

Volume 2
2016



UNIVERSIDADE FEDERAL
DE ALAGOAS

RESOLUÇÃO DO BANCO DE QUESTÕES DE CÁLCULO 1

Organizado por
Carlos Alberto Santos Barbosa

Apresentação

O objetivo principal desta resolução do Banco de Questões (extraído das avaliações escritas de turmas de Cálculo Unificado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL) é auxiliar no desempenho dos estudantes da disciplina Cálculo 1, que durante o processo de conhecimento começam a inserir-se no aprendizado, mostrando-lhes uma noção de como resolver questões das provas realizadas, visando sempre a clareza e objetividade na obtenção dos resultados e suas implicações referentes ao quesito de modo a melhorar seu desempenho acadêmico na disciplina.

Dando continuidade ao trabalho presente no primeiro volume, o Volume 2 contém as avaliações aplicadas durante os semestres letivos 2016.1 e 2016.2, bem como as resoluções das mesmas, divididos em dois capítulos (16 e 17), respectivamente aos semestres letivos citados.

SUMÁRIO

Capítulo 16	3
2016.1	3
1.1 1ª Prova – 22 de Julho de 2016.....	3
1.2 1ª Prova – 23 de Julho de 2016.....	11
1.3 2ª Prova – 19 de Agosto de 2016.....	19
1.4 2ª Prova – 20 de Agosto de 2016.....	27
1.5 3ª Prova – 23 de Setembro de 2016	35
1.6 3ª Prova – 24 de Setembro de 2016	44
1.7 4ª Prova – 21 de Outubro de 2016	52
1.8 4ª Prova – 22 de Outubro de 2016	58
1.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 27 de Outubro de 2016	66
1.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 29 de Outubro de 2016	74
1.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 27 de Outubro de 2016	80
1.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 29 de Outubro de 2016	89
1.13 Prova Final – 04 de Novembro de 2016	96
Capítulo 17	117
2016.2	117
2.1 1ª Prova – 17 de Fevereiro de 2017	117
2.2 1ª Prova – 18 de Fevereiro de 2017	126
2.3 2ª Prova – 24 de Março de 2017	134
2.4 2ª Prova – 25 de Março de 2017	142
2.5 3ª Prova – 28 de Abril de 2017	150
2.6 3ª Prova – 29 de Abril de 2017	158
2.7 4ª Prova – 19 de Maio de 2017	166
2.8 4ª Prova – 20 de Maio de 2017	174
2.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 26 de Maio de 2017	182
2.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 27 de Maio de 2017	189
2.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 26 de Maio de 2017	196
2.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 27 de Maio de 2017	205
2.13 Prova Final – 02 de Junho de 2017.....	213

Capítulo 16

2016.1

1.1 1ª Prova – 22 de Julho de 2016

Questão 1.

a) Mostre que o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - kx + k - 1}{x^2 + x - 2}$ existe para qualquer que seja o número k e determine seu valor em função de k .

b) Assuma que $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ existe e $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 3}$. Encontre $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Questão 2.

a) Mostre que a equação $2^x - x = 1,6$ admite pelo menos duas raízes reais.

b) Determine as assíntotas horizontais, caso existam, do gráfico da função definida por

$$f(x) = 2^{\left(\frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}}\right)}$$

Questão 3.

a) Em quais pontos do intervalo $[0, 2\pi]$, a função $f(x) = \llbracket \cos x \rrbracket$ é descontínua?

b) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, no ponto em que $x = 8$?

Questão 4. Estude a continuidade da função $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}$.

Questão 5. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$;

b) $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} - 4}{x - 64}$.

Questão 1.

a) Mostre que o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - kx + k - 1}{x^2 + x - 2}$ existe para qualquer que seja o número k e determine seu valor em função de k .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - kx + k - 1}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1) - k(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1) - k(x - 1)}{(x - 1)(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1 - k)}{(x - 1)(x + 2)} ; \text{ se } x \rightarrow 1, \text{ então } x \neq 1 \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1 - k}{x + 2} ; \quad \therefore x - 1 \neq 0. \end{aligned}$$

* Como o limite $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 - k)$ existe e $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)$ existe, com $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2) \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 1 - k}{x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1 - k)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)} \\ &= \frac{1^2 + 1 + 1 - k}{1 + 2} \\ &= \frac{3 - k}{3} = 1 - \frac{k}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, o limite em questão existe qualquer que seja o valor de k e seu valor é dado por $\left(1 - \frac{k}{3}\right)$.

b) Assuma que $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ existe e $\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 3}$. Encontre $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

Seja $g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$ e $h(x) = \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 3}$, então

$$g(x) \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 2)(x + 3)}{(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} (x + 2) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} h(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(2x + 5)}{(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} (2x + 5) = -6 + 5 = -1$$

Pelo Teorema do Confronto, se $g(x) \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq h(x)$ quando x está próximo a -3 (exceto possivelmente em -3) e $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} h(x) = -1$, então

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x^2} = -1$$

Assumindo que $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow -3} x^2$ existe, com $\lim_{x \rightarrow -3} x^2 \neq 0$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -3} x^2}$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow -3} x^2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -3} x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -9$$

Questão 2.

a) Mostre que a equação $2^x - x = 1,6$ admite pelo menos duas raízes reais.

Seja $f(x) = 2^x - x$, definida como uma diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$, logo f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(-2) = 2^{-2} - (-2) = \frac{1}{4} + 2 = 2,25 > 1,6$$

$$f(0) = 2^0 - 0 = 1 - 0 = 1 < 1,6$$

$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 1,6$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, então f é contínua nos intervalos fechados $[-2,0]$ e $[0,2]$, e 1,6 é um número entre $f(-2)$ e $f(0)$, como também é um número entre $f(0)$ e $f(2)$, então existem números c e d , com $c \in (-2,0)$ e $d \in (0,2)$ tais que $f(c) = f(d) = 1,6$.

Logo, a equação $2^x - x = 1,6$ admite pelo menos duas raízes reais.

b) Determine as assíntotas horizontais, caso existam, do gráfico da função definida por

$$f(x) = 2^{\left(\frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}}\right)}$$

Domínio da função f : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ e } x > 1\}$

Seja $g(x) = 2^x$ e $h(x) = \frac{3x-5}{\sqrt[4]{x^4-x^3}}$, então $f(x) = g(h(x))$.

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Como f é uma função composta, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt[4]{x^4 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\sqrt[4]{x^4 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}; \sqrt[4]{x^4} = |x| \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{|x| \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}}; \text{ se } x \rightarrow +\infty, \text{ então } |x| = x \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{x \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{5}{x}}{\sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}}} = \frac{3 - 0}{\sqrt[4]{1 - 0}} = \frac{3}{1} = 3.
\end{aligned}$$

Como a função g é contínua em $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 3$, então

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(h(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)\right)$. Sendo $f(x) = g(h(x))$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(h(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)\right) = g(3) = 2^3 = 8.$$

Portanto, a reta $y = 8$ é uma assíntota horizontal do gráfico da curva $y = f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt[4]{x^4 - x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{\sqrt[4]{x^4 \left(1 - \frac{1}{x}\right)}}; \sqrt[4]{x^4} = |x| \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{|x| \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}}; \text{ se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } |x| = -x \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(3 - \frac{5}{x}\right)}{-x \sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3 - \frac{5}{x}}{\sqrt[4]{1 - \frac{1}{x}}} \\
&= -\frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt[4]{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}}} = -\frac{3 - 0}{\sqrt[4]{1 - 0}} = -\frac{3}{1} = -3.
\end{aligned}$$

Utilizando a propriedade já mencionada anteriormente, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(h(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)\right) = g(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

Portanto, a reta $y = \frac{1}{8}$ é uma assíntota horizontal do gráfico da curva $y = f(x)$.

Questão 3.

a) Em quais pontos do intervalo $[0, 2\pi]$, a função $f(x) = \llbracket \cos x \rrbracket$ é descontínua?

Analisando a função $\cos x$ no intervalo $(0, 2\pi)$, temos:

Se $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, então $0 < \cos x < 1$ e, portanto, $\llbracket \cos x \rrbracket = 0$.

Se $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, então $-1 < \cos x < 0$ e, portanto, $\llbracket \cos x \rrbracket = -1$.

Com essa análise, já temos que f é contínua em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Analisando a continuidade de f em $x = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$, temos:

1) $f(0) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. Portanto, f é descontínua à direita de 0.

2) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) \nexists$.

Logo, f é descontínua em $\frac{\pi}{2}$.

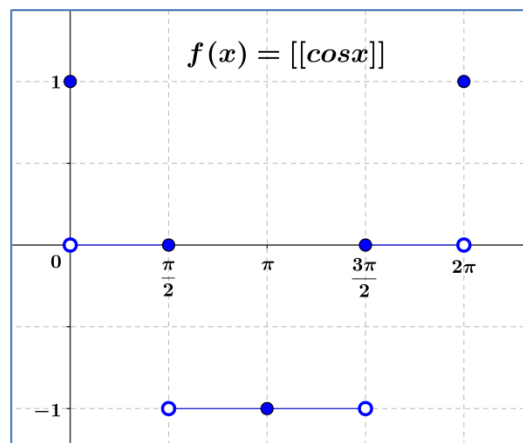
3) $f(\pi) = -1$ e $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) = -1$. Logo, f é contínua em π .

4) $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$; $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} f(x) = -1$. Portanto, $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} f(x) \nexists$.

Logo, f é descontínua em $\frac{3\pi}{2}$.

5) $f(2\pi) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = 0$. Portanto, f é descontínua à esquerda de 2π .

Concluimos que f é descontínua em $x = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$.



b) Qual é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x}$, no ponto em que $x = 8$?

Ponto $P(8, f(8)) = (8, 2)$.

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto P :

$$y - 2 = m(x - 8)$$

Onde m é o coeficiente angular da reta tangente, dado pelo valor numérico da função derivada de f no ponto $x = 8$. Pela definição de derivada de uma função num ponto $x = a$, temos:

$$m = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Fazendo $x = a + h$, se $h \rightarrow 0$, então $x \rightarrow a$. Ajustando o limite, temos:

$$m = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

No ponto de abscissa $x = 8$...

$$\begin{aligned} m = f'(8) &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} ; \quad x - 8 = (\sqrt[3]{x})^3 - (2)^3 \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 8} 1}{\lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x^2} + 2 \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} + \lim_{x \rightarrow 8} 4} = \frac{1}{4 + 4 + 4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto em que $x = 8$ é:

$$\begin{aligned} y - 2 &= \frac{1}{12}(x - 8) \\ y &= \frac{1}{12}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Questão 4. Estude a continuidade da função $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{4 - \sqrt{x^2 + 7}}$.

Considerações iniciais: $\sqrt{x^2 + 7} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{x^2 + 16} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 4 - \sqrt{x^2 + 7} &\neq 0 \\ \sqrt{x^2 + 7} &\neq 4 \\ x^2 + 7 &\neq 16 \end{aligned}$$

$$x^2 \neq 9$$

$$\therefore x \neq \pm 3$$

Domínio da função f :

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3 \text{ e } x \neq 3\}$$

f é uma função racional e, portanto, f é contínua onde estiver definida, ou seja, f é contínua em seu domínio.

Portanto, f é contínua em $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

Analisando as descontinuidades que ocorrem em -3 e 3 , uma vez que a função f não está definida nesses valores.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{4 - \sqrt{x^2 + 7}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 5}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 16 - 25}{(4 - \sqrt{x^2 + 7})(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{(4 - \sqrt{x^2 + 7})(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{(4 - \sqrt{x^2 + 7})(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \cdot \frac{4 + \sqrt{x^2 + 7}}{4 + \sqrt{x^2 + 7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{(16 - x^2 - 7)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9)(4 + \sqrt{x^2 + 7})}{-(x^2 - 9)(\sqrt{x^2 + 16} + 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} -\frac{4 + \sqrt{x^2 + 7}}{\sqrt{x^2 + 16} + 5} \\ &= -\frac{\lim_{x \rightarrow -3} 4 + \lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 + 7}}{\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x^2 + 16} + \lim_{x \rightarrow -3} 5} \\ &= -\frac{4 + 4}{5 + 5} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}. \end{aligned}$$

* Obs: se $x \rightarrow -3$, então $x \neq -3$. Logo, $x^2 \neq 9 \therefore x^2 - 9 \neq 0$.

A observação acima também é válida se $x \rightarrow 3$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\frac{4}{5}$.

Uma vez que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ existem, embora a função não esteja definida em -3 e 3 , concluímos que a função f possui descontinuidade removível nesses pontos.

Questão 5. Calcule:

$$\begin{aligned}
 a) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}_{+\infty}} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} - 4}{x - 64} &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} - 4}{x - 64} \cdot \frac{\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} + 4}{\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} + 4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{12 + \sqrt[3]{x} - 16}{(x - 64)(\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{(x - 64)(\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} + 4)}; \quad x - 64 = (\sqrt[3]{x})^3 - (4)^3 \\
 &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{(\sqrt[3]{x} - 4)}{(\sqrt[3]{x} - 4)(\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16)(\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} + 4)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 64} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[3]{x} + 16)(\sqrt{12 + \sqrt[3]{x}} + 4)} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt[3]{64^2} + 4\sqrt[3]{64} + 16)(\sqrt{12 + \sqrt[3]{64}} + 4)} \\
 &= \frac{1}{(16 + 16 + 16)(4 + 4)} = \frac{1}{(48)(8)} = \frac{1}{384}
 \end{aligned}$$

1.2 1ª Prova – 23 de Julho de 2016

Questão 1. Calcule:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \right].$$

Questão 2.

a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que $x^5 - 6x^4 + 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes em $(-2, 2)$.

b) Encontre as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Questão 3.

a) Determine se a função $f(x) = \llbracket 2^x \rrbracket$ é contínua em $x = 1$.

b) Encontre uma equação para a reta que tangencia o gráfico de $f(x) = \sqrt{|x|}$, no ponto em que $x = -4$.

Questão 4. Considere a função $f(x) = \frac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^3 - 1}$.

a) Estude a continuidade de f .

b) A descontinuidade, por acaso encontrada na função f , é removível? Em caso positivo, redefina f para que a mesma se torne contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 5. Calcule:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{4x - 5};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x\sqrt{1+x}} - \frac{2}{x} \right).$$

Questão 1.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$; Indeterminação do tipo " $\frac{0}{0}$ "

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1} \cdot \frac{\sqrt{6-x}+2}{\sqrt{6-x}+2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6-x-4}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(2-x)}{(\sqrt{3-x}-1)(\sqrt{6-x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(3-x-1)(\sqrt{6-x}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(\sqrt{3-x}+1)}{(2-x)(\sqrt{6-x}+2)}; \text{ se } x \rightarrow 2, \text{ então } x \neq 2 \\
 &\quad \quad \quad \therefore x-2 \neq 0. \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{6-x}+2} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3-x} + \lim_{x \rightarrow 2} 1}{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{6-x} + \lim_{x \rightarrow 2} 2} \\
 &= \frac{\sqrt{3-2}+1}{\sqrt{6-2}+2} = \frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \right]$.

$\forall x \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$0 \leq \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Como a base da função exponencial acima é tal que $0 < \frac{1}{2} < 1$, então esta função é decrescente e, portanto, invertemos o sentido da desigualdade. Logo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^0 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

Reescrevendo a desigualdade ...

$$\frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \leq 1$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $x > 0$ e, portanto,

$$\frac{x}{2} \leq x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, se $\frac{x}{2} \leq x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq x$ quando x está próximo a

0 pela direita de 0 e $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} \right] = 0$.

Se $x \rightarrow 0^-$, então $x < 0$ e, portanto,

$$x \leq x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{x}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0.$$

Pelo Teorema do Confronto, se $x \leq x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} \leq \frac{x}{2}$ quando x está próximo a

0 pela esquerda de 0 e $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left[x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{2}\right)} \right] = 0$.

Como os limites laterais existem e são iguais, então o limite existe e

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)} \right] = 0$$

Questão 2.

a) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que $x^5 - 6x^4 + 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes em $(-2, 2)$.

Seja $f(x) = x^5 - 6x^4 + 8$, uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$.

$$\cdot f(-2) = (-2)^5 - 6(-2)^4 + 8 = -32 - 6 \times 16 + 8 = -32 - 96 + 8 = -120.$$

$$\cdot f(0) = 0^5 - 6(0)^4 + 8 = 0 - 0 + 8 = 8.$$

$$\cdot f(2) = 2^5 - 6(2)^4 + 8 = 32 - 6 \times 16 + 8 = 32 - 96 + 8 = -46.$$

Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então f é contínua nos intervalos fechados $[-2, 0]$ e $[0, 2]$.

Pelo Teorema do Valor Intermediário, se f é uma função contínua nos intervalos fechados $[-2, 0]$ e $[0, 2]$ e 0 é um número entre $f(-2)$ e $f(0)$, assim como 0 é um número entre $f(0)$ e $f(2)$, então existem números c e d , com $c \in (-2, 0)$ e $d \in (0, 2)$ tais que $f(c) = f(d) = 0$. Logo, a equação $x^5 - 6x^4 + 8 = 0$ tem pelo menos duas raízes reais em $(-2, 2)$.

b) Encontre as assíntotas verticais e horizontais, caso existam, do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$$

Domínio da função f :

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$$

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da curva $y = f(x)$ se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

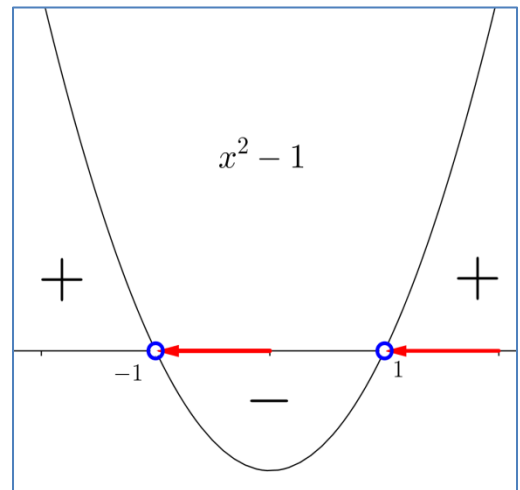
Pela definição de continuidade de uma função f em um número a , estas assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função f . Pela análise do domínio da função, f é descontínua em -1 e 1 . Logo,

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\overset{-1}{\uparrow} \hat{x}}{\underset{0^-}{\downarrow} \sqrt[3]{x^2 - 1}} = +\infty$$

Portanto, a reta $x = -1$ é assíntota vertical do gráfico da curva $y = f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overset{1}{\uparrow} \hat{x}}{\underset{0^+}{\downarrow} \sqrt[3]{x^2 - 1}} = +\infty$$

Portanto, a reta $x = 1$ é assíntota vertical do gráfico da curva $y = f(x)$.



Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}; \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (n \text{ ímpar})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

pois $\sqrt[3]{x} \rightarrow +\infty$ e $\sqrt[3]{1 - 1/x^2} \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}; \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad (n \text{ ímpar})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{\frac{x}{1 - \frac{1}{x^2}}} = -\infty$$

pois $\sqrt[3]{x} \rightarrow -\infty$ e $\sqrt[3]{1 - 1/x^2} \rightarrow 1$ quando $x \rightarrow -\infty$

Logo, o gráfico da curva $y = f(x)$ não possui assíntotas horizontais.

Questão 3.

a) Determine se a função $f(x) = \llbracket 2^x \rrbracket$ é contínua em $x = 1$.

Uma função f é contínua no número a se, e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
Para tal afirmação, $f(a)$ e $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ devem existir.

Analisando a continuidade da função f em $x = 1$, temos:

$$f(1) = \llbracket 2^1 \rrbracket = \llbracket 2 \rrbracket = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \llbracket 2^x \rrbracket = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2.$$

* Se $x \rightarrow 1^+$, então $2^x \rightarrow 2^+$ e, portanto, $\llbracket 2^x \rrbracket = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \llbracket 2^x \rrbracket = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1.$$

* Se $x \rightarrow 1^-$, então $2^x \rightarrow 2^-$ e, portanto, $\llbracket 2^x \rrbracket = 1$.

Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \nexists$.

Portanto, f é descontínua em $x = 1$. A saber, f tem descontinuidade de salto (1ª espécie) em $x = 1$, uma vez que os limites laterais de f em 1 existem e são distintos.

b) Encontre uma equação para a reta que tangencia o gráfico de $f(x) = \sqrt{|x|}$, no ponto em que $x = -4$.

Ponto $P(-4, f(-4))$; $P(-4, 2)$

Verifica-se que o ponto $P = (-4, 2)$ pertence à curva $f(x) = \sqrt{|x|}$. Logo, o coeficiente angular m da reta tangente à curva no ponto de abscissa $x = -4$ é dado por:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{f(x) - f(-4)}{x - (-4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{|x|} - 2}{x + 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \left[\frac{\sqrt{|x|} - 2}{x + 4} \cdot \frac{\sqrt{|x|} + 2}{\sqrt{|x|} + 2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{|x| - 4}{(x + 4)(\sqrt{|x|} + 2)} ; \text{ se } x \rightarrow -4, \text{ então } |x| = -x. \\
&= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-x - 4}{(x + 4)(\sqrt{|x|} + 2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-(x + 4)}{(x + 4)(\sqrt{|x|} + 2)} ; \text{ se } x \rightarrow -4, \text{ então } x \neq -4 \\
&\quad \quad \quad \therefore x + 4 \neq 0. \\
&= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{-1}{\sqrt{|x|} + 2} = \frac{-1}{\sqrt{|-4|} + 2} = \frac{-1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{-1}{2 + 2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Equação da reta tangente no ponto $P(-4, 2)$ e coeficiente angular $m = -\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
y - 2 &= -\frac{1}{4}(x + 4) \\
y &= -\frac{1}{4}x + 1
\end{aligned}$$

Questão 4. Considere a função $f(x) = \frac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^3 - 1}$.

a) Estude a continuidade de f .

f é uma função a priori racional, cujo numerador é uma diferença de funções constante e raiz, e o denominador é uma função polinomial. Logo, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio.

$$\begin{aligned}
\text{Domínio de } f: D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 1 \neq 0\} \\
D(f) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}
\end{aligned}$$

Logo, f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, ou ainda, f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$.
Com isso, concluímos que f é descontínua apenas em $x = 1$.

b) A descontinuidade, por acaso encontrada na função f , é removível? Em caso positivo, redefina f para que a mesma se torne contínua em $\mathbb{R}$.

A descontinuidade é dita removível se a função f é descontínua em um ponto a mas $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe. Neste caso podemos obter uma função f^* contínua em a , definindo f de modo que sejam satisfeitas as três condições da definição:

- 1ª) $f(a)$ deve existir;
- 2ª) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ deve existir;
- 3ª) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Analisando a descontinuidade em $x = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^3 - 1} \cdot \frac{4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}}{4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8 - (x^2 + 7)}{(x^3 - 1)(4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{(x^3 - 1)(4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2})} \\
&\quad \text{Se } x \rightarrow 1, \text{ então } x \neq 1 \Rightarrow \therefore x - 1 \neq 0 \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x + 1)}{(x^2 + x + 1)(4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2})} \\
&= \frac{-\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)}{\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \times \lim_{x \rightarrow 1} (4 + 2\sqrt[3]{x^2 + 7} + \sqrt[3]{(x^2 + 7)^2})} \\
&= \frac{-2}{(1^2 + 1 + 1)(4 + 2\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{8^2})} = \frac{-2}{(3)(12)} = -\frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

Como a função f não está definida em 1 e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe, então a descontinuidade em 1 é removível. Neste caso, podemos redefinir a função f de tal modo que, considerando que f é descontínua apenas em 1, f seja contínua em $\mathbb{R}$. Logo,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt[3]{x^2 + 7}}{x^3 - 1}, & \text{se } x \neq 1 \\ -\frac{1}{18}, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Questão 5. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{4x - 5}$; Indeterminação " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{4x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(4 - \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 - \frac{5}{x}\right)}; \text{ se } x \rightarrow \infty, \text{ então } |x| = x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 - \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(4 - \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{4 - \frac{5}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x}};$$

$$\frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 4 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x}} = \frac{\sqrt{3 + 0}}{4 - 0} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x\sqrt{1+x}} - \frac{2}{x} \right); \text{Indeterminação } "\infty - \infty"$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x\sqrt{1+x}} - \frac{2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}}; \text{Indeterminação } "\frac{0}{0}"$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2 - 2\sqrt{1+x}}{x\sqrt{1+x}} \cdot \frac{2 + 2\sqrt{1+x}}{2 + 2\sqrt{1+x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4(1+x)}{x\sqrt{1+x}(2 + 2\sqrt{1+x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4x}{2x\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})}; \text{ se } x \rightarrow 0, \text{ então } x \neq 0. \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{\sqrt{1+x}(1 + \sqrt{1+x})} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (-2)}{\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{1+x})} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{1+0} \times (1 + \sqrt{1+0})} = \frac{-2}{\sqrt{1} \times (1 + \sqrt{1})} = \frac{-2}{2} = -1. \end{aligned}$$

1.3 2ª Prova – 19 de Agosto de 2016

Questão 1.

a) Use a definição para estudar a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

em $x = 0$.

b) Se f', g', f'' e g'' existem e se $h = f \circ g$, determine $h''(2)$ sabendo que $g(2) = 4$, $g'(2) = 6$, $g''(2) = 3$, $f'(4) = 8$ e $f''(4) = 1$.

Questão 2.

a) Determine a equação da reta normal à curva $y = 2^x \cdot (x^2 - 1)$ no ponto em que $x = 1$.

b) Enuncie e demonstre a regra da derivada do quociente de duas funções.

Questão 3.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}}$.

b) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x, \text{ no ponto } \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Questão 4.

a) Dada a curva $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y} = 1$, determine em que ponto(s) do intervalo $[0, \pi]$ a reta tangente é horizontal.

b) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'(1) = 2$ e $f(1) = 3$. Sabendo que $F(x) = f(3^x)$, encontre uma equação da reta normal à curva $y = F(x)$ no ponto em que $x = 0$.

Questão 5. Estude a diferenciabilidade da função $f(x) = |x^2 - 9|$.

Questão 1

a) Use a definição para estudar a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{tg} x, & x \geq 0 \\ -\operatorname{tg} x, & x < 0 \end{cases}$$

em $x = 0$.

Para estudar a diferenciabilidade da função f em $x = 0$, primeiramente analisamos a continuidade de f em 0. Logo,

$$f(0) = 1 + \operatorname{tg} 0 = 1 + 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 + \operatorname{tg} x) = 1 + \operatorname{tg} 0 = 1 + 0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\operatorname{tg} x) = -\operatorname{tg} 0 = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ então dizemos que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ não existe e, portanto, f não é contínua em $x = 0$. Consequentemente, f não é diferenciável em $x = 0$.

Análise complementar

Caso analisássemos a diferenciabilidade por definição de derivadas laterais, teríamos:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \operatorname{tg} x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$* \text{ Limite Fundamental Trigonométrico: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\operatorname{tg} x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{-\operatorname{tg} x - 1}^{-1}}{\underbrace{x}_{0^-}} = +\infty$$

Como $f'_-(0)$ não existe, então f não é diferenciável em $x = 0$.

b) Se f', g', f'' e g'' existem e se $h = f \circ g$, determine $h''(2)$ sabendo que $g(2) = 4$, $g'(2) = 6$, $g''(2) = 3$, $f'(4) = 8$ e $f''(4) = 1$.

$$h(x) = (f \circ g)(x) \Rightarrow h(x) = f(g(x))$$

Derivando usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$h''(x) = [f''(g(x)) \cdot g'(x)] \cdot g'(x) + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

$$h''(x) = f''(g(x)) \cdot [g'(x)]^2 + f'(g(x)) \cdot g''(x)$$

$$h''(2) = f''(g(2)) \cdot [g'(2)]^2 + f'(g(2)) \cdot g''(2)$$

$$h''(2) = f''(4) \cdot [6]^2 + f'(4) \cdot 3$$

$$h''(2) = 1 \times 36 + 8 \times 3$$

$$h''(2) = 36 + 24$$

$$h''(2) = 60.$$

Questão 2

a) Determine a equação da reta normal à curva $y = 2^x \cdot (x^2 - 1)$ no ponto em que $x = 1$.

Ponto de abscissa $x = 1$, $P(1,0)$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = (2^x \cdot \ln 2) \cdot (x^2 - 1) + 2^x \cdot (2x)$$

No ponto de abscissa $x = 1$, temos:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 2^1 \cdot \ln 2 \cdot (1^2 - 1) + 2^1 \cdot (2)$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = 4 \text{ (coeficiente angular da reta tangente)}$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal é $m_n = -\frac{1}{4}$.

Equação da reta normal no ponto P:

$$y - y_0 = m_n(x - x_0)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{4}(x - 1)$$

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

b) Enuncie e demonstre a regra da derivada do quociente de duas funções.

Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções deriváveis, então a função $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, tem derivada

dada pela Regra do Quociente, onde a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador. Isto é,

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Pela definição de derivada ...

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x [g(x) \cdot g(x + \Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x [g(x) \cdot g(x + \Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]g(x) - f(x)[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x [g(x) \cdot g(x + \Delta x)]} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} g(x) - f(x) \frac{[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x}}{[g(x) \cdot g(x + \Delta x)]} \\ &= \frac{g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [g(x + \Delta x)]} \\ &= \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot [g(x)]} \\ h'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \end{aligned}$$

Questão 3.

$$\begin{aligned} a) \text{ Calcule } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}}. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1 + \cos(3x)}{1 + \cos(3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos(3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{1}{1 + \cos(3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^2(3x)}{x} \cdot \frac{1}{[1 + \cos(3x)]e^{\operatorname{tg} x}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(3x)}{9x^2} \cdot \frac{9x}{[1 + \cos(3x)]e^{\operatorname{tg} x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin(3x)}{3x} \right)^2 \cdot \frac{9x}{(1 + \cos(3x))e^{\operatorname{tg} x}} \right]
\end{aligned}$$

* Supondo que o limite do produto é o produto dos limites, temos:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{(1 + \cos(3x)) \cdot e^{\operatorname{tg} x}}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \right)^2 = \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \right]^2 = 1^2 = 1.$$

* Limite Fundamental Trigonométrico: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{kx} = 1.$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{[1 + \cos(3x)] \cdot e^{\operatorname{tg} x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 9x}{\lim_{x \rightarrow 0} [(1 + \cos(3x)) \cdot e^{\operatorname{tg} x}]} = \frac{9 \times 0}{(1 + \cos 0)e^0} = \frac{0}{2} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x \cdot e^{\operatorname{tg} x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(3x)}{3x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{(1 + \cos(3x)) \cdot e^{\operatorname{tg} x}} = 1 \times 0 = 0.$$

b) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x, \text{ no ponto } \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right). D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Verificação se o ponto pertence ao gráfico da função:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} \times 1^3 - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \text{ (Pertence!)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} (3 \cdot \operatorname{tg}^2 x) \cdot \sec^2 x - \sec^2 x + 1$$

No ponto de abscissa $x = \frac{\pi}{4}$, temos:

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} \left(3 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{4} \right) \cdot \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) + 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{3} (3 \times 1^2) \cdot (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2 + 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2 + 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Equação da reta tangente no ponto $\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - \left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= 1 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ y + \frac{2}{3} - \frac{\pi}{4} &= x - \frac{\pi}{4} \\ y &= x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Questão 4

a) Dada a curva $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos y} = 1$, determine em que ponto(s) do intervalo $[0, \pi]$ a reta tangente é horizontal.

