![-x]\!]) = \lim_{x\to 2^+}\big(2+(-3)\big) = \lim_{x\to 2^+}(-1) = -1.$

$*\ Se\ x \to 2^-, x < 2\ e\ -x > -2\ e\ portanto\ [\![x]\!] = 1\ e\ [\![-x]\!] = -2. Com\ isso,$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}([\![x]\!] + [\![-x]\!]) = \lim_{x\to 2^-}\big(1+(-2)\big) = \lim_{x\to 2^-}(-1) = -1.$

$Como\ os\ limites\ laterais\ em\ 2\ existem\ e\ são\ iguais, então\ \lim_{x\to 2} f(x)\ existe\ e$
$\lim_{x\to 2} f(x) = -1. Contudo, f(2) = [\![2]\!] + [\![-2]\!] = 2 + (-2) = 0, e\ portanto,$
$f(2) \neq \lim_{x\to 2} f(x).$

b) Um monge tibetano deixa o monastério às 7 horas da manhã e segue sua caminhada usual para o topo da montanha, chegando lá às 7 horas da noite. Na manhã seguinte, ele parte do topo às 7 horas da manhã, pega o mesmo caminho de volta e chega ao monastério às 7 horas da noite. Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dia em ambas as caminhadas.

Considere $f(t)$ a função que representa o percurso do monge a partir do monastério até o ponto da montanha, e $g(t)$ a função que representa o caminho de volta do monge ao monastério. Na ausência de paradas ao longo do percurso nos dois dias, consideramos f e g contínuas no intervalo fechado de 7 horas da manhã $(7h)$ até às 7 horas da noite $(19h)$.

Considere que o monastério encontra-se no nível da base da montanha $(h = 0)$ e que no topo da montanha $h = h_{montanha}$, Com isso $f(7) = g(19) = 0$ e, $f(19) = g(7) = h_{montanha}$. Sendo $h(t) = f(t) - g(t)$, onde h é contínua em $[7,19]$, temos:

$$h(7) = f(7) - g(7) = 0 - h_{montanha} = -h_{montanha} \quad ; \quad h(7) < 0$$
$$h(19) = f(19) - g(19) = h_{montanha} - 0 = h_{montanha}; \quad h(19) > 0$$

Como h é uma função contínua no intervalo fechado $[7,19]$ e 0 é um número entre $h(7)$ e $h(19)$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $t \in (7,19)$ tal que $h(t) = 0 \Longrightarrow f(t) = g(t)$. Ou seja, existe um ponto no caminho que o monge vai cruzar exatamente na mesma hora do dias em ambas as caminhadas.

Questão 3.

a) Sendo

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a, & se\ x < -3 \\ 3ax - 7b, & se -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b, & se\ 3 < x \end{cases}$$

Ache os valores das constantes a e b que tornam a função contínua em $\mathbb{R}$. Tome a como coeficiente angular e b como coeficiente linear de uma reta e descubra suas interseções com o gráfico da circunferência centrada na origem e com raio 1, caso estas interseções existam.

Como f é uma função definida por partes onde estas são funções polinomiais e portanto contínua em $\mathbb{R}$, então, considerando os intervalos onde estão definidas, f é contínua em $(-\infty,-3) \cup (-3,3) \cup (3,\infty)$. Para que f seja contínua em $\mathbb{R}$, f precisa ser contínua em -3 e em 3. Logo, pela definição de continuidade:

1. Continuidade de f em $x = -3$:

$$\lim_{x \to -3} f(x) = f(-3) \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \to -3^-} f(x) = f(-3) \\ e \\ \lim_{x \to -3^+} f(x) = f(-3) \end{cases}$$

$f(-3) = 3a(-3) - 7b = -9a - 7b.$
$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (3x + 6a) = -9 + 6a.$
$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (3ax - 7b) = -9a - 7.$

Logo, para que f seja contínua em $x = -3$:

$$-9 + 6a = -9a - 7b$$
$$15a + 7b = 9$$

2. *Continuidade de f em* $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) \Longrightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) \\ e \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \end{cases}$$

$f(3) = 3a(3) - 7b = 9a - 7b.$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (3ax - 7b) = 9a - 7b.$
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x - 12b) = 3 - 12b.$

Logo, para que f seja contínua em $x = 3$:

$$3 - 12b = 9a - 7b$$
$$9a + 5b = 3$$

Com isso, temos: $\begin{cases} 15a + 7b = 9 \\ 9a + 5b = 3 \end{cases} \sim \begin{cases} 45a + 21b = 27 \\ -45a - 25b = -15 \end{cases} \sim \begin{cases} 45a + 21b = 27 \\ -4b = 12 \end{cases}.$
Solução: $b = -3$ *e* $a = 2$.

Para estes valores de a e b f é contínua em $\mathbb{R}$.

Circunferência de raio 1 *centrada na origem*: $x^2 + y^2 = 1$
Reta $y = ax + b$: $y = 2x - 3$.

Verificando se existem interseções entre a circunferência e a reta:

$$x^2 + (2x - 3)^2 = 1$$
$$x^2 + 4x^2 - 12x + 9 = 1$$
$$5x^2 - 12x + 8 = 0$$
$$\Delta = 144 - 160 = -16 < 0$$

Portanto, com $\Delta < 0$, *conluimos que não há interseções entre a circunferência e a reta.*

b) Encontre uma equação para a reta normal a curva $y = \dfrac{|x|}{\sqrt{2 - x^2}}$ *nos pontos onde a ordenada é* 1.

$$\frac{|x|}{\sqrt{2 - x^2}} = 1 \Longrightarrow |x| = \sqrt{2 - x^2} \Rightarrow |x|^2 = \left(\sqrt{2 - x^2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 = 1$$

$Logo, x = \pm 1. Os\ pontos\ onde\ a\ ordenada$ é 1 são: $A(-1,1)\ e\ B(1,1)$.

$A\ curva\ y = f(x)$ é $uma\ função\ par, isto$ é, $f(x) = f(-x). Logo, f'(x) = -f'(-x)$.
$Para\ x > 0, temos\ y = \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}\ e\ sua\ derivada$:

$$y' = \frac{\sqrt{2-x^2} - x.\dfrac{1}{2\sqrt{2-x^2}}.(-2x)}{(2-x^2)} = \frac{\sqrt{2-x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}}{(2-x^2)}$$

$$No\ ponto\ B(1,1):\ y'(1) = \frac{\sqrt{2-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2-1}}}{2-1} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

$Como\ f'(x) = -f'(-x), então\ no\ ponto\ A(-1,1)\ temos\ y'(-1) = -y'(1) = -2.$
$Logo, os\ coeficientes\ angulares\ das\ retas\ normais\ nos\ pontos\ A\ e\ B$ são,
$respectivamente, 1/2\ e\ -1/2.$

$Equações\ das\ retas\ normais\ nos\ pontos\ A\ e\ B$:

$$No\ ponto\ A(-1,1):\ y - 1 = \frac{1}{2}.\big(x - (-1)\big) \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$
$$No\ ponto\ B(1,1): y - 1 = -\frac{1}{2}(x-1) \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

***Questão* 4**.

$a)\ Use\ a\ definição\ de\ derivada\ para\ estudar\ a\ diferenciabilidade\ de\ f(x) = x|x|.$

$Se\ x > 0, então\ |x| = x\ e\ podemos\ escolher\ h\ suficientemente\ pequeno\ para$
$que\ x + h > 0\ e\ portanto\ |x+h| = x + h. Consequentemente, para\ x > 0\ temos$

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)|x+h| - x|x|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2x + h) = 2x. \end{aligned}$$

$e, dessa\ forma, f$ é $diferenciável\ para\ qualquer\ x > 0.$

$Analogamente, para\ x < 0\ temos\ |x| = -x\ e\ podemos\ escolher\ h$
$suficientemente\ pequeno\ para\ que\ x + h < 0, e\ assim\ |x+h| = -(x+h).$
$Portanto, para\ x < 0,$

$$\begin{aligned} f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)|x+h| - x|x|}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)^2 + x^2}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh - h^2}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (-2x - h) = -2x.$$

e, dessa forma, f é diferenciável para qualquer $x < 0$.
Para $x = 0$ *temos de averiguar*

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h|$$

Se $h \to 0^+$, *então* $|h| = h$ *e, portanto,* $\lim_{h\to 0} |h| = \lim_{h\to 0} h = 0$.

Se $h \to 0^-$, *então* $|h| = -h$ *e , portanto,* $\lim_{h\to 0} |h| = \lim_{h\to 0} (-h) = 0$.

Uma vez que esses limites são iguais, $f'(0)$ *existe. Logo, f é diferenciável para todo* x.

b) O gráfico de $f(x) = \arccos(e^{2x})$ *é tangenciado pela reta* $y = -x + b$, *onde b é uma constante, em algum ponto P. Determine a abscissa de P.*

Como o gráfico de f é tangenciado pela reta $y = -x + b$ *em algum ponto P, então neste ponto P,* $f'(x) = -1$. *Logo,*

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(e^{2x})^2}}.(2e^{2x}) = -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}}$$

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{2e^{2x}}{\sqrt{1-e^{4x}}} = 1 \Rightarrow 2e^{2x} = \sqrt{1-e^{4x}} \Rightarrow 4e^{4x} = 1 - e^{4x} \Rightarrow 5e^{4x} = 1$$

$$e^{4x} = \frac{1}{5} \Rightarrow 4x = \ln\left(\frac{1}{5}\right) \therefore x = \frac{1}{4}.\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{4}\ln(5).$$

Portanto, a abscissa do ponto P é $x = -\frac{1}{4}\ln(5)$.