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\sqrt{\sin x}] + \frac{d}{dx} [\sqrt{\cos y}] &= \frac{d}{dx} (1) \\ \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} - \frac{\sin y}{2\sqrt{\cos y}} \cdot y' &= 0 \\ y' &= \frac{\cos x \cdot \sqrt{\cos y}}{\sin y \cdot \sqrt{\sin x}}; \sin y \neq 0 \text{ e } \sin x \neq 0 \end{aligned}$$

Onde a reta tangente é horizontal, o coeficiente angular da reta tangente é nulo. Isto é, $m = y' = 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos y = 0 \end{cases} \therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } y = \frac{\pi}{2}.$$

Ponto em questão:

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin \frac{\pi}{2}} + \sqrt{\cos y} &= 1 \\ 1 + \sqrt{\cos y} &= 1 \\ \sqrt{\cos y} &= 0 \\ \cos y &= 0 \\ \therefore y &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ponto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

* Note que a verificação de $y = \frac{\pi}{2}$ seria redundante. Ou seja, só existe um ponto onde a reta tangente é horizontal, o ponto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'(1) = 2$ e $f(1) = 3$. Sabendo que $F(x) = f(3^x)$, encontre uma equação da reta normal à curva $y = F(x)$ no ponto em que $x = 0$.

Ponto em questão : $P(0, F(0))$; $F(0) = f(3^0) = f(1) = 3$. ponto $P(0,3)$

$$F'(x) = f'(3^x) \cdot 3^x \cdot \ln 3$$

$$F'(0) = f'(3^0) \cdot 3^0 \cdot \ln 3$$

$$F'(0) = f'(1) \cdot \ln 3$$

$$F'(0) = 2 \cdot \ln 3 = \ln 3^2 = \ln 9 \text{ (coeficiente angular da reta tangente!)}$$

$$\text{Coeficiente angular da reta normal } m_n = -\frac{1}{\ln 9}.$$

Equação da reta normal no ponto $P(0,3)$:

$$y - y_0 = m_n(x - x_0)$$

$$y - 3 = -\frac{1}{\ln 9}(x - 0)$$

$$y = -\frac{1}{\ln 9}x + 3$$

Questão 5. Estude a diferenciabilidade da função $f(x) = |x^2 - 9|$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{se } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3 \\ -(x^2 - 9), & \text{se } -3 < x < 3 \end{cases}$$

Como f é uma função definida por partes, como mostrada acima, e ambas as sentenças são funções polinomiais e, portanto, contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, então f é diferenciável onde estas funções estão definidas. Isto é, f é diferenciável em $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$.

Analisando a diferenciabilidade da função em $x = -3$ e $x = 3$, temos:

* Em $x = -3$:

$$f(-3) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} (x^2 - 9) = (-3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} -(x^2 - 9) = -\lim_{x \rightarrow -3^+} (x^2 - 9) = -(9 - 9) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ então $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ existe e, $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = f(-3)$.

Logo, f é contínua em $x = -3$.

$$\begin{aligned} f'_-(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{f(x) - f(-3)}{x - (-3)} = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 9 - 0}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)} ; \text{ Se } x \rightarrow -3, \text{ então } x \neq -3 \\ &\quad \text{Logo, } (x + 3) \neq 0. \\ &= \lim_{x \rightarrow -3^-} (x - 3) = -3 - 3 = -6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_+(-3) &= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - (-3)} = - \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 9 - 0}{x + 3} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 9}{x + 3} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)}; \text{ Se } x \rightarrow -3, \text{ então } x \neq -3 \\
 &\quad \text{Logo, } (x + 3) \neq 0. \\
 &= - \lim_{x \rightarrow -3^+} (x - 3) = -(-3 - 3) = 6.
 \end{aligned}$$

Como $f'_-(-3) \neq f'_+(3)$, então f não é derivável em $x = -3$.

* Em $x = 3$:

$$f(3) = (3)^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -(x^2 - 9) = -[(-3)^2 - 9] = -(9 - 9) = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) = - \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) = -(9 - 9) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ então $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ existe e, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$.
Logo, f é contínua em $x = 3$.

$$\begin{aligned}
 f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = - \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9 - 0}{x - 3} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)}; \text{ Se } x \rightarrow 3, \text{ então } x \neq 3 \\
 &\quad \text{Logo, } (x - 3) \neq 0. \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 3^-} (x + 3) = -(3 + 3) = -6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9 - 0}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)}; \text{ Se } x \rightarrow 3, \text{ então } x \neq 3 \\
 &\quad \text{Logo, } (x - 3) \neq 0. \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + 3) = 3 + 3 = 6.
 \end{aligned}$$

Como $f'_-(3) \neq f'_+(3)$, então f não é derivável em $x = 3$.

Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

1.4 2ª Prova – 20 de Agosto de 2016

Questão 1.

a) Caso exista, calcule a derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3, & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4, & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

em $x = 3$.

b) Seja $y = 10^{1-\sin x}$. Sabendo que $y''(0) = K \cdot (\ln 10)^2$, determine o valor de K .

Questão 2.

a) Enuncie e demonstre a regra da derivada do produto de duas funções.

b) Mostre que o gráfico da função $y = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ tem uma tangente horizontal.

Mostrar que o gráfico de uma função $y = f(x)$ tem uma tangente horizontal, é mostrar que existe algum $x \in D(f)$ tal que $f'(x) = 0$.

Questão 3.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x^2 - (a + b)x + ab}$, $a \neq b$.

b) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = e^{\operatorname{tg}(\sin x)}$ no ponto $(0,1)$.

Questão 4.

a) Determine uma equação da reta normal à curva dada pela equação $x^2y + \sin y = 2x$ no ponto $(1, 2\pi)$

b) Encontre o ponto do intervalo $[0,1]$ no qual a reta tangente ao gráfico de

$$y = 2^{\sin(\pi x)} + \sin^3(\pi x)$$

é horizontal.

Questão 5. Estude a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Questão 1

a) Caso exista, calcule a derivada da função

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3, & \text{se } x \geq 3 \\ \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4, & \text{se } x < 3 \end{cases}$$

em $x = 3$.

Para estudar a diferenciabilidade da função f em $x = 3$, primeiramente analisamos a continuidade de f em 3. Logo,

$$f(3) = -\frac{4}{9}(3)^2 + \frac{8}{3}(3) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3 \right) = -\frac{4}{9}(3)^2 + \frac{8}{3}(3) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 \right) = \frac{2}{9}(3)^2 - \frac{4}{3}(3) + 4 = 2 - 4 + 4 = 2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ então dizemos que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ não existe e, portanto, f não é contínua em $x = 3$. Consequentemente, f não é diferenciável em $x = 3$.

Analisando por derivadas laterais, teríamos:

$$\begin{aligned} f'_+(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-\frac{4}{9}x^2 + \frac{8}{3}x - 3 - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-4x^2 + 24x - 36}{9(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-4(x^2 - 6x + 9)}{9(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-4(x - 3)^2}{9(x - 3)} ; \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} -\frac{4}{9}(x - 3) = -\frac{4}{9}(3 - 3) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(3) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4 - 1}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\overbrace{2x^2 - 12x + 27}^{\uparrow}}{\underbrace{9(x - 3)}_{\downarrow 0^-}} = -\infty. \end{aligned}$$

Como $f'_-(3)$ não existe, então f não é diferenciável em $x = 3$.

b) Seja $y = 10^{1-\sin x}$. Sabendo que $y''(0) = K \cdot (\ln 10)^2$, determine o valor de K .

Seja $u = 1 - \sin x$ e $y = f(u) = 10^u$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ y' &= 10^u \cdot \ln u \cdot (-\cos x) \\ y' &= 10^{1-\sin x} \cdot \ln 10 \cdot (-\cos x) \\ y' &= -\ln 10 \cdot (10^{1-\sin x} \cdot \cos x) \\ y'' &= -\ln 10 [10^{1-\sin x} \cdot \ln 10 \cdot (-\cos x) \cdot \cos x + 10^{1-\sin x} \cdot (-\sin x)] \\ y''(0) &= -\ln 10 [10^{1-\sin 0} \cdot \ln 10 \cdot (-\cos 0) \cdot \cos 0 + 10^{1-\sin 0} \cdot (-\sin 0)] \\ y''(0) &= -\ln 10 [-10 \cdot \ln 10 + 0] \\ y''(0) &= 10 \cdot (\ln 10)^2 = K \cdot (\ln 10)^2\end{aligned}$$

Portanto, $K = 10$.

Questão 2

a) Enuncie e demonstre a regra da derivada do produto de duas funções.

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então a derivada da função $h(x)$ é dada pela soma do produto da derivada da primeira função vezes a segunda com o produto da derivada da segunda função vezes a primeira. Isto é,

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Pela definição de derivada, temos:

$$\begin{aligned}h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x + \Delta x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) - f(x)] \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot [g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x + \Delta x) + f(x) \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

b) Mostre que o gráfico da função $y = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ tem uma tangente horizontal.

Mostrar que o gráfico de uma função $y = f(x)$ tem uma tangente horizontal, é mostrar que existe algum $x \in D(f)$ tal que $f'(x) = 0$.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$.

$$y' = f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - 2x(e^x - 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

Como $(x^2 + 1) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 1) - 2x(e^x - 1) = 0$$

Seja $g(x) = e^x(x^2 + 1) - 2x(e^x - 1)$, onde g é uma função definida pela diferença entre produtos de funções contínuas em $\mathbb{R}$ e, portanto, g é contínua em $\mathbb{R}$.

Sabe-se ainda que $g(0) = 1$ e $g(-1) = \frac{4}{e} - 2$. Se g é contínua em $\mathbb{R}$, então g é contínua no intervalo fechado $[-1, 0]$ e como 0 é um número entre $g(-1)$ e $g(0)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum $x \in (-1, 0)$ tal que $g(x) = 0$.

De tal modo que $g(x) = 0$ em algum $x \in (-1, 0)$ satisfaz a condição de que $f'(x) = 0$ para algum $x \in (-1, 0)$ e, portanto, a função $y = \frac{e^x - 1}{x^2 + 1}$ possui uma tangente horizontal.

Questão 3

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x^2 - (a + b)x + ab}$, $a \neq b$.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{x^2 - (a + b)x + ab} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{(x - a)(x - b)}.$$

* Seja $\theta = x - a$, então $x = \theta + a$. Se $x \rightarrow a$, então $\theta \rightarrow 0$. Ajustando o limite acima, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x - a)}{(x - a)(x - b)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta(\theta + a - b)} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{(\theta + a - b)} \right] \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \times \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\theta + a - b} \\ &= 1 \times \frac{1}{0 + a - b} \\ &= \frac{1}{a - b}, a \neq b \end{aligned}$$

* Limite Fundamental Trigonométrico: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

b) Encontre uma equação da reta tangente ao gráfico da função $y = e^{\operatorname{tg}(\sin x)}$ no ponto $(0, 1)$. Ponto $(0, 1)$ pertence ao gráfico da função!

Seja $u = \sin x$, $v = \operatorname{tg} u$ e $y = f(v) = e^v$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$y' = e^v \cdot \sec^2 u \cdot \cos x$$

$$y' = e^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)} \cdot \sec^2(\operatorname{sen} x) \cdot \cos x$$

No ponto $P(0,1)$, temos:

$$y'(0) = e^{\operatorname{tg}(\operatorname{sen} 0)} \cdot \sec^2(\operatorname{sen} 0) \cdot \cos 0$$

$$y'(0) = e^0 \cdot \sec^2 0 \cdot \cos 0$$

$$y'(0) = 1$$

Equação da reta tangente no ponto $(0,1)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = 1(x - 0)$$

$$y = x + 1$$

Questão 4

a) Determine uma equação da reta normal à curva dada pela equação $x^2y + \operatorname{sen} y = 2\pi$ no ponto $(1, 2\pi)$.

Por inspeção notamos que o ponto $(1, 2\pi)$ pertence a curva dada implicitamente por $x^2y + \operatorname{sen} y = 2\pi$.

Por derivação implícita, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2y) + \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y) = \frac{d}{dx}(2\pi)$$

$$2xy + x^2y' + \cos y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{2xy}{x^2 + \cos y}$$

$$\text{No ponto } (1, 2\pi): y' = -\frac{4\pi}{1+1} = -\frac{4\pi}{2} = -2\pi \therefore m_n = \frac{1}{2\pi}$$

Equação da reta normal:

$$y - 2\pi = \frac{1}{2\pi}(x - 1)$$

$$y = \frac{1}{2\pi}x - \frac{1}{2\pi} + 2\pi \text{ ou } y = \frac{1}{2\pi}x + \frac{4\pi^2 - 1}{2\pi}$$

b) Encontre o ponto do intervalo $[0,1]$ no qual a reta tangente ao gráfico de

$$y = 2^{\operatorname{sen}(\pi x)} + \operatorname{sen}^3(\pi x)$$

é horizontal.

$$y' = 2^{\sin(\pi x)} \cdot \ln 2 \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi + 3 \sin^2(\pi x) \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi$$

$$y' = \pi \cos(\pi x) [2^{\sin(\pi x)} \cdot \ln 2 + 3 \sin^2(\pi x)]$$

O ponto onde a reta tangente é horizontal, o coeficiente angular é nulo. Ou seja, $m = y' = 0$.

$$y' = 0 \Rightarrow \pi \cos(\pi x) [2^{\sin(\pi x)} \cdot \ln 2 + 3 \sin^2(\pi x)] = 0$$

$$\begin{cases} \cos(\pi x) = 0 \\ \text{ou} \\ 2^{\sin(\pi x)} \cdot \ln 2 + 3 \sin^2(\pi x) = 0 \end{cases}$$

* Obs: $2^{\sin(\pi x)} \cdot \ln 2 \geq \frac{1}{2} \ln 2$ e $3 \sin^2(\pi x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$2^{\sin(\pi x)} \cdot \ln 2 + 3 \sin^2(\pi x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, a única solução para $y' = 0$ é $\cos(\pi x) = 0$. Logo,

$$\cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} + k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Considerando o intervalo $[0,1]$ temos $-\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2}$, portanto, $k = 0$. Com isso,

$$x = \frac{1}{2}.$$

$$y = 2^{\sin(\frac{\pi}{2})} + \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2^1 + 1^3 = 2 + 1 = 3$$

Ponto em questão: $P\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

Questão 5. Estude a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & x \leq 1 \\ x^2 - 2x + 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Como f é uma função definida por partes e suas sentenças são funções trigonométricas e polinomial, ambas contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, então f é contínua e diferenciável onde está definida. Isto é, f é contínua e diferenciável em $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Analisando a continuidade e diferenciabilidade em $x = 1$, temos:

$$f(1) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right] = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \times 1 = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x + 3) = 1^2 - 2 \times 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2.$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$, então f é contínua em $x = 1$.

Com a informação supracitada inicialmente, concluímos que f é contínua em todos os reais.

Analisando as derivadas laterais de f em 1, temos:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 3 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2}{x - 1} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1}{x - 1} \end{aligned}$$

* Seja $\theta = x - 1$, então $x = \theta + 1$. Se $x \rightarrow 1^-$, então $\theta \rightarrow 0^-$. Ajustando o limite ...

$$\begin{aligned} 2 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1}{x - 1} &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\theta + \frac{\pi}{2}\right) - 1}{\theta} \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) - 1}{\theta} \\ &= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) - 1}{\theta} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1} \right] \\ &= -2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1} \right] \\ &= -2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\frac{\pi^2}{4}\theta} \right] \\ &= -2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left[\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\frac{\pi^2}{4}\theta^2} \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left[\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\frac{\pi}{2}\theta} \right)^2 \cdot \frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1} \right] \\
&= -2 \left[\lim_{\theta \rightarrow 0^-} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\theta\right)}{\frac{\pi}{2}\theta} \right)^2 \times \lim_{\theta \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\pi^2}{4}\theta}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\theta\right) + 1} \right] \\
&= -2[1^2 \times 0] = 0.
\end{aligned}$$

* *Limite Fundamental Trigonométrico:* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1$.

Como f é contínua em $x = 1$ e $f'_+(1) = f'_-(1)$ então f é diferenciável em $x = 1$ e, com a informação inicial, concluímos que f é contínua e diferenciável em todos os reais.

1.5 3ª Prova – 23 de Setembro de 2016

Questão 1.

a) i. Caso existam, determine as assíntotas horizontais do gráfico da função

$$G(x) = \frac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}.$$

ii. Mostre que $G'(\ln 2) = -\frac{8}{27}$.

b) Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ no intervalo $[-1, 4]$.

Questão 2.

a) Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de $0,01 \text{ cm/min}$. Determine a taxa à qual a área da base varia quando o diâmetro é 30 cm .

b) Mostre que $\frac{d}{dx} \left[\arctg \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right]$ é uma constante, no intervalo $(0, \pi)$.

Questão 3.

a) Um retângulo tem um lado sobre o eixo- x , outro sobre o eixo- y e um dos vértices sobre o gráfico de $y = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$. Use diferenciais para estimar a variação da área do retângulo se sua base variar de 2 m para $2,1 \text{ m}$.

b) Ache $\frac{dy}{dx}$, se $x = \log_4(x + y + 1)$, no ponto em que $x = 1$.

Questão 4.

a) Use derivação logarítmica para mostrar que $f'(0) = -\frac{416}{3^8}$, sendo

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} \cdot (2-x)^5}{(x+3)^7}.$$

b) Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a lei de movimento $s(t) = (t+1)^2 \cdot \log_2(t+1)$, onde s é a distância orientada da partícula ao ponto inicial em t segundos. Ache a velocidade e a aceleração quando $t = 1$ segundo.

Questão 5.

a) Uma função cúbica é um polinômio do grau 3, isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a \neq 0$. Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) críticos.

b) Água está saindo de um tanque em forma de cone invertido a uma taxa de $10.000 \text{ cm}^3/\text{min}$ no momento em que a água está sendo bombeada para dentro a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e seu diâmetro no topo é de 8m. Se o nível da água está subindo a uma taxa de $20 \text{ cm}/\text{min}$ quando a altura era 2m, encontre a taxa com que a água está sendo bombeada para dentro.

Questão 1.

a) i. Caso existam, determine as assíntotas horizontais do gráfico da função

$$G(x) = \frac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x}. \text{ Domínio da função: } D(G) = \mathbb{R}.$$

A reta $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left(\frac{2}{e^x} - 1 - \frac{1}{e^{2x}} \right)}{e^x \left(\frac{2}{e^x} + 1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{e^x} - 1 - \frac{1}{e^{2x}}}{\frac{2}{e^x} + 1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}}} = \\ &= \frac{0 - 1 - 0}{0 + 1 + 0} = \frac{-1}{1} = -1. \quad * \text{ Obs: Se } x \rightarrow +\infty, \text{ então } \frac{2}{e^x} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{1}{e^{2x}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta $y = -1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função $G(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \cosh x}{1 + \cosh x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - e^x - e^{-x}}{2 + e^x + e^{-x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} (2e^x - e^{2x} - 1)}{e^{-x} (2e^x + e^{2x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2e^x - e^{2x} - 1}{2e^x + e^{2x} + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 1} = \\ &= \frac{0 - 0 - 1}{0 + 0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1. \quad * \text{ Obs: Se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } 2e^x \rightarrow 0 \text{ e } e^{2x} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Logo, o gráfico da função $G(x)$ possui apenas uma assíntota horizontal: a reta $y = -1$.

ii. Mostre que $G'(\ln 2) = -\frac{8}{27}$.

$$G'(x) = \frac{-\sinh x (1 + \cosh x) - \sinh x (1 - \cosh x)}{(1 + \cosh x)^2}$$

$$G'(x) = -\frac{2 \sinh x}{(1 + \cosh x)^2}$$

$$G'(\ln 2) = -\frac{2 \sinh(\ln 2)}{(1 + \cosh(\ln 2))^2}$$

$$* \sinh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$* \cosh(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$$

$$G'(\ln 2) = -\frac{2 \times \frac{3}{4}}{\left(1 + \frac{5}{4}\right)^2} = -\frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} = -\frac{3}{2} \times \frac{16}{81} = -\frac{3}{81} \times \frac{16}{2} = -\frac{1}{27} \times 8 = -\frac{8}{27}.$$

b) Determine os valores máximo e mínimo da função $f(x) = x \cdot e^{-\frac{x^2}{8}}$ no intervalo $[-1,4]$.

Como f é uma função definida pelo produto de funções contínuas em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua no intervalo fechado $[-1,4]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Valores de f nos extremos do intervalo:

$$f(-1) = -e^{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{e^{\frac{1}{8}}} \quad ; \quad f(4) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

2. Valores de f nos números críticos:

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe.

$$f'(x) = e^{-\frac{x^2}{8}} - \frac{x^2}{4} e^{-\frac{x^2}{8}} = e^{-\frac{x^2}{8}} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) ; \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

Como f é derivável em $\mathbb{R}$, se f admite número crítico c , então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$ (pelo Teorema de Fermat).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-\frac{x^2}{8}} \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) = 0 ; \text{ com } e^{-\frac{x^2}{8}} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x^2}{4} = 0 \therefore x = \pm 2.$$

* Obs: O número crítico $x = -2$ não pertence ao intervalo fechado $[-1,4]$.

$$f(2) = 2e^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$$

3. Comparando os valores obtidos, concluímos que

• $f(-1) = -\frac{1}{e^{\frac{1}{8}}}$ é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[-1,4]$ e

$f(2) = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}}$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[-1,4]$.

Questão 2.

a) Ao ser aquecida uma chapa circular de metal, seu diâmetro varia à razão de $0,01 \text{ cm/min}$. Determine a taxa à qual a área da base varia quando o diâmetro é 30 cm .

Dado $\frac{dD}{dt} = 0,01 \text{ cm/min}$ determinar $\left. \frac{dA}{dt} \right|_{D=30 \text{ cm}}$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dD} \cdot \frac{dD}{dt}$$

A relação entre a área e o diâmetro é expressa por:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

Logo,

$$\frac{dA}{dD} = \frac{\pi D}{2}$$

Substituindo na expressão inicial, obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{\pi D}{2} \cdot 0,01 \\ \left. \frac{dA}{dt} \right|_{D=30cm} &= \frac{\pi \times 30}{2} \cdot 0,01 \\ \left. \frac{dA}{dt} \right|_{D=30cm} &= 0,15\pi \text{ cm}^2/\text{min}\end{aligned}$$

b) Mostre que $\frac{d}{dx} \left[\arctg \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right]$ é uma constante, no intervalo $(0, \pi)$.

* Considerando o intervalo em questão $(0, \pi)$ temos que $(1 + \cos x) > 0$ e $(1 - \cos x) > 0$ neste intervalo. Logo podemos fazer a seguinte manipulação:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^2 x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

* Obs: $\sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$, como $x \in (0, \pi)$ então $\sin x > 0$ e, portanto, $|\sin x| = \sin x$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[\arctg \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right] &= \frac{d}{dx} \left[\arctg \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \right] \\ \frac{d}{dx} \left[\arctg \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \right] &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right)^2} \times \frac{\sin x \cdot \sin x - \cos x (1 - \cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x + (1 - \cos x)^2} \times \frac{\text{sen}^2 x - \cos x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \\ &= \frac{\text{sen}^2 x + 1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{1 - \cos x} \\ &= \frac{2 - 2 \cos x}{1 - \cos x} \\ &= \frac{2(1 - \cos x)}{2(1 - \cos x)} \\ \frac{d}{dx} \left[\arctg \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \right] &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo, $\frac{d}{dx} \left[\arctg \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} \right] = \frac{d}{dx} \left[\arctg \left(\frac{1 - \cos x}{\sin x} \right) \right]$ é uma constante no intervalo $(0, \pi)$.

Questão 3.

a) Um retângulo tem um lado sobre o eixo $-x$, outro sobre o eixo $-y$ e um dos vértices sobre o gráfico de $y = \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$. Use diferenciais para **estimar a variação da área** do retângulo se sua base variar de 2m para 2,1m.

Área do retângulo em função de x :

$$A = b \times h$$

$$A = x \times y$$

$$A(x) = x \cdot \arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$

Como a variação da base (0,1m) foi pequena comparada ao valor inicial (2m), então podemos dizer que

$$\Delta A \approx dA$$

$$dA = A'(x) \cdot dx$$

$$dA = A'(2) \times 0,1$$

$$A'(x) = \arccos\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{x}{4\sqrt{1 - \left(\frac{x}{4}\right)^2}}$$

$$A'(2) = \arccos\left(\frac{2}{4}\right) - \frac{2}{4\sqrt{1 - \left(\frac{2}{4}\right)^2}}$$

$$A'(2) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$A'(2) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}(\pi - \sqrt{3})$$

$$dA = \frac{1}{3}(\pi - \sqrt{3}) \times 0,1$$

$$dA = \frac{\pi - \sqrt{3}}{30} m^2$$

$$\Delta A \approx dA = \frac{\pi - \sqrt{3}}{30} m^2$$

b) Ache $\frac{dy}{dx}$, se $x = \log_4(x + y + 1)$, no ponto em que $x = 1$.

$$1 = \log_4(1 + y + 1)$$

$$1 = \log_4(2 + y)$$

$$4^1 = 2 + y$$

$$y = 2. \text{ Ponto } P(1,2).$$

Da expressão dada, temos:

$$4^x = x + y + 1$$

$$y = 4^x - x - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = 4^x \cdot \ln 4 - 1; \text{ em } x = 1 \dots \frac{dy}{dx} = 4 \cdot \ln 4 - 1.$$

Outra maneira de resolver, derivando implicitamente:

$$1 = \frac{1}{(x + y + 1) \ln 4} \cdot \left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 1) \ln 4 - 1$$

No ponto $P(1,2)$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2 + 1) \cdot \ln 4 - 1 = 4 \ln 4 - 1$$

Questão 4.

a) Use derivação logarítmica para mostrar que $f'(3) = -\frac{416}{3^8}$, sendo

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} \cdot (2-x)^5}{(x+3)^7} \cdot f(3) = -\frac{2}{6^7} = -\frac{2}{3^7 \cdot 2^7} = -\frac{1}{3^7 \cdot 2^6}$$

$$\ln f(x) = \ln(x+1)^{\frac{1}{2}} + \ln(2-x)^5 - \ln(x+3)^7$$

$$\ln f(x) = \frac{1}{2} \ln(x+1) + 5 \ln(2-x) - 7 \ln(x+3)$$

Por derivação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)} + 5 \cdot \frac{1}{(2-x)} \cdot (-1) - 7 \cdot \frac{1}{(x+3)}$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0+1)} + 5 \cdot \frac{1}{(2-0)} \cdot (-1) - 7 \cdot \frac{1}{(0+3)}$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} - \frac{7}{3}$$

$$f'(0) = f(0) \left[-2 - \frac{7}{3} \right]$$

$$f'(0) = f(0) \left[-\frac{13}{3} \right]$$

$$f'(0) = -\frac{2^5}{3^7} \times \frac{13}{3}$$

$$f'(0) = -\frac{32 \times 13}{3^8} = -\frac{416}{3^8}$$

b) Uma partícula move-se ao longo de uma reta, de acordo com a lei de movimento $s(t) = (t+1)^2 \cdot \log_2(t+1)$, onde s é a distância orientada da partícula ao ponto inicial em t segundos. Ache a velocidade e a aceleração quando $t = 1$ segundo.

Da cinemática temos que a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ são dadas pelas seguintes expressões:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \quad e \quad a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 2(t+1) \cdot \log_2(t+1) + (t+1)^2 \cdot \frac{1}{(t+1) \cdot \ln 2}$$

$$v(t) = 2(t+1) \cdot \log_2(t+1) + \frac{1}{\ln 2} \cdot (t+1)$$

$$v(1) = \left(4 + \frac{2}{\ln 2}\right) m/s$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 2 \log_2(t+1) + 2(t+1) \cdot \frac{1}{(t+1) \cdot \ln 2} + \frac{1}{\ln 2}$$

$$a(t) = 2 \log_2(t+1) + \frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 2}$$

$$a(1) = \left(2 + \frac{3}{\ln 2}\right) m/s^2$$

Questão 5.

a) Uma função cúbica é um polinômio do grau 3, isto é, tem a forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a \neq 0$. Mostre que uma função cúbica pode ter dois, um ou nenhum número(s) críticos.

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe.

Como f é uma função polinomial e portanto contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, se f possui algum número crítico c , então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow 3ax^2 + 2bx + c = 0 \end{aligned}$$

A equação em x acima é do segundo grau e o discriminante desta equação é $\Delta = 4b^2 - 12ac$.

Se $\Delta > 0$, então a equação acima possui 2 raízes reais distintas.

Se $\Delta = 0$, então a equação acima possui 1 raiz real de multiplicidade 2.

Se $\Delta < 0$, então a equação acima não possui raiz real.

Logo, como o número de raízes da equação acima representam a quantidade de números críticos, na ordem, respectivamente, f pode ter dois, um ou nenhum número crítico a depender do discriminante Δ .

b) Água está saindo de um tanque em forma de cone invertido a uma taxa de $10.000 \text{ cm}^3/\text{min}$ no momento em que a água está sendo bombeada para dentro a uma taxa constante. O tanque tem 6m de altura e seu diâmetro no topo é de 8m. Se o nível da água está subindo a uma taxa de $20 \text{ cm}/\text{min}$ quando a altura era 2m, encontre a taxa com que a água está sendo bombeada para dentro.

Considere: V_e = volume de água que está entrando no tanque

V = volume de água que está dentro do tanque

V_s = volume de água que está saindo.

Então ...

$$V_e = V + V_s$$

Derivando a expressão em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{dV_e}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dV_s}{dt}$$

Onde:

$\frac{dV_e}{dt}$ = taxa com a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque.

$\frac{dV}{dt}$ = taxa com a qual a água varia dentro do tanque.