***Questão* 5.**

a) Sendo $y = \operatorname{sen}^2 x$ *, determine* $\frac{d^3y}{dx^3}$.

$$\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{sen} x\,.\cos x = \operatorname{sen}(2x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\cos(2x)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -4\operatorname{sen}(2x) = -8\operatorname{sen} x\,.\cos x$$

$b)$ *Encontre todos os pontos sobre a curva* $x^2y^2 + xy = 2$, *onde a inclinação da reta tangente* é -1.

Por derivação implícita temos

$$\frac{d}{dx}(xy)^2 + \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$2(xy).(y + xy') + (y + xy') = 0$$

$$(2x^2y + x)y' = -(2xy^2 + y)$$

$$y' = -\frac{y(2xy+1)}{x(2xy+1)};\ \ xy \neq -\frac{1}{2}$$

$$y' = -\frac{y}{x};\ \ y' = -1 \Longrightarrow x = y$$

Onde a inclinação da reta tangente é -1, *temos* y' = -1. *Logo*, $x = y$.

$$x^2.(x^2) + x.(x) = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Seja $a = x^2, a \geq 0$, *então ...*

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 - (-8) = 9$$

$$a = \frac{-1 \pm 3}{2} \therefore a = 1 = x^2 \therefore x = \pm 1.$$

Como nos pontos de tangência que satisfazem a condição y' = -1 *a abscissa* é *igual a ordenada, então os pontos onde a reta tangente tem inclinação* -1 *são*: $A(1,1)$ *e* $B(-1,-1)$.

2.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 25 de Maio de 2018

Questão 1.

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\frac{\ln 3}{3+\ln x}}$.

$b)$ *O volume de um cubo está crescendo a uma taxa de* $10\,cm^3/min$. *Quão rápido a área de sua superfície está crescendo quando a medida de uma aresta for de* $30cm$?

Questão 2.

$a)$ *Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de* $0{,}05$ *cm de tinta a uma esfera de* 100 *m de diâmetro.*

$b)$ *Mostre que* $\operatorname{sen} x < x$, *se* $x \in (0{,}2\pi)$.

Questão 3.

$a)$ *Determine* $f(x)$ *sabendo que* $f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x + 1 + \operatorname{tg}^2 x$ *e* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$b)$ *Sejam* x, y *reais não negativos, tais que* $x + y = 1$, *encontre o valor mínimo de* $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}$.

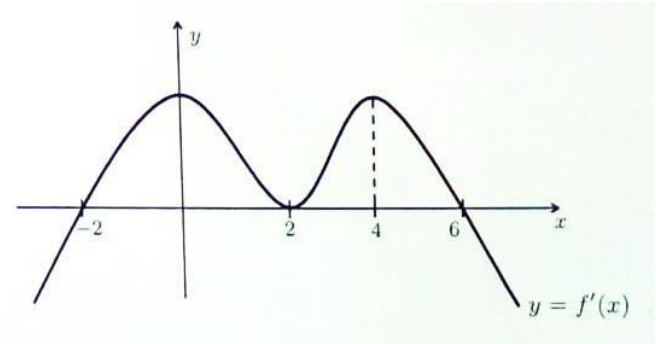
Questão 4.

$a)$ *Seja* $m = \frac{4}{9}k^{\frac{1}{3}}$ *a inclinação da reta tangete ao gráfico de* $y = \sqrt[3]{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$ *no ponto* $x = \ln 2$. *Determine* k.

$b)$ *Um cilindro reto é gerado pela rotação de um retângulo com perímetro* p *em torno de um de seus lados. Que dimensões devem ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo*?

Questão 5.

Dado o gráfico de $f'(x)$, *determine*:



(i) $Os\ intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento$;
(ii) $Os\ intervalos\ onde\ a\ concavidade$ é $voltada\ para\ cima\ ou\ para\ baixo$;
(iii) $As\ assíntotas, se\ existirem$;
(iv) $Os\ pontos\ de\ máximo\ e\ de\ mínimo\ relativos, se\ existirem$;
(v) $Os\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem$;
(vi) $O\ gráfico\ de\ f(x)$.

***Questão* 1.**

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\frac{\ln 3}{3+\ln x}}$.

Observe que ,quando $x \to 0^+$, *temos* $\dfrac{\ln 3}{3+\ln x} \to 0$ *e* $\operatorname{sen} x \to 0$, *assim, o limite é indeterminado. Considere*

$$y = (\operatorname{sen} x)^{\frac{\ln 3}{3+\ln x}}$$

Então

$$\ln y = \ln\left[(\operatorname{sen} x)^{\frac{\ln 3}{3+\ln x}}\right] = \frac{\ln 3}{3+\ln x}.\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{\ln 3.\ln(\operatorname{sen} x)}{3+\ln x}$$

e logo, a Regra de l'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 3.\ln(\operatorname{sen} x)}{3+\ln x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln 3.\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x}{\operatorname{sen} x}.\cos x.\ln 3\right] = \ln 3.$$

Como o $\lim_{x\to 0}\ln y$ *existe, usando o fato de que* $y = e^{\ln y}$, *temos*:

$$\lim_{x\to 0^+}(\operatorname{sen} x)^{\frac{\ln 3}{3+\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+}\ln y} = e^{\ln 3} = 3.$$

$b)$ *O volume de um cubo está crescendo a uma taxa de* $10\,cm^3/min$. *Quão rápido a área de sua superfície está crescendo quando a medida de uma aresta for de* $30cm$?

Volume do cubo: $V = a^3$; *onde* $a =$ *medida da aresta.*

Pela regra da Cadeia temos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{da}.\frac{da}{dt}$$
$$10 = 3a^2.\frac{da}{dt}$$
$$\frac{da}{dt} = \frac{10}{a^2}$$

Área da superífice do cubo: $A = 6a^2$.

Pela regra da cadeia temos

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{da}.\frac{da}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = (12a).\frac{10}{a^2}$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{120}{a}$$

Quando $a = 30cm$ *a taxa de variação da área da superfície do cubo em relação ao tempo, isto é, o quão rápido a área da superfície está crescendo é:*

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{a=30cm} = \frac{120}{30} = 4\,cm^2/min$$

***Questão* 2.**

a) Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 *cm de tinta a uma esfera de* 100 *m de diâmetro.*

Volume da esfera: $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Para uma variação muito pequena do raio da esfera, com base em diferenciais, podemos dizer que $\Delta V \cong dV$, *onde* $dV = V'(r).dr = 4\pi r^2.dr$

Com $r = 50m$ *e* $dr = \Delta r = 0{,}05cm = 5 \times 10^{-4}m$ *temos*

$$\Delta V \cong dV = 4\pi.50.5.10^{-4} = 0{,}1\pi m^3$$

Logo, será necessário aproximadamente $0{,}1\pi m^3$ *de tinta para aplicar uma camada de* $0{,}05cm$ *de espessura a uma esfera de* $100m$ *de diâmetro.*

b) Mostre que $\operatorname{sen} x < x$, *se* $x \in (0{,}2\pi)$.

Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x - x$, *temos* $f(0) = 0$ *e* $f(2\pi) = -2\pi$.
f *é uma função contínua e derivável em* $\mathbb{R}$ *e ainda,*

$$f'(x) = \cos x - 1$$
$$-1 \leq \cos x \leq 1$$
$$-2 \leq \cos x - 1 \leq 0$$
$$-2 \leq f'(x) \leq 0$$

Como $x \in (0{,}2\pi)$ *então,* $-2 \leq f'(x) < 0$, *isto implica dizer, pelo teste* C/D *da primeira derivada que* f *é uma função estritamente decrescente em* $(0{,}2\pi)$.
Logo, para $x \in (0{,}2\pi)$ *temos*

$$f(x) < f(0)$$
$$\operatorname{sen} x - x < 0$$
$$\operatorname{sen} x < x$$

***Questão* 3.**

a) Determine $f(x)$ *sabendo que* $f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x + 1 + \operatorname{tg}^2 x$ *e* $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$f'(x) = \operatorname{sen}(2x) + \sec^2 x$$

A primitiva mais geral de f'é dada por $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \operatorname{tg} x + C$, *onde* C é *uma constante*.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Longrightarrow -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \therefore C = \frac{1}{4}.$$

Logo, $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \operatorname{tg} x + \frac{1}{4}$.

b) Sejam x, y *reais não negativos, tais que* $x + y = 1$, *encontre o valor mínimo de* $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}$.

$$y = 1 - x$$
$$f(x) = x^{\frac{3}{2}} + (1-x)^{\frac{3}{2}} \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[0,1]$ *e, pelo Teorema do Valor Extremo,* f *assume um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $f(d)$ *em certos números* c *e* d *em* $[0,1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado temos

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(0) = 0^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{3}{2}} = 1.$
$f(1) = 1^{\frac{3}{2}} + 0^{\frac{3}{2}} = 1.$

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,1)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe.*"

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}(1-x)^{\frac{1}{2}}; \quad D(f') = D(f)$$

Como f *é derivável em* $(0,1)$, *então se* f *possui número crítico* c, *então* $f'(c)$ *existe e portanto* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{2}} = (1-x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \Rightarrow x = 1 - x \Rightarrow 2x = 1 \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2.\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 *e* 2, *concluimos que* $\sqrt{2}/2$ *é o valor mínimo absoluto de* f *em* $[0,1]$ *tal que a soma* $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}$ *é mínima quando* $x = y = \frac{1}{2}$.