$\frac{dV_s}{dt}$ = taxa com a qual a água está saindo/vazando do tanque. (10.000 cm³/min)

Para determinar a taxa $\frac{dV}{dt}$ temos pela Regra da Cadeia:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

** Obs: devemos compatibilizar as unidades envolvidas no problema com suas respectivas taxas.*

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{600\text{cm}}{h} = \frac{400\text{cm}}{r} \Rightarrow r = \frac{2}{3}h$$

Volume de água no tanque:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot h$$

$$V = \frac{4\pi}{27}h^3$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{4\pi}{9}h^2$$

Quando $h = 2\text{m} = 200\text{cm}$, $\frac{dh}{dt} = 20\text{ cm/min}$. Substituindo as informações na Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{9} (200)^2 \cdot 20$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{32\pi \times 10^5}{9} \text{ cm}^3/\text{min}$$

Logo, a taxa com a qual a água está sendo bombeada para dentro do tanque é:

$$\frac{dV_e}{dt} = \left(\frac{32\pi \times 10^5}{9} + 10.000 \right) \text{ cm}^3/\text{min}$$

1.6 3ª Prova – 24 de Setembro de 2016

Questão 1.

a) Demonstre a identidade: $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

b) Sejam a e b números reais positivos. Determine o valor máximo absoluto da função $f(x) = x^a(1 - x)^b$, no intervalo $[0, 1]$.

Questão 2. Considere um balão meteorológico a ser lançado a 100m de distância de uma câmera de televisão montada no nível do chão. À medida que o balão sobe, aumenta a distância entre a câmera e o balão e o ângulo que a câmera faz com o chão. Se o balão está subindo a uma velocidade de 6 m/s, pergunta-se:

a) Quando o balão estiver a 75m de altura, qual a velocidade com que o balão se afasta da câmera?

b) Decorridos 5 segundos após o lançamento, para filmar a subida do balão, com que velocidade o ângulo de elevação da câmera está aumentando?

Questão 3.

a) Uma maneira de definir $\operatorname{arccossec}(x)$ é dizer

$$y = \operatorname{arccossec}(x) \Leftrightarrow \operatorname{cossec}(y) = x, \text{ com } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Mostre que, com essa definição, $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccossec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$

b) Use aproximação linear para estimar $0,99^{1,01}$.

Questão 4.

a) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e $f(x) = g[5 + \log_2(x^2 + 1)]$. Ache $f'(1)$ sabendo que $g'(6) = 3$.

b) Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função

$$f(x) = \frac{\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Questão 5.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - x \ln x$, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

b) Calcule a derivada da função $f(x) = \log_{10}|\sec x + \operatorname{tg} x|$, no ponto em que $x = 0$. Obs: Restrinja-se ao intervalo $(-\pi, \pi)$.

Questão 1.

a) Demonstre a identidade: $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

$$\begin{aligned}\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^x + \frac{1}{e^x} \right) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \\ \sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^x - \frac{1}{e^x} \right) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \\ \cosh(x + y) &= \frac{e^{2x+2y} + 1}{2e^{x+y}}\end{aligned}$$

* Provando a identidade acima desenvolvendo o segundo membro:

$$\begin{aligned}\cosh x \cdot \cosh y &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(e^{2x+2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1)}{e^x e^y} \\ \sinh x \cdot \sinh y &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(e^{2x+2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1)}{e^x e^y} \\ \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2(e^{2x+2y} + 1)}{e^x e^y} = \frac{e^{2x+2y} + 1}{2e^x e^y} = \cosh(x + y)\end{aligned}$$

* Provando a igualdade desenvolvendo o primeiro membro:

$$\begin{aligned}\cosh(x + y) &= \frac{e^{2x} e^{2y} + 1}{2e^x e^y} \\ &= \frac{4e^x e^y}{2e^{2x} e^{2y} + 2} \\ &= \frac{4e^x e^y}{2e^{2x} e^{2y} + 2 + e^{2x} - e^{2x} + e^{2y} - e^{2y}} \\ &= \frac{4e^x e^y}{(e^{2x} e^{2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1) + (e^{2x} e^{2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1)} \\ &= \frac{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1)}{4e^x e^y} + \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)}{4e^x e^y} \\ &= \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y} + 1}{2e^y} + \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \cdot \frac{e^{2y} - 1}{2e^y} \\ &= \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y\end{aligned}$$

* Obs: esse segundo método foi mostrado apenas por razões didáticas.

b) Sejam a e b números reais positivos. Determine o valor máximo absoluto da função $f(x) = x^a(1 - x)^b$, no intervalo $[0, 1]$. * $D(f) = \mathbb{R}$

f é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[0, 1]$. Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de f no intervalo fechado $[0, 1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo:

$$f(0) = 0 \text{ e } f(1) = 0.$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(0,1)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

Como f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, se f possui algum número crítico c em $(0,1)$ então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^{a-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^{b-1}$$

$$ax^a \cdot x^{-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^b(1-x)^{-1}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{1-x} \Rightarrow x(a+b) = a \therefore x = \frac{a}{a+b} ; \text{com } a > 0 \text{ e } b > 0, \quad \frac{a}{a+b} \in (0,1).$$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b$$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a}{(a+b)^a} \cdot \frac{b^b}{(a+b)^b} = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$$

Comparando os valores obtidos, concluímos que $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[0,1]$.

Questão 2.

Considere um balão meteorológico a ser lançado a 100m de distância de uma câmera de televisão montada no nível do chão. À medida que o balão sobe, aumenta a distância entre a câmera e o balão e o ângulo que a câmera faz com o chão. Se o balão está subindo a uma velocidade de 6 m/s, pergunta – se:

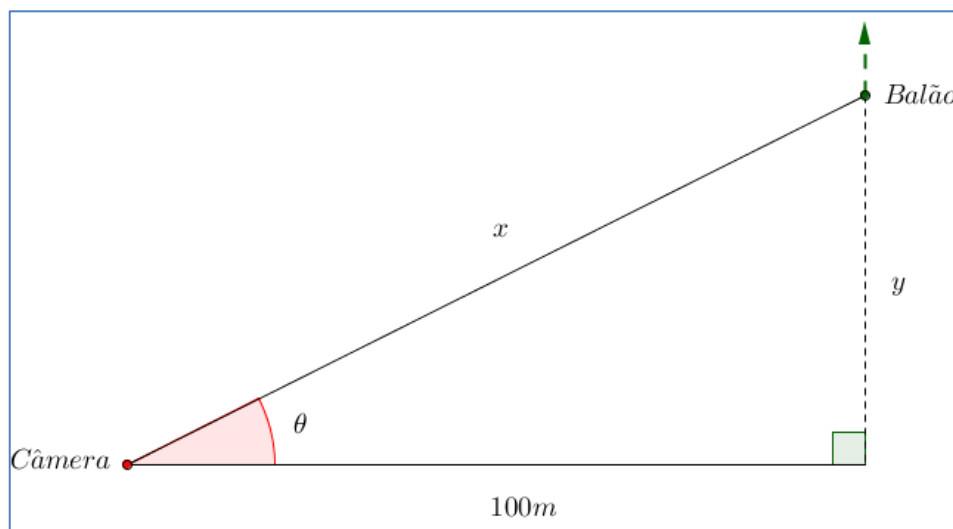


Ilustração do problema!

a) Quando o balão estiver a 75m de altura, qual a velocidade com que o balão se afasta da câmera?

$$x^2 = 100^2 + y^2$$

Quando $y = 75\text{m}$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 &= 100^2 + 75^2 \\ x^2 &= (25 \times 4)^2 + (25 \times 3)^2 \\ x^2 &= 25^2(4^2 + 3^2) \\ x^2 &= 25^2(16 + 9) \\ x^2 &= 25^2 \times 25 \\ x &= 25 \times 5 = 125\text{m} \end{aligned}$$

Derivando implicitamente a expressão que relaciona x e y , temos:

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} = 0 + 2y \cdot \frac{dy}{dt}$$

onde $\frac{dx}{dt}$ é a velocidade com que o balão se afasta da câmera e $\frac{dy}{dt}$ é a velocidade do balão. Logo, quando $x = 125\text{m}$ e $y = 75\text{m}$, temos:

$$\begin{aligned} 2x \cdot \frac{dx}{dt} &= 0 + 2y \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{75}{125} \times 6 \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{3}{5} \times 6 = \frac{18}{5} \text{ m/s ou } 3,6 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b) Decorridos 5 segundos após o lançamento, para filmar a subida do balão, com que velocidade o ângulo de elevação da câmera está aumentando?

$$\text{tg } \theta = \frac{y}{100}$$

$$y = 100 \cdot \text{tg } \theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ 6 &= 100 \cdot \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

Após 5 segundos, temos $y = 30\text{m}$. Logo, $\text{tg } \theta = \frac{3}{10}$.

$$\sec^2 \theta = 1 + \text{tg}^2 \theta = 1 + \frac{9}{100} = \frac{109}{100}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 6 &= 100 \times \frac{109}{100} \cdot \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{6}{109} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Logo, o ângulo de elevação da câmera está aumentando à velocidade de $\frac{6}{109} \text{ rad/s}$.

Questão 3.

a) Uma maneira de definir $\operatorname{arccossec}(x)$ é dizer

$$y = \operatorname{arccossec}(x) \Leftrightarrow \operatorname{cossec}(y) = x, \text{ com } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$$

Mostre que, com essa definição, $\frac{d}{dx}(\operatorname{arccossec}(x)) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Derivando implicitamente a expressão, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\operatorname{cossec}(y)] &= \frac{d}{dx}(x) \\ -\operatorname{cossec} y \cdot \cotg y \cdot \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{cossec} y \cdot \cotg y} \\ \cotg^2 y + 1 &= \operatorname{cossec}^2 y \\ \cotg y &= \pm \sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1}\end{aligned}$$

Como $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, onde $\operatorname{tg} y > 0$, então $\cotg y > 0$. Então,

$$\begin{aligned}\cotg y &= \sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1} \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{\operatorname{cossec} y \sqrt{\operatorname{cossec}^2 y - 1}}\end{aligned}$$

Como $\operatorname{cossec} y = x$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[\operatorname{arccossec}(x)] = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

b) Use aproximação linear para estimar $0,99^{1,01}$.

Seja a função base $f(x) = (1-x)^{1+x}$, onde $f(0) = 1$ e queremos estimar o valor de f em $x = 0,01$.

Por aproximação linear, temos a Linearização de f em 0 dada pela expressão:

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x-0)$$

$$\ln f(x) = (1+x) \cdot \ln(1-x)$$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln(1-x) - \frac{1+x}{1-x} \\ f'(x) &= f(x) \left[\ln(1-x) - \frac{1+x}{1-x} \right] \\ f'(0) &= f(0)[\ln 1 - 1]\end{aligned}$$

$$f'(0) = -1.$$

$$L(x) = 1 - x$$

Por aproximação linear podemos estimar que

$$f(0,01) \approx L(0,01) = 1 - 0,01 = 0,99$$

Questão 4.

a) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e $f(x) = g[5 + \log_2(x^2 + 1)]$. Ache $f'(1)$ sabendo que $g'(6) = 3$.

Derivando a função f pela regra da cadeia, obtemos:

$$f'(x) = g'[5 + \log_2(x^2 + 1)] \cdot \frac{d}{dx}[5 + \log_2(x^2 + 1)]$$

$$f'(x) = g'[5 + \log_2(x^2 + 1)] \cdot \frac{1}{(x^2 + 1) \ln 2} \cdot (2x)$$

$$f'(1) = g'[5 + \log_2 2] \cdot \frac{1}{2 \ln 2} \cdot 2$$

$$f'(1) = g'(6) \cdot \frac{1}{\ln 2}$$

$$f'(1) = \frac{3}{\ln 2}$$

b) Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função

$$f(x) = \frac{\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2} \cdot D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}; * f(x) \geq 0$$

$$\ln f(x) = \ln \left[\frac{\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2} \right]$$

$$\ln f(x) = \ln(\sec x)^2 + \ln(\operatorname{tg} x)^4 - \ln(x^2 + 1)^2$$

$$\ln f(x) = 2 \ln(\sec x) + 4 \ln(\operatorname{tg} x) - 2 \ln(x^2 + 1)$$

Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \cdot \frac{1}{\sec x} \cdot \sec x \cdot \operatorname{tg} x + 4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x - 2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot (2x)$$

$$f'(x) = f(x) \left[2 \operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right]$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2} \left[2 \operatorname{tg} x + \frac{4}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right]$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{\sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^4 x}{(x^2 + 1)^2} \left[\operatorname{tg} x + \frac{2}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \frac{2x}{x^2 + 1} \right]$$

Questão 5.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - x \ln x$, no intervalo $\left[\frac{1}{2}, e\right]$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

Como f é contínua onde está definida, ou seja, em $x \in (0, \infty)$, então f é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset D(f)$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Valores de f nos extremos do intervalo:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(1 - \ln \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} (1 + \ln 2) ; \ln 2 < \ln e = 1 \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) < 1.$$

$$f(e) = e - e \cdot \ln e = e - e = 0.$$

2. Valores de f nos números críticos de f em $\left(\frac{1}{2}, e\right)$

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe.

$$f'(x) = 1 - \ln x - 1$$

$$f'(x) = -\ln x$$

$f'(x)$ não existe em $x = 0$, porém $0 \notin D(f)$

$$f'(x) = 0 \text{ em } x = 1 \text{ e } 1 \in D(f) \text{ e } 1 \in \left(\frac{1}{2}, e\right)$$

Logo, 1 é o número crítico de f em $\left(\frac{1}{2}, e\right)$.

$$f(1) = 1 - 1 \cdot \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

3. Comparando os valores obtidos, concluímos que 1 é o valor máximo absoluto e 0 é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $\left[\frac{1}{2}, e\right]$.

b) Calcule a derivada da função $f(x) = \log_{10} |\sec x + \operatorname{tg} x|$, no ponto em que $x = 0$. Obs: Restrinja – se ao intervalo $(-\pi, \pi)$.

Vamos nos ater ao subintervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ para analisar a expressão $(\sec x + \operatorname{tg} x)$.

Podemos fazer isso porque ao definirmos um intervalo onde f é contínua e que contem o 0 podemos diminuir o trabalho em analisar todo o intervalo $(-\pi, \pi)$ analisando apenas o intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\sec x + \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Em $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, $\operatorname{sen} x > -1$ e $\cos x > 0$. Portanto, $(\sec x + \operatorname{tg} x) > 0$ em $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

Em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{sen} x \geq 0$ e $\cos x > 0$. Portanto, $(\sec x + \operatorname{tg} x) > 0$ em $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Concluimos com essa análise que $(\sec x + \operatorname{tg} x) > 0$ em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Logo,

$$f(x) = \log_{10}(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{(\sec x + \operatorname{tg} x) \cdot \ln 10} (\sec x \cdot \operatorname{tg} x + \sec^2 x)$$

$$f'(x) = \frac{\sec x (\sec x + \operatorname{tg} x)}{(\sec x + \operatorname{tg} x) \cdot \ln 10}$$

$$f'(x) = \frac{\sec x}{\ln 10}$$

$$f'(0) = \frac{\sec 0}{\ln 10}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\ln 10}.$$

1.7 4ª Prova – 21 de Outubro de 2016

Questão 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, tendo $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

e $f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$ apontando:

- a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.
- b) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.
- c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.

Questão 2.

a) Ache $f(x)$, sabendo que $f'(x) = 2xe^{x^2+1} + \frac{2+x^2}{1+x^2}$.

b) Determine os intervalos de concavidade e pontos de inflexão da curva

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x+1}}.$$

Questão 3. Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900 m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000 m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R\$5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R\$4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?

Questão 4. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$.

Questão 5.

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que se uma função f possui derivada negativa em todo o intervalo (a, b) , então ela é decrescente nesse intervalo.

b) Mostre que a função $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 5x + \operatorname{tg} x$ não pode ter mais do que uma raiz real.

Questão 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, tendo

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

apontando:

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

Domínio da função f : $D(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$

Assíntotas Verticais: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da curva $y = f(x)$ se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

* Por esta definição, concluímos que **estas assíntotas ocorrem nos pontos de descontinuidade da função**. Logo, verificamos se as retas $x = 0$ e $x = 1$ são assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \times 0 = 0.$$

* Logo, a reta $x = 0$ não é assíntota vertical ao gráfico da função f .

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} ; \quad * \text{ se } x \rightarrow 1^+, \text{ então } x > 1 \therefore \ln x > 0. \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overset{1}{\uparrow} \overset{\widehat{x}}{\underbrace{x}}}{\underset{\downarrow}{\ln x}} = +\infty$$

* Logo, a reta $x = 1$ é assíntota vertical ao gráfico da função f .

Assíntotas Horizontais: a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da curva $y = f(x)$ se, somente se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

* Obs.: Como $D(f) = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$, só calculamos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

* Logo, não há assíntotas horizontais ao gráfico da função f .

b) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} ; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Analisando o sinal de $f'(x)$, obtemos:

$$\begin{array}{l} (0) \text{ --- (e) + + + + + } \\ (0) \text{ + + + (1) + + + + + } \\ (0) \text{ --- (1) --- (e) + + + + + } \end{array} \quad \begin{array}{l} (\ln x - 1) \\ (\ln x)^2 \\ f'(x) \end{array}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $x \in (e, +\infty)$ e $f'(x) < 0$ quando $x \in (0, 1) \cup (1, e)$, f é crescente em $(e, +\infty)$ e f é decrescente em $(0, 1)$ e $(1, e)$.

O único número crítico é $x = e$. Uma vez que f' muda de negativa para positiva em e , $f(e) = e$ é um mínimo local pelo Teste da Primeira Derivada.

b) Determine os intervalos de concavidade e pontos de inflexão da curva

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x+1}}. \text{ * Domínio da função } f: D(f) = \mathbb{R}.$$

$$f(x) = (1 + e^{-x+1})^{-1}$$

$$f'(x) = -(1 + e^{-x+1})^{-2} \cdot (-e^{-x+1})$$

$$f'(x) = \frac{e^{-x+1}}{(1 + e^{-x+1})^2}$$

$$f''(x) = \frac{-e^{-x+1}(1 + e^{-x+1})^2 - e^{-x+1}[2 \cdot (1 + e^{-x+1}) \cdot (-e^{-x+1})]}{(1 + e^{-x+1})^4}$$

$$f''(x) = -\frac{e^{-x+1}(1 + e^{-x+1})[1 + e^{-x+1} - 2e^{-x+1}]}{(1 + e^{-x+1})^4}$$

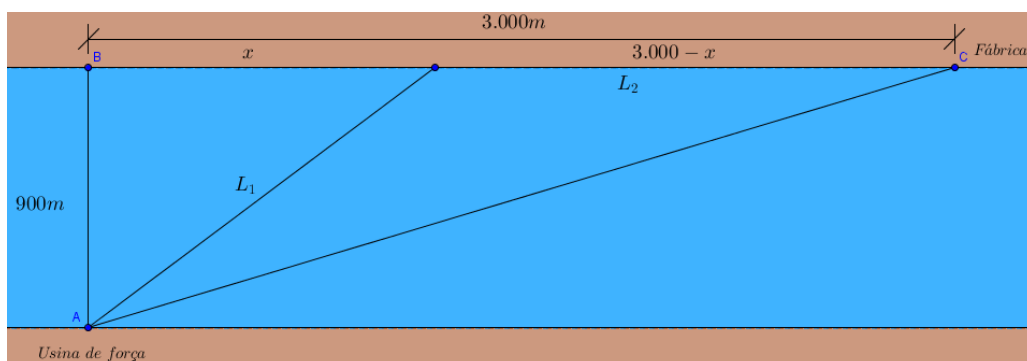
$$f''(x) = -\frac{e^{-x+1}(1 - e^{-x+1})}{(1 + e^{-x+1})^3}$$

Analisando o sinal de $f''(x)$, obtemos:

-----	(-e ^{-x+1})
----- (1) + + + + +	(1 - e ^{-x+1})
+ +	(1 + e ^{-x+1}) ³
+ + + + + + + + (1) -----	f''(x)

Como $f''(x) > 0$ quando $x < 1$ e $f''(x) < 0$ quando $x > 1$, f possui concavidade voltada para cima em $(-\infty, 1)$ e concavidade voltada para baixo em $(1, +\infty)$. Como ocorre mudança de direção da concavidade em $x = 1$ e $1 \in D(f)$, então $(1, \frac{1}{2})$ é ponto de inflexão da função $f(x)$.

Questão 3. Pretende-se estender um cabo de uma usina de força à margem de um rio de 900m de largura até uma fábrica situada do outro lado do rio, 3.000m rio abaixo. O custo para estender um cabo pelo rio é de R\$5,00 o metro, enquanto que para estendê-lo por terra custa R\$4,00 o metro. Qual é o percurso mais econômico para o cabo?



$$C(x) = 5L_1 + 4L_2$$

$$C(x) = 5\sqrt{x^2 + 900^2} + 4(3000 - x); \quad x \in [0, 3000m]$$

$$C'(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 900^2}} - 4$$

$$C'(x) = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 900^2}}{\sqrt{x^2 + 900^2}}; x \in (0, 3000)$$

Como a função custo $C(x)$ é contínua no intervalo fechado $[0, 3000]$, pelo Teorema do Valor Extremo a função C admite um valor máximo absoluto $C(c)$ e um valor mínimo absoluto $C(d)$ em algum número c e d em $[0, 3000]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de C nos extremos do intervalo:

$$C(0) = 5 \times 900 + 4 \times 3.000 = 4.500 + 12.000 = R\$16.500,00$$

$$C(3000) = 5 \times \sqrt{3000^2 + 900^2} = 5 \times \sqrt{100^2(981)} = 500\sqrt{9 \times 109} \cong R\$15.600,00$$

2. Os valores de C nos números críticos de C em $(0, 3000)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x - 4\sqrt{x^2 + 900^2} = 0$$

$$\begin{aligned} 5x &= 4\sqrt{x^2 + 900^2} \\ 25x^2 &= 16x^2 + 16 \times 900^2 \\ 9x^2 &= 16 \times 900^2 \\ 3x &= 4 \times 900 \\ x &= 1.200m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(1200) &= 5 \times \sqrt{1200^2 + 900^2} + 4 \times (3000 - 1200) \\ &= 5 \times \sqrt{100^2(144 + 81)} + 4 \times 1800 \\ &= 5 \times 100 \times \sqrt{225} + 7200 \end{aligned}$$

$$C(1200) = 7500 + 7200 = R\$14.700,00$$

3. Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluímos que o percurso mais econômico é estender o cabo da usina a um ponto situado a 1200m rio abaixo na margem oposta e seguir 1800m por terra até a fábrica.

Questão 4. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$;

Diferença indeterminada: " $\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln e^x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{e^x}{x} \right) = \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \right];$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$.

Potência indeterminada: " 0^0 "

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\sin x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}}; \text{Quociente indeterminado } \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{(\sin x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\sin x)^{-2} \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin^2 x}{x \cdot \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{x} \cdot \operatorname{tg} x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\operatorname{tg} x) = 1 \times 0 = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\sin x}} = e^0 = 1.$$

Questão 5

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que se uma função f possui derivada negativa em todo o intervalo (a, b) , então ela é decrescente nesse intervalo.

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo (a, b) com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função decrescente, temos de mostrar que $f(x_2) < f(x_1)$.

Como nos foi dado que $f'(x) < 0$ em (a, b) , sabemos que f é derivável em (x_1, x_2) . Portanto, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

Agora $f'(c) < 0$, por hipótese, e $x_2 - x_1 > 0$, pois $x_1 < x_2$. Assim, o lado direito da equação é negativo e, portanto,

$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ ou } f(x_2) < f(x_1)$$

Isso mostra que f está diminuindo e, portanto, f é decrescente em (a, b) .

b) Mostre que a função $f(x) = 2x^5 + 4x^3 + 5x + \operatorname{tg} x$ não pode ter mais do que uma raiz real.

Domínio da função f : $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$.

A função f é definida como a soma de funções polinomiais e trigonométrica e, portanto, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio. Portanto, f é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset D(f)$.

$$f'(x) = 10x^4 + 12x^2 + 5 + \sec^2 x ; D(f') = D(f)$$

Vamos assumir que $I = [a, b]$ um intervalo fechado, tal que $f(a) = f(b) = 0$. Então f satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
2. f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$

Então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Entretanto, $f'(x) = 10x^4 + 12x^2 + 5 + \sec^2 x \geq 6, \forall x \in D(f)$ e, portanto, não existe número real c tal que $f'(c) = 0$.

Logo, por contradição, f não pode ter mais do que uma raiz real.

1.8 4ª Prova – 22 de Outubro de 2016

Questão 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$, tendo $f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2}$ e $f''(x) = \frac{48(16 + 3x^2)}{(x^2 - 16)^3}$ apontando:

- a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.
- b) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.
- c) Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.

Questão 2.

- a) Encontre os valores extremos da função $y = f(x)$ no intervalo $[0, 2]$, sabendo que $f''(x) = 6x + 2$, $f(0) = -3$ e $f(2) = 7$.
- b) Prove que $e^x \geq 1 + x$ se $x \geq 0$.

Questão 3. Encontre a altura, o raio e o volume do cone circular reto de maior volume, cuja geratriz mede $\sqrt{3}m$.

Questão 4. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cotg x)^{\sen x}$;

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$.

Questão 5.

- a) Mostre que um polinômio de grau 3 não pode ter mais de 3 raízes reais.
- b) Mostre que $\arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}$.

Questão 1. Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16}$, tendo

$$f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2} \quad \text{e} \quad f''(x) = \frac{48(16 + 3x^2)}{(x^2 - 16)^3}$$

apontando:

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

Domínio da função f : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ e } x \neq -4\}$

Assíntotas Verticais: A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da curva $y = f(x)$ se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

* Por esta definição, concluímos que **estas assíntotas ocorrem nos pontos de descontinuidade da função**. Logo, verificamos se as retas $x = 4$ e $x = -4$ são assíntotas verticais.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{\overbrace{2x^2 - 8}^{24}}{\underbrace{x^2 - 16}_{0^+}} = +\infty.$$

* Logo, a reta $x = 4$ é assíntota vertical ao gráfico da função f .

$$\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{\overbrace{2x^2 - 8}^{24}}{\underbrace{x^2 - 16}_{0^-}} = -\infty$$

* Logo, a reta $x = -4$ é assíntota vertical ao gráfico da função f .

Assíntotas Horizontais: a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da curva $y = f(x)$ se, somente se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 16} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 = 2.$$

* Logo, a reta $y = 2$ é assíntota horizontal ao gráfico da função f .

b) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.

$$f'(x) = -\frac{48x}{(x^2 - 16)^2} ; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4 \text{ e } x \neq -4\}$$

Analisando o sinal de $f'(x)$, obtemos:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} + & + & + & + & + & + & + & + & (0) & - & - & - & - & - & - & - & (-48x) \\ + & + & + & (-4) & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & (x^2 - 16)^2 \\ + & + & + & (-4) & + & + & + & (0) & - & - & - & (4) & - & - & - & - & f'(x) \end{array}$$

Como $f'(x) > 0$ quando $x < 0$ ($x \neq -4$) e $f'(x) < 0$ quando $x > 0$ ($x \neq 4$), f é crescente em $(-\infty, -4)$ e $(-4, 0)$ e f é decrescente em $(0, 4)$ e $(4, +\infty)$.

O único número crítico é $x = 0$. Uma vez que f' muda de positiva para negativa em 0 , $f(0) = 1/2$ é um máximo local pelo Teste da Primeira Derivada.

Sabendo que $f(2) = 7$, temos:

$$f(2) = 8 + 4 + 2C - 3 = 7 \therefore C = -1$$

Logo, $f(x) = x^3 + x^2 - x - 3$.

Como f é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$ então f é contínua no intervalo fechado $[0,2]$ e pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[0,2]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo:

$$f(0) = -3 \text{ e } f(2) = 7$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(0,2)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, se f possui um máximo ou mínimo local c , então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$. Logo,

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0 ; x \in (0,2)$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{6} \therefore x = \frac{1}{3} ; -1 \notin (0,2)$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 3 = \frac{1 + 3 - 9 - 81}{27} = -\frac{86}{27}$$

3. Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluímos que

$-\frac{86}{27}$ é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[0,2]$ e 7 é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[0,2]$.

b) Prove que $e^x \geq 1 + x$ se $x \geq 0$.

Seja $f(x) = e^x - 1 - x$.

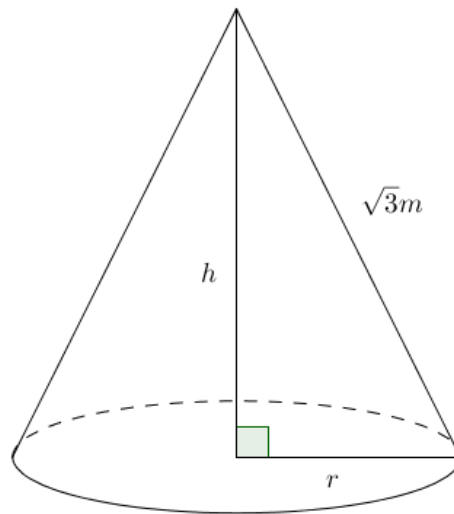
A função f é definida pela diferença entre funções contínuas e deriváveis em $\mathbb{R}$ e, portanto f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo,

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \text{ se } x \geq 0.$$

Logo, f é crescente em $(0, +\infty)$. Isso implica dizer que para todo $x \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(0) \\ e^x - 1 - x &\geq e^0 - 1 - 0 \\ e^x - 1 - x &\geq 0 \\ e^x &\geq 1 + x \text{ se } x \geq 0. \end{aligned}$$

Questão 3. Encontre a altura, o raio e o volume do cone circular reto de maior volume, cuja geratriz mede $\sqrt{3}m$.



$$\begin{aligned}(\sqrt{3})^2 &= h^2 + r^2 \\ 3 &= h^2 + r^2 \\ r^2 &= 3 - h^2 \quad ; h \in (0, \sqrt{3})\end{aligned}$$

Volume do cone:

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V(h) &= \frac{1}{3}\pi(3h - h^3)\end{aligned}$$

V é uma função polinomial em h e, portanto, contínua no intervalo fechado $[0, \sqrt{3}]$. Logo, pelo Teorema do Valor Extremo V assume um valor máximo absoluto $V(c)$ e um valor mínimo absoluto $V(d)$ em algum número c e d em $[0, \sqrt{3}]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de V nos extremos do intervalo:

$$V(0) = V(\sqrt{3}) = 0 \text{ (não existe cone!)}$$

2. Os valores de V nos números críticos de V no intervalo $(0, \sqrt{3})$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

Como V é derivável em $\mathbb{R}$ e, portanto, derivável em $(0, \sqrt{3})$, pelo Teorema de Fermat, se V assume um valor máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

$$\begin{aligned}V'(h) &= \frac{1}{3}\pi(3 - 3h^2) ; V'(h) = 0 \Leftrightarrow 3 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 1 \therefore h = 1m. \\ V(1) &= \frac{2\pi}{3}m^3\end{aligned}$$

3. Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluímos que o cone circular reto de maior volume cuja geratriz mede $\sqrt{3}m$, tem dimensões

$$h = 1m, r = \sqrt{2}m \text{ e volume } V = \frac{2\pi}{3}m^3.$$

Questão 4. Calcule os limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cotg x)^{\sen x}$;

* De antemão, se $x \rightarrow 0^-$, então $\cotg x < 0$ e, portanto $(\cotg x)^{\sen x}$ não está definida. Logo, $\lim_{x \rightarrow 0^-} (\cotg x)^{\sen x}$ não existe!.

Entretanto, se $x \rightarrow 0^+$, então $\cotg x > 0$ e, portanto $(\cotg x)^{\sen x}$ está definida. Neste caso, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sen x} ; \text{Potência indeterminada } "0^0"$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sen x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cotg x)^{\sen x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sen x \cdot \ln(\cotg x)} ;$$

$$\begin{aligned} * \lim_{x \rightarrow 0^+} \sen x \cdot \ln(\cotg x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cotg x)}{\cossec x} \xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{\cossec^2 x}{\cotg x}}{-\cossec x \cdot \cotg x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cossec x}{\cotg^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sen^2 x}{\sen x \cdot \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sen x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cotg x)^{\sen x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(\cotg x)^{\sen x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sen x \cdot \ln(\cotg x)} = e^0 = 1$$

Por definição como um dos limites laterais em 0 não existe, podemos dizer que $\lim_{x \rightarrow 0} (\cotg x)^{\sen x}$ não existe!

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right]$;

Diferença indeterminada " $\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)} \right] ; \text{Quociente indeterminado } "0/0"$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x) - x}{x \cdot \ln(1+x)} \right] &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-x}{1+x}}{\frac{(1+x) \cdot \ln(1+x) + x}{1+x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{(1+x) \cdot \ln(1+x) + x} &\xrightarrow{L'H} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\ln(1+x) + 1 + 1} = \frac{-1}{0 + 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] = -\frac{1}{2}$$

Questão 5

a) Mostre que um polinômio de grau 3 não pode ter mais de 3 raízes reais.

Seja $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, um polinômio de grau 3 com $a \neq 0$.

Suponhamos que f possui 4 raízes reais x_1, x_2, x_3 e x_4 , tais que

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4) = 0$$

Como f é uma função polinomial e, portanto contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, então f satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua nos intervalos fechado $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ e $[x_3, x_4]$
2. f é derivável nos intervalos abertos (x_1, x_2) , (x_2, x_3) e (x_3, x_4)
3. $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$.

Então, pelo Teorema de Rolle existem $x_5 \in (x_1, x_2)$, $x_6 \in (x_2, x_3)$ e $x_7 \in (x_3, x_4)$ tais que

$$f'(x_5) = f'(x_6) = f'(x_7) = 0$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Como f' é uma função polinomial de grau 2 e, portanto, apresenta no máximo 2 raízes reais distintas, então nossa suposição está errada!

Portanto, por contradição, f não pode ter mais do que 3 raízes reais. Logo, f possui, no máximo, 3 raízes reais distintas.

b) Mostre que $\arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}$.

Seja $f(x) = \arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x$.

Domínio da função f : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq -1\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left[\frac{x+1 - (x-1)}{(x+1)^2} \right] - \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2 + 2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} \\ f'(x) &= 0, \forall x \in D(f). \end{aligned}$$

Teorema: Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b) , então f é constante em (a, b) . Ou seja, $f(x) = C$.

Com isso, concluímos que f é constante nos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ e $(0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} C_1, & \text{se } x < -1 \\ C_2, & \text{se } -1 < x < 0 \\ C_3, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Para $x = 1$, temos $f(x) = C_3$. Logo,

$$f(1) = \arctg 0 + \operatorname{arccotg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \therefore C_3 = \frac{\pi}{4}$$

Assim,

$$\arctg\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}, \text{ se } x > 0$$

Como torna

– se complicado procurar valores conhecidos nos demais intervalos uma forma de determinar as constantes C_1 e C_2 é calculando os limites laterais da função f . Para isso,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \operatorname{arccotg} x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \lim_{x \rightarrow -1^-} \operatorname{arccotg} x\end{aligned}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -1^-} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = \frac{\pi}{2} \quad e \quad * \lim_{x \rightarrow -1^-} \operatorname{arccotg} x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Portanto, } C_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Assim,

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}, \text{ se } x > 0 \text{ ou } x < -1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \operatorname{arccotg} x \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arccotg} x\end{aligned}$$

$$* \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) = -\frac{\pi}{2} \quad e \quad * \lim_{x \rightarrow -1^+} \operatorname{arccotg} x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}.$$

$$\text{Portanto, } C_2 = -\frac{3\pi}{4}.$$

Assim,

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \operatorname{arccotg} x = -\frac{3\pi}{4}, \text{ se } -1 < x < 0$$

Com isso, temos que a identidade

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{4}$$

é válida para todo $x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

1.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 27 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) Suponha que f e g sejam funções deriváveis e considere a função $h(x) = (f \circ g)(x)$. Determine a equação da reta normal ao gráfico de h no ponto em que $x = 1$, sabendo que os pontos $(1, -2)$ e $(1, 1)$ pertencem aos gráficos de f e g , respectivamente, e que as inclinações das retas tangentes a esses gráficos nesses pontos são respectivamente iguais a 2 e -1 .

b) Estude a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x), & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2|x - 5|, & \pi \leq x < 6 \end{cases}$$

Questão 2.

a) Encontre as equações das retas tangentes em cada um dos 4 pontos da curva

$$(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 2(x^2 + y^2)$$

onde $x = 1$.

b) Determine se a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

Questão 3.

a) Encontre os pontos da curva $y = e^{\sin x \cdot \cos x}$ onde a reta tangente é horizontal.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2 + x}}$.

Questão 4. Encontre os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x - p}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$.

Questão 5.

a) Mostre que existe um número positivo tal que seu logaritmo natural é igual ao seu seno.

b) Dada a função $f(x) = \sec\left(\frac{\pi^x}{4}\right)$, determine $f'(1)$.

Questão 1.

a) Suponha que f e g sejam funções deriváveis e considere a função $h(x) = (f \circ g)(x)$. Determine a equação da reta normal ao gráfico de h no ponto em que $x = 1$, sabendo que os pontos $(1, -2)$ e $(1, 1)$ pertencem aos gráficos de f e g , respectivamente, e que as inclinações das retas tangentes a esses gráficos nesses pontos são respectivamente iguais a 2 e -1 .

Do enunciado temos as seguintes informações:

$$f(1) = -2, g(1) = 1, f'(1) = 2 \text{ e } g'(1) = -1$$

Ponto de abscissa $x = 1$:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(g(x)) \\ h(1) &= f(g(1)) = f(1) = -2 \therefore \text{ponto } (1, -2) \end{aligned}$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

No ponto de abscissa $x = 1$, temos:

$$h'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) = f'(1) \cdot g'(1) = 2 \times (-1) = -2$$

Logo, o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de h no ponto $(1, -2)$ é:

$$m_n = -\frac{1}{h'(1)} = \frac{1}{2}$$

Equação da reta normal:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m_n(x - x_0) \\ y + 2 &= \frac{1}{2}(x - 1) \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) Estude a diferenciabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \sin(3x), & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ 2|x - 5|, & \pi \leq x < 6 \end{cases}$$

f é uma função definida por partes onde $\sin(3x)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua em $(\pi/2, \pi)$ e $2|x - 5|$ também é contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua em $(\pi, 6)$.

Analisando a continuidade de f em π , temos:

$$\begin{aligned} f(\pi) &= 2|\pi - 5| = 2(5 - \pi) = 10 - 2\pi. \\ \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(3x) = 0. \end{aligned}$$

Logo, como $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) \neq f(\pi)$, então f não é contínua em π e, conseqüentemente, f não é diferenciável em π .

Como a função $\sin(3x)$ é contínua e derivável em $\mathbb{R}$, então f é derivável em $(\pi/2, \pi)$.
Com relação à função $2|x - 5|$, temos:

$$2|x - 5| = \begin{cases} 2(x - 5), & 5 \leq x < 6 \\ -2(x - 5), & \pi \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Analisando a diferenciabilidade de f em 5, temos:

$$f'_+(5) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2(x - 5) - 0}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2(x - 5)}{(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5^+} 2 = 2.$$

$$f'_-(5) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{-2(x - 5) - 0}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5^-} -\frac{2(x - 5)}{(x - 5)} = \lim_{x \rightarrow 5^-} -2 = -2.$$

Como $f'_+(5) \neq f'_-(5)$, então f não é derivável em 5.

Logo, f é diferenciável em $(\pi/2, \pi) \cup (\pi, 5) \cup (5, 6)$.

Questão 2.

a) Encontre as equações das retas tangentes em cada um dos 4 pontos da curva
 $(x^2 + y^2 - 4x)^2 = 2(x^2 + y^2)$

onde $x = 1$.

$$(1 + y^2 - 4)^2 = 2(1 + y^2)$$

$$(y^2 - 3)^2 = 2 + 2y^2$$

$$y^4 - 6y^2 + 9 = 2 + 2y^2$$

$$y^4 - 8y^2 + 7 = 0$$

Equação biquadrática em $a = y^2$.

$$a^2 - 8a + 7 = 0$$

$$\Delta = 64 - 28 = 36$$

$$a = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$$a_1 = 7 \text{ e } a_2 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{7} \text{ e } y = \pm 1.$$

Os 4 pontos em questão são $A(1, -\sqrt{7})$, $B(1, \sqrt{7})$, $C(1, -1)$ e $D(1, 1)$.

Derivando implicitamente a expressão da curva temos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 4x)^2 &= \frac{d}{dx}[2(x^2 + y^2)] \\ 2(x^2 + y^2 - 4x)(2x + 2yy' - 4) &= 2(2x + 2yy') \end{aligned}$$

Nos pontos onde $x = 1$, temos:

$$2(1 + y^2 - 4)(2 + 2yy' - 4) = 2(2 + 2yy')$$

$$(y^2 - 3)(2yy' - 2) = (2yy' + 2)$$

$$(y^2 - 3)(yy' - 1) = (yy' + 1)$$

$$yy'(y^2 - 3) - (y^2 - 3) = yy' + 1$$

$$y'[y(y^2 - 3) - y] = 1 + y^2 - 3$$

$$y' = \frac{y^2 - 2}{y(y^2 - 4)}$$

$$y'_A = \frac{7 - 2}{-\sqrt{7}(7 - 4)} = -\frac{5}{3\sqrt{7}} = -\frac{5\sqrt{7}}{21}$$

Equação da reta tangente em $A(1, -\sqrt{7})$:

$$\begin{aligned} y + \sqrt{7} &= -\frac{5\sqrt{7}}{21}(x - 1) \\ y &= -\frac{5\sqrt{7}}{21}x - \frac{16\sqrt{7}}{21} \end{aligned}$$

$$y'_B = \frac{7 - 2}{\sqrt{7}(7 - 4)} = \frac{5}{3\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{21}.$$

Equação da reta tangente em $B(1, \sqrt{7})$:

$$\begin{aligned} y - \sqrt{7} &= \frac{5\sqrt{7}}{21}(x - 1) \\ y &= \frac{5\sqrt{7}}{21}x + \frac{16\sqrt{7}}{21} \end{aligned}$$

$$y'_C = \frac{1 - 2}{-1(1 - 4)} = -\frac{1}{3}.$$

Equação da reta tangente em $C(1, -1)$:

$$\begin{aligned} y + 1 &= -\frac{1}{3}(x - 1) \\ y &= -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$y'_D = \frac{1 - 2}{1(1 - 4)} = \frac{1}{3}.$$

Equação da reta tangente em $D(1, 1)$:

$$\begin{aligned} y - 1 &= \frac{1}{3}(x - 1) \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

b) Determine se a função

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{2} \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dizemos que uma função f é contínua no número a se, somente se,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Analisando a continuidade de f em 0, temos:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2} \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right);$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$ temos

$$-1 \leq \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq 1$$

Como $x^4/2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, então ...

$$-\frac{x^4}{2} \leq \frac{x^4}{2} \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{x^4}{2}$$

Seja $g(x) = -\frac{x^4}{2}$, $f(x) = \frac{x^4}{2} \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right)$, $h(x) = \frac{x^4}{2}$.

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x (exceto possivelmente em 0) e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$, pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{2} \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right) = 0.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ e, portanto, f é contínua em 0.

Questão 3.

a) Encontre os pontos da curva $y = e^{\sin x \cdot \cos x}$ onde a reta tangente é horizontal.
 $D(y) = \mathbb{R}$

$$y' = e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$y' = e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot \cos(2x)$$

Onde a reta tangente é horizontal, temos $y' = 0$. Portanto,

$$y' = 0 \Rightarrow e^{\sin x \cdot \cos x} \cdot \cos(2x) = 0; \quad e^{\sin x \cdot \cos x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(2x) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$y = e^{\sin x \cdot \cos x} = e^{\frac{1}{2} \sin(2x)}.$$

$$\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \begin{cases} 1, & k = \pm 2n, \quad n \in \mathbb{N} \\ -1, & k = \pm(2n+1), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Os pontos são da forma $\left(\frac{\pi}{4} \pm n\pi, \sqrt{e}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{(2n+1)}{2}\pi, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2+x}}.$

$\forall x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, temos:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos \frac{\pi}{x^2+x} \leq 1 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{-1} &\geq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2+x}} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^1 \\ \frac{1}{\sqrt{e}} &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2+x}} \leq \sqrt{e} \end{aligned}$$

Se $x \rightarrow 0^-$ então $x < 0$ e, portanto, $\sqrt{-x}$ está definido e $\sqrt{-x} > 0$. Logo,

$$\sqrt{-x} \frac{1}{\sqrt{e}} \leq \sqrt{-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2+x}} \leq \sqrt{-x} \cdot \sqrt{e}$$

Seja $f(x) = \sqrt{-x} \frac{1}{\sqrt{e}}$, $g(x) = \sqrt{-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2+x}}$ e $h(x) = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{e}$.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x (exceto possivelmente em 0) e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$, então pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{\cos \frac{\pi}{x^2+x}} = 0.$$

Questão 4. Encontre os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x - p}$. Indeterminação tipo " $\frac{0}{0}$ ".

$$= \lim_{x \rightarrow p} \left[\frac{\sin(x^2 - p^2)}{x - p} \cdot \frac{x + p}{x + p} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x^2 - p^2} \cdot (x + p)$$

$$= \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x^2 - p^2} \times \lim_{x \rightarrow p} (x + p)$$

$$* \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x^2 - p^2}; \text{ Seja } \theta = x^2 - p^2. \text{ Se } x \rightarrow p, \text{ então } \theta \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x^2 - p^2} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1. (* \text{Limite Fundamental Trigonométrico!})$$

$$* \lim_{x \rightarrow p} (x + p) = p + p = 2p.$$

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x - p} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{\sin(x^2 - p^2)}{x^2 - p^2} \times \lim_{x \rightarrow p} (x + p) = 1 \times 2p = 2p.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3}$. Indeterminação tipo " $\frac{\infty}{\infty}$ "

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{x^2 + 3} \cdot \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{(x^2 + 3)(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^1}{\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}_1 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}_1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}^1}{\underbrace{x^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{3}{x^2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)}_{\infty}} = 0. \end{aligned}$$

Questão 5.

a) Mostre que existe um número positivo tal que seu logaritmo natural é igual ao seu seno.

* Mostre que existe algum número $c > 0$, tal que $\ln c = \sin c$.

Seja $f(x) = \ln x - \sin x$, tal que $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ contínua de modo que

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}; \text{ como } 0 < \frac{\pi}{6} < 1, \text{ então } \ln\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0.$$

$$\text{Logo, } f\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0.$$

$$f(\pi) = \ln \pi - \sin \pi = \ln \pi - 0 = \ln \pi; \text{ como } \pi > 1, \text{ então } \ln \pi > \ln 1 = 0.$$

$$\text{Logo, } f(\pi) > 0.$$

Como f é contínua onde está definida, isto é, em seu domínio, então f é contínua no intervalo fechado $[\pi/6, \pi]$ e 0 é um número entre $f(\pi/6)$ e $f(\pi)$, então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in (\pi/6, \pi)$ tal que $f(c) = 0$.

Onde $f(c) = 0 \Rightarrow \ln c - \operatorname{sen} c = 0 \therefore \ln c = \operatorname{sen} c$, com $c \in (\pi/6, \pi) \therefore c > 0$.
 Então, existe um número positivo tal que seu logaritmo natural é igual ao seu seno.

b) Dada a função $f(x) = \sec\left(\frac{\pi^x}{4}\right)$, determine $f'(1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{4} \pi^x \ln \pi \cdot \sec\left(\frac{\pi^x}{4}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi^x}{4}\right)$$

$$f'(1) = \frac{1}{4} \pi^1 \cdot \ln \pi \cdot \sec\left(\frac{\pi^1}{4}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi^1}{4}\right)$$

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} \ln \pi \cdot \sqrt{2} \cdot 1$$

$$f'(1) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} \cdot \ln \pi$$

1.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 29 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) Considere as funções $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3 + 1$, $h(x) = (f \circ g)(x)$ e $i(x) = (g \circ f)(x)$. SEM EXPLICITAR $h(x)$ e $i(x)$, use a regra da cadeia para encontrar as derivadas de h e de i .

b) Prove que a equação $\sin^3 x + e^x = 2e^\pi$ admite pelo menos uma raiz real.

Questão 2.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\cos x^3 + x^2) \cdot \sin\left[\frac{1}{x-1} \cdot (x^{73} - 1)\right]$. Este limite coincide com o coeficiente angular de uma reta tangente a certa curva no ponto (e, π) . Qual é a equação da reta normal a essa curva nesse mesmo ponto?

b) Sendo $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\pi^3}{x}}\right)$, encontre $f'(\pi)$.

Questão 3. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}$.

Questão 4.

a) Seja f a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \operatorname{tg}(ax), & x \neq 0 \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Determine a , de modo que f seja contínua em $x = 0$.

b) Dada a curva $f(x) = \pi^{\operatorname{tg} x}$, encontre a reta a ela tangente no ponto em que $x = 0$. Depois, mostre que a área do triângulo formado por ela e pelos eixos coordenados é menor que 1.

Questão 5

a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais, se existirem, da curva

$$y = \left(\frac{2x+1}{4+3x}\right)^2.$$

b) Admitindo a relação $2x = 6y - \cos y + 1$ define $y = f(x)$ duas vezes derivável, ache f'' no ponto em que $y = 0$.

Questão 1.

a) Considere as funções $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = x^3 + 1$, $h(x) = (f \circ g)(x)$ e $i(x) = (g \circ f)(x)$. SEM EXPLICITAR $h(x)$ e $i(x)$, use a regra da cadeia para encontrar as derivadas de h e de i .

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \text{ e } g'(x) = 3x^2$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx} &= \frac{d}{dx}[f(g(x))] = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} & \text{ e } & \frac{di}{dx} = \frac{d}{dx}[g(f(x))] = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dg} &= f'(g(x)) = \frac{1}{3\sqrt[3]{[g(x)]^2}} & \frac{dg}{df} &= g'(f(x)) = 3[f(x)]^2 \\ \frac{dg}{dx} &= g'(x) = 3x^2 & \frac{df}{dx} &= f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{1}{3\sqrt[3]{[g(x)]^2}} \cdot 3x^2 & \frac{di}{dx} &= 3[f(x)]^2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{x^2}{\sqrt[3]{[g(x)]^2}} & \frac{di}{dx} &= \frac{[f(x)]^2}{\sqrt[3]{x^2}} \\ \frac{dh}{dx} &= \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}, x \neq -1 & \frac{di}{dx} &= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = 1, x \neq 0 \end{aligned}$$

b) Prove que a equação $\sin^3 x + e^x = 2e^\pi$ admite pelo menos uma raiz real.

Definimos $f(x) = \sin^3 x + e^x - 2e^\pi$. Dessa forma, temos f definida pela soma e diferença de funções contínuas em $\mathbb{R}$ e portanto, f é contínua em $\mathbb{R}$. De tal modo podemos afirmar que f é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$.

Temos ainda que $f(\pi) = -e^\pi$ e $f(2\pi) = e^\pi(e^\pi - 1)$. Logo, $f(\pi) < 0$ e $f(2\pi) > 0$.

Como f é uma função contínua no intervalo fechado $[\pi, 2\pi]$ e 0 é um número entre $f(\pi)$ e $f(2\pi)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, então existe algum número $x \in (\pi, 2\pi)$ tal que $f(x) = 0$. Ou seja, $f(x) = 0 \Rightarrow \sin^3 x + e^x = 2e^\pi$ para algum $x \in (\pi, 2\pi)$ e portanto, a equação dada possui pelo menos uma raiz real.

Questão 2.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\cos x^3 + x^2) \cdot \sin\left[\frac{1}{x-1} \cdot (x^{73} - 1)\right]$. Este limite coincide com o coeficiente angular de uma reta tangente a certa curva no ponto (e, π) . Qual é a equação da reta normal a essa curva nesse mesmo ponto?

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\cos x^3 + x^2) = \sin\left[\lim_{x \rightarrow 1^-} (\cos x^3 + x^2)\right] = \sin(\cos(-1) + 1);$$

Obs.: Como $\cos x$ é uma função par, então $\sin(\cos(-1) + 1) = \sin(\cos(1) + 1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin\left[\frac{1}{x-1} \cdot (x^{73} - 1)\right] = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{73} - 1}{x - 1}\right);$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{73} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^{72} + x^{71} + \dots + x + 1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^{72} + x^{71} + \dots + x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^{72} + x^{71} + \dots + x + 1) = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1 + 1}_{73 \text{ termos}} = 73.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin \left[\frac{1}{x-1} \cdot (x^{73} - 1) \right] = \sin \left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^{73} - 1}{x - 1} \right) = \sin(73)$$

Como o limite dos fatores existem, então o limite do produto é o produto dos limites. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sin(\cos x^3 + x^2) \cdot \sin \left[\frac{1}{x-1} \cdot (x^{73} - 1) \right] = \sin[\cos(1) + 1] \cdot \sin(73).$$

Como este valor é coeficiente angular da reta tangente, então o coeficiente angular da reta normal é

$$m_n = -\frac{1}{\sin[\cos(1) + 1] \cdot \sin(73)}$$

Equação da reta normal a curva no ponto (e, π) e coeficiente angular m_n :

$$y - \pi = -\frac{1}{\sin[\cos(1) + 1] \cdot \sin(73)} (x - e)$$

$$y = -\frac{1}{\sin[\cos(1) + 1] \cdot \sin(73)} (x - e) + \pi$$

b) Sendo $f(x) = \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{\pi^3}{x}} \right)$, encontre $f'(\pi)$.

$$\text{Domínio da função: } D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq \frac{4\pi}{4k^2 + 4k + 1}, \text{ com } k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f'(x) = 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x + \sec^2 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi^3}{x}}} \cdot \left(-\frac{\pi^3}{x^2} \right)$$

$$f'(x) = 3 \operatorname{tg}^2 x \cdot \sec^2 x - \frac{\pi^3}{2x^2} \sqrt{\frac{x}{\pi^3}} \cdot \sec^2 x$$

$$f'(\pi) = 3 \operatorname{tg}^2 \pi \cdot \sec^2 \pi - \frac{\pi^3}{2\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\pi^3}} \cdot \sec^2 \pi$$

$$f'(\pi) = 0 - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot (-1)^2$$

$$f'(\pi) = -\frac{1}{2}$$

Questão 3. Calcule os seguintes limites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}} = \lim_{x \rightarrow 7} \left[\frac{\sqrt{x} - \sqrt{7}}{\sqrt{x+7} - \sqrt{14}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{7}}{\sqrt{x} + \sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{14}}{\sqrt{x+7} + \sqrt{14}} \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(\sqrt{x+7} + \sqrt{14})}{(x-7)(\sqrt{x} + \sqrt{7})} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+7} + \sqrt{14}}{\sqrt{x} + \sqrt{7}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x+7} + \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{14}}{\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x} + \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{7}} =$$

$$\frac{\sqrt{7+7} + \sqrt{14}}{\sqrt{7} + \sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{14}}{2\sqrt{7}} = \sqrt{2}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{x})^4 - (\sqrt[4]{2})^4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{2}) \cdot (\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[4]{8})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{2x^2} + \sqrt[4]{4x} + \sqrt[4]{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{8}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{8}}. \end{aligned}$$

Questão 4.

a) Seja f a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \operatorname{tg}(ax), & x \neq 0 \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

Determine a , de modo que f seja contínua em $x = 0$.

Pela definição de continuidade de uma função em um número, para que f seja contínua em $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Se $x \rightarrow 0$, então $x \neq 0$ e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \operatorname{tg}(ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} \cdot (x - 1) \right]$$

Obs.: Limite fundamental trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = 1, k \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} kx}{kx} \cdot \frac{1}{\cos kx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(kx)}{kx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} \cdot (x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{x} \cdot (x - 1) \cdot \frac{a}{a} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{ax} \cdot (ax - a) \right];$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg}(ax)}{ax} \cdot (ax - a) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(ax)}{ax} \times \lim_{x \rightarrow 0} (ax - a) = 1 \times (-a) = -a.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -a$.

Para que f seja contínua em 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \therefore a = -3$$

b) Dada a curva $f(x) = \pi^{\operatorname{tg} x}$, encontre a reta a ela tangente no ponto em que $x = 0$. Depois, mostre que a área do triângulo formado por ela e pelos eixos coordenados é menor que 1.

Domínio da função: $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$

Ponto de abscissa $x = 0$:

$$f(0) = \pi^{\operatorname{tg} 0} = \pi^0 = 1. \text{ Ponto } (0,1)$$

$$f'(x) = \pi^{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x \cdot \ln \pi$$

$$f'(0) = \pi^{\operatorname{tg} 0} \cdot \sec^2 0 \cdot \ln \pi$$

$$f'(0) = \ln \pi.$$

Equação da reta tangente a curva $f(x)$ no ponto $(0,1)$ e coeficiente angular $f'(0) = \ln \pi$:

$$y - 1 = \ln \pi (x - 0)$$

$$y = x \cdot \ln \pi + 1$$

Interseções com os eixos coordenados: $A(0,1)$ e $B\left(-\frac{1}{\ln \pi}, 0\right)$

Área do triângulo formado pela reta tangente e os eixos coordenados:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2 \ln \pi}$$

Como $\pi > e$ e, conseqüentemente, $\ln \pi > \ln e = 1$, então $\ln \pi > 1$. Portanto,

$$\frac{1}{2 \ln \pi} < 1.$$

Questão 5

a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais, se existirem, da curva

$$y = \left(\frac{2x+1}{4+3x}\right)^2.$$

Domínio da função: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{4}{3}\right\}$

A reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Pela definição de assíntota vertical, estas ocorrem nas descontinuidades tipo infinita de uma função. Pelo domínio da função, temos uma

descontinuidade em $x = -\frac{4}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}^+} \left(\frac{2x+1}{4+3x}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\frac{4}{3}^+} \frac{\overbrace{(2x+1)^2}^{25/9}}{\underbrace{(4+3x)^2}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = -\frac{4}{3}$ é assíntota vertical ao gráfico da curva $y = \left(\frac{2x+1}{4+3x}\right)^2$.

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da curva $y = f(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x+1}{4+3x}\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 4x + 1}{9x^2 + 24x + 16} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{9 + \frac{24}{x} + \frac{16}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 4 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} 9 + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{24}{x} + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{16}{x^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{9 + 0 + 0} = \frac{4}{9}.$$

Logo, a reta $y = \frac{4}{9}$ é a assíntota horizontal ao gráfico da curva $y = \left(\frac{2x+1}{4+3x}\right)^2$.

b) Admitindo a relação $2x = 6y - \cos y + 1$ define $y = f(x)$ duas vezes derivável, ache f'' no ponto em que $y = 0$.

$$2x = 6 \times 0 - \cos 0 + 1$$

$$2x = 0 - 1 + 1$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 \quad ; \quad \text{Ponto } (0,0)$$

Derivando implicitamente a expressão da curva, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(2x) = \frac{d}{dx}(6y) - \frac{d}{dx}(\cos y) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$2 = 6 \frac{dy}{dx} - \text{sen } y \cdot \frac{dy}{dx} + 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{2}{6 - \text{sen } y}$$

$$f'(0) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)} = \frac{2}{6 - \text{sen } 0} = \frac{1}{3}.$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} [2(6 - \text{sen } y)^{-1}]$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = -2(6 - \text{sen } y)^{-2} \cdot (-\cos y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \cos y}{(6 - \text{sen } y)^2} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$f''(0) = \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{(0,0)} = \frac{2 \cos 0}{(6 - \text{sen } 0)^2} \cdot \left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)}$$

$$f''(0) = \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{54}.$$

1.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 27 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

b) Mostre que $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\arcsen x)$, $\forall x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

Questão 2.

a) Seja $f(x) = \pi^2 + 2^x + x^2 + x^{\frac{1}{x}}$. Determine $f'(1)$.

b) Uma bola de neve tem a forma esférica. Utilize diferenciais para determinar o aumento aproximado do volume da bola de neve quando seu raio aumenta de 1,5cm para 1,6cm.

Questão 3.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, no intervalo $[0, 5]$.

b) Uma viatura da polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que, no cruzamento toma a direção leste. Quando a viatura está a 0,6km ao norte do cruzamento e o carro do fugitivo a 0,8km a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a 20 km/h. Se a viatura está se deslocando a 60 km/h no instante dessa medição, qual é a velocidade do fugitivo?

Questão 4.

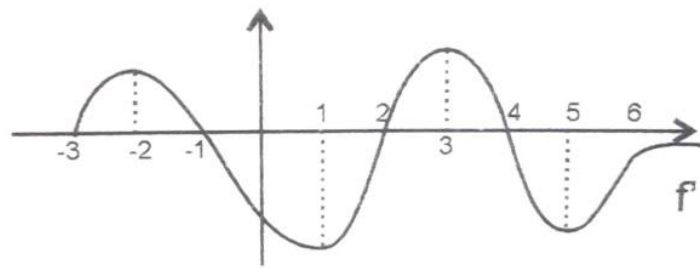
a) Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume possível, que pode ser inscrito num cone cuja base tem raio e altura iguais a 9 e 18, respectivamente.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x - 1)]}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}$.

Questão 5.