***Questão* 4.**

a) Seja $m = \frac{4}{9}k^{\frac{1}{3}}$ *a inclinação da reta tangete ao gráfico de* $y = \sqrt[3]{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}}$ *no ponto* $x = \ln 2$ *. Determine* k.

$$y = \sqrt[3]{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}} = \sqrt[3]{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \cdot \frac{e^x}{e^x}} = \sqrt[3]{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}} \; ; \quad D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

Para $x = \ln 2$ *temos*

$$y = \sqrt[3]{\frac{e^{2\ln 2} + 1}{e^{2\ln 2} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{e^{\ln 4} + 1}{e^{\ln 4} - 1}} = \sqrt[3]{\frac{4 + 1}{4 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Considere

$$\ln|y| = \ln\left|\sqrt[3]{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}}\right| = \ln\left|\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}\right|^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}[\ln|e^{2x} + 1| - \ln|e^{2x} - 1|]$$

Por diferenciação logarítmica temos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left[\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}\right] \Longrightarrow y' = \frac{y}{3}\left[\frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1}\right]$$

$$\begin{aligned} y'(\ln 2) &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{2.e^{\ln 4}}{e^{\ln 4} + 1} - \frac{2.e^{\ln 4}}{e^{\ln 4} - 1}\right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{2 \times 4}{4 + 1} - \frac{2 \times 4}{4 - 1}\right] \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\frac{8}{5} - \frac{8}{3}\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{-16}{15} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = -\frac{16}{45} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Como $m = y'(\ln 2)$ *é o coeficiente angular da reta tangente, então*

$$\frac{4}{9}k^{\frac{1}{3}} = -\frac{16}{45} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$k^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$k = -\frac{64}{75}$$

b) Um cilindro reto é gerado pela rotação de um retângulo com perímetro p em torno de um de seus lados. Que dimensões devem ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo?

Perímetro do retângulo: $p = 2b + 2h \Longrightarrow h = \dfrac{p-2b}{2}$; $0 < b < \dfrac{p}{2}$

Considere que o eixo de rotação coincide com o segmento que representa a altura do retângulo. Dessa forma, o volume do cilindro reto gerado é dado pela expressão

$$V = \pi b^2 . h$$
$$V(b) = \pi b^2 \left(\frac{p-2b}{2}\right)$$
$$V(b) = \frac{\pi}{2}(pb^2 - 2b^3)$$

$$V'(b) = \frac{\pi}{2}(2pb - 6b^2)$$
$$V'(b) = \pi(pb - 3b^2)$$

Estudo do sinal de $V'(b)$:

$$(0) + + + + + + \left(\frac{p}{3}\right) - - - - - - \left(\frac{p}{2}\right) \quad V'(b)$$

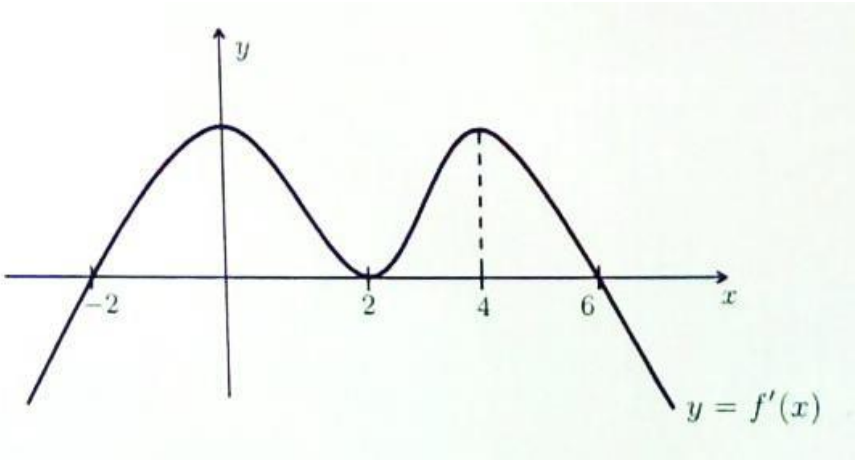
Pelo teste C/D *da primeira derivada, concluimos que para* $b = p/3$ *a função que representa o volume do cilindro gerado possui um valor máximo local. Além disso, nota-se que para* $b \in (0, p/2)$ *temos* $V(p/3) \geq V(b)$ *e portanto* $V(p/3)$ *é o volume máximo que pode ser obtido pela rotação do retângulo para gerar o cilindro.*

As dimensões do retângulo que maximizam o volume do cilindro são:

$$b = \frac{p}{3} \ e \ h = \frac{2p}{3}.$$

***Questão* 5.**

Dado o gráfico de $f'(x)$, *determine*:



(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;

Pelo teste C/D (Crescimento e Decrescimento), se $f' > 0$ *para todo* $x \in I$, *onde* I *é um intervalo, então* f *é crescente em* I *e, se* $f' < 0$ *para todo* $x \in I$, *então* f *é decrescente em* I.

Analisando o gráfico de f' *concluimos que* f *é crescente em* $(-2,2) \cup (2,6)$ *e decrescente em* $(-\infty,-2) \cup (6,\infty)$

(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;

O gráfico da função f *possui concavidade voltada para cima onde* $f'' > 0$ *e possui concavidade voltada para baixo onde* $f'' < 0$.

Contudo, f'' *nos diz onde* f' *é crescente e onde* f' *é decrescente. Ou seja, onde* f' *é crescente temos* $f'' > 0$ *e onde* f' *é decrescente temos* $f'' < 0$.

Logo, f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty,0) \cup (2,4)$ *e possui concavidade voltada para baixo em* $(0,2) \cup (4,\infty)$.

(iii) *As assíntotas, se existirem*;

$*$ *Obs.: Como o gráfico de* f' *é contínuo, isso implica dizer que* f *é derivável em* $\mathbb{R}$, *ou seja,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Portanto,* $D(f) = \mathbb{R}$.

Verticais: A reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da função* f *se* $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Como f *é contínua em* $\mathbb{R}$, *então não há descontinuidades em* f *e, portanto, não há assíntotas verticais no gráfico de* f.

Horizontais: A reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se, somente se,*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$$

Como temos o gráfico de f, *podemos interpretar se* f *possui assíntota horizontal se* $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0$ *ou* $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$, *uma vez que o coeficiente angular da reta* $y = L$ *(assíntota horizontal) é nulo.*

Contudo, analisando o gráfico de f' *temos* $\lim_{x \to \infty} f'(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$. *Logo, não há assíntotas horizontais no gráfico de* f.

Assíntotas Oblíquas:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ *é assíntota oblíqua ao gráfico da função* f *se, somente se,* $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Onde $a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, *com* $a \neq 0$, *e* $b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$.

Como f *não possui assíntotas horizontais, podemos afirmar que* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ *e* $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$, *logo o limite representado pelo coeficiente angular de uma assíntota oblíqua é indeterminado. Usando a regra de L'Hôspital temos*

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} f'(x)$$

Porém, $\lim_{x \to \infty} f'(x) = -\infty$ *e* $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$ *e, portanto, não há assíntotas oblíquas no gráfico de* f. *Conclusão: Não há assíntotas no gráfico de* f.

(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem;*

Pelo Teste da Primeira Derivada, f *possui um ponto de mínimo local em -2 e um ponto de máximo local em 6.*

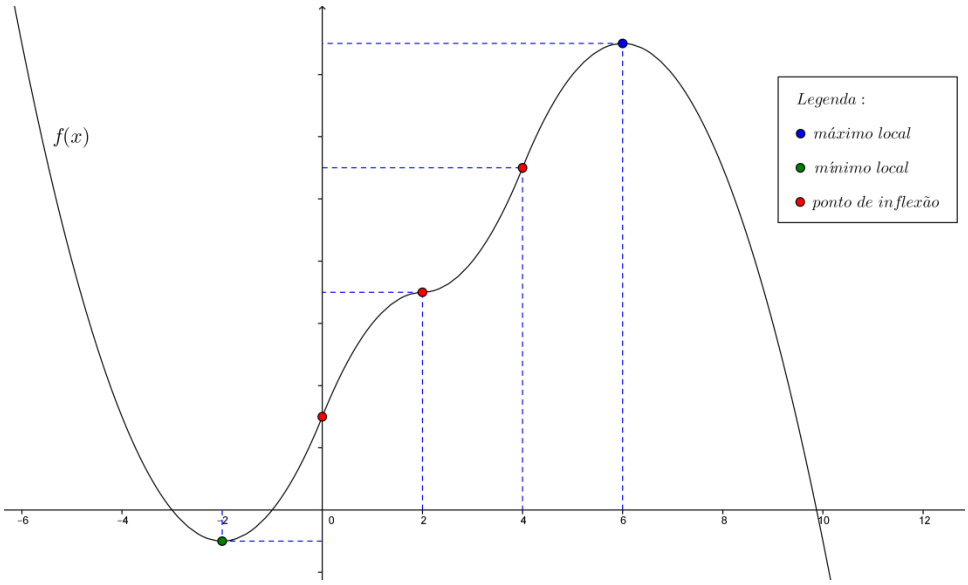
Embora $f'(2) = 2$, *não ocorre mudança de sinal na derivada e, portanto,* $(2, f(2))$ *não é ponto nem de máximo nem de mínimo local.*

(v) *Os pontos de inflexão, se existirem;*

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* f *se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de* c.

Pelo estudo da concavidade, concluimos que f *possui pontos de inflexão nos pontos de abscissa* $0, 2$ *e* 4. *Levando em consideração o estudo do crescimento e decrescimento de* f, *temos* $f(0) < f(2) < f(4)$.

(vi) *O gráfico de* $f(x)$.



2.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 26 de Maio de 2018

Questão 1.

$a)$ *Certa função é dada por* $f(x) = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} k)^{\cos k}$ *. Suas interseções com o gráfico de uma circunferência centrada na origem e com raio igual a* 2*, juntamente com a origem dos eixos coordenados formam um triângulo. Determine a área desse triângulo.*

$b)$ *Uma luz está no alto de um poste de* 5 *m. Um menino de* 1,6*m se afasta do poste em linha reta à razão de* 1,2*m/s . A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ele está a* 6 *m do poste? A que taxa aumenta o comprimento de sua sombra?*

Questão 2.