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$, $\forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) O gráfico da derivada de uma função f é dada abaixo:



- i. Onde f está crescendo e onde f está decrescendo.
- ii. Os pontos de máximo e mínimo locais de f .
- iii. Os pontos de inflexão de f .

Questão 1.

a) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Bissetriz dos quadrantes ímpares: reta $y = x$.

Como a reta tangente ao gráfico de f é paralela a reta $y = x$, então estas retas possuem o mesmo coeficiente angular. Logo, devemos encontrar $x \in D(f)$ tal que $f'(x) = 1$.

Domínio da função : $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \cdot \left[1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} ; D(f') = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = 1 \therefore x = 0.$$

Logo, o ponto do gráfico da função f onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares é o ponto de abscissa $x = 0$. Ponto $(0,0)$.

Equação da reta tangente:

$$y - 0 = 1(x - 0)$$

$$y = x$$

A bissetriz dos quadrantes ímpares ($y = x$) é a reta tangente à curva.

** Obs.: A título de curiosidade, $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \operatorname{arcsenh} x$.*

b) Mostre que $\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x)$, $\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

Sejam f e g funções tais que $f(x) = \operatorname{tg}(\arccos x)$ e $g(x) = \operatorname{cotg}(\operatorname{arcsen} x)$ e $h(x) = f(x) - g(x)$.

Analisando o domínio das funções f, g e h , temos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } x \neq 0\}$$

$$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } x \neq 0\}$$

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \text{ e } x \neq 0\}$$

Analisando a derivada da função h , temos:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$h'(x) = \sec^2(\arccos x) \cdot \left[-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] - [-\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcsen} x)] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arcsen} x) - \sec^2(\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

** Obs.: $\operatorname{arcsen} x = \arccos \operatorname{cosec} \frac{1}{x}$ e $\arccos x = \operatorname{arcsec} \frac{1}{x}$.*

$$h'(x) = \frac{\operatorname{cosec}^2\left(\arccos \operatorname{cosec} \frac{1}{x}\right) - \sec^2\left(\operatorname{arcsec} \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$h'(x) = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

Se $h'(x) = 0, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$ então h é constante nos intervalos $(-1,0)$ e $(0,1)$. Logo,

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= C_1 \text{ em } (-1,0) \\ f(x) - g(x) &= C_2 \text{ em } (0,1) \end{aligned}$$

Onde C_1 e C_2 são constantes a serem determinadas.

Calculando h em $x = -\frac{1}{2}$ e em $x = \frac{1}{2}$, temos:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\arcsen\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0.$$

Portanto, $h(x) = 0$ em $(0,1)$.

$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\arccos-\frac{1}{2}\right) - \operatorname{cotg}\left(\arcsen-\frac{1}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0.$$

Portanto, $h(x) = 0$ em $(-1,0)$.

Logo, $h(x) = \operatorname{tg}(\arccos x) - \operatorname{cotg}(\arcsen x) = 0, \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$.

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \operatorname{cotg}(\arcsen x), \forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$$

Questão 2.

a) Seja $f(x) = \pi^2 + 2^x + x^2 + x^{\frac{1}{x}}$. Determine $f'(1)$.

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Seja $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$, com $x > 0$. Logo, $g(x) > 0$.

$$\ln g(x) = \ln x^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln g(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln x$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \cdot [1 - \ln x] = \frac{x^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot [1 - \ln x]$$

$$g'(x) = x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$$

Com isso, calculando a derivada da função f :

$$f'(x) = 0 + 2^x \cdot \ln 2 + 2x + x^{\frac{1}{x}-2} \cdot (1 - \ln x)$$

$$f'(1) = 2 \ln 2 + 2 + 1(1 - \ln 1)$$

$$f'(1) = \ln 4 + 3$$

b) Uma bola de neve tem a forma esférica. Utilize diferenciais para determinar o aumento aproximado do volume da bola de neve quando seu raio aumenta de 1,5cm para 1,6cm.

Seja x o raio da bola de neve e $f(x)$ seu volume. Então,

$$f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$$

Quando $x = 1,5\text{cm}$ ou $3/2\text{ cm}$, temos:

$$f(1,5\text{cm}) = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{2}\pi = 4,5\pi\text{cm}^3$$

$$f'(x) = 4\pi x^2 \text{ e } f'(1,5\text{cm}) = 9\pi\text{ cm}^3/\text{cm}$$

Quando o raio tem uma variação de $0,10\text{cm}$ ou $1/10\text{ cm}$, por diferenciais, queremos estimar $f(1,6) = f(1,5 + 0,1)$. Sobre diferenciais, para pequenas variações em x , podemos dizer que $\Delta y \approx dy$. Ou seja,

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &\cong f'(x) \cdot dx \\ f(1,5 + 0,1) - f(1,5) &\cong f'(1,5) \cdot 0,1 \\ f(1,6) - 4,5\pi &\cong 9\pi \cdot 0,1 \\ f(1,6) &\cong 5,4\pi\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Questão 3.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x - 4\sqrt{x}$, no intervalo $[0,5]$.

Como f é uma função contínua no intervalo fechado $[0,5]$, pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[0,5]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo:

$$f(0) = 0.$$

$$f(5) = 5 - 4\sqrt{5}.$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(0,5)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$$

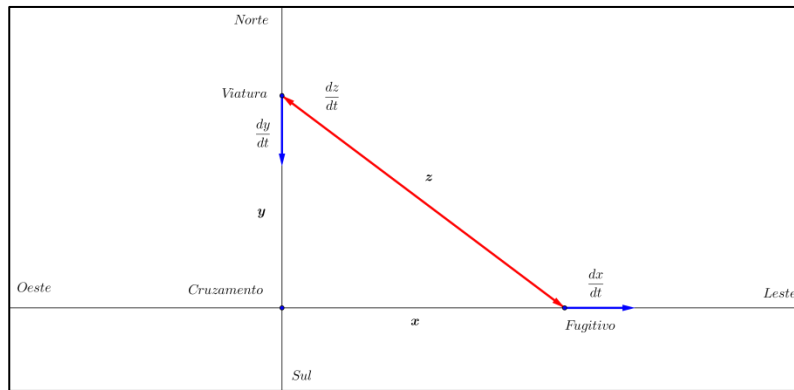
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \therefore x = 4.$$

$$f'(x) \text{ não existe em } x = 0, \text{ porém } 0 \notin (0,5).$$

$$f(4) = 4 - 4\sqrt{4} = -4.$$

3. Comparando os valores obtidos concluímos que -4 é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[0,5]$ e 0 é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[0,5]$.

b) Uma viatura da polícia, vindo do norte e aproximando-se de um cruzamento em ângulo reto, está perseguindo um carro em alta velocidade, que, no cruzamento toma a direção leste. Quando a viatura está a $0,6\text{km}$ ao norte do cruzamento e o carro do fugitivo a $0,8\text{km}$ a leste, o radar da polícia detecta que a distância entre a viatura e o fugitivo está aumentando a 20 km/h . Se a viatura está se deslocando a 60 km/h no instante dessa medição, qual é a velocidade do fugitivo?



Da ilustração tiramos a seguinte relação:

$$z^2 = x^2 + y^2$$

Quando $x = 0,8\text{km}$ e $y = 0,6\text{km}$, temos:

$$z^2 = 0,64 + 0,36$$

$$z^2 = 1,00$$

$$z = 1.0\text{km}$$

Derivando a expressão implicitamente em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(z^2) = \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2)$$

$$2z \cdot \frac{dz}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$z \cdot \frac{dz}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt}$$

Quando $x = 0,8\text{km}$ e $y = 0,6\text{km}$, a distância y está diminuindo à taxa de 60 km/h e a distância z está aumentando à taxa de 20 km/h . Logo,

$$z \cdot \frac{dz}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$1 \times 20 = 0,8 \cdot \frac{dx}{dt} - 0,6 \times 60$$

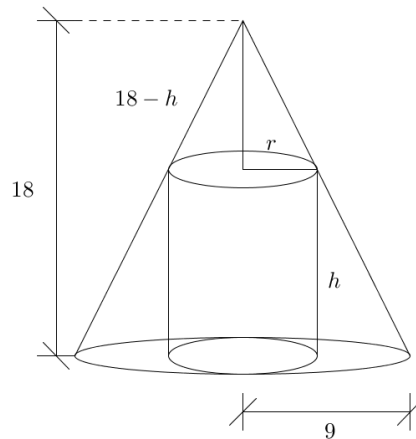
$$20 = 0,8 \cdot \frac{dx}{dt} - 36$$

$$0,8 \cdot \frac{dx}{dt} = 56 \therefore \frac{dx}{dt} = 70\text{ km/h}$$

A velocidade do fugitivo no instante da medição é 70 km/h .

Questão 4.

a) Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume possível, que pode ser inscrito num cone cuja base tem raio e altura iguais a 9 e 18, respectivamente.



Por semelhança de triângulo, obtemos a relação:

$$\begin{aligned}\frac{18}{9} &= \frac{18-h}{r} \\ 2r &= 18-h \\ h &= 18-2r\end{aligned}$$

Volume do cilindro em função de r :

$$\begin{aligned}V(r) &= \pi r^2 (18 - 2r) \\ V(r) &= 2\pi(9r^2 - r^3) \quad ; \quad r \in [0,9]\end{aligned}$$

Como V é uma função polinomial e portanto contínua no intervalo fechado $[0,9]$, pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto $V(c)$ e um valor mínimo absoluto $V(d)$ em algum número c e d em $[0,9]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de V nos extremos do intervalo:

$$V(0) = V(9) = 0 \quad (\text{Não existe cilindro!})$$

2. Os valores de V nos números críticos em $(0,9)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

$$V'(r) = 2\pi(18r - 3r^2)$$

$$V'(r) = 0 \Rightarrow 18r - 3r^2 = 0 \Rightarrow 3r(6 - r) = 0 \therefore r = 6.$$

$$V(6) = 216\pi$$

3. Comparando os valores obtidos concluímos que 216π é o volume máximo que um cilindro circular reto inscrito num cone com dimensões de 9 e 18 de raio e altura, respectivamente, pode assumir.

Logo, as dimensões que maximizam o volume do cilindro são: $r = 6$ e $h = 6$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}}.$

* Quociente indeterminado: " $\frac{0}{0}$ "

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln[\cos(x-1)]}{1 - \sin \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\operatorname{tg}(x-1)}{-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi x}{2}} =$$

$$\frac{\sec^2 0}{-\frac{\pi^2}{4} \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

Questão 5.

a) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$, $\forall x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Seja $f(z) = \operatorname{tg} z$ e como o intervalo fechado $[x, y]$ está contido no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ então f satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[y, x]$;
2. f é diferenciável no intervalo aberto (y, x) ;

Então existe algum número $c \in (y, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$f'(c) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y}$$

Como $f'(c) = \sec^2 c$ e para todo $c \in D(f)$, temos $\sec^2 c \geq 1$, ou ainda, $|f'(c)| \geq 1$.

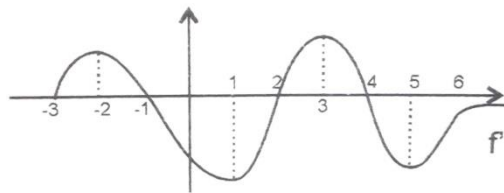
$$|f'(c)| \geq 1$$

Pelo Teorema do Valor Médio, concluímos que

$$\left| \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{x - y} \right| \geq 1$$

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geq |x - y|$$

b) O gráfico da derivada de uma função f é dada abaixo:



i. Onde f está crescendo e onde f está decrescendo.

f é dita crescente em um intervalo (a, b) quando $f' > 0$ para qualquer x em (a, b) , e decrescente quando $f' < 0$.

Logo, f é crescente em $(-3, -1) \cup (2, 4)$ e f é decrescente em $(-1, 2) \cup (4, \infty)$

ii. Os pontos de máximo e mínimo locais de f .

Pelo Teste da Primeira Derivada, onde f' muda de positiva para negativa em c , então $(c, f(c))$ é um ponto de máximo local; e se f' muda de negativa para positiva em c , então $(c, f(c))$ é ponto de mínimo local.

Portanto, f possui pontos de máximo locais em $x = \{-1, 4\}$ e f possui pontos de mínimo local em $x = 2$.

iii. Os pontos de inflexão de f .

Os pontos de inflexão de f serão detectados no gráfico de f' nos pontos de máximo ou mínimos locais de f' .

Como f'' nos diz os intervalos de crescimento e decréscimo de f' , então onde ocorre essa mudança será os pontos sobre o gráfico de f onde ocorre mudança na direção da concavidade, evidenciando os pontos de inflexão. Portanto, os pontos de inflexão de f ocorre em $x = \{-2, 1, 3, 5\}$.

1.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 29 de Outubro de 2016

Questão 1.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \log_{10}(1 + \sin x)$, no intervalo $[0, \pi]$.

b) Use aproximação linear para estimar a aresta de um cubo com volume igual a 27,0001.

Questão 2.

a) Seja $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2^x \cdot (x^2 + 3)}$. Use diferenciação logarítmica para calcular $f'(1)$.

b) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \frac{2e^x}{1 + x^2}$, no intervalo $[-1, 2]$.

Questão 3.

a) Um móvel A desloca-se sobre o gráfico $y = \arctg x$ e outro móvel B, desloca-se sobre o gráfico de $y = -\arctg x$, ambos partindo da origem, de sorte que as duas coordenadas x variam à razão de 2m/s. A que taxa estará variando a área do triângulo determinado pelos móveis e pela origem do sistema de coordenadas, no instante em que $x = 1$?

b) Determine a equação da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto em que $x = 2$, sabendo que $f'(x) = \sqrt[4]{x-1}$ e $f(1) = 2$.

Questão 4.

a) O custo c (em reais por hora) para operar um transatlântico a uma velocidade constante v (em km por h) é dado por $c = 3 + 6v^2$. Ache a velocidade que resulta na operação mais barata de 4800km.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x}$.

Questão 5.

a) Determine os valores das constantes a, b e c , de modo que o gráfico de $y = \frac{x^2 + a}{bx + c}$ tenha um mínimo local em $x = 3$ e um máximo local no ponto $(-1, -2)$.

b) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}}$, se $0 < x < y$.

Questão 1.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \log_{10}(1 + \sin x)$, no intervalo $[0, \pi]$.

Domínio da função: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como f é uma função composta, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio. Portanto, f é contínua no intervalo fechado $[0, \pi]$ e pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[0, \pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo:

$$f(0) = \log_{10}(1 + \sin 0) = \log_{10} 1 = 0.$$

$$f(\pi) = \log_{10}(1 + \sin \pi) = \log_{10} 1 = 0.$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(0, \pi)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{\cos x}{(1 + \sin x) \cdot \ln 10}; \quad D(f') = D(f)$$

Como f é diferenciável em $(0, \pi)$, se c é um número crítico de f e $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \therefore x = \frac{\pi}{2}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log_{10}\left(1 + \sin \frac{\pi}{2}\right) = \log_{10} 2.$$

3. Comparando os valores obtidos concluímos que $\log_{10} 2$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[0, \pi]$ e 0 é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[0, \pi]$.

b) Use aproximação linear para estimar a aresta de um cubo com volume igual a 27,0001.

Seja $f(x)$ a aresta de um cubo e x o seu volume, então $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Quando $f(x) = 27$, temos $x = 3$ e ainda,

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad f'(27) = \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27}$$

Por aproximação linear ou linearização de f em $x = 27$, temos:

$$L(x) = f(27) + f'(27) \cdot (x - 27)$$

$$L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$$

Como a variação do volume foi muita pequena comparada ao seu valor inicial, então podemos dizer que $L(x) \cong f(x)$ quando x está próximo a 27. Logo,

$$f(27,0001) \cong L(27,0001) = 3 + \frac{0,0001}{27} = \frac{81,0001}{27}$$

onde este valor é a estimativa da aresta do cubo com volume igual a 27,0001.

Questão 2.

a) Seja $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2^x \cdot (x^2 + 3)}$. Use diferenciação logarítmica para calcular $f'(1)$.

Domínio da função : $D(f) = \mathbb{R}$

Imagem da função : $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$. $f(x) > 0$.

$$\ln f(x) = \ln \left[\frac{e^{x^2}}{2^x \cdot (x^2 + 3)} \right]$$

$$\ln f(x) = \ln e^{x^2} - \ln [2^x \cdot (x^2 + 3)]$$

$$\ln f(x) = x^2 \cdot \ln e - \ln 2^x - \ln(x^2 + 3)$$

$$\ln f(x) = x^2 - x \cdot \ln 2 - \ln(x^2 + 3)$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= 2x - \ln 2 - \frac{2x}{x^2 + 3} \\ f'(x) &= f(x) \left[2x - \ln 2 - \frac{2x}{x^2 + 3} \right] \\ f'(1) &= f(1) \left[2 - \ln 2 - \frac{2}{4} \right] \\ f'(1) &= \frac{e}{8} \left[2 - \ln 2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{e}{16} [3 - \ln 4] \end{aligned}$$

b) Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = \frac{2e^x}{1+x^2}$, no intervalo $[-1, 2]$.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$

Como f é uma função racional, f será dita contínua onde estiver definida, ou seja, em seu domínio. Portanto, f é contínua no intervalo fechado $[-1, 2]$ e pelo Teorema do Valor Extremo f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[-1, 2]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo;

$$f(-1) = \frac{2e^{-1}}{1+(-1)^2} = \frac{2e^{-1}}{2} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$f(2) = \frac{2e^2}{1+2^2} = \frac{2e^2}{1+4} = \frac{2}{5}e^2 = 0,4e^2.$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(-1, 2)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{2e^x(1+x^2) - 4xe^x}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1+x^2)^2} = \frac{2e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}; \quad D(f') = D(f)$$

Como f é diferenciável em $(-1, 2)$, se c é um número crítico de f e $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.

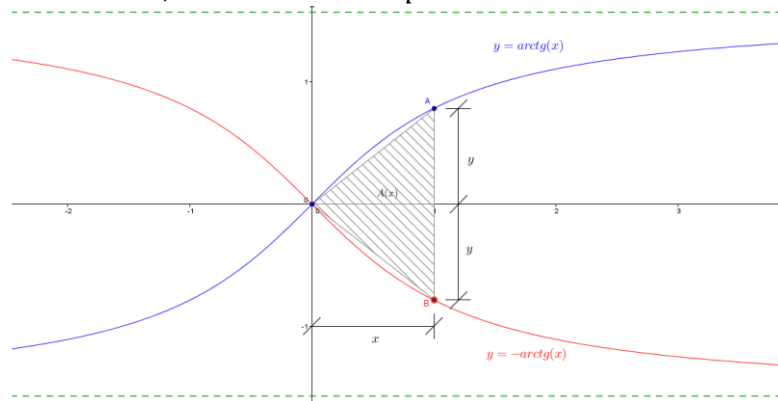
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \therefore x = 1.$$

$$f(1) = \frac{2e^1}{1+1^2} = \frac{2e}{2} = e.$$

3. Comparando os valores obtidos concluímos que $0,4e^2$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[-1,2]$ e e^{-1} é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[-1,2]$.

Questão 3.

a) Um móvel A desloca-se sobre o gráfico $y = \arctg x$ e outro móvel B, desloca-se sobre o gráfico de $y = -\arctg x$, ambos partindo da origem, de sorte que as duas coordenadas x variam à razão de 2m/s . A que taxa estará variando a área do triângulo determinado pelos móveis e pela origem do sistema de coordenadas, no instante em que $x = 1$?



Da ilustração acima, temos:

$$A(x) = \frac{1}{2}x \cdot 2y$$

$$A(x) = x \cdot y$$

$$A(x) = x \cdot \arctg x$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dx} = A'(x) = \arctg x + \frac{x}{1+x^2}; \left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=1} = \arctg 1 + \frac{1}{1+1^2} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{m}^2/\text{m}.$$

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) \cdot 2 = \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \text{m}^2/\text{s}$$

b) Determine a equação da tangente à curva $y = f(x)$ no ponto em que $x = 2$, sabendo que $f'(x) = \sqrt[4]{x-1}$ e $f(1) = 2$.

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}\right)} \cdot (x-1)^{1+\frac{1}{4}} + C$$

$$f(x) = \frac{4}{5} (x-1)^{\frac{5}{4}} + C$$

Como $f(1) = 2$, isso implica dizer que $C = 2$. Portanto,

$$f(x) = \frac{4}{5} (x-1)^{\frac{5}{4}} + 2$$

No ponto em $x = 2$, temos $f(2) = \frac{4}{5} + 2 = \frac{14}{5}$. Logo, o ponto em questão é $\left(2, \frac{14}{5}\right)$ e a inclinação da reta tangente neste ponto é $f'(2) = 1$.

Equação da reta tangente:

$$y - \frac{14}{5} = 1 \cdot (x - 2)$$

$$y = x + \frac{4}{5}$$

Questão 4.

a) O custo c (em reais por hora) para operar um transatlântico a uma velocidade constante v (em km por h) é dado por $c = 3 + 6v^2$. Ache a velocidade que resulta na operação mais barata de 4800km. (ANULADA!)

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x}$.

* Potência indeterminada: " ∞^0 "

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\cotg x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)}.$$

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)$; produto indeterminado $0 \times \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}; \text{quociente indeterminado } \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^0 = 1.$$

Questão 5.

a) Determine os valores das constantes a, b e c , de modo que o gráfico de

$y = \frac{x^2 + a}{bx + c}$ tenha um mínimo local em $x = 3$ e um máximo local no ponto $(-1, -2)$.

Se f possui um máximo ou mínimo local em c , então c é um número crítico de f .

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

Domínio da função $y = f(x) : D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{c}{b}\right\}$

$$f'(x) = \frac{2x(bx + c) - b(x^2 + a)}{(bx + c)^2}$$

$$f'(x) = \frac{bx^2 + 2cx - ab}{(bx + c)^2}; D(f') = D(f)$$

Do enunciado temos as seguintes informações, $f(3)$ está definido, $f(-1) = -2$, 3 e -1 são números críticos de f .

Como f está definida em $x = 3$, então $3b + c \neq 0$.

$$f'(3) = \frac{9b - 6c - ab}{(3b + c)^2}; \text{ como } 3b + c \neq 0, \text{ então } f'(3) \text{ existe e } f'(3) = 0.$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow 9b - 6c - ab = 0 \text{ (Eq.1)}$$

Como f está definida em $x = -1$ e $f(-1) = -2$, então $-b + c \neq 0$.

$$f(-1) = \frac{1 + a}{-b + c} = -2 \Rightarrow 1 + a = 2b - 2c \therefore a - 2b + 2c = -1 \text{ (Eq.2)}$$

$$f'(-1) = \frac{b - 2c - ab}{(-b + c)^2}; \text{ como } -b + c \neq 0, \text{ então } f'(-1) \text{ existe e } f'(-1) = 0.$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow b - 2c - ab = 0 \text{ (Eq.3)}.$$

Temos um sistema com 3 equações e 3 incógnitas.

$$\begin{cases} 9b - 6c - ab = 0 \\ a - 2b + 2c = -1 \\ b - 2c - ab = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a Eq. 3 da Eq. 1, obtemos:

$$\begin{aligned} 9b - 6c - ab - (b - 2c - ab) &= 0 \\ 8b + 8c &= 0 \therefore c = -b \text{ (Eq.4)} \end{aligned}$$

Substituindo a Eq. 4 na Eq. 3, obtemos:

$$\begin{aligned} b - 2(-b) - ab &= 0 \\ 3b - ab &= 0 \\ b(3 - a) &= 0 \\ b = 0 \text{ ou } a &= 3 \end{aligned}$$

Note que $b = 0 \Rightarrow c = 0$, dessa forma as condições supracitadas $3b + c \neq 0$ e $-b + c \neq 0$, não são satisfeitas. Portanto, $a = 3$.

Pela Eq. 2, temos:

$$\begin{aligned} 3 - 2b + 2(-b) &= -1 \\ 3 - 4b &= -1 \\ 4b &= 4 \\ b = 1 &\Rightarrow c = -1 \end{aligned}$$

Portanto, os valores das constantes a, b e c são, respectivamente, 3, 1 e -1.

b) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que $\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}}$,

se $0 < x < y$.

Seja $f(z) = \sqrt{z}$, x e y números reais tais que $0 < x < y$ e $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$

f é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[x, y]$;
2. f é diferenciável no intervalo aberto (x, y) ;

Então existe algum número $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$f'(c) = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x}$$

Sabemos que $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$. Logo, $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$.

Se $c \in (x, y)$, então $x < c < y$ e portanto $\sqrt{x} < \sqrt{c} < \sqrt{y}$. Com isso, concluímos que

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos:

$$f'(c) = \frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt{y} - \sqrt{x}}{y - x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} < \frac{y - x}{2\sqrt{x}}$$

1.13 Prova Final – 04 de Novembro de 2016

Questão 1.

a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = \sqrt[3]{12x - x^3}$, $x \in [-4, 4]$.

b) Estude a diferenciabilidade da função $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 2|$.

Questão 2.

a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = 2\sqrt{\ln x}$, no ponto de ordenada $y = 2$.

b) Determine $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

Questão 3.

a) Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = 12\text{dm}$, $AC = BC = 10\text{dm}$. Determine qual o ponto da altura relativa ao lado AB , cuja soma das distâncias aos vértices é mínima.

b) Se $f(x) = \frac{4}{x}$, prove que não há nenhum número real c , tal que $f(4) - f(-1) = f'(c) \cdot [4 - (-1)]$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio, aplicado ao intervalo $[-1, 4]$?

Questão 4. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x - \cotg x - x$. Mostre que:

a) f tem uma raiz real no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) a raiz de f é única no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 5. A assíntota oblíqua da curva $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$ forma com as assíntotas horizontal e vertical da curva $y = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{2}{3}}$ um triângulo. Encontre a área desse triângulo.

Questão 6.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

b) Use aproximação linear para estimar $\cos 59^\circ$.

Questão 7.

a) Suponha que $f'(x) = (\ln x)(x^2 - 1)(x - 2)^3$. Analise o crescimento e o decréscimo de f .

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Questão 8.

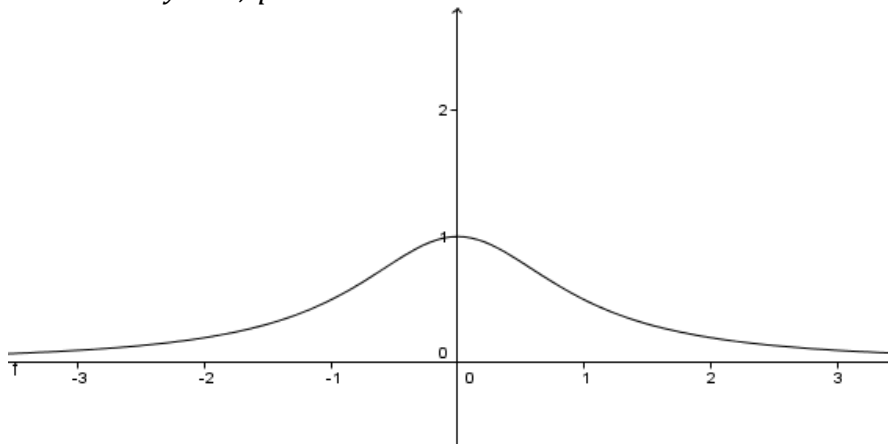
a) Usando a derivação implícita, encontre y' , sendo $y^2 = x \cdot \arccos(x + y) - \pi$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 1} - x^3)$.

Questão 9.

a) Sendo $f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$, determine a primitiva de f' que passa pelo ponto $(1, 2)$.

b) A figura abaixo é o gráfico da curva $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$. Há uma reta vertical que se desloca da esquerda para a direita, a partir da reta $x = 0$ e a uma velocidade de $0,1 \text{ mm/seg}$. Com que velocidade está aumentando a área do trapézio determinado pelas interseções das retas verticais citadas com a curva e com a reta $y = 0$, quando $x = 1$?



Questão 10.

a) Classifique a descontinuidade da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}$ como removível, tipo salto ou infinita.

b) Sendo $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}}$, determine $f'(x)$, como uma potência de e .

Questão 1.

(a) Determine os valores máximo e mínimo absolutos de $f(x) = \sqrt[3]{12x - x^3}$, $x \in [-4, 4]$.

Domínio da função f : $D(f) = \mathbb{R}$

Como f está definida em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$ e portanto contínua no intervalo fechado $[-4, 4]$. Logo, pelo Teorema do Valor Extremo, f admite um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum c e d em $[-4, 4]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo.

$$f(-4) = \sqrt[3]{-48 + 64} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$$

$$f(4) = \sqrt[3]{48 - 64} = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2}.$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(-4, 4)$.

"Um número crítico de uma função f é um número c **no domínio** de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{12 - 3x^2}{3^3 \sqrt{(12x - x^3)^2}} = \frac{4 - x^2}{\sqrt[3]{(12x - x^3)^2}}$$

$$D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq \pm 2\sqrt{3}\}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 0 \therefore x = \pm 2. \text{ (pertencem ao intervalo em estudo!)}$$

$$f'(x) \text{ não existe em } 0, 2\sqrt{3} \text{ e } -2\sqrt{3} \text{ (pertencem ao intervalo em estudo!)}$$

$$f(-2\sqrt{3}) = f(2\sqrt{3}) = 0.$$

$$f(-2) = \sqrt[3]{-24 + 8} = \sqrt[3]{-16} = -2\sqrt[3]{2}.$$

$$f(0) = \sqrt[3]{0 - 0} = \sqrt[3]{0} = 0$$

$$f(2) = \sqrt[3]{24 - 8} = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2}.$$

3. Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, temos:

$-2\sqrt[3]{2}$ é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[-4, 4]$ e

$2\sqrt[3]{2}$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[-4, 4]$.

Questão 1.

(b) Estude a diferenciabilidade da função $f(x) = |x + 1| \cdot |x - 2|$.

$$f(x) = |(x + 1)(x - 2)| = |x^2 - x - 2| = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2 \\ -(x^2 - x - 2), & -1 < x < 2 \end{cases}.$$

Como f é uma função definida pelo módulo de uma função polinomial contínua em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$. Como f muda de comportamento nos números -1 e 2 , como f é polinomial temos a priori que f é derivável ou diferenciável em $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$.

Analisando a diferenciabilidade de f em -1 , temos:

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x - 2) = -1 - 2 = -3. \\ f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x^2 - x - 2) - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x^2 + x + 2}{x + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x + 2) = -(-1) + 2 = 3. \end{aligned}$$

Como as derivadas laterais existem mas são diferentes, então f não é derivável em -1 .

Analisando a diferenciabilidade de f em 2 , temos:

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x - 1) = -2 - 1 = -3. \\ f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2 - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 1) = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Como as derivadas laterais existem mas são diferentes, então f não é derivável em 2 .

Portanto, f é diferenciável em $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$.

Questão 2.

(a) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de $y = 2\sqrt{\ln x}$, no ponto de ordenada $y = 2$.

Domínio da função $y = f(x): D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

Ponto de ordenada $y = 2$:

$$2 = 2\sqrt{\ln x} \Rightarrow 1 = \sqrt{\ln x} \Rightarrow \ln x = 1 \therefore x = e.$$

* Ponto $(e, 2)$.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

Coefficiente angular da reta tangente no ponto $(e, 2)$:

$$f'(e) = \frac{1}{e\sqrt{\ln e}} = \frac{1}{e}.$$

Equação da reta tangente no ponto $(e, 2)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 2 = \frac{1}{e}(x - e)$$

$$y = \frac{x}{e} + 1$$

Questão 2

(b) Determine $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$+++++(-1)-----(-0)+++++ \quad (x^2 + x)$$

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$, temos:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Se x está próximo de 0 e x é menor que 0, então $(x^2 + x) < 0$. Logo,

$$-(x^2 + x) \geq (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \geq (x^2 + x)$$

$$(x^2 + x) \leq (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (-x^2 - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x) = -0^2 - 0 = 0.$$

Se $(x^2 + x) \leq (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (-x^2 - x)$ quando x está próximo de 0 pela esquerda de 0 (exceto possivelmente em 0) e

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 - x) = 0$$

então

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Se x está próximo de 0 e x é maior que 0, então $(x^2 + x) > 0$. Logo,

$$-(x^2 + x) \leq (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (x^2 + x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 - x) = -0^2 - 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0.$$

Se $(-x^2 - x) \leq (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq (x^2 + x)$ quando x está próximo de 0 pela direita de 0 (exceto possivelmente em 0) e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 - x) = 0$$

então

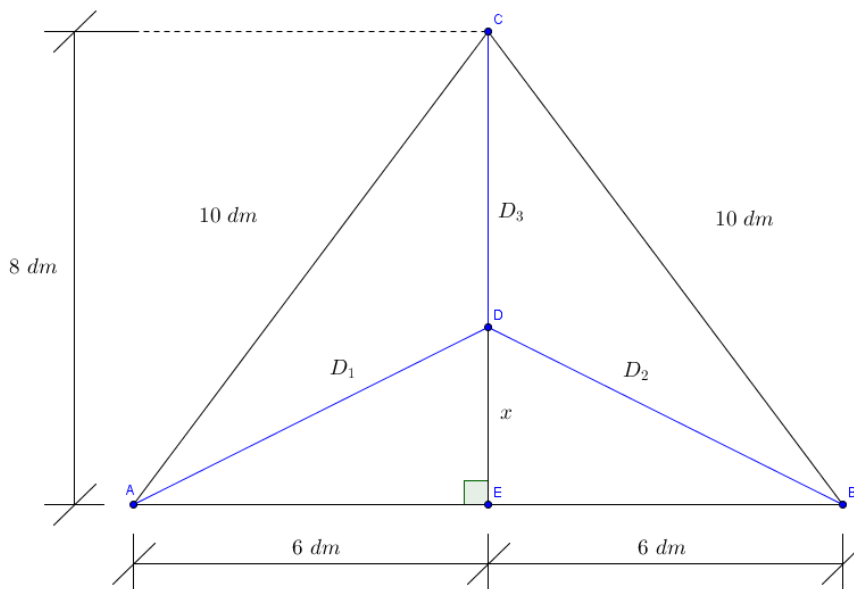
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Como os limites laterais em 0 existem e são iguais, então $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

existe e $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + x) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$.

Questão 3.

(a) Seja ABC um triângulo isósceles, com $AB = 12dm$, $AC = BC = 10dm$. Determine qual o ponto da altura relativa ao lado AB , cuja soma das distâncias aos vértices é mínima.



$$D_1 = D_2 = \sqrt{x^2 + 36} ; D_3 = 8 - x ; x \in [0,8]$$

$$f(x) = D_1 + D_2 + D_3 = 2\sqrt{x^2 + 36} + (8 - x)$$

A função f definida acima é contínua no intervalo fechado $[0,8]$ e pelo Teorema do Valor Extremo a função f admite um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum c e d em $[0,8]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo:

$$f(0) = 2\sqrt{36} + 8 = 20dm \quad e \quad f(8) = 2\sqrt{100} + 0 = 20dm$$

2. Os valores de f nos números crítico de f em $(0,8)$:

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 36}} - 1 = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 36}}{\sqrt{x^2 + 36}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x^2 + 36} = 0 ; x \in (0,8)$$

$$2x = \sqrt{x^2 + 36}$$

$$4x^2 = x^2 + 36$$

$$3x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 12 \therefore x = 2\sqrt{3}dm$$

$$f(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{48} + 8 - 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 8 - 2\sqrt{3} = (6\sqrt{3} + 8)dm < 20dm$$

3. Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluímos que para o ponto situado na altura relativa ao lado AB a $2\sqrt{3}dm$ a soma das distâncias aos vértices é a menor possível.

Questão 3

(b) Se $f(x) = \frac{4}{x}$, prove que não há nenhum número real c , tal que $f(4) - f(-1) = f'(c) \cdot [4 - (-1)]$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio, aplicado ao intervalo $[-1, 4]$?

Domínio da função f : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$$f(4) = 1 \text{ e } f(-1) = -4$$

$$f(4) - f(-1) = f'(c)[4 - (-1)]$$

$$1 - (-4) = f'(c)[4 - (-1)]$$

$$5 = 5f'(c)$$

$$f'(c) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{4}{x^2}; \quad f'(x) < 0, \forall x \in D(f).$$

Logo, não existe nenhum número real c , tal que $f'(c) = 1$.

Este fato não contradiz o Teorema do Valor Médio porque a função f não é contínua no intervalo fechado $[-1, 4]$ e portanto, não é derivável no intervalo aberto $(-1, 4)$, uma vez que f possui uma **descontinuidade infinita em 0**.

Logo, como f não satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio, então o fato não existir número real $c \in (-1, 4)$ tal que $f'(c) = \frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)}$ não contradiz o teorema.

Questão 4

Seja $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x - x$. Mostre que:

(a) f tem uma raiz real no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Domínio da função f : $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

Como f é função definida pela diferença de funções trigonométricas e polinomial, então f será dita contínua onde estas funções estão definidas, ou seja, em seus domínios.

Logo, f é contínua no intervalo aberto $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e portanto f é contínua em qualquer intervalo fechado $I \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} - \frac{\pi}{6} = -\frac{4 + \pi}{6}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = 1 - 1 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{3}$$

Como f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ e 0 é um número entre $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ então, pelo Teorema do Valor Intermediário existe algum número $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ tal que $f(x) = 0$. Ou seja, f possui uma raiz real em $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$ de tal modo que este $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 4

(b) a raiz de f é única no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Suponha que f admite duas raízes reais a e b no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(a) = f(b) = 0$.

$$f'(x) = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - 1; D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Seja $I = [a, b]$ o intervalo fechado definido anteriormente, com $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

f é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
2. f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$

Então, pelo Teorema de Rolle existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = \frac{\operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x = 0, x \neq \frac{k\pi}{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 x + \cos^2 x &= 0 \\ \operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Seja $y = \operatorname{sen}^2 x$, $0 < y < 1$ então:

$$\begin{aligned} y^2 - y + 1 &= 0 \\ \Delta &= -3 \end{aligned}$$

Como o discriminante $\Delta < 0$, então a equação acima não possui solução real e, portanto, não existe número c tal que $f'(c) = 0$.

Por contradição, concluímos que f não possui duas raízes no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Logo, f possui raiz única no intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ mostrada pelo Teorema do Valor Intermediário no item anterior.

Questão 5.

A assíntota oblíqua da curva $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$ forma com as assíntotas horizontal e vertical da curva $y = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}}$ um triângulo. Encontre a área desse triângulo.

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 4} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} \right) = \frac{1}{2} \left[(x - 2) + \frac{3}{x + 2} \right]$$

Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da curva $f(x)$ se, somente se, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}(x - 2) \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x + 2} = 0.$$

Portanto, a reta $y = \frac{1}{2}x - 1$ é a assíntota oblíqua da curva $y = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$.

Sobre a curva $y = g(x) = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}}$ temos $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$.

A reta $x = a$ é assíntota vertical ao gráfico da curva $y = g(x)$ se $\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = \pm\infty$. Estas assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função. Verificando se a reta $x = 1$ é assíntota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{3} \cdot \frac{\overset{1}{\sqrt[3]{x^2}}}{\underset{0^+}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 1$ é assíntota vertical da curva $y = g(x)$.

A reta $y = L$ é assíntota horizontal ao gráfico da curva $y = g(x)$ se ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = L$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \sqrt[3]{\left[\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) \right]^2} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt[3]{(1+0)^2} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Logo, a reta $y = \frac{2}{3}$ é a assíntota horizontal da curva $y = g(x)$.

Interseções entre as retas: $\left(1, \frac{2}{3}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Área do triângulo delimitado:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{10}{3} - 1 \right) \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{49}{36} u. A$$

Questão 6

(a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$.

* Obs.: $|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & \text{se } x \geq 2 \\ -(x - 2), & \text{se } x < 2 \end{cases}$

Se x está próximo de 2 e x maior que 2, então $|x - 2| = x - 2$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

Se x está próximo de 2 e x menor que 2, então $|x - 2| = -(x - 2)$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-\sqrt{x} - \sqrt{2}) = -2\sqrt{2}.$$

* Se $x \rightarrow 2$, então $x \neq 2$ e, portanto, $\sqrt{x} - \sqrt{2} \neq 0$.

Como os limites laterais em 2 existem mas são diferentes, então dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \text{ não existe!}$$

Questão 6

(b) Use aproximação linear para estimar $\cos 59^\circ$.

Seja $f(x) = \cos x$, tal que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$, $f'(x) = -\sin x$ e $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Por aproximação linear ou Linearização de f no ponto $a = \frac{\pi}{3}$, temos:

$$\begin{aligned} L(x) &= f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \\ L(x) &= f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ L(x) &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Queremos estimar o valor de $\cos 59^\circ = \cos(60^\circ - 1^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right)$.

Logo,

$$L\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$$

Para valores próximos a $\frac{\pi}{3}$ temos $L(x) \approx f(x)$ e, portanto, podemos dizer que

$$\cos 59^\circ \approx L\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{180}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{360}$$

Questão 7

(a) Suponha que $f'(x) = (\ln x)(x^2 - 1)(x - 2)^3$. Analise o crescimento e o decrescimento de f .

Embora não tenhamos a função f , pela análise de sua função derivada f' podemos chegar a conclusão de que $D(f) = D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Analisando a primeira derivada, temos:

(0) --- (1) + + + + + + + + + + + + + + +	$(\ln x)$
(0) --- (1) + + + + + + + + + + + + + + +	$(x^2 - 1)$
(0) --- --- --- --- --- (2) + + + + + + + + + + +	$(x - 2)^3$
(0) --- (1) --- --- (2) + + + + + + + + + + +	$f'(x)$

Como $f'(x) > 0$ quando $x > 2$ e $f'(x) < 0$ quando $0 < x < 2$, f é crescente em $(2, \infty)$ e f é decrescente em $(0, 2)$.

Questão 7.

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

* *Potência indeterminada* 1^∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}}.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} ; \text{Quociente indeterminado } \frac{0}{0}$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x + 1}{e^x + x}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} e^x + \lim_{x \rightarrow 0} 1}{\lim_{x \rightarrow 0} e^x + \lim_{x \rightarrow 0} x} = \frac{e^0 + 1}{e^0 + 0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x + x)^{\frac{1}{x}}} = e^2.$$

Questão 8.

(a) Usando a derivação implícita, encontre y' , sendo $y^2 = x \cdot \arccos(x + y) - \pi$.

Derivando implicitamente, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}[x \cdot \arccos(x + y)] - \frac{d}{dx}(\pi) \\ 2y \cdot \frac{dy}{dx} &= \arccos(x + y) - \frac{x}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} \left[1 + \frac{dy}{dx}\right] - 0 \\ \frac{dy}{dx} \cdot \left[2y + \frac{x}{\sqrt{1 - (x + y)^2}}\right] &= \arccos(x + y) - \frac{x}{\sqrt{1 - (x + y)^2}} \\ y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{\arccos(x + y) \cdot \sqrt{1 - (x + y)^2} - x}{2y \cdot \sqrt{1 - (x + y)^2} + x}\end{aligned}$$

Questão 8

(b) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 1} - x^3)$.

* *Diferença indeterminada* : " $\infty - \infty$ "

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6 + 1} - x^3) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\sqrt{x^6 + 1} - x^3) \cdot \frac{\sqrt{x^6 + 1} + x^3}{\sqrt{x^6 + 1} + x^3} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^6 + 1} + x^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^6 + 1}}_{+\infty} + \underbrace{x^3}_{+\infty}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^6 + 1} + x^3}_{+\infty}} = 0.
 \end{aligned}$$

Questão 9

(a) Sendo $f'(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x - 2}$, $x \neq 2$, determine a primitiva de f' que passa pelo ponto (1,2).

Seja $p(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$, $p(2) = 8 + 12 - 18 - 2 = 0$. Portanto, 2 é raiz do polinômio $p(x)$. Dividindo $p(x)$ por $(x - 2)$ utilizando o dispositivo prático de Briot – Ruffini, obtemos:

Dispositivo Prático de Briot – Ruffini					
		$p(x)$			
		$1x^3 + 3x^2 - 9x - 2$			
raiz	2	1	3	-9	-2
					coeficientes
		1	5	1	0
		$1x^2 + 5x + 1$			

$$f'(x) = x^2 + 5x + 1$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x + C$$

Como o gráfico de f passa pelo ponto (1,2) então $f(1) = 2$.

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{5}{2} + 1 + C = 2$$

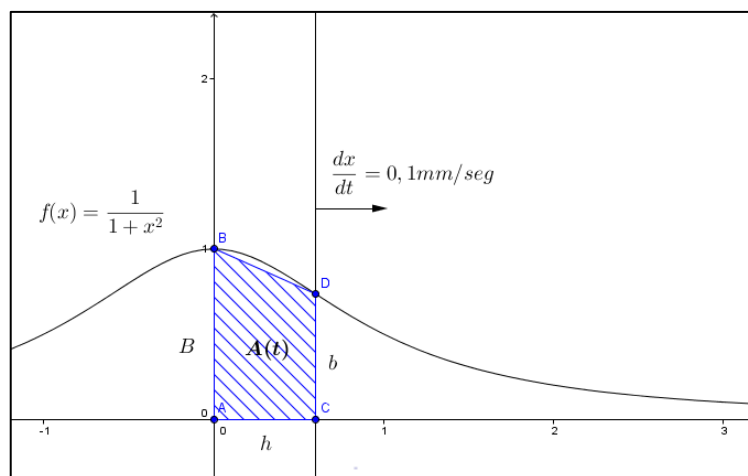
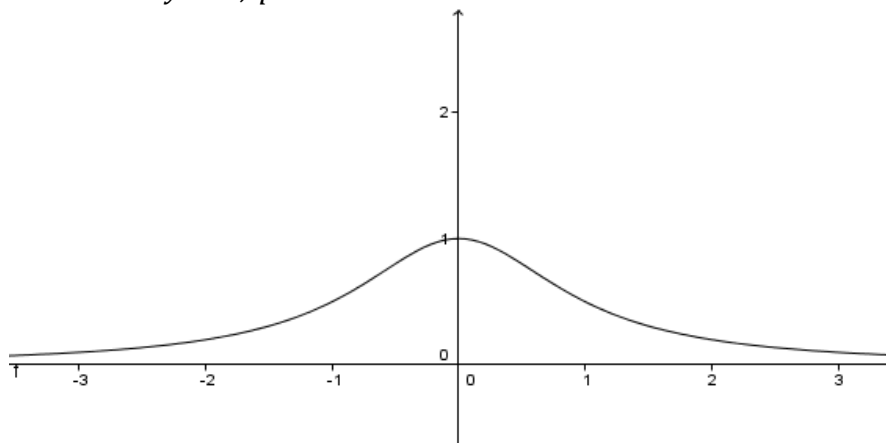
$$\frac{2 + 15 + 6}{6} + C = 2$$

$$\frac{23}{6} + C = 2 \therefore C = -\frac{11}{6}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x - \frac{11}{6}$$

Questão 9

(b) A figura abaixo é o gráfico da curva $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Há uma reta vertical que se desloca da esquerda para a direita, a partir da reta $x = 0$ e a uma velocidade de $0,1 \text{ mm/seg}$. Com que velocidade está aumentando a área do trapézio determinado pelas interseções das retas verticais citadas com a curva e com a reta $y = 0$, quando $x = 1$?



$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2} ; A(x) = \frac{(1 + f(x)) \cdot x}{2}$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dx} = A'(x) = \frac{1}{2} [1 + f(x) + x \cdot f'(x)] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \right]$$

Quando $x = 1$, temos:

$$\left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=1} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{4} \right] = \frac{1}{2} \text{ mm}^2 / \text{mm}$$

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{x=1} = \left. \frac{dA}{dx} \right|_{x=1} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \times 0,1 = 0,05 \text{ mm}^2 / \text{s}$$

Portanto, a área do trapézio está aumentando à taxa de $0,05 \text{ mm}^2 / \text{s}$ quando $x = 1$.

Questão 10

(a) Classifique a descontinuidade da função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ 4 - x, & x \geq 1 \end{cases}$ como removível, tipo salto ou infinita.

Tipos de descontinuidade:

1) *Removível: descontinuidade caracterizada por $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe mas $f(a)$ não está definido ou, caso esteja definido, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.*

2) *Salto: descontinuidade caracterizada por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existem, porém $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ e, portanto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ não existe.*

3) *Infinita: descontinuidade caracterizada por $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$. Neste caso, dizemos que a reta $x = a$ é assíntota vertical do gráfico da função $f(x)$.*

Calculando $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, temos:

Se x está próximo de 1 e x maior que 1, então

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 - \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 4 - 1 = 3.$$

Se x está próximo de 1 e x menor que 1, então

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 - 1 = 0.$$

Como os limites laterais em 1 existem, mas são diferentes, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ não existe. Pelas definições supracitadas, concluímos que f possui uma descontinuidade tipo salto em $x = 1$.

Questão 10

(b) Sendo $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}}$, determine $f'(x)$, como uma potência de e .

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x}} = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 - \operatorname{tgh} x} \cdot \frac{1 + \operatorname{tgh} x}{1 + \operatorname{tgh} x}} = \sqrt[4]{\frac{(1 + \operatorname{tgh} x)^2}{1 - \operatorname{tgh}^2 x}};$$

* Identidade Hiperbólica: $1 - \operatorname{tgh}^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{(1 + \operatorname{tgh} x)^2}{\operatorname{sech}^2 x}} = \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{\operatorname{sech} x}}$$

$$\frac{1 + \operatorname{tgh} x}{\operatorname{sech} x} = \frac{1 + \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}{\frac{2}{e^x + e^{-x}}} = \frac{\frac{2e^x}{e^x + e^{-x}}}{\frac{2}{e^x + e^{-x}}} = \frac{2e^x}{2} = e^x$$

$$f(x) = \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}.$$

Capítulo 17

2016.2

2.1 1ª Prova – 17 de Fevereiro de 2017

Questão 1.

a) Estude a continuidade da função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x + 3}, & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \cotg x, & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{cosec} x, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$

b) Remova, onde for possível, as descontinuidades de $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Questão 2.

a) Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sen x) \cdot [\cos(1 + \log_2 x)]$.

Questão 3.

a) Determine as coordenadas dos pontos onde as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{3x + 4}{\sqrt{4x^2 - 7}}$ intercepta o eixo das ordenadas.

b) Mostre que a reta $x = -2$ é a única assíntota vertical do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$.

Questão 4.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a + 2)x + 2a}{a^4 - x^4}$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -1^+} |x^2 - 9x - 10| - 2$

Questão 5.

a) Se $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$, mostre que $\lim_{x \rightarrow 2} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket)$ existe, mas que é diferente de $f(2)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$ ou mostre que ele não existe.

Questão 1.

$$a) \text{ Estude a continuidade da função } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x + 3}, & \text{se } x < -\frac{\pi}{2} \\ \cotg x, & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{cosec} x, & \text{se } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

A continuidade de uma função definida por partes (ou trechos) será dada pela continuidade de cada função que a compõe considerando o intervalo onde estão definidas para a função f .

* A função racional polinomial $\frac{x^2 + 1}{x + 3}$ é contínua em $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$, porém como esta função é válida para $x < -\frac{\pi}{2}$, temos que f é contínua em $(-\infty, -3) \cup (-3, -\pi/2)$.

* A função $\cotg x$ é contínua em seu domínio, isto é, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$. Como esta função é válida para $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, temos que f é contínua em $(-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$, uma vez que em 0 a função $\cot x$ não está definida.

* A função $\operatorname{cosec} x$ é contínua em seu domínio, isto é, $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$. Como esta função é válida para $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ então f é contínua em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Com esta análise, podemos afirmar que f é descontínua em -3 e em 0 , uma vez que f não está definida nesses números. A saber, nesses números a descontinuidade é infinitas: as retas $x = -3$ e $x = 0$ são assíntotas verticais do gráfico de f .

Analisando a continuidade de f em $x = \{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ temos:

$$* f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cotg\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \cotg x = \cotg\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} \frac{x^2 + 1}{x + 3} = \frac{\frac{\pi^2}{4} + 1}{-\frac{\pi}{2} + 3} = \frac{\pi^2 + 4}{12 - \pi}.$$

Como $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$, f é descontínua em $-\frac{\pi}{2}$. Esta descontinuidade é do tipo salto.

$$* f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x = \cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$* \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 1.$$

Como $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x)$, f é descontínua em $\frac{\pi}{2}$. Esta descontinuidade é do tipo salto.

Logo, f é contínua em $(-\infty, \pi) - \left\{-3, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

$$b) \text{ Remova, onde for possível, as descontinuidades de } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & \text{se } x < 0 \\ \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Classificamos a descontinuidade de uma função f em um número a como removível se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, mas $f(a)$ não está definido.

Analisando o domínio da função f temos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0, x < 0 \vee x^2 - 4x + 3 \neq 0, x \geq 0\}$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\}$$

$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1, 3\}$$

Com isso, concluímos que f é descontínua em nos números $a = \{-1, 1, 3\}$.

Além disso, como $f(0)$ está definido, caso exista descontinuidade em 0, esta não será removível.

Analisando as descontinuidades em $a = \{-1, 1, 3\}$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)}; \text{ se } x \rightarrow -1, \text{ então } x \neq -1. \text{ Portanto, } x + 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 2)}{(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3.$$

* Como $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe e $f(-1)$ não está definido, então f possui uma descontinuidade removível em -1 .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)}; \text{ se } x \rightarrow 1, \text{ então } x \neq 1. \text{ Portanto, } x - 1 \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x - 3} = \frac{1}{1 - 3} = -\frac{1}{2}.$$

* Como $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe e $f(1)$ não está definido, então f possui uma descontinuidade removível em 1.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\overbrace{x-1}^2}{\underbrace{x^2 - 4x + 3}_{0^+}} = +\infty$$

Como $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \infty$, então f possui uma descontinuidade infinita em 3. Logo, f só possui duas descontinuidades removíveis. Removendo essas descontinuidades definimos uma nova função f^* da seguinte forma:

$$f^*(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}, & \text{se } x < 0 \text{ e } x \neq -1 \\ -3, & \text{se } x = -1 \\ \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } x \neq 1 \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Questão 2.

a) Sejam $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

Se f e g são funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$, então f e g são contínuas em $\mathbb{R}$. Portanto, estas funções são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$.

Considere a função $h(x) = f(x) - g(x)$. Como h é definida pela diferença entre funções contínuas em $[a, b]$ então h é contínua em $[a, b]$. Logo,

$$h(a) = f(a) - g(a) \Rightarrow h(a) < 0$$

$$h(b) = f(b) - g(b) \Rightarrow h(b) > 0$$

Como h é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e 0 é um número entre $h(a)$ e $h(b)$ então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in (a, b)$ tal que $h(c) = 0$.

$$\text{Onde } h(c) = 0 \Rightarrow f(c) - g(c) = 0 \therefore f(c) = g(c).$$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \cdot [\cos(1 + \log_2 x)]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$ temos:

$$-1 \leq \cos(1 + \log_2 x) \leq 1$$

Se $x \rightarrow 0^+$, então $\sin x > 0$ e, portanto,

$$-\sin x \leq (\sin x) \cdot [\cos(1 + \log_2 x)] \leq \sin x$$

Sejam $f(x) = -\sin x$, $g(x) = (\sin x) \cdot [\cos(1 + \log_2 x)]$ e $h(x) = \sin x$. Então,

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x) \forall x \in \mathbb{R}$, com $x > 0$, exceto possivelmente em 0, e ainda, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$, pelo Teorema do Confronto, temos $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$.

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x) \cdot [\cos(1 + \log_2 x)] = 0$$

Questão 3.

a) Determine as coordenadas dos pontos onde as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}}$ intercepta o eixo das ordenadas.

Domínio da função f : $D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ ou } x > \frac{\sqrt{7}}{2} \right\}$

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função f se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2 \left(1 - \frac{7}{4x^2}\right)}}; \quad \sqrt{4x^2} = 2|x|. \text{ se } x \rightarrow \infty, \text{ então } \sqrt{4x^2} = 2x. \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+4}{2x \sqrt{1 - \frac{7}{4x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{2 \sqrt{1 - \frac{7}{4x^2}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x}}{2 \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{4x^2}}} \\ &= \frac{3+0}{2\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Logo, a reta $y = 3/2$ é assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2-7}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{4x^2 \left(1 - \frac{7}{4x^2}\right)}}; \quad \sqrt{4x^2} = 2|x|. \text{ se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } \sqrt{4x^2} = -2x. \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+4}{-2x \sqrt{1 - \frac{7}{4x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{-2 \sqrt{1 - \frac{7}{4x^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x}}{-2 \sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{4x^2}}} \\
&= \frac{3 + 0}{-2 \sqrt{1 - 0}} = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, a reta $y = -3/2$ é assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.

Interseções das assíntotas horizontais com o eixo das ordenadas:

$$A = (0, 3/2) \text{ e } B = (0, -3/2)$$

b) Mostre que a reta $x = -2$ é a única assíntota vertical do gráfico da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}.$$

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico da função $f(x)$ se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição supracitada, as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função f . Neste caso, analisando o domínio de f , temos:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 2 \neq 0\}$$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq 1\}$$

Logo, f é descontínua em -2 e 1 . Verificando a descontinuidade ...

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}; \quad \text{se } x \rightarrow 1, \text{ então } x \neq 1 \text{ e} \\
&\quad \text{portanto, } x-1 \neq 0. \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+2} \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 2} \\
&= \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Portanto, a reta $x = 1$ não é assíntota vertical do gráfico de $f(x)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\overbrace{x^2 - 1}^3}{\underbrace{x^2 + x - 2}_{0^-}} = -\infty
\end{aligned}$$

Portanto, a reta $x = -2$ é assíntota vertical do gráfico de $f(x)$ e como em 1 f possui uma descontinuidade removível, então a reta $x = -2$ é a única assíntota vertical do gráfico de $f(x)$.

Questão 4.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{a^4 - x^4}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{a^4 - x^4} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-2)}{(a^2 - x^2)(a^2 + x^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-2)}{(a-x)(a+x)(a^2 + x^2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-2)}{-(x-a)(a+x)(a^2 + x^2)}; \quad * \text{ Obs.: se } x \rightarrow a, \text{ então } x \neq a \\
 &\quad \text{e portanto, } x - a \neq 0. \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} -\frac{x-2}{(a+x)(a^2 + x^2)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} (-x+2)}{\lim_{x \rightarrow a} (a+x) \times \lim_{x \rightarrow a} (a^2 + x^2)} \\
 &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} -x + \lim_{x \rightarrow a} 2}{\left[\lim_{x \rightarrow a} a + \lim_{x \rightarrow a} x \right] \times \left[\lim_{x \rightarrow a} a^2 + \lim_{x \rightarrow a} x^2 \right]} \\
 &= \frac{-a + 2}{[a + a] \cdot [a^2 + a^2]} = \frac{-a + 2}{4a^3} = -\frac{a-2}{4a^3}
 \end{aligned}$$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -1^+} |x^2 - 9x - 10| - 2$

$$* \text{ Obs.: } |x^2 - 9x - 10| = \begin{cases} x^2 - 9x - 10, & x \leq 1 \text{ ou } x \geq 10 \\ -(x^2 - 9x - 10), & 1 < x < 10 \end{cases}.$$

* Obs.: se $x \rightarrow 1^+$, então $x > 1$. Portanto, $|x^2 - 9x - 10| = -(x^2 - 9x - 10)$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -1^+} |x^2 - 9x - 10| - 2 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 9x + 10 - 2) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 9x + 8) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -1^+} -x^2 + \lim_{x \rightarrow -1^+} 9x + \lim_{x \rightarrow -1^+} 8 \\
 &= -(-1)^2 + 9 \times (-1) + 8 \\
 &= -1 - 9 + 8 \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

Questão 5.

a) Se $f(x) = \llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket$, mostre que $\lim_{x \rightarrow 2} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket)$ existe, mas que é diferente de $f(2)$.

$$f(2) = \llbracket 2 \rrbracket + \llbracket -2 \rrbracket = 2 - 2 = 0$$

* Obs.: se $x \rightarrow 2^+$, então $x > 2$ e, portanto, $\llbracket x \rrbracket = 2$. Por outro lado, $-x < -2$ e, portanto, $\llbracket -x \rrbracket = -3$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket x \rrbracket + \lim_{x \rightarrow 2^+} \llbracket -x \rrbracket = 2 - 3 = -1.$$

* Obs.: se $x \rightarrow 2^-$, então $x < 2$ e, portanto, $\llbracket x \rrbracket = 1$. Por outro lado, $-x > -2$ e, portanto, $\llbracket -x \rrbracket = -2$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (\llbracket x \rrbracket + \llbracket -x \rrbracket) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket x \rrbracket + \lim_{x \rightarrow 2^-} \llbracket -x \rrbracket = 1 - 2 = -1.$$

Como os limites laterais de f em 2 existem e são iguais, isto é, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ então $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$.