$a)$ *Use aproximação linear para estimar* $\sqrt{9{,}03}$.

$b)$ *Mostre a identidade* $2 \operatorname{arcsen} x = \arccos(1 - 2x^2)$ *, para* $x \geq 0$.

Questão 3.

$a)$ *Determine* $f(x)$*, sabendo que* $f'(x) = \dfrac{4\cos(2\pi x)}{\operatorname{sen}^2(2\pi x)} - e^{2x}$ *e* $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 0$.

$b)$ *Sejam a e b reais positivos tais que* $ab = 1$*. Encontre o valor mínimo para* $a^x + b^x$*, com* $x \in \mathbb{R}$.

Questão 4.

$a)$ *Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = \dfrac{e^{(x^e)} - e^{-(x^e)}}{2}$ *no ponto em que* $x = 1$.

$b)$ *Dois poste verticais de* 2 *m e* 2,5 *m de altura distam* 3 *m um do outro. Determine o comprimento do menor cabo que, partindo do topo de um poste, toque o solo e termine no topo do outro poste.*

Questão 5.

Seja $g(x) = |f(x)|$*, onde* $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$*. Sabendo que* $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ *e* $f''(x) = \dfrac{-4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ *determine:*

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento;*
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;*
(iii) *As assíntotas, se existirem;*
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem;*

(v) $Os\ pontos\ de\ inflexão, se\ existirem;$
(vi) $O\ gráfico\ de\ g(x).$

***Questão* 1.**

a) Certa função é dada por $f(x) = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} k)^{\cos k}$ *. Suas interseções com o gráfico de uma circunferência centrada na origem e com raio igual a* 2*, juntamente com a origem dos eixos coordenados formam um triângulo. Determine a área desse triângulo.*

Quando $k \to \frac{\pi}{2}^-$ *, temos* $\operatorname{tg} k \to \infty$ *e* $\cos k \to 0$*, assim, o limite é indeterminado. Considere*

$$y = (\operatorname{tg} k)^{\cos k}$$

Então $$\ln y = \ln[(\operatorname{tg} k)^{\cos k}] = \cos k \,.\, \ln(\operatorname{tg} k)$$

e logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} k)}{\sec k} = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 k}{\operatorname{tg} k}}{\sec k \,.\, \operatorname{tg} k} = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec k}{\operatorname{tg}^2 k} = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos k}{\operatorname{sen}^2 k} = 0.$$

Como $\lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y$ *existe, usando o fato de que* $y = e^{\ln y}$:

$$\lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} k)^{\cos k} = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} y = \lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} e^{\ln y} = e^{\lim_{k \to \frac{\pi}{2}^-} \ln y} = e^0 = 1.$$

Portanto, $f(x) = 1$.

Equação da circunferência centrada na origem e com raio igual a 2:

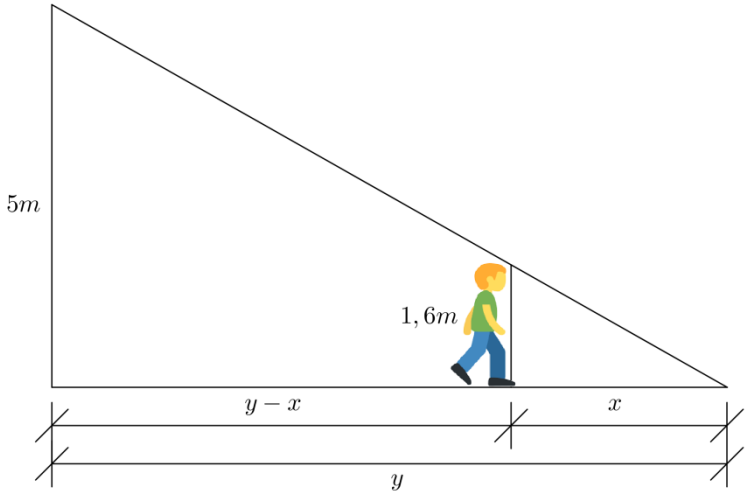
$$x^2 + y^2 = 4$$
$$x^2 + 1^2 = 4$$
$$x^2 = 3$$
$$\therefore$$
$$x = -\sqrt{3} \;\; e \;\; x = \sqrt{3}$$

Interseções de f *com a circunferência: pontos* $A(-\sqrt{3}, 1)$ *e* $B(\sqrt{3}, 1)$

Juntamente com a origem $O(0,0)$ *os pontos* A *e* B *delimitam um triângulo cuja área é dada por:*

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} b.h = \frac{1}{2}\left[\sqrt{3} - (-\sqrt{3})\right].(1) = \sqrt{3}\; u.A$$

$b)$ *Uma luz está no alto de um poste de* $5\ m$. *Um menino de* $1{,}6m$ *se afasta do poste em linha reta à razão de* $1{,}2m/s$. *A que taxa se move a ponta de sua sombra quando ele está a* $6\ m$ *do poste? A que taxa aumenta o comprimento de sua sombra?*



A taxa com a qual se move a ponta da sombra do menino é dada por $\frac{dy}{dt}$,

e a taxa com a qual aumenta o comprimento de sua sombra é dada por $\frac{dx}{dt}$.

Sabe-se que a distância $(y-x)$ *aumenta à razão de* $1{,}2\ m/s$. *Por semelhança de triângulos temos*

$$\frac{5}{y}=\frac{1{,}6}{x}\Longrightarrow 5x=1{,}6y\Longrightarrow 25x=8y\ \therefore\ x=\frac{8}{25}y$$

$$\frac{d}{dt}(y-x)=1{,}2=\frac{6}{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(y-\frac{8}{25}y\right)=\frac{6}{5}$$

$$\frac{17}{25}.\frac{dy}{dt}=\frac{6}{5}\ \therefore\ \frac{dy}{dt}=\frac{30}{17}m/s$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{8}{25}.\frac{dy}{dt}=\frac{8}{25}.\frac{30}{17}=\frac{48}{17}m/s$$

Portanto, a ponta da sombra do menino se move à taxa de $\frac{30}{17}m/s$ *enquanto que o comprimento da sombra aumenta à taxa de* $\frac{48}{17}m/s$.

Questão 2.

$a)$ *Use aproximação linear para estimar* $\sqrt{9{,}03}$.

Considere $f(x)=\sqrt{x}$, *temos* $f(9)=3$, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ *e* $f'(9)=\frac{1}{6}$.

A aproximação linear ou linearização de f em 9 é dada pela expressão:

$$L(x) = f(9) + f'(9).(x-9)$$
$$L(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9)$$

Quanto x estiver próximo a 9 temos $f(x) \cong L(x)$. Em particular, para $x = 9{,}03$ temos

$$f(9{,}03) = \sqrt{9{,}03} \cong L(9{,}03) = 3 + \frac{0{,}3}{6} = 3{,}05$$

Logo, $\sqrt{9{,}03} \cong 3{,}05$.

b) Mostre a identidade $2\operatorname{arcsen} x = \arccos(1-2x^2)$, *para* $x \geq 0$.

Considere $f(x) = 2\operatorname{arcsen} x - \arccos(1-2x^2)$, temos $f(0) = 0$ e $D(f) = [-1,1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}}.(-4x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{1-1+4x^2-4x^4}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2(1-x^2)}}; \quad \textit{Como } x \geq 0, \textit{então } \sqrt{x^2} = x. \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Se $f'(x) = 0$ para qualquer x em $(0,1)$, então f é constante em $(0,1)$. Ou seja, $f(x) = C$ onde C é uma constante.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\arcsin\frac{1}{2} - \arccos\frac{1}{2} = 2.\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 0.$ *Logo, $C = 0$ para $x \in (0,1)$*
Ainda temos $f(0) = 0$. Então, $f(x) = 0$ se $x \geq 0$. Com isso,

$$2\operatorname{arcsen} x - \arccos(1-2x^2) = 0 \quad \textit{para } 0 \leq x \leq 1$$

***Questão* 3.**

a) Determine $f(x)$, sabendo que $f'(x) = \dfrac{4\cos(2\pi x)}{\operatorname{sen}^2(2\pi x)} - e^{2x}$ *e* $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$.

$$f'(x) = 4\operatorname{cotg}(2\pi x).\operatorname{cossec}(2\pi x) - e^{2x}$$

$$f'(x) = \frac{2}{\pi}.[2\pi.\operatorname{cotg}(2\pi x).\operatorname{cossec}(2\pi x)] - \frac{1}{2}.(2e^{2x})$$

A primitiva mais geral de f' é dada por

$$f(x) = -\frac{2}{\pi}\text{cossec}(2\pi x) - \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{\pi}\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} + C = 0 \Rightarrow -\frac{2}{\pi} - \frac{\sqrt{e}}{2} + C = 0 \therefore C = \frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

$$Logo, f(x) = -\frac{2}{\pi}\text{cossec}(2\pi x) - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{2}{\pi} + \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

$b)$ *Sejam a e b reais positivos tais que* $ab = 1$. *Encontre o valor mínimo para* $a^x + b^x$, *com* $x \in \mathbb{R}$.

Considere $f(x) = a^x + b^x$, *com* $ab = 1$, *então* $f(x) = a^x + a^{-x}$. $D(f) = \mathbb{R}$.

$f'(x) = a^x.\ln a + a^{-x}.\ln a\,.(-1)$
$f'(x) = a^x.\ln a\,(1 - a^{-2x})$

Estudo do sinal de $f'(x)$:

$*$ *Com* $0 < a < 1$:
$+ + + + +(0) - - - -\ \ (1 - a^{-2x})$
$- - - - - - - - - - -\ \ a^x(\ln a)$
$- - - - -(0) + + + +\ \ f'(x)$

$*$ *Com* $a > 1$:
$- - - - - (0) + + + +\ \ (1 - a^{-2x})$
$+ + + + + + + + + + +\ \ a^x(\ln a)$
$- - - - - (0) + + + +\ \ f'(x)$

Pelo Teste da Primeira Derivada, em $x = 0$ f *possui um ponto de mínimo local de modo que* $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(0)$ *e portanto,* $f(0)$ *é o valor mínimo absoluto de* f *em* $\mathbb{R}$. *Ou seja,* $f(0) = 2$ *é o valor mínimo da soma* $a^x + b^x$, *com* $ab = 1$.

***Questão* 4.**

$a)$ *Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = \dfrac{e^{(x^e)} - e^{-(x^e)}}{2}$ *no ponto em que* $x = 1$.

Ponto em que $x = 1$: $y(1) = \dfrac{e^1 - e^{-1}}{2} = \dfrac{e - \frac{1}{e}}{2} = \dfrac{e^2 - 1}{2e}$. *Ponto* $\left(1, \dfrac{e^2 - 1}{2e}\right)$

$$y' = \frac{e^{(x^e)}.e.x^{e-1} - e^{-(x^e)}.(-e.x^{e-1})}{2}$$

$$y'(1) = \frac{e^1.e.1^{e-1} - e^{-1}.(-e.1^{e-1})}{2} = \frac{e^2 + 1}{2}.$$

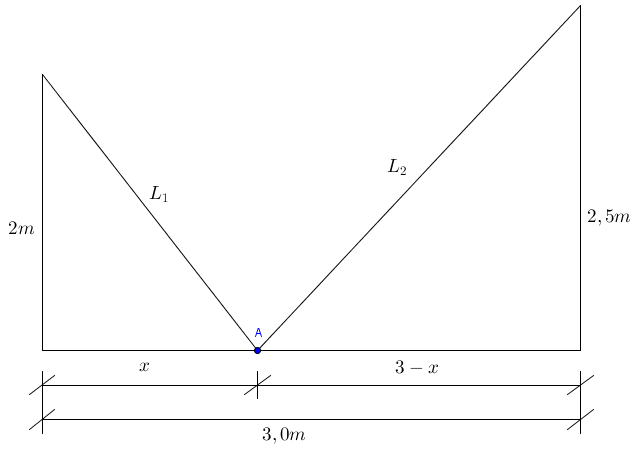
Equação da reta tangente ao gráfico de y *no ponto em que* $x = 1$:

$$y - \frac{e^2 - 1}{2e} = \frac{e^2 + 1}{2}(x - 1)$$

$$y = \left(\frac{e^2+1}{2}\right)x - \frac{e^2+1}{2} + \frac{e^2-1}{2e}$$

$b)$ *Dois poste verticais de* $2\ m$ *e* $2{,}5\ m$ *de altura distam* $3\ m$ *um do outro. Determine o comprimento do menor cabo que, partindo do topo de um poste, toque o solo e termine no topo do outro poste.*

A situação descrita no enunciado é apresentada na figura a seguir.



O comprimento do cabo é dado pela soma dos comprimentos L_1 *e* L_2*, levando em consideração que o cabo deve tocar o solo e terminar no outro poste.*

$$L = L_1 + L_2$$

$$L(x) = \sqrt{2^2 + x^2} + \sqrt{2{,}5^2 + (3-x)^2}$$

$$L(x) = \sqrt{4 + x^2} + \sqrt{6{,}25 + (3-x)^2}\ ; \quad 0 < x < 3$$

$$L'(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{3-x}{\sqrt{6{,}25+(3-x)^2}}$$

L possui um ponto de máximo ou mínimo local em c e $L'(c)$ *existir, então* $L'(c) = 0$. *(Teorema de Fermat)*

$$L'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} = \frac{3-x}{\sqrt{6{,}25+(3-x)^2}} \Rightarrow \frac{x^2}{4+x^2} = \frac{9-6x+x^2}{6{,}25+9-6x+x^2}$$

$$15{,}25x^2 - 6x^3 + x^4 = 36 - 24x + 4x^2 + 9x^2 - 6x^3 + x^4$$
$$15{,}25x^2 - 13x^2 + 24x - 36 = 0$$
$$2{,}25x^2 + 24x - 36 = 0$$
$$\Delta = 9.4^3 + 9^2.4 = 9 \times 4(4^2+9) = 36 \times 25$$

$$x = \frac{-24 \pm 30}{4{,}5} \therefore x = \frac{6}{4{,}5} = \frac{4}{3}m$$

Pela equação resolvida temos o seguinte estudo de sinal de $L'(x)$:

$$(0) - - - - - - (4/3) + + + + + + + (3) \quad L'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, L *possui um ponto de mínimo local em* $x = 4/3$ *e* $\forall x \in (0,3)\ L(x) \geq L(4/3)$. *Portanto,* $L(4/3)$ *é o valor mínimo absoluto, ou seja, é o comprimento do menor cabo que partindo de um poste, toca o solo e termina no topo do outro poste.*

$$L\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{4 + \frac{16}{9}} + \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{9}} = \frac{\sqrt{52}}{3} + \sqrt{\frac{25(9+4)}{36}} = \frac{2\sqrt{13}}{3} + \frac{5\sqrt{13}}{6}$$

$$L\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{9\sqrt{13}}{6} = \frac{3\sqrt{13}}{2} m$$

***Questão* 5.**

Seja $g(x) = |f(x)|$, *onde* $f(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$. *Sabendo que* $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ *e* $f''(x) = \dfrac{-4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$ *determine*:

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;
(iii) *As assíntotas, se existirem*;
(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem*;
(v) *Os pontos de inflexão, se existirem*;
(vi) *O gráfico de* $g(x)$.

Domínio da função: $D(g) = D(f) = \mathbb{R}$.

Obs.: $f(x) = -f(-x)$, f *é uma função ímpar. Logo, como* $g(x) = |f(x)|$, *então* $g(x) = g(-x)$, *isto é,* g *é uma função par e portanto simétrica em relação ao eixo das ordenadas.*

Ainda considerando o fato de que g *é uma função par temos*:

$$g(x) = g(-x) \Longrightarrow g'(x) = -g'(-x) \ \Longrightarrow g''(x) = g''(-x)$$

Ou seja, g' *é uma função ímpar e* g'' *é uma função par. Com isso, podemos nos restringir ao estudo de* f *para* $x \geq 0$, *sabendo que para* $x \geq 0$, *temos* $f(x) \leq 0$ *e, assim,* $g(x) = -f(x)$. *Usando o fato de que* g *é uma função par basta* espelhar *os resultados obtidos em relação a reta* $x = 0$ *(eixo* y*).*

As interseções do gráfico de f *com os eixos coordenados, caso existam*;

$g(0) = \dfrac{2 \times 0}{0^2+1} = \dfrac{0}{1} = 0$. *Interseção com o eixo* y: $A(0,0)$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \therefore x = 0.$ *Interseção com o eixo* x: $A(0,0)$

(i) *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;

$$Para\ x > 0, g(x) = -f(x) \Longrightarrow g'(x) = -f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

Pelo Teste C/D da primeira derivada, temos que g *é crescente onde* $g' > 0$ *e,* g *é decrescente onde* $g' < 0$. *Logo, do estudo do sinal de* g' *obtemos*:

$$\begin{array}{ll}
(0) + + + + + (1) - - - - - - - - - - & -2(x^2-1) \\
+ + + + + + + + + + + + + + + + + + & (x^2+1)^2 \\
(0) + + + + + (1) - - - - - - - - - - & g'(x) \quad ; \quad x > 0
\end{array}$$

Como g' *é uma função ímpar, então* $g'(-x) = -g'(x)$. *Logo,*

$$+ + + + +(-1) - - - - - (0) + + + + + (1) - - - - - \quad g'(x)$$

Com isso, conclui-se que g *é crescente em* $(-\infty, -1) \cup (0,1)$ *e* f *é decrescente em* $(-1,0) \cup (1, \infty)$.

(ii) *Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo*;

$$Para\ x > 0, g''(x) = -f''(x) = \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

f *possui concavidade voltada para cima onde* $f'' > 0$ *e concavidade voltada para baixo onde* $f'' < 0$. *Pelo estudo do sinal de* f'', *temos*:

$$\begin{array}{ll}
(0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + & 4x \\
- - - - - - - - - \left(\sqrt{3}\right) + + + + + + + + & (x^2-1) \\
+ & (x^2+1)^3 \\
(0) - - - - - - \left(\sqrt{3}\right) + + + + + + + + + & g''(x)\ ; \quad x > 0
\end{array}$$

Como g'' *é uma função par, então* $g''(-x) = g''(x)$. *Logo,*

$$+ + + + +\left(-\sqrt{3}\right) - - - - - (0) - - - - - \left(\sqrt{3}\right) + + + + + \quad g''(x)$$

Portanto, f *possui concavidade voltada cima em* $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$ *e* f *possui concavidade voltada para baixo em* $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

(iii) *As assíntotas, se existirem*;

Verticais: A reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico da função* g *se* $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x \to a^-} g(x) = \pm\infty$.

Pela definição de assíntota vertical, esta ocorre em pontos de descontinuidade da função. Logo, como f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, consequentemente,* g *também é*

contínua em $\mathbb{R}$, *então não há assíntotas verticais no gráfico da função* g

Horizontais: A reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se, somente se,*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = L.$$

Como g *é uma função par, então* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x)$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

Portanto, a reta $y = 0$ *(eixo* x*) é uma assíntota horizontal do gráfico da função* g.