Entretanto, $f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Ou seja, f é descontínua em 2.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx})$ ou mostre que ele não existe.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{x^2 + bx}}{\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{x^2 + bx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax - (x^2 + bx)}{\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{x^2 + bx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - bx}{\sqrt{x^2 + ax} + \sqrt{x^2 + bx}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(a - b)}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{a}{x}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{b}{x}\right)}}; \text{ * Obs.: } \sqrt{x^2} = |x| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(a - b)}{|x| \sqrt{1 + \frac{a}{x}} + |x| \sqrt{1 + \frac{b}{x}}}; \text{ se } x \rightarrow \infty, \text{ então } |x| = x. \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(a - b)}{x \sqrt{1 + \frac{a}{x}} + x \sqrt{1 + \frac{b}{x}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a - b}{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + \sqrt{1 + \frac{b}{x}}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} a - \lim_{x \rightarrow \infty} b}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x}} + \sqrt{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{x}}} \\ &= \frac{a - b}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} \\ &= \frac{a - b}{2}. \end{aligned}$$

2.2 1ª Prova – 18 de Fevereiro de 2017

Questão 1.

a) Determine os valores de c para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} |2x - 3|, & x \geq -2 \\ cx + 1, & x < -2 \end{cases}.$$

b) Encontre os valores de a para que f seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x < a \\ -1, & \text{se } x \geq a \end{cases}.$$

Questão 2.

a) Mostre que a função $f(x) = x^3 - 4x + 2$ possui três raízes reais distintas.

b) Determine as assíntotas horizontais do gráfico da função $f(x) = \frac{\llbracket x \rrbracket}{x^2 + 1}$.

Questão 3.

a) Determine os valores de a para que o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2ax + a}$ tenha apenas uma assíntota vertical. Para cada valor de a dê a equação da assíntota.

b) Encontre o valor do inteiro positivo n para que a reta $y = 1$ seja assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^n - 1}$.

Questão 4.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{5x + 4};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right];$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}};$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}.$

Questão 1.

a) Determine os valores de c para que a função f seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} |2x - 3|, & x \geq -2 \\ cx + 1, & x < -2 \end{cases}.$$

$$* \text{ Obs.: } |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3, & \text{se } x \geq 3/2 \\ -(2x - 3), & \text{se } x < 3/2 \end{cases}$$

f é uma função definida por partes, onde a função modular $|2x - 3|$ é contínua em $\mathbb{R}$ assim como a função polinomial $(cx + 1)$, mas como estas funções estão definidas em intervalos diferentes, concluímos apenas que f é contínua em $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$. Portanto, para que f seja contínua em $\mathbb{R}$ é condição suficiente que f seja contínua em -2 . Logo, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$.

$$* f(-2) = |2 \times (-2) - 3| = |-4 - 3| = |-7| = 7.$$

$$* \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} |2x - 3| = \lim_{x \rightarrow -2^+} -(2x - 3) = -(-4 - 3) = 7$$

$$* \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (cx + 1) = -2c + 1.$$

Primeiramente, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ deve existir e para tanto ...

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \\ -2c + 1 &= 7 \\ 2c &= -6 \therefore c = -3 \end{aligned}$$

Com $c = -3$, temos $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 7$, ou seja, f é contínua em -2 e, com a continuidade analisada acima, concluímos que f é contínua em $\mathbb{R}$ para $c = -3$.

b) Encontre os valores de a para que f seja contínua em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x < a \\ -1, & \text{se } x \geq a \end{cases}.$$

f é uma função definida por partes, onde a primeira sentença é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. Logo f é contínua em $(-\infty, a)$. Já a segunda sentença é uma função constante, também contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, f é contínua em $(a, +\infty)$. Com essa análise, para que f seja contínua em $\mathbb{R}$ é condição suficiente que f seja contínua em a . Logo, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

$$* f(a) = -1$$

$$* \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} -1 = -1.$$

$$* \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} (x^2 + 2x) = a^2 + 2a$$

Primeiramente, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ deve existir e para tanto ...

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \\ a^2 + 2a &= -1 \\ a^2 + 2a + 1 &= 0 \\ (a + 1)^2 &= 0 \therefore a = -1 \end{aligned}$$

Com $a = -1$ temos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = -1$, ou seja, f é contínua em a e, com o intervalo de continuidade definido anteriormente, f é contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 2.

(a) Mostre que a função $f(x) = x^3 - 4x + 2$ possui três raízes reais distintas.

f é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua em todo intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$.

$$* f(0) = 0^3 - 4 \times 0 + 2 = 2$$

$$* f(1) = 1^3 - 4 \times 1 + 2 = -1$$

$$* f(2) = 2^3 - 4 \times 2 + 2 = 2$$

$$* f(-3) = (-3)^3 - 4 \times (-3) + 2 = -13$$

Como f é contínua em todo intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$, então f é contínua nos intervalos fechados $[-3,0]$, $[0,1]$ e $[1,2]$. E ainda, 0 é um número entre $f(-3)$ e $f(0)$, assim como, entre $f(0)$ e $f(1)$ e entre $f(1)$ e $f(2)$ então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existem números $c_1 \in (-3,0)$, $c_2 \in (0,1)$ e $c_3 \in (1,2)$ tais que $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$. Ou seja, f possui três raízes reais distintas.

(b) Determine as assíntotas horizontais do gráfico da função $f(x) = \frac{[x]}{x^2 + 1}$.

Dizemos que a reta $y = L$ é assíntota horizontal do gráfico da função f se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Sobre a função $[x]$ temos a seguinte desigualdade:

$$x - 1 < [x] \leq x$$

Como $(x^2 + 1) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então temos

$$\frac{x - 1}{x^2 + 1} < \frac{[x]}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

Seja $g(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$ e $h(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, então

$$g(x) < f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0 - 0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Se $g(x) < f(x) \leq h(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$, assim como $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 0$, pelo Teorema do Confronto temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[x]}{x^2 + 1} = 0 \end{aligned}$$

Logo, a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$

Questão 3.

a) Determine os valores de a para que o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2ax + a}$ tenha apenas uma assíntota vertical. Para cada valor de a dê a equação da assíntota.

Domínio da função f :

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2ax + a \neq 0\}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 - 2ax + a}$$

Vamos analisar duas situações distintas: a primeira considerando que f possui apenas uma descontinuidade e a segunda que possui duas descontinuidades sendo uma delas removível.

Situação 1. Se f possui apenas uma descontinuidade, implica dizer que $x^2 - 2ax + a$ possui raiz única com multiplicidade 2. Isto é, $(x^2 - 2ax + a)$ é um quadrado perfeito.

$$\begin{aligned} (x^2 - 2ax + a) &= (x - a)^2 \\ x^2 - 2ax + a &= x^2 - 2ax + a^2 \\ a &= a^2 \\ a^2 - a &= 0 \\ a(a - 1) &= 0 \\ \therefore a &= 0 \quad \text{ou} \quad a = 1 \end{aligned}$$

* Para $a = 0$, temos:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2} ; \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{x^2 + x - 2}^{-2}}{\underbrace{x^2}_{0^+}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = 0$ é assíntota vertical única do gráfico de f para $a = 0$.

* Para $a = 1$, temos:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} ; D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\overbrace{x+2}^3}{\underbrace{x-1}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 1$ é assíntota vertical única do gráfico de f para $a = 1$.

Situação 2. Se f possui duas descontinuidades sendo uma delas removível, então, numerador e denominador tem raiz em comum. Como na situação 1 já foi apresentado o caso em que $x = 1$ era raiz comum a ambos, resta analisar quando $x = -2$ é raiz do denominador.

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a &= 0 \\ (-2)^2 - 2a(-2) + a &= 0 \\ 4 + 4a + a &= 0 \\ 5a &= -4 \therefore a = -4/5 \end{aligned}$$

* Para $a = -4/5$ temos:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)\left(x - \frac{2}{5}\right)}; D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \text{ e } x \neq \frac{2}{5}\right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)\left(x - \frac{2}{5}\right)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-1}{x - \frac{2}{5}} = \frac{-3}{-\frac{12}{5}} = \frac{5}{4}.$$

Logo, a reta $x = -2$ não é assíntota vertical do gráfico de f para $a = -4/5$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{\overbrace{x^2 + x - 2}^{-36/25}}{\underbrace{x^2 + \frac{8}{5}x - \frac{4}{5}}_{0^+}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = \frac{2}{5}$ é assíntota vertical única do gráfico de f para $a = -4/5$.

b) Encontre o valor do inteiro positivo n para que a reta $y = 1$ seja assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^n - 1}$.

Se a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f , então

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{x^{n-2} - \frac{1}{x^2}}$$

Se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2}\right)$ existe e $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2}\right) \neq 0$, e ainda,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right). \text{ Logo,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$; como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$, então $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^{n-2} - \frac{1}{x^2} \right) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x^{n-2} = 1$.
Isso implica dizer que $x^{n-2} = x^0$ e portanto, $n = 2$.

Questão 4.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{5x + 4};$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{5x + 4} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(3 - \frac{1}{x^2} \right)}}{x \left(5 + \frac{4}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{3 - \frac{1}{x^2}}}{x \left(5 + \frac{4}{x} \right)}; \quad \text{se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } |x| = -x. \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{3 - \frac{1}{x^2}}}{x \left(5 + \frac{4}{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{3 - \frac{1}{x^2}}}{5 + \frac{4}{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x}} \\ &= -\frac{\sqrt{3 - 0}}{5 + 0} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right];$

Seja $g(x) = \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \frac{\pi}{2}$ e $f(x) = \operatorname{tg} x$. Então, $\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}.$$

* Seja $t = \sqrt[6]{x}$. Se $x \rightarrow 1$, então $t \rightarrow 1$. Ajustando o limite, obtemos ...

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t - 1)}{(t - 1)(t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t + 1} = \frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Como f é contínua em $\frac{\pi}{4}$ e $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{\pi}{4}$, então $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$.

Em outras palavras,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow 1} g(x)\right) = \operatorname{tg} \left[\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}};$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{2} + \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2} + \sqrt{x})}{(2-x)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2} + \sqrt{x})}{-(x-2)(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4})}; \quad \text{se } x \rightarrow 2, \text{ então } x \neq 2 \\ &\quad \text{portanto, } x-2 \neq 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{4}} \\ &= -\frac{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2} + \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x}}{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2} + \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{2x} + \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{4}} \\ &= -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4}} \\ &= -\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt[3]{4}} = -\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2^{\frac{5}{6}}}{3}. \end{aligned}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x^2 + x + 1 - x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}; \quad \text{se } x \rightarrow +\infty, \text{ então } \sqrt{x^2} = |x| = x. \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}{1 + \frac{1}{x}} \\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2}} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 1}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} \\
&= \frac{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2.
\end{aligned}$$

2.3 2ª Prova – 24 de Março de 2017

Questão 1.

a) Dada a relação $x^2y^2 + xy = 2$, determine os pontos da curva onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

b) Mostre que as retas normais à curva $y = (x^2 - 1)^2 \cdot (x + 1)^3$ nos pontos onde ela toca o eixo das abscissas são verticais.

Questão 2.

a) Dada $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se } 0 < x \leq \pi/4 \\ -\operatorname{cotg} x, & \text{se } \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$, determine a função $f'(x)$.

b) Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta normal a $f(x) = \operatorname{tg} x$ em $x = \pi/4$.

Questão 3.

a) Encontre a derivada da função $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}(4x)}{1 + \operatorname{tg}(4x)}}$.

b) Calcule a derivada de $y = \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{3x} - a^{-3x}}$.

Questão 4.

a) Seja $f(x) = \sin^2(2x) \cdot \sqrt[3]{\cos(2x)}$, com $x \in [0, \pi]$. Encontre $f'(x)$ e determine onde f é diferenciável.

b) Encontre a equação da reta tangente à curva $x \cdot e^y + y \cdot e^x = 1$ no ponto $(0, 1)$.

Questão 5.

a) Usando a definição de derivada, mostre que existe uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ que passa pelo ponto $(1, 2)$. Dê uma equação para esta reta.

b) Use diferenciação implícita para mostrar que se P é um ponto do círculo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, então a reta tangente em P é perpendicular ao raio CP , onde a, b, R são constantes reais e $C(a, b)$ é o centro do círculo.

Questão 1.

a) Dada a relação $x^2y^2 + xy = 2$, determine os pontos da curva onde a reta tangente é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2y^2) + \frac{d}{dx}(xy) &= \frac{d}{dx}(2) \\ 2xy^2 + 2x^2yy' + y + xy' &= 0 \\ y' &= -\frac{2xy^2 + y}{2x^2y + x} \\ y' &= -\frac{y(2xy + 1)}{x(2xy + 1)}; \text{ se } (2xy + 1) \neq 0, \\ y' &= -\frac{y}{x}\end{aligned}$$

Se a reta tangente a um ponto da curva é paralela à bissetriz dos quadrantes pares então, neste ponto $y' = -1$.

$$y' = -1 \Rightarrow -\frac{y}{x} = -1 \therefore y = x$$

Substituindo na expressão da curva $y = x$, obtemos:

$$\begin{aligned}x^4 + x^2 &= 2 \\ x^4 + x^2 - 2 &= 0\end{aligned}$$

Seja $a = x^2, a \geq 0$. Então,

$$\begin{aligned}a^2 + a - 2 &= 0 \\ \Delta &= 9 \\ a &= \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow a = 1\end{aligned}$$

* Obs.: $a = -2$ não satisfaz a condição $a \geq 0$.

Para $a = 1$, temos $x = \pm 1$, como $y = x$, então os pontos onde a reta tangente a curva é paralela à bissetriz dos quadrantes pares ($y = -x$) são:

$$A = (1,1) \text{ e } B = (-1,-1)$$

b) Mostre que as retas normais à curva $y = (x^2 - 1)^2 \cdot (x + 1)^3$ nos pontos onde ela toca o eixo das abscissas são verticais.

Pontos onde a curva toca o eixo das abscissas: $A(1,0)$ e $B(-1,0)$

Mostrar que as retas normais à curva nos pontos A e B são verticais é o equivalente dizer que as retas tangentes em A e B são horizontais, uma vez que num mesmo ponto as retas tangente e normal são ortogonais.

$$y' = 2(x^2 - 1) \cdot (2x) \cdot (x + 1)^3 + (x^2 - 1)^2 \cdot 3 \cdot (x + 1)^2 \cdot 1$$

$$y' = (x^2 - 1)(x + 1)^2[4x(x + 1) + 3(x^2 - 1)]$$

$$y' = (x^2 - 1)(x + 1)^2(7x^2 + 4x - 3)$$

$$y'_A = y'(1) = 0 \quad e \quad y'_B = y'(-1) = 0$$

Logo, as retas tangentes nos pontos onde a curva toca o eixo das abscissas são horizontais e, conseqüentemente, as retas normais nesses pontos são verticais.

Questão 2.

a) Dada $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & \text{se } 0 < x \leq \pi/4 \\ -\operatorname{cotg} x, & \text{se } \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$, determine a função $f'(x)$.

Se $0 < x + h < \pi/4$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{tg} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h} - \operatorname{tg} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} h (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h) \cdot h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} h \cdot \sec^2 x}{h \cdot (1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h)} \\ &= (\sec^2 x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h} \end{aligned}$$

$$* \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{sen} h}{h} \cdot \frac{1}{\cos h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos h} = 1 \times 1 = 1.$$

$$f'(x) = (\sec^2 x) \times 1 \times \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x \cdot 0}$$

$$f'(x) = \sec^2 x$$

Se $\pi/4 < x + h < \pi/2$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{cotg}(x+h) + \operatorname{cotg} x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{\operatorname{tg}(x+h)} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h} + \frac{1}{\operatorname{tg} x}}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} h (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{h(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} h) \cdot \operatorname{tg} x} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg} h}{h} \cdot \frac{\sec^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h)} \right] \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} h}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} h} \\
&= 1 \times \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}
\end{aligned}$$

$$f'(x) = \operatorname{cosec}^2 x.$$

Logo, uma expressão para a derivada da função f é:

$$f'(x) = \begin{cases} \sec^2 x, & \text{se } 0 < x < \pi/4 \\ \operatorname{cosec}^2 x, & \text{se } \pi/4 < x < \pi/2 \end{cases}$$

b) Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta normal a $f(x) = \operatorname{tg} x$ em $x = \pi/4$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}; \text{ Ponto } (\pi/4, 1)$$

Coefficiente angular da reta normal ao gráfico de f em $x = \pi/4$:

$$m_n = -\frac{1}{f'(\pi/4)} = -\frac{1}{\sec^2(\pi/4)} = -\cos^2(\pi/4) = -\frac{1}{2}.$$

Equação da reta normal em $(\pi/4, 1)$:

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - \pi/4)$$

Interseções com os eixos coordenados:

$$A = \left(0, \frac{\pi + 8}{8}\right) \text{ e } B = \left(\frac{\pi + 8}{4}, 0\right)$$

Área do triângulo $A0B$:

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi + 8}{8}\right) \times \left(\frac{\pi + 8}{4}\right) = \frac{(\pi + 8)^2}{64} u. A$$

Questão 3.

a) Encontre a derivada da função $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg}(4x)}{1 + \operatorname{tg}(4x)}}$.

Seja $u = 4x$, $v = \frac{1 - \operatorname{tg}(u)}{1 + \operatorname{tg}(u)}$, $y = f(v) = \sqrt{v}$. Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{df}{dv} = \frac{1}{2\sqrt{v}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{-4\sec^2(u)[1 + \operatorname{tg}(u)] - 4\sec^2(u)[1 - \operatorname{tg}(u)]}{[1 + \operatorname{tg}(u)]^2} = -\frac{8\sec^2(u)}{[1 + \operatorname{tg}(u)]^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 4$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}(4x)}{1 - \operatorname{tg}(4x)}} \cdot \left\{ -\frac{8\sec^2(4x)}{[1 + \operatorname{tg}(4x)]^2} \right\} \cdot 4$$

$$f'(x) = -16 \cdot \frac{\sec^2(4x)}{[1 + \operatorname{tg}(4x)]^2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}(4x)}{1 - \operatorname{tg}(4x)}}$$

b) Calcule a derivada de $y = \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{3x} - a^{-3x}} \cdot D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$$y = \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^{3x} - a^{-3x}} \times \frac{a^{3x}}{a^{3x}}$$

$$y = \frac{a^{6x} + 1}{a^{6x} - 1}$$

$$y' = \frac{6a^{6x} \cdot \ln a (a^{6x} - 1) - 6a^{6x} \ln a (a^{6x} + 1)}{(a^{6x} - 1)^2}$$

$$y' = -\frac{12a^{6x}}{(a^{6x} - 1)^2} \cdot \ln a$$

Questão 4.

a) Seja $f(x) = \sin^2(2x) \cdot \sqrt[3]{\cos(2x)}$, com $x \in [0, \pi]$. Encontre $f'(x)$ e determine onde f é diferenciável. $D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 2\sin(2x)\cos(2x) \cdot \sqrt[3]{\cos(2x)} + \sin^2(2x) \cdot \frac{1}{3} [\cos(2x)]^{-\frac{2}{3}} \cdot [-\sin(2x)] \cdot 2$$

$$f'(x) = \frac{6\sin(2x)\cos^2(2x) - 2\sin^3(2x)}{3\sqrt[3]{\cos^2(2x)}}; D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Com $x \in [0, \pi]$ e sabendo que $D(f') = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$, concluímos que f é diferenciável em $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, \pi\right)$.

b) Encontre a equação da reta tangente à curva $x \cdot e^y + y \cdot e^x = 1$ no ponto $(0, 1)$

Verificação: $0 \cdot e^1 + 1 \cdot e^0 = 0 + 1 = 1$ (ponto pertence à curva).

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(xe^y) + \frac{d}{dx}(ye^x) &= \frac{d}{dx}(1) \\ e^y + xe^y y' + y' e^x + ye^x &= 0 \\ y' &= -\frac{e^y + ye^x}{e^x + xe^y}\end{aligned}$$

Coefficiente angular da reta tangente em (0,1):

$$y' = -\frac{e^1 + 1e^0}{e^0 + 0e^1} = -\frac{e + 1}{1 + 0} = -(e + 1)$$

Equação da reta tangente:

$$\begin{aligned}y - 1 &= -(e + 1) \cdot (x - 0) \\ y &= -x(e + 1) + 1\end{aligned}$$

Questão 5.

a) Usando a definição de derivada, mostre que existe uma reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ que passa pelo ponto (1,2). Dê uma equação para esta reta.

Pela definição de derivada, temos

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h-1} - \sqrt[3]{x-1}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h-1} - \sqrt[3]{x-1}}{h} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-1 - (x-1)}{h \left[\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h \left[\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2} \right]} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h-1)^2} + \sqrt[3]{(x+h-1)(x-1)} + \sqrt[3]{(x-1)^2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.\end{aligned}$$

Equação geral de uma reta que passa pelo ponto (1,2):

$$y - 2 = m(x - 1)$$

Se essa reta é tangente ao gráfico de f num ponto (x, y) tal que $y = f(x)$, então $m = f'(x)$. Logo,

$$\begin{aligned}f(x) - 2 &= f'(x) \cdot (x - 1) \\ \sqrt[3]{x-1} - 2 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} (x - 1)\end{aligned}$$

$$3(x-1) - 6\sqrt[3]{(x-1)^2} = (x-1)$$

Sendo $x \neq 1$, temos:

$$\begin{aligned} 3 - 6\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1} &= 1 \\ 2 &= 6\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1} \\ \frac{1}{3} &= \frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^1} \\ \frac{1}{3} &= (x-1)^{-\frac{1}{3}} \\ \left[\frac{1}{3}\right]^{-3} &= \left[(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right]^{-3} \\ 27 &= x-1 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Logo, a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ no ponto de abscissa $x = 28$ passa pelo ponto $(1,2)$. A equação dessa reta é dada por:

$$\begin{aligned} y-2 &= f'(28).(x-1) \\ y-2 &= \frac{1}{3\sqrt[3]{(28-1)^2}}(x-1) \\ y &= \frac{1}{27}(x-1) + 2 \\ y &= \frac{1}{27}x + \frac{53}{27} \end{aligned}$$

b) Use diferenciação implícita para mostrar que se P é um ponto do círculo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, então a reta tangente em P é perpendicular ao raio CP , onde a, b, R são constantes reais e $C(a, b)$ é o centro do círculo.

Seja o ponto $P(x_o, y_o)$ um ponto do círculo. Então $(x_o - a)^2 + (y_o - b)^2 = R^2$. Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x-a)^2 + \frac{d}{dx}(y-b)^2 &= \frac{d}{dx}(R^2) \\ 2(x-a) + 2(y-b).y' &= 0 \\ y' &= -\frac{x-a}{y-b} \end{aligned}$$

No ponto (x_o, y_o) temos $y' = -\frac{x_o - a}{y_o - b}$, coeficiente angular da reta tangente.

O coeficiente angular da reta que representa o segmento CP é:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_o - b}{x_o - a}$$

O produto dos coeficientes angulares é:

$$-\frac{x_o - a}{y_o - b} \times \frac{y_o - b}{x_o - a} = -1$$

Portanto, a reta tangente em P é perpendicular ao raio CP.

2.4 2ª Prova – 25 de Março de 2017

Questão 1.

a) Para cada ponto de uma curva, a razão entre a diferença (abscissa menos ordenada) e a soma de suas coordenadas é igual ao cubo da ordenada do ponto. Mostre que não há reta tangente horizontal a essa curva.

b) Determine as equações das retas normais ao gráfico da função $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, que são verticais.

Questão 2.

a) Obtenha a função $f'(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x > 1 \\ 2x, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$

b) Mostre que são ortogonais as retas tangentes a $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no ponto de intersecção de seus gráficos.

Questão 3.

a) Calcule a derivada de $y = \operatorname{tg} \left[\sin \sqrt{\sec(x^2 + 1)} \right]$.

b) Determine a intersecção das retas tangentes à curva $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$ nos pontos de ordenada 1.

Questão 4.

a) Sabendo que $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|}$, para $x \neq 0$ e usando a regra da cadeia, determine os pontos do gráfico de $f(x) = a^{|\sin x|}$, $x \in [0, 2\pi]$ onde a reta tangente é horizontal.

b) Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha retas tangentes horizontais nos pontos $(0, 0)$ e $(-2, 6)$.

Questão 5.

a) Ache uma equação para a reta tangente ao gráfico de $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto $(2, -32)$.

b) Use a definição de derivada para mostrar que a reta que tangencia o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ no ponto de abscissa $x = 3$ tem mais dois contatos com o gráfico. Dê as abscissas dos pontos de contato.

Questão 1.

a) Para cada ponto de uma curva, a razão entre a diferença (abscissa menos ordenada) e a soma de suas coordenadas é igual ao cubo da ordenada do ponto. Mostre que não há reta tangente horizontal a essa curva.

Para cada ponto $P(x, y)$ da curva temos:

$$\frac{x - y}{x + y} = y^3 \quad (1)$$

$$x - y = xy^3 + y^4 ; x + y \neq 0 \quad (2)$$

$$x = \frac{y(1 + y^3)}{1 - y^3} ; y \neq 1 \text{ e } y \neq 0 \quad (3)$$

Derivando implicitamente a expressão da curva em relação a x , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(y) &= \frac{d}{dx}(xy^3) + \frac{d}{dx}(y^4) \\ 1 - y' &= y^3 + 3xy^2y' + 4y^3y' \\ y' &= \frac{1 - y^3}{1 + 3xy^2 + 4y^3} \end{aligned}$$

Se a curva C admite alguma reta tangente horizontal em um ponto $P(x_0, y_0) \in C$, então, $y' = 0$ neste ponto. Logo,

$$\frac{1 - y^3}{1 + 3xy^2 + 4y^3} = 0 \Leftrightarrow y^3 = 1 \therefore y = 1.$$

Porém, note que se $P(x, y)$ pertence à curva então satisfaz as condições impostas anteriormente, ou seja, $x + y \neq 0$, $y \neq 1$ e $y \neq 0$ e, portanto, como não há ponto cuja ordenada vale 1, concluímos que não existe ponto à curva cuja reta tangente é horizontal.

** Obs.: As três formas de reescrever a expressão da curva, apresentarão a mesma conclusão obtida anteriormente!*

b) Determine as equações das retas normais ao gráfico da função $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ no intervalo $0 \leq x \leq \pi$, que são verticais.

** Os pontos onde a reta normal é vertical, a reta tangente é horizontal.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x \cdot \cos x + \sin x (-\sin x) \\ f'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

Os pontos da função f onde a reta tangente é horizontal, temos $f'(x) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \\ \sin^2 x &= \cos^2 x ; \cos x \neq 0 \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} &= 1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \pm 1$$

Com $0 \leq x \leq \pi$, temos portanto $x = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$.

A reta normal nesses pontos é vertical com equação $x = x_0$, onde x_0 é a abscissa do ponto. Portanto, as retas normais são as retas verticais $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$.

Questão 2.

a) Obtenha a função $f'(x)$ para $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{se } x > 1 \\ 2x, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$

Pela definição de função derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se $x+h > 1$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 + 1] - (x^2 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}; \quad * \text{ se } h \rightarrow 0, \text{ então } h \neq 0. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x. \end{aligned}$$

Se $x+h < 1$, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h) - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x + 2h - 2x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h}; \quad * \text{ se } h \rightarrow 0, \text{ então } h \neq 0. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2 \\ &= 2. \end{aligned}$$

Uma expressão para a derivada da função f é:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x > 1 \\ 2, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

b) Mostre que são ortogonais as retas tangentes a $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ no ponto de intersecção de seus gráficos.

No ponto de intersecção, temos $f(x) = g(x)$. Isto é,

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad x > 0$$

$$x^{\frac{5}{2}} = 1 \therefore x = 1.$$

Ponto $P(1,1)$.

Coefficiente angular das retas tangentes aos gráficos de f e g no ponto P :

$$f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

$$g'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}} \Rightarrow g'(1) = -\frac{1}{2}$$

Dois retas são ditas ortogonais se o produto de seus coeficientes angulares é igual a -1 . Logo,

$$f'(1) \times g'(1) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

Portanto, as retas tangentes aos gráficos de f e g no ponto de intersecção são ortogonais.

Questão 3.

a) Calcule a derivada de $y = \operatorname{tg} \left[\operatorname{sen} \sqrt{\sec(x^2 + 1)} \right]$.

Sejam $u = x^2 + 1$, $v = \sec(u)$, $z = \sqrt{v}$ e $w = \operatorname{sen}(z)$, então $y = \operatorname{tg}(w)$.

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = [\sec^2(w)] \cdot \cos(z) \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \sec(u) \cdot \operatorname{tg}(u) \cdot 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cdot \sec^2 \left[\operatorname{sen} \sqrt{\sec(x^2 + 1)} \right] \cdot \cos \sqrt{\sec(x^2 + 1)} \cdot \sec(x^2 + 1) \cdot \tan(x^2 + 1)}{2\sqrt{\sec(x^2 + 1)}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \sec^2 \left[\operatorname{sen} \sqrt{\sec(x^2 + 1)} \right] \cdot \cos \sqrt{\sec(x^2 + 1)} \cdot \sec(x^2 + 1) \cdot \tan(x^2 + 1)}{\sqrt{\sec(x^2 + 1)}}$$

b) Determine a intersecção das retas tangentes à curva $y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$ nos pontos de ordenada 1.

$$y = 1 \Rightarrow \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2} = 1 \Rightarrow 1 + 3x^2 = 3 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$$

Pontos $A(1,1)$ e $B(-1,1)$.

Coefficiente angular das retas tangentes à curva y nos pontos A e B :

$$y' = \frac{6x(3 + x^2) - 2x(1 + 3x^2)}{(3 + x^2)^2}$$

$$y' = \frac{16x}{(3 + x^2)^2}$$

$$y'_A = \frac{16}{(3 + 1^2)^2} = \frac{16}{16} = 1.$$

$$y'_B = \frac{-16}{(3 + (-1)^2)^2} = -\frac{16}{16} = -1.$$

Equação das retas tangentes nos pontos A e B :

Ponto A $r_1: y - 1 = 1(x - 1)$
 $r_1: y = x$

Ponto B $r_2: y - 1 = -1(x + 1)$
 $r_2: y = -x$

Intersecção das retas tangentes:

$$\begin{aligned} x &= -x \\ 2x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

Ponto de intersecção : $P(0,0)$.

Questão 4.

a) Sabendo que $\frac{d}{dx}(|x|) = \frac{x}{|x|}$, para $x \neq 0$ e usando a regra da cadeia, determine os pontos do gráfico de $f(x) = a^{|\sin x|}$, $x \in [0, 2\pi]$ onde a reta tangente é horizontal.

$$f'(x) = a^{|\sin x|} \cdot \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot \cos x ; \sin x \neq 0.$$

Onde a reta tangente é horizontal, $f'(x) = 0$. Ou seja,

$$a^{|\sin x|} \cdot \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot \cos x = 0$$

* Como $a^{|\sin x|} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, com $a > 0$ e $a \neq 1$ e com a restrição $\sin x \neq 0$ para a função derivada, então ...