Oblíquas: A reta $y = ax + b$ *é uma assíntota oblíqua se, somente se,*

$$\lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - (ax+b)] = 0;$$

Onde, $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{g(x)}{x}$; $a \neq 0$ *e* $b = \lim_{x\to\pm\infty} [g(x) - ax]$

Como g *é uma função par então* $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x}$. *Logo,*

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^2+1} = 0.$$

Portanto, não há assíntota oblíqua do gráfico da função f.

(iv) *Os pontos de máximo e de mínimo relativos, se existirem;*

Resgatando o estudo do sinal da primeira derivada:

$$+ + + + +(-1) - - - - - (0) + + + + + (1) - - - - - \quad g'(x)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, os pontos de abscissa $x = \{-1,1\}$ *são pontos de máximo local. Além disso, conforme analisado anteriormente,* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ *e, portanto* $\forall x \in \mathbb{R}, g(-1) = g(1) \geq g(x)$, *assim, esses pontos de máximo local são também de máximo absoluto de* g. *Concluindo, em* $x = 0$ g *possui um ponto de mínimo local e* $g(0) = 0$ *e como* $g(x) = |f(x)| \geq 0 \forall\, x \in \mathbb{R}$, *então* $(0,0)$ *é ponto de mínimo absoluto de* g.

$$g(-1) = g(1) = \frac{2\times 1}{1^2+1} = \frac{2}{2} = 1$$

Pontos de máximo local e absoluto: $B(-1,1)$ *e* $C(1,1)$
Ponto de mínimo local e absoluto: $A(0,0)$

(v) *Os pontos de inflexão, se existirem;*

Dizemos que o ponto $(c, g(c))$ *é ponto de inflexão do gráfico da função* g *se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de* c.

Pelo estudo do sinal de $g''(x)$, *temos*:

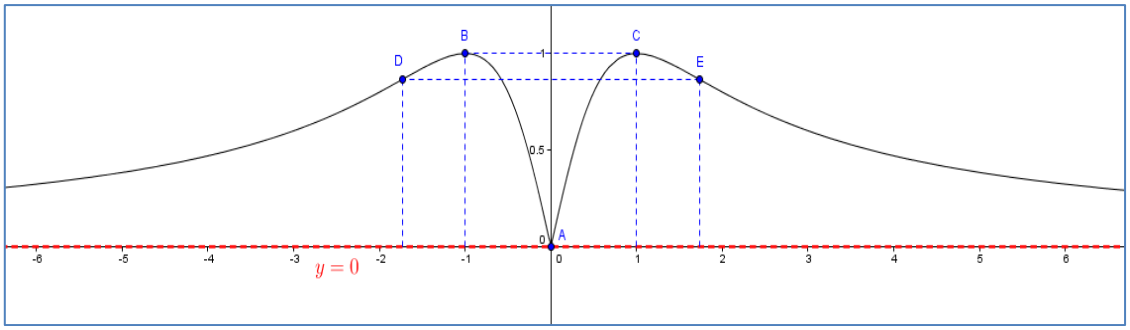
$$+ + + + + (-\sqrt{3}) - - - - - (0) - - - - - (\sqrt{3}) + + + + + \quad g''(x)$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x = -\sqrt{3}$ *e em* $x = \sqrt{3}$, *então os pontos associados a estas abscissas são pontos de inflexão do gráfico da função* g.

$$g(\sqrt{3}) = g(-\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3+1} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pontos de inflexão: $D\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *e* $E\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(vi) *O gráfico de* $g(x)$.



2.13 Prova Final – 01 de Junho de 2018

Questão 1.

$a)$ *Sem usar a regra de L'Hôspital, calcule* $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

$b)$ *Use o teorema do confronto para calcular* $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2(\operatorname{sen} x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}$.

Questão 2.

$a)$ *Seja* $f(x) = [\![x^3]\!]$. *Escreva* f *em sentenças e em seguida estude a continuidade em* $[-1,1]$.

$b)$ *Encontre os valores de a para os quais a função* $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \le a \\ x^2, & x > a \end{cases}$, *seja contínua para todos os valores de* x.

Questão 3.

$a)$ *Mostre que o gráfico de* $y = x\operatorname{sen}(\pi x) - (x-2)\ln x$ *possui pelo menos uma reta tangente horizontal.*

$b)$ *Usando a definição de derivada, determine onde a função* $f(x) = \operatorname{sen}|x|$ é *diferenciável.*

Questão 4.

$a)$ *Seja* $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^3+3}$. *Determine a inclinação da reta normal ao gráfico de* f *no ponto de abscissa* 2.

$b)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen}^9(2x+3)}$.

Questão 5.

$a)$ *Calcule a derivada de* $y = (\arccos 4x^2)^2$.

$b)$ *Encontre as equações da reta tangente* à *curva* $3x^2 + 3 = \ln(5xy^2)$ *nos pontos de abscissa* 1.

Questão 6.

$a)$ *Um porco espinho se move para a direita no plano sobre a curva* $y = \operatorname{senh}(2x)$. *Sabe-se que a velocidade do porco no eixo* x é $1m/s$. *Encontre com que velocidade o porco se afasta da origem quando ele está no ponto onde* $x = \ln\sqrt{2}$.

$b)$ *O lado de um cubo tem medida igual* à $10\ cm$ *e erro possível de* $0{,}02cm$. *Use diferenciais para encontrar uma aproximação por excesso para o erro envolvido no cálculo de um volume de* $1000\ cm^3$.

Questão 7.

$a)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = x - 2\operatorname{arctg} x$ *em* $[0,4]$.

$b)$ *Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles atingem a mesma velocidade.*

Questão 8.

$a)$ *Suponha que* f é *uma função ímpar e derivável em toda parte. Mostre que, para todo número positivo* a, *existe um número* c *em* $(-a, a)$ *tal que* $f'(c) = \dfrac{f(a)}{a}$.

$b)$ *Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão de* $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ *para* $0 \leq x \leq 2\pi$.

Questão 9.

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

$b)$ *Dois lados de um triângulo medem* a *e* b *e o* ângulo *entre eles* é θ. *Qual* é *o valor de* θ *que maximiza a área do triângulo*?

Questão 10.

$a)$ *Sendo* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 9x^2}}$, *determine sua primitiva mais geral.*

$b)$ *Usando e como limite, calcule* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x + 1}\right)^{x+1}$.

Questão 1

$a)$ *Sem usar a regra de L'Hôspital, calcule* $\lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt[3]{3x-4}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$.

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{3x-4}-2}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\sqrt[3]{3x-4}-2}{\sqrt{2x+1}-3}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt[3]{3x-4}-2\right).\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2x-8}$$

$$=\lim_{x\to 4}\left[\frac{\left(\sqrt[3]{3x-4}-2\right).\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2x-8}\cdot\frac{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+2\sqrt[3]{3x-4}+4}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+2\sqrt[3]{3x-4}+4}\right]$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(3x-12).\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x-8).\left(\sqrt[3]{(3x-4)^2}+2\sqrt[3]{3x-4}+4\right)}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{3(x-4).\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4).\left[\sqrt[3]{(3x-4)^2}+2\sqrt[3]{3x-4}+4\right]}\ ;\quad \begin{array}{c}Se\ x\to 4, então\ x\neq 4\\ Logo, (x-4)\neq 0.\end{array}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{3\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2\left[\sqrt[3]{(3x-4)^2}+2\sqrt[3]{3x-4}+4\right]}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{2\times 4+1}+3\right)}{2\left[\sqrt[3]{(3\times 4-4)^2}+2\sqrt[3]{3\times 4-4}+4\right]}$$

$$=\frac{3\left(\sqrt{9}+3\right)}{2\left[\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right]}=\frac{3(3+3)}{2[4+4+4]}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}.$$

Questão 1

$b)$ *Use o teorema do confronto para calcular* $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(\operatorname{sen} x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}$.

Sabe-se que a soma de funções limitadas é uma função limitada. Considere os números reais a e b tais que $\forall x \in \mathbb{R}$ *temos*

$$a \leq \operatorname{sen} x + \cos^3 x \leq b$$

Quando $x \to -\infty, x^2 > 0, (x^2+1) > 0$ *e* $(x-3) < 0$. *Logo* $\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)} < 0$.
Então

$$\underbrace{\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}.a}_{f(x)} \leq \underbrace{\frac{x^2(\operatorname{sen} x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}}_{g(x)} \leq \underbrace{\frac{x^2}{(x^2+1)(x-3)}.b}_{h(x)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^2}{x^3-3x^2+x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{a}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{1-0+0-0} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{bx^2}{x^3-3x^2+x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{b}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}} = \frac{0}{1-0+0-0} = 0.$$

Como $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* $x \to -\infty$ *e* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} h(x) = 0$, *pelo Teorema do Confronto* $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(\operatorname{sen} x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)} = 0$$

Questão 2

$a)$ *Seja* $f(x) = [\![x^3]\!]$. *Escreva* f *em sentenças e em seguida estude a continuidade em* $[-1,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

f *é contínua onde as funções em suas sentenças são contínuas. As sentenças de* f *configuram funções constante, contínuas em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua em* $(-1,0) \cup (0,1)$.

Dizemos que uma função f *é contínua no intervalo fechado* $[a,b]$ *se*

1. f *é contínua no intervalo aberto* (a,b);
2. $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ *e* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

Analisando a continuidade de f *em* 0 *temos*

$$f(0) = 0 \ ; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1 \ ; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0.$$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq f(0)$ *então* f *é descontínua em* 0. *Portanto* f *não é contínua em* $(-1,1)$ *e, consequentemente,* f *não é contínua em* $[-1,1]$. *Contudo, para completar o estudo da continuidade analisemos a continuidade à direita de* -1 *e à esquerda de* 1:

$$f(-1) = -1 \ ; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (-1) = -1.$$

Logo, f *é contínua à direita de* -1.

$$f(1) = 1 \ ; \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0.$$

Logo, f *não é contínua à esquerda de* 1.

De maneira resumida, f *é contínua em* $[-1,0) \cup (0,1)$.

Questão 2

$b)$ *Encontre os valores de a para os quais a função* $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq a \\ x^2, & x > a \end{cases}$ *, seja contínua para todos os valores de* x.

Como f *é uma função definida por partes onde estas são funções polinomiais contínuas em* $\mathbb{R}$*, então* f *é contínua em* $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$*. Para que* f *seja contínua para todos os valores de* x*, isto é, ser contínua em* $\mathbb{R}$*,* f *deve ser contínua em* $x = a$*, ou seja,* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$f(a) = a + 1$

$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (x+1) = a + 1$

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} x^2 = a^2$

Para que a continuidade de f *em* $x = a$ *seja satisfeita, temo*

$$a^2 = a + 1$$
$$a^2 - a - 1 = 0$$
$$\Delta = (-1)^2 - (-4) = 5$$
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \therefore a = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Portanto, para $a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *e* $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$*,* f *é contínua em* $x = a$ *e, com o estudo da continuidade anterior,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Questão 3

$a)$ *Mostre que o gráfico de* $y = x\,\mathrm{sen}(\pi x) - (x-2)\ln x$ *possui pelo menos uma reta tangente horizontal.*

$*$ *Em outras palavras: mostre que existe algum* x *tal que* $y' = 0$.

$*$ *Obs.:* $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$$y' = \mathrm{sen}(\pi x) + \pi x.\cos(\pi x) - \ln x - \frac{x-2}{x}$$

$$y'(1) = \mathrm{sen}(\pi) + \pi.\cos(\pi) - \ln(1) - \frac{1-2}{1} = 0 - \pi - 0 - (-1) = -\pi + 1 < 0$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{2}-2}{\frac{1}{2}} = 1 + 0 + \ln(2) + 3 = 4 + \ln(2) > 0$$

Como y' *é uma função contínua no intervalo fechado* $[0, 1/2]$ *e* 0 *é um número entre* $y'(1)$ *e* $y'(1/2)$, *então pelo Teorema do Valor Intermediário existe algum número* $x \in (1, 1/2)$ *tal que* $y' = 0$. *Ou seja, o gráfico de* y *possui pelo menos uma reta tangente horizontal.*

Questão 3

$b)$ *Usando a definição de derivada, determine onde a função* $f(x) = \operatorname{sen}|x|$ é *diferenciável.*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ x \geq 0 \\ \operatorname{sen}(-x), & se\ x < 0 \end{cases} \ ; \ \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ x \geq 0 \\ -\operatorname{sen} x, & se\ x < 0 \end{cases}$$

Como f *é uma função definida por partes onde estas são funções trigonométricas contínuas e deriváveis em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua e derivável em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. *Analisando a continuidade de* f *em* 0 *e, posteriormente a diferenciabilidade de* f *em* 0 *temos*

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \ ; \ \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-\operatorname{sen} x) = 0; \ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x = 0.$$

Como os limites laterais em 0 *existem e são iguais então* $\lim_{x \to 0} f(x)$ *existe e* $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. *Como* $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ *então* f *é contínua em* 0 *e, portanto, contínua em* $\mathbb{R}$.

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-\operatorname{sen}(h)}{h} = -\lim_{h \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = -1.$$
$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.$$

Como as derivadas laterais existem mas são diferentes, então f *não é diferenciável em* 0 *e, portanto,* f *é diferenciável em todo* x, *exceto* 0.

Questão 4

$a)$ *Seja* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^3 + 3}$. *Determine a inclinação da reta normal ao gráfico de* f *no ponto de abscissa* 2.

A inclinação da reta normal ao gráfico de f *no ponto de abscissa* 2 *é* m_n *e dado por* $m_n = -\dfrac{1}{f'(2)}$, *uma vez que as retas tangente e normal são perpendiculares entre si e* $f'(2)$ *é o coeficiente angular da reta tangente.*

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x^3+3) - (x^2-2x).(3x^2)}{(x^3+3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{(2\times 2-2)(2^3+3) - (2^2-2\times 2)(3\times 2^2)}{(2^3+3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{(4-2)(8+3) - (4-4).(12)}{(8+3)^2}$$

$$f'(2) = \frac{2\times 11 - 0\times 12}{11^2}$$

$$f'(2) = \frac{2}{11}.$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal é $m_n = -\dfrac{11}{2}$.

Questão 4

$b)$ *Calcule a derivada de* $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen}^9(2x+3)}$.

Seja $u(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \operatorname{sen}^9(2x+3)$ *e* $h(x) = u(x) + g(x)$, *então* $f(x) = \sqrt[3]{h(x)}$

Pela regra da cadeia temos

$$f'(x) = \frac{1}{3}[h(x)]^{-\frac{2}{3}}.h'(x)$$

$$f'(x) = \frac{h'(x)}{3\sqrt[3]{[h(x)]^2}}$$

$$h'(x) = u'(x) + g'(x)$$

$u(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow u'(x) = \sec^2 x$

$g(x) = \operatorname{sen}^9(2x+3) \Longrightarrow g'(x) = 9.\operatorname{sen}^8(2x+3).\cos(2x+3).2$

$$h'(x) = \sec^2 x + 18.\cos(2x+3).\operatorname{sen}^8(2x+3)$$

Com isso, temos

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x + 18.\cos(2x+3).\operatorname{sen}^8(2x+3)}{3\sqrt[3]{[\operatorname{tg} x + \operatorname{sen}^9(2x+3)]^2}}$$

$\boldsymbol{Questão}$ **5**

$a)$ $Calcule\ a\ derivada\ de\ y = (\arccos 4x^2)^2.$

$Seja\ u = 4x^2, v = \arccos(u)\ \ e\ y = f(v) = v^2.$

$Pela\ regra\ da\ cadeia\ temos$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2v).\left(-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\right).(8x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16x.\arccos(4x^2)}{\sqrt{1-(4x^2)^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{16x.\arccos(4x^2)}{\sqrt{1-16x^4}}$$

Questão 5

$b)$ *Encontre as equações da reta tangente à curva* $3x^2 + 3 = \ln(5xy^2)$ *nos pontos de abscissa* 1.

Pontos de abscissa 1:

$$3 + 3 = \ln(5y^2)$$
$$6 = \ln(5y^2)$$
$$e^6 = 5y^2$$
$$y = \pm\frac{e^3\sqrt{5}}{5}$$

Pontos: $A\left(1, -\frac{e^3\sqrt{5}}{5}\right)$ *e* $B\left(1, \frac{e^3\sqrt{5}}{5}\right)$

Por derivação implícita temos

$$\frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(3) + \frac{d}{dx}[\ln(5xy^2)]$$

$$6x + 0 = \frac{1}{5xy^2}.(5y^2 + 5xy')$$
$$6x = \frac{1}{xy^2}(y^2 + xy')$$
$$y' = \frac{6x^2y^2 - y^2}{x}$$
$$y' = \frac{y^2(6x^2 - 1)}{x}$$

Nos pontos A e B temos:

$$y'_A = \frac{\frac{e^3}{5}.(6-1)}{1} = e^3 \quad ; \quad y'_B = \frac{\frac{e^3}{5}.(6-1)}{1} = e^3$$

Equação das retas tangentes:

No ponto A: $y - \left(-\frac{e^3\sqrt{5}}{5}\right) = e^3(x-1) \Longrightarrow y = e^3x - \frac{e^3(5+\sqrt{5})}{5}$

No ponto B: $y - \frac{e^3\sqrt{5}}{5} = e^3(x-1) \Longrightarrow y = e^3x - \frac{e^3(5-\sqrt{5})}{5}$

Questão 6

a) Um porco espinho se move para a direita no plano sobre a curva $y = \operatorname{senh}(2x)$. *Sabe-se que a velocidade do porco no eixo* x é $1\,m/s$. *Encontre com que velocidade o porco se afasta da origem quando ele está no ponto onde* $x = \ln\sqrt{2}$.

A distância entre um ponto da curva $y = \operatorname{senh}(2x)$ *e a origem é dada pela expressão:*

$$D(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$D(x) = \sqrt{x^2 + \operatorname{senh}^2(2x)}$$

Sabe-se que $dx/dt = 1\,m/s$. *Pela regra da cadeia,*

$$\frac{dD}{dt} = \frac{dD}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{2x + 4\operatorname{senh}(2x).\cosh(2x)}{2\sqrt{x^2 + \operatorname{senh}^2(2x)}} . 1$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{x + 2\operatorname{senh}(2x)\cosh(2x)}{\sqrt{x^2 + \operatorname{senh}^2(2x)}}$$

Quando $x = \ln\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ln 2$, *temos:*

$$\operatorname{senh}(2x) = \operatorname{senh}(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\cosh(2x) = \cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{4}$$

Então,

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{x=\ln\sqrt{2}} = \frac{\ln\sqrt{2} + 2.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}}{\sqrt{\left(\ln\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{15}{8}}{\sqrt{\frac{(\ln 2)^2}{4} + \frac{9}{16}}} = \frac{\frac{4\ln 2 + 15}{8}}{\sqrt{\frac{4(\ln 2)^2 + 9}{16}}}$$

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{x=\ln\sqrt{2}} = \frac{4\ln 2 + 15}{8} . \frac{4}{\sqrt{(\ln 4)^2 + 9}} = \frac{\ln 16 + 15}{2\sqrt{(\ln 4)^2 + 9}} m/s$$

$\boldsymbol{Questão\ 6}$

$b)\ O\ lado\ de\ um\ cubo\ tem\ medida\ igual\ à\ 10\ cm\ e\ erro\ possível\ de\ 0{,}02cm.\ Use\ diferenciais\ para\ encontrar\ uma\ aproximação\ por\ excesso\ para\ o\ erro\ envolvido\ no\ cálculo\ de\ um\ volume\ de\ 1000\ cm^3.$

$Volume\ do\ cubo:\ V = a^3\ ,onde\ a = medida\ da\ aresta.$

$Por\ diferenciais, para\ uma\ variação\ muito\ pequena\ na\ medida\ da\ aresta,\ podemos\ dizer\ que$

$$\Delta V \cong dV$$

$Onde\ dV = V'(a).da = 3a^2.da$

$Considerando\ a = 10cm\ e\ da = 0{,}02cm, temos:$

$$\Delta V \cong dV = 3.(10)^2.(0{,}02) = 6cm^3$$

$Logo, o\ erro\ envolvido\ no\ cálculo\ do\ volume\ do\ cubo\ é\ de\ aproximadamente\ 6cm^3.$

Questão 7

$a)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de* $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$ *em* $[0,4]$.

f *é definida pela diferença entre funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,4]$ *e, pelo Teorema do Valor Extremo,* f *assume um valor máximo absoluto* $f(c)$ *e um valor mínimo absoluto* $f(d)$ *em certos números* c *e* d *em* $[a, b]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(0) = 0 - 2\,\mathrm{arctg}\,0 = 0.$
$f(4) = 4 - 2\,\mathrm{arctg}\,4\,.\quad f(4) > 0.\,(*\,Obs.: 2\,\mathrm{arctg}\,4 < \pi)$

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,4)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1 + x^2} \quad D(f') = \mathbb{R}$$

Como f *é derivável em* $\mathbb{R}$, *se* f *possui um número crítico* c, *então* $f'(c)$ *existe e, portanto,* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 1 - \frac{2}{1 + x^2} = 0 \Longrightarrow 1 + x^2 = 2 \Longrightarrow x^2 = 1 \therefore x = 1.$$

$*\,Obs.: x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$, *contudo* $-1 \notin (0,4)$. *Logo, apenas* $x = 1$ *é solução.*

$$f(1) = 1 - 2\,\mathrm{arctg}\,1 = 1 - 2.\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2 - \pi}{2} < 0$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 *e* 2, *concluimos que* $\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$ *é o valor mínimo absoluto e* $(4 - 2\,\mathrm{arctg}\,4)$ *é o valor máximo absoluto de* f *em* $[0,4]$.

Questão 7

$b)$ *Dois corredores iniciam uma corrida no mesmo instante e terminam empatados. Prove que em algum momento durante a corrida eles atingem a mesma velocidade.*

Considere as funções s_1 *e* s_1, *ambas contínuas em* $[0, t_f]$ *e deriváveis em* $(0, t_f)$. *As função* $s_1(t)$ *e* $s_2(t)$ *representam, respectivamente, o deslocamento dos corredores durante a corrida. De modo que* $s_1(0) = s_2(0)$ *e* $s_1(t_f) = s_2(t_f)$, *onde* t_f *representa o tempo que os corredores levaram para finalizar a corrida.*

Considere a função $h(t) = s_1(t) - s_2(t)$, *temos* $h(0) = h(t_f) = 0$.

h *é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses*:

1. h *é contínua no intervalo fechado* $[0, t_f]$;
2. h *é derivável no intervalo fechado* $(0, t_f)$;
3. $h(0) = h(t_f)$;

Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $t \in (0, t_f)$ *tal que* $h'(t) = 0$. *Isto é,*

$$h'(t) = 0 \Longrightarrow s_1'(t) - s_2'(t) = 0$$

Sabe-se que a velocidade instantânea do corredor no tempo t *é dado pela derivada da função deslocamento. Logo,* $v(t) = s'(t)$. *Portanto,*

$$v_1(t) - v_2(t) = 0 \therefore v_1(t) = v_2(t)$$

Portanto, em algum momento durante a corrida os dois corredores atingem a mesma velocidade.

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

$a)$ $Suponha\ que\ f$ é $uma\ função\ ímpar\ e\ derivável\ em\ toda\ parte. Mostre\ que, para\ todo\ número\ positivo\ a, existe\ um\ número\ c\ em\ (-a, a)\ tal\ que\ f'(c) = \dfrac{f(a)}{a}.$

$Como\ f$ é $uma\ função\ ímpar, então\ f(x) = -f(-x), e\ sendo\ derivável\ em\ \mathbb{R},$ $então\ f$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}. Logo, f$ é $uma\ função\ que\ satisfaz\ as\ seguintes\ hipóteses$:

1. f é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [-a, a]$;
2. f é $derivável\ no\ intervalo\ aberto\ (-a, a)$;

$Então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio, existe\ algum\ c \in (-a, a)\ tal\ que$

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(-a)}{a - (-a)} = \frac{f(a) - f(-a)}{2a}$$

$Como\ f$ é $uma\ função\ ímpar, então\ f(-a) = -f(a). Logo,$

$$f'(c) = \frac{f(a) - [-f(a)]}{2a} = \frac{2f(a)}{2a} \therefore f'(c) = \frac{f(a)}{a}.$$

Questão 8

$b)$ *Encontre os intervalos de concavidade e os pontosde inflexão de* $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ *para* $0 \leq x \leq 2\pi$.

$f'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x - \cos x$
$f''(x) = -(\operatorname{sen} x + \cos x)$

f possui concavidade voltada para cima onde $f'' > 0$ e concavidade voltada para baixo onde $f'' < 0$. Pelo estudo do sinal de f'', temos:

Estudo do sinal de $f''(x)$:

$(0) + + + + + (3\pi/4) - - - - - -(7\pi/4) + + + +(2\pi)$ $\quad (\operatorname{sen} x + \cos x)$
$- -$ $\quad -1$
$(0) - - - - - (3\pi/4) + + + + + +(7\pi/4) - - - -(2\pi)$ $\quad f''(x)$

Dizemos que o ponto $(c, f(c))$ é ponto de inflexão do gráfico da função f se ocorre mudança na direção da concavidade da função em torno de c.

Logo, os pontos de abscissa $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$ são pontos de inflexão do gráfico de f.

Pontos de inflexão:

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \ \textit{Ponto } A\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right).$$

$$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0. \textit{Ponto } B\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right).$$

Questão 9

$a)$ *Calcule* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

$*$ *Obs.: a função* $\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$ *tem como domínio* $x \in \mathbb{R}$, *com* $x > 0$ *e* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, *com* $k \in \mathbb{N}$, *e portanto o limite a ser calculado não existe, pois não existe o limite lateral à esquerda de* 0. *Logo, este limite deveria ser para* $x \to 0^+$. *Assim,*

Quando $x \to 0$, *temos* $\frac{1}{x} \to \infty$ *e* $\operatorname{tg} x \to 0$, *assim, o limite é indeterminado. Considere*

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$$

Então

$$\ln y = \ln\left[\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}\right] = \operatorname{tg} x \,.\, \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-\ln x}{\operatorname{cotg} x}$$

e logo, a Regra de L'Hôspital fornece

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\ln x}{\operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\operatorname{cossec}^2 x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} . \operatorname{sen} x\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x$$

$$= 1 \times 0$$

$$= 0.$$

Como o $\lim_{x\to 0^+} \ln y$ *existe, usando o fato de que* $y = e^{\ln y}$, *temos:*

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln y} = e^0 = 1.$$

$\boldsymbol{Questão}$ **9**

$b)$ $Dois\ lados\ de\ um\ triângulo\ medem\ a\ e\ b\ e\ o$ ângulo $entre\ eles$ é $\theta. Qual$ é $o\ valor\ de\ \theta\ que\ maximiza\ a$ área $do\ triângulo?$

A área $de\ um\ triângulo\ dado\ a\ medida\ de\ dois\ lados\ e\ o$ ângulo $adjacente\ entre\ eles$ é $dada\ pela\ expressão:$

$$A(\theta) = \frac{1}{2} a.b.\operatorname{sen}\theta \quad ; \quad 0 < \theta < \pi$$

$$A'(\theta) = \frac{1}{2} a.b.\cos\theta$$

$Estudo\ do\ sinal\ de\ A'(\theta):$

$$(0) + + + + + + + \left(\frac{\pi}{2}\right) - - - - - - (\pi) \quad A'(\theta)$$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, A(\theta)\ possui\ um\ valor\ máximo\ local\ em\ \theta = \pi/2\ \ e, como\ A(\theta) \leq A(\pi/2)\ \forall\theta \in (0,\pi), então\ A(\pi/2)$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto\ de\ A(\theta)\ em\ (0,\pi). De\ modo\ que\ \pi/2$ é $o\ valor\ de\ \theta\ que\ maximiza\ a$ área $do\ triângulo.$

***Questão* 10**

$a)$ *Sendo* $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}$, *determine sua primitiva mais geral.*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}} = \frac{1}{3}.\frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}.3$$

A primitiva mais geral de $f'(x)$ é *dada por*:

$$f(x) = \frac{1}{3}\text{arcsen}(3x) + C$$

Questão 10

$b)$ *Usando e como limite, calcule* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1};$$

Seja $\frac{1}{n} = \frac{2}{2x+1} \Longrightarrow x = n - \frac{1}{2}$. *Se* $x \to \infty$, *então* $n \to \infty$. *Ajustando o limite temos*:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \times \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= e \times (1+0)^{\frac{1}{2}}$$

$$= e.$$

$*$ *Limite exponencial fundamental*: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$