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

Com $x \in [0, 2\pi]$, temos $x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

b) Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha retas tangentes horizontais nos pontos $(0,0)$ e $(-2,6)$.

Primeira informação: os pontos $(0,0)$ e $(-2,6)$ pertencem ao gráfico da função. Ou seja, se $y = f(x)$, então $f(0) = 0$ e $f(-2) = 6$. Logo,

$$\begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \therefore d = 0. \\ f(-2) &= a \cdot (-2)^3 + b \cdot (-2)^2 + c \cdot (-2) = 6 \end{aligned}$$

$$-8a + 4b - 2c = 6 \quad \text{Eq.1}$$

Segunda informação: as retas tangentes em $x = 0$ e $x = -2$ são horizontais. Ou seja, $f'(0) = f'(-2) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f'(0) &= 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \therefore c = 0. \\ f'(-2) &= 3a(-2)^2 + 2b(-2) = 0 \\ 12a - 4b &= 0 \Rightarrow b = 3a \quad \text{Eq.2} \\ \begin{cases} -8a + 4b = 6 \\ b = 3a \end{cases} &\rightarrow -8a + 12a = 6 \rightarrow 4a = 6 \therefore a = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

A função cúbica em questão é $y = \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{2}x^2$.

Questão 5.

a) Ache uma equação para a reta tangente ao gráfico de $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto $(2, -32)$.

$$\text{Verificação: } \sqrt[3]{-64} = 28 - 32$$

$$-4 = -4 \quad ; \text{Ponto } (2, -32) \text{ pertence à curva!}$$

Derivando implicitamente a expressão da curva temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xy)^{\frac{1}{3}} &= \frac{d}{dx}(14x) + \frac{d}{dx}(y) \\ \frac{1}{3}(xy)^{-\frac{2}{3}} \cdot (y + xy') &= 14 + y' \\ (xy)^{-\frac{2}{3}} \cdot (y + xy') &= 42 + 3y' \\ y' &= \frac{42 - y(xy)^{-\frac{2}{3}}}{x(xy)^{-\frac{2}{3}} - 3} = \frac{42\sqrt[3]{(xy)^2} - y}{x - 3\sqrt[3]{(xy)^2}} \end{aligned}$$

No ponto $P(2, -32)$, temos:

$$y' = \frac{42\sqrt[3]{(-64)^2} - (-32)}{2 - 3\sqrt[3]{(-64)^2}} = \frac{42 \times 16 + 32}{2 - 3 \times 16} = -\frac{704}{46} = -\frac{352}{23}.$$

Equação da reta tangente no ponto $(2, -32)$:

$$\begin{aligned} y - (-32) &= -\frac{352}{23}(x - 2) \\ y &= -\frac{352}{23}x + \frac{704}{23} + 32 \\ y &= -\frac{352}{23}x + \frac{1440}{23} \end{aligned}$$

b) Use a definição de derivada para mostrar que a reta que tangencia o gráfico da função $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ no ponto de abscissa $x = 3$ tem mais dois contatos com o gráfico. Dê as abscissas dos pontos de contato. $D(f) = \mathbb{R}$

* Ponto de abscissa $x = 3$: $P(3, 2)$.

$$f(x) = |x^2 - 5x + 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, & x \leq 1 \text{ ou } x \geq 4 \\ -(x^2 - 5x + 4), & 1 < x < 4 \end{cases}$$

O coeficiente angular da reta que tangencia o gráfico de f no ponto de abscissa $x = 3$ é dado por:

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(3+h)^2 + 5(3+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9 - 6h - h^2 + 15 + 5h - 6}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{h(h+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-h - 1) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Equação da reta tangente:

$$\begin{aligned} y - 2 &= -1(x - 3) \\ y &= -x + 5 \end{aligned}$$

As demais interseções que a reta tangente em $x = 3$ pode ter com o gráfico de f se dá para $x < 1$ ou $x > 4$. Logo,

$$\begin{aligned} -x + 5 &= x^2 - 5x + 4 \\ x^2 - 4x - 1 &= 0 \\ \Delta &= 20 \end{aligned}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$
$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \text{ e } x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

Onde x_1 e x_2 são as abscissas dos pontos de contato entre a reta tangente em $x = 3$ e o gráfico de f .

2.5 3ª Prova – 28 de Abril de 2017

Questão 1.

a) Sabendo que a função $f(x) = \ln\left(\ln\left|\frac{x^2 + 2}{x - 1}\right|\right)$ é contínua em $x \neq 1$, determine onde ela é diferenciável.

b) Determine, caso existam, as retas tangentes ao gráfico de $y = \log_{10}\left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)$ que são horizontais.

Questão 2.

a) Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com o raio decrescendo a uma velocidade constante, passando de 30cm para 20cm em 45 minutos. Qual a taxa de variação do volume quando o raio está com 25cm?

b) Um farol giratório completa uma volta a cada 15 segundos. O farol está a 60 metros de P, o ponto mais próximo de uma praia retilínea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto Q, a 150 metros de P.

Questão 3.

a) Para quais valores de a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ possui valor máximo igual a 1 no ponto de abscissa 2?

b) Determine os valores de máximo e mínimo absolutos de $F(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Questão 4.

a) Defina $\arccos x$ como sendo o número $y \in [0, \pi]$, tal que $\cos y = x$ e prove que $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) Use derivação logarítmica para determinar uma equação da reta tangente à curva $y = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \cos(\pi x)}{(x^3 + 1) \cdot e^{x-1}}$.

Questão 5.

a) Mostre que qualquer função da forma $y = A \cdot \sinh(mx) + B \cdot \cosh(mx)$ satisfaz a equação $y'' = m^2 y$ e encontre y de forma que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ e $y'(0) = 6$.

b) Uma cápsula espacial tem o formato de um cilindro circular reto com uma semiesfera em cada uma das bases. O cilindro possui 4 metros de altura e 2 metros de raio da base. Use aproximação linear para estimar o aumento da área da superfície do objeto se for aplicada uma camada isolante térmica de 0,5cm de espessura.

Questão 1.

a) Sabendo que a função $f(x) = \ln\left(\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|\right)$ é contínua em $x \neq 1$, determine onde ela é diferenciável.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|} \cdot \frac{1}{\left(\frac{x^2+2}{x-1}\right)} \cdot \frac{2x(x-1) - 1 \cdot (x^2+2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|} \cdot \frac{x-1}{x^2+2} \cdot \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{[(x^2+2)(x-1)] \cdot \ln\left|\frac{x^2+2}{x-1}\right|}$$

De posse do domínio da função f , e analisando a função derivada, concluímos que $D(f) = D(f')$. Isto é, a função f é diferenciável onde está definida, ou seja, f é diferenciável em seu domínio, isto é, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

b) Determine, caso existam, as retas tangentes ao gráfico de $y = \log_{10}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ que são horizontais.

$$\text{Domínio da função: } D(y) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-1}{2x} > 0\right\}$$

$$++++(-1)----- (1)++++ (x^2-1)$$

$$----- (0)++++++ (2x)$$

$$-----(-1)++(0)---(1)++++ (x^2-1)/2x$$

$$D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

$$y' = \frac{1}{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right) \cdot \ln 10} \cdot \frac{2x(2x) - 2(x^2-1)}{(2x)^2}$$

$$y' = \frac{2x}{(x^2-1) \cdot \ln 10} \cdot \frac{2x^2+2}{(2x)^2}$$

$$y' = \frac{2(x^2+1)}{2x(x^2-1) \cdot \ln 10}$$

$$y' = \frac{x^2+1}{x(x^2-1) \cdot \ln 10}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2+1=0; \quad \nexists x \in \mathbb{R} \mid x^2+1=0$$

Logo, o gráfico da função $y = \log_{10}\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)$ não possui reta tangente horizontal.

Questão 2.

a) Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com o raio decrescendo a uma velocidade constante, passando de 30cm para 20cm em 45 minutos. Qual a taxa de variação do volume quando o raio está com 25cm?

$$\frac{dr}{dt} = \frac{r_f - r_i}{\Delta t} = \frac{20 - 30}{45} = -\frac{10}{45} = -\frac{2}{9} \text{ cm/min}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

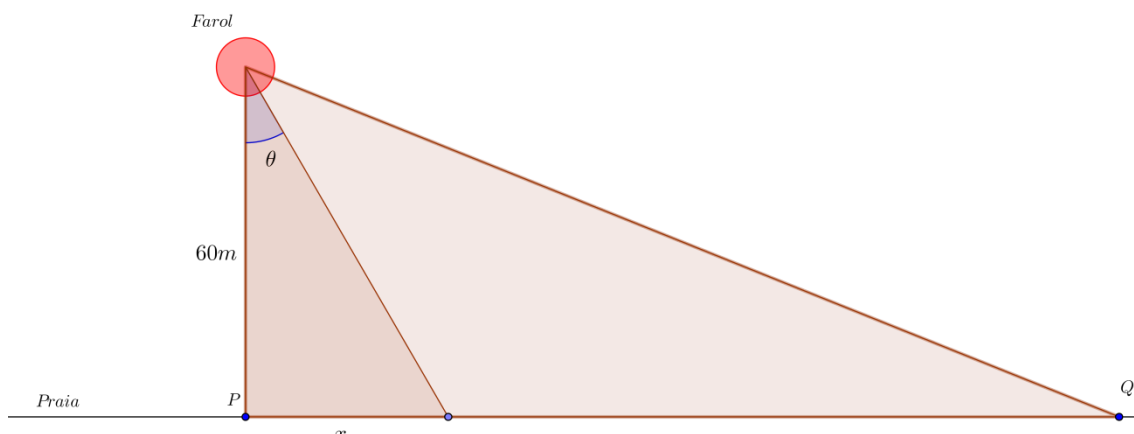
$$\frac{dV}{dt} = (4\pi r^2) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$

Quando $r = 25\text{cm}$, a taxa de variação do volume (dV/dt) é:

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{r=25\text{cm}} = (4\pi \times 25^2) \cdot \left(-\frac{2}{9}\right)$$

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{r=25\text{cm}} = -\frac{5000\pi}{9} \text{ cm}^3/\text{min}$$

b) Um farol giratório completa uma volta a cada 15 segundos. O farol está a 60 metros de P, o ponto mais próximo de uma praia retilínea. Determine a razão em que um raio de luz do farol está se movendo ao longo da praia em um ponto Q, a 150 metros de P.



$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{2\pi}{15} \text{ rad/s}$$

Pela ilustração tiramos a relação entre as variáveis x e θ dada pela expressão:

$$\text{tg } \theta = \frac{x}{60}$$

$$x = 60 \cdot \text{tg } \theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = 60 \cdot \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Quando $x = 150\text{m}$, temos $\text{tg } \theta = 5/2$ e, usando a identidade trigonométrica, obtemos:

$$\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 60 \cdot \frac{29}{4} \cdot \frac{2\pi}{15} \\ \frac{dx}{dt} &= 58\pi \text{ m/s}\end{aligned}$$

Questão 3.

a) Para quais valores de a e b a função $f(x) = axe^{bx^2}$ possui valor máximo igual a 1 no ponto de abscissa 2?

$$f(2) = 1 \Rightarrow 2ae^{4b} = 1$$

f é uma função definida pelo produto de uma função polinomial contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, por uma função exponencial também contínua e derivável em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

"Se f possui um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$ "
(Teorema de Fermat)

Daqui concluímos que $f'(2) = 0$. Logo,

$$f'(x) = ae^{bx^2} + ax \cdot (2bx) \cdot e^{bx^2}$$

$$f'(2) = ae^{4b} + 8abe^{4b}$$

$$f'(2) = e^{4b}(a + 8ab) = 0 \therefore (a + 8ab) = 0$$

$$a + 8ab = 0$$

$$a(1 + 8b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (não satisfaz a condição!)} \\ b = -\frac{1}{8} \end{cases} \therefore b = -\frac{1}{8}.$$

$$2ae^{4 \cdot (-\frac{1}{8})} = 1 \Rightarrow 2ae^{-\frac{1}{2}} = 1 \therefore a = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

b) Determine os valores de máximo e mínimo absolutos de $F(x) = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

$$D(F) = \mathbb{R}$$

Como F é contínua em $\mathbb{R}$, então F é contínua no intervalo fechado $[0, 2\pi]$.

Pelo Teorema do Valor Extremo, F assume um valor máximo absoluto

$F(c)$ e um valor mínimo absoluto $F(d)$ em algum número c e d , com $c, d \in [0, 2\pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de F nos extremos do intervalo:

$$F(0) = \frac{\cos 0}{2 + \sin 0} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$F(2\pi) = \frac{\cos 2\pi}{2 + \sin 2\pi} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

2. Os valores de F nos números crítico de F em $(0, 2\pi)$:

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x (2 + \operatorname{sen} x) - \cos x (\cos x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$F'(x) = \frac{-1 - 2 \operatorname{sen} x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$F'(x) = -\frac{1 + 2 \operatorname{sen} x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde, ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

Como F é diferenciável em $\mathbb{R}$, se F possui um número crítico c , então $F'(c)$ existe e, portanto, $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2 \operatorname{sen} x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \therefore x = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

$$F\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$F\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluímos que $(-\sqrt{3}/3)$ é o valor mínimo absoluto e $(\sqrt{3}/3)$ é o valor máximo absoluto de F no intervalo fechado $[0, 2\pi]$.

Questão 4.

a) Defina $\arccos x$ como sendo o número $y \in [0, \pi]$, tal que $\cos y = x$ e prove

que $\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\cos y)} = -\frac{1}{\operatorname{sen} y}$$

$$\operatorname{sen} y = \pm \sqrt{1 - \cos^2 y};$$

* Como $y \in [0, \pi]$ então, $\operatorname{sen} y \geq 0$ e, portanto, $\operatorname{sen} y = +\sqrt{1 - \cos^2 y}$.

Se $\cos y = x$, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

b) Use derivação logarítmica para determinar uma equação da reta tangente

à curva $y = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \cos(\pi x)}{(x^3 + 1) \cdot e^{x-1}}$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3, x \neq -1\}$$

$$\ln y = \ln \left[\frac{x^2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \cos(\pi x)}{(x^3+1) \cdot e^{x-1}} \right]$$

$$\ln y = \ln x^2 + \ln(x+3)^{\frac{1}{2}} + \ln[\cos(\pi x)] - \ln(x^3+1) - \ln e^{x-1}$$

$$\ln y = \ln x^2 + \frac{1}{2} \ln(x+3) + \ln[\cos(\pi x)] - \ln(x^3+1) - (x-1)$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x^2} \cdot (2x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+3)} \cdot 1 + \frac{1}{\cos(\pi x)} \cdot [-\pi \operatorname{sen}(\pi x)] - \frac{1}{(x^3+1)} \cdot (3x^2) - 1$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+3)} - \pi \cdot \operatorname{tg}(\pi x) - \frac{3x^2}{(x^3+1)} - 1$$

$$y' = \frac{x^2 \cdot \sqrt{x+3} \cdot \cos(\pi x)}{(x^3+1) \cdot e^{x-1}} \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{2(x+3)} - \pi \cdot \operatorname{tg}(\pi x) - \frac{3x^2}{(x^3+1)} - 1 \right]$$

Dado um ponto (x_0, y_0) do gráfico da função, a equação da reta tangente à curva é dada pela expressão:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y - y_0 = y_0 \left[\frac{2}{x_0} + \frac{1}{2(x_0+3)} - \pi \cdot \operatorname{tg}(\pi x_0) - \frac{3x_0^2}{(x_0^3+1)} - 1 \right] \cdot (x - x_0)$$

$$y = y_0 \left[\frac{2}{x_0} + \frac{1}{2(x_0+3)} - \pi \cdot \operatorname{tg}(\pi x_0) - \frac{3x_0^2}{(x_0^3+1)} - 1 \right] \cdot (x - x_0) + y_0$$

Questão 5.

a) Mostre que qualquer função da forma $y = A \cdot \operatorname{senh}(mx) + B \cdot \cosh(mx)$ satisfaz a equação $y'' = m^2 y$ e encontre y de forma que $y'' = 9y$, $y(0) = -4$ e $y'(0) = 6$.

$$y' = m \cdot A \cdot \cosh(mx) + m \cdot B \cdot \operatorname{senh}(mx)$$

$$y'' = m^2 \cdot A \cdot \operatorname{senh}(mx) + m^2 \cdot B \cdot \cosh(mx)$$

$$y'' = m^2 [A \cdot \operatorname{senh}(mx) + B \cdot \cosh(mx)]$$

$$y'' = m^2 y$$

$$y(0) = A \cdot \operatorname{senh}(0) + B \cdot \cosh(0) = 0 + B = B. \quad y(0) = -4 \therefore B = -4.$$

$$y'(0) = m \cdot A \cdot \cosh(0) + m \cdot B \cdot \operatorname{senh}(0) = m \cdot A + 0 = m \cdot A$$

$$y'(0) = 6 = m \cdot A$$

$$y'' = m^2 y = 9y \Rightarrow m^2 = 9 \therefore m = \pm 3$$

Para $m = 3$, temos $A = 2$ e para $m = -3$ temos $A = -2$. Logo, temos duas soluções possíveis:

$$y_1 = 2 \cdot \operatorname{senh}(3x) - 4 \cdot \cosh(3x)$$

$$y_2 = -2 \cdot \operatorname{senh}(-3x) - 4 \cdot \cosh(-3x)$$

Entretanto, como $\operatorname{senh}(-3x) = -\operatorname{senh}(3x)$ e $\cosh(-3x) = \cosh(3x)$, então $y_2 = y_1$. E portanto, temos apenas uma solução para questão

$$y = 2 \cdot \operatorname{senh}(3x) - 4 \cdot \cosh(3x)$$

b) Uma cápsula espacial tem o formato de um cilindro circular reto com uma semiesfera em cada uma das bases. O cilindro possui 4 metros de altura e 2 metros de raio da base. Use aproximação linear para estimar o aumento da área da superfície do objeto se for aplicada uma camada isolante térmica de 0,5cm de espessura.

$$A_T = \pi r^2 h + 2\pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$A_T = \pi r^2 h + 4\pi r^2 ; \quad h = 4m.$$

$$A_T(r) = 8\pi r^2$$

$$A_T(2) = 32\pi m^2$$

$$A'_T(r) = 16\pi r \Rightarrow A'_T(2) = 32\pi$$

Por aproximação linear, ou linearização de A_T em 2, temos:

$$L(r) = A_T(2) + A'_T(2) \cdot (r - 2)$$

$$L(r) = 32\pi + 32\pi(r - 2)$$

Se a camada isolante térmica tem 0,5cm de espessura, então $r = 2,005m$. Logo,

$$L(2,005) = 32\pi + 32\pi \cdot (2,005 - 2)$$

$$L(2,005) = 32\pi + 32\pi \cdot 0,005$$

$$L(2,005) = 32,16\pi$$

Logo, o aumento da área da superfície do objeto foi de $0,16\pi m^2$.

2.6 3ª Prova – 29 de Abril de 2017

Questão 1.

a) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$, com $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ no ponto em que a ordenada é zero.

b) Seja $F(x) = \ln[f(x)]$. Sabendo que a reta $y = 3$ é tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = 2$, determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $F(x)$ em $x = 2$.

Questão 2. Dois atletas partem ao mesmo tempo, um no sentido horário e outro no sentido anti-horário, de dois pontos diametralmente opostos de uma pista circular, com 100 metros de raio, a uma mesma velocidade, e de tal modo que o segmento de reta definido por suas posições se afasta do centro da pista a uma velocidade de 4 m/s.

a) Determine a velocidade com que os atletas se aproximam um do outro no instante em que o segmento de reta definido por suas posições está a 60 metros do centro da pista.

b) Se o treinador dos atletas estiver no ponto onde eles vão se encontrar, qual a taxa de variação do ângulo sob o qual ele vê os atletas, no instante referido no item (a)?

Questão 3.

a) Determine os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x) = 2 \sin x + \cos(2x)$, para $|x| \leq \pi$.

b) Seja $f(x) = x^2 + px + q$. Ache os valores de p e q tais que $f(1) = 3$ seja um valor extremo de f no intervalo $[0, 2]$. Este valor é máximo ou mínimo?

Questão 4.

a) Mostre que $D_x[\operatorname{arctg}(e^x)] = \frac{\operatorname{sech}(x)}{2}$.

b) Qual o valor de $a \in \mathbb{R}$ para o qual $y = a \cdot x^x + e^x$ tem reta tangente, em $x = 1$, paralela à reta $y = 2x + 3$?

Questão 5.

a) Se $x = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$, mostre que $\sec \theta = \cosh x$.

b) Se o preço de uma passagem de ônibus de Maceió para Recife for fixado em x reais, uma empresa de transporte coletivo obtém uma receita mensal de $R(x) = 1,5x - 0,01x^2$ (em milhares de reais). Dê uma estimativa da variação

da receita mensal se o preço for aumentado de R\$50,00 para R\$52,00. Use aproximação linear.

Questão 1.

a) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$, com $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ no ponto em que a ordenada é zero.

$$D(y) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Ponto em questão:

$$\begin{aligned} y &= \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| = 0 \\ |\sec x + \operatorname{tg} x| &= e^0 = 1 \\ \left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right| &= 1 \\ \left|\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right|^2 &= 1^2 \\ \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} &= 1 \\ 1 + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x &= \cos^2 x \\ 1 + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x &= 1 - \operatorname{sen}^2 x \\ 2 \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x &= 0 \\ \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x &= 0 \\ \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x + 1) &= 0 \\ \operatorname{sen} x = 0 \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} x &= -1 \end{aligned}$$

Considerando $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, o ponto em questão é o ponto (0,0).

$$y' = \frac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x} \cdot (\sec x \operatorname{tg} x + \sec^2 x)$$

$$y' = \frac{\sec x (\operatorname{tg} x + \sec x)}{\sec x + \operatorname{tg} x} ; * (\sec x + \operatorname{tg} x) \neq 0, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$y' = \sec x$$

$$y'(0) = \sec 0 = 1.$$

Equação da reta tangente em (0,0):

$$\begin{aligned} y - 0 &= 1(x - 0) \\ y &= x \end{aligned}$$

b) Seja $F(x) = \ln[f(x)]$. Sabendo que a reta $y = 3$ é tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em $x = 2$, determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $F(x)$ em $x = 2$.

Como a reta $y = 3$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 2$, então o ponto (2,3) pertence ao gráfico de f e neste ponto a reta tangente é horizontal e, portanto, $f'(2) = 0$.

$$F(2) = \ln[f(2)] = \ln 3 ; \text{ ponto } (2, \ln 3).$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$F'(2) = \frac{f'(2)}{f(2)} = \frac{0}{3} = 0.$$

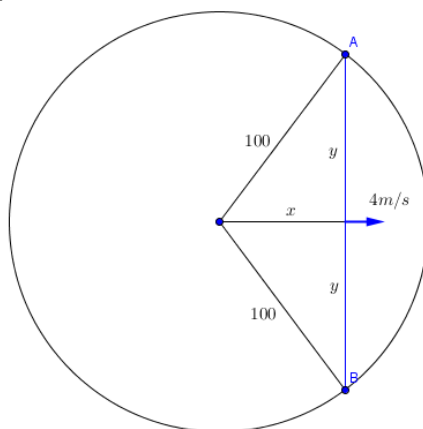
Equação da reta tangente ao gráfico de F no ponto de abscissa $x = 2$.

$$y - \ln 3 = 0(x - 2)$$

$$y = \ln 3$$

Questão 2. *Dois atletas partem ao mesmo tempo, um no sentido horário e outro no sentido anti-horário, de dois pontos diametralmente opostos de uma pista circular, com 100 metros de raio, a uma mesma velocidade, e de tal modo que o segmento de reta definido por suas posições se afasta do centro da pista a uma velocidade de 4 m/s.*

a) *Determine a velocidade com que os atletas se aproximam um do outro no instante em que o segmento de reta definido por suas posições está a 60 metros do centro da pista.*



Pela ilustração acima, temos $\frac{dx}{dt} = 4 \text{ m/s}$ e a relação entre as variáveis x, y e R é dada pela expressão:

$$x^2 + y^2 = 100^2$$

Derivando implicitamente a expressão em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2) = \frac{d}{dt}(100^2)$$

$$2x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{4x}{y}$$

No instante em que $x = 60 \text{ m}$, temos $y = 80 \text{ m}$. Logo,

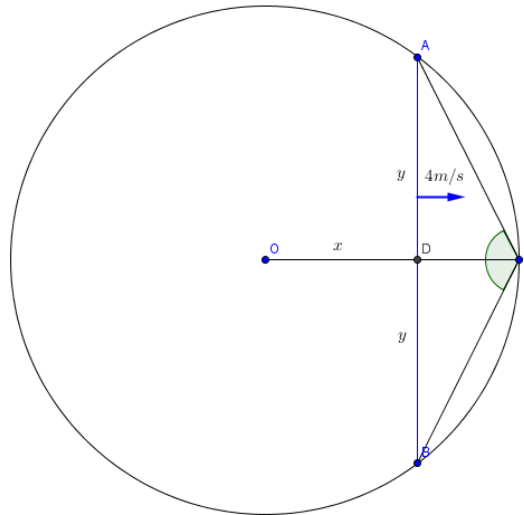
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4 \times 60}{80} \therefore \frac{dy}{dt} = -3 \text{ m/s}$$

Sendo S a distância entre os dois atletas, temos que $S = 2y$ e, portanto,

$$\frac{dS}{dt} = 2 \cdot \frac{dy}{dt} = -6 \text{ m/s}$$

Ou seja, os atletas se aproximam à taxa de 6 m/s no instante em que estão a 60 metros do centro da pista. O sinal negativo indica que a distância está diminuindo.

b) *Se o treinador dos atletas estiver no ponto onde eles vão se encontrar, qual a taxa de variação do ângulo sob o qual ele vê os atletas, no instante referido no item (a)?*



Seja $\theta = \widehat{ACB}$, como o triângulo ABC é isósceles, então $\widehat{ACD} = \widehat{DCB} = \frac{\theta}{2}$.

O segmento $\overline{OC} = \overline{OD} + \overline{DC} = 100$. Logo, $\overline{DC} = 100 - x$.

A relação entre as variáveis x, y e θ é dada pela seguinte expressão:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{100 - x}$$

Derivando implicitamente a expressão em relação ao tempo, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] &= \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{100 - x}\right) \\ \frac{1}{2} \cdot \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\frac{dy}{dt} \cdot (100 - x) - y \cdot \frac{dx}{dt}}{(100 - x)^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2}{\sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[\frac{\frac{dy}{dt} \cdot (100 - x) + y \cdot \frac{dx}{dt}}{(100 - x)^2} \right] \end{aligned}$$

No instante referido no item (a), temos $\frac{dx}{dt} = 4 \text{ m/s}$ e $\frac{dy}{dt} = -3 \text{ m/s}$.

Com $x = 60 \text{ m}$ e $y = 80 \text{ m}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} &= \frac{80}{100 - 60} = \frac{80}{40} = 2 \\ \sec^2 \frac{\theta}{2} &= 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \\ \sec^2 \frac{\theta}{2} &= 1 + 2^2 = 5. \end{aligned}$$

Com isso ...

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2}{5} \left[\frac{-3(100 - 60) + 80 \times 4}{(100 - 60)^2} \right] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2}{5} \left[\frac{-120 + 320}{1600} \right] \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{2 \times 200}{5 \times 1600} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{20} \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Questão 3.

a) Determine os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x) = 2 \sin x + \cos(2x)$, para $|x| \leq \pi$.

f é uma função contínua no intervalo fechado $[-\pi, \pi]$. Pelo Teorema do Valor Extremo, f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d , com $c, d \in [-\pi, \pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo.

$$f(-\pi) = 2 \sin(-\pi) + \cos(-2\pi) = 0 + 1 = 1$$

$$f(\pi) = 2 \sin(\pi) + \cos(2\pi) = 0 + 1 = 1$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(-\pi, \pi)$.

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = 2 \cos x - 2 \sin(2x)$$

$$f'(x) = 2 \cos x - 4 \sin x \cos x$$

$$f'(x) = 2 \cos x (1 - 2 \sin x)$$

Como f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, se f possui um número crítico c então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{ou} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \therefore x = \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) = -2 - 1 = -3$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\pi) = 2 - 1 = 1$$

$$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluímos que (-3) é o valor mínimo absoluto e $\left(\frac{3}{2}\right)$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[-\pi, \pi]$.

b) Seja $f(x) = x^2 + px + q$. Ache os valores de p e q tais que $f(1) = 3$ seja um valor extremo de f no intervalo $[0, 2]$. Este valor é máximo ou mínimo?

Se f possui um valor extremo 3 em $x = 1$, então 1 é um número crítico de f . Como f é polinomial e, portanto, contínua e derivável em $\mathbb{R}$, se 1 é número crítico de f então, $f'(1)$ existe e $f'(1) = 0$.

$$f(1) = 1^2 + p \times 1 + q = 1 + p + q = 3$$

$$f'(x) = 2x + p$$

$$f'(1) = 2 + p = 0 \therefore p = -2.$$

$$1 + p + q = 3$$

$$1 + (-2) + q = 3$$

$$q = 4$$

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \text{ e } f'(x) = 2x - 2$$

Analisando a primeira derivada de f , temos:

$$- - - - - (1) + + + + + f'(x) = 2x - 2$$

A mudança no sinal da derivada de f em 1 de negativa para positiva, indica que em $x = 1$ temos um ponto de mínimo local de f .

Outra maneira de chegar a esta conclusão é pelo Método do Intervalo Fechado, onde $f(0) = 4$, $f(2) = 4$ e $f(1) = 3$ e comparando os valores obtidos, 3 é o valor mínimo absoluto do intervalo fechado $[0, 2]$ e mínimo local da função f .

Questão 4.

a) Mostre que $D_x[\operatorname{arctg}(e^x)] = \frac{\operatorname{sech}(x)}{2}$

$$D_x[\operatorname{arctg}(e^x)] = \frac{1}{1 + e^{2x}} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + \frac{e^{2x}}{e^x}} = \frac{1}{e^{-x} + e^x}$$

$$\frac{\operatorname{sech}(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{Logo, } D_x[\operatorname{arctg}(e^x)] = \frac{\operatorname{sech}(x)}{2}.$$

b) Qual o valor de $a \in \mathbb{R}$ para o qual $y = a \cdot x^x + e^x$ tem reta tangente, em $x = 1$, paralela á reta $y = 2x + 3$?

Em resumo ... determine o valor de a tal que $y'(1) = 2$. Esta é a interpretação do enunciado.

Primeiramente vamos precisar determinar a derivada da função $g(x) = x^x$.

$$\ln g(x) = x \cdot \ln x$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1$$

$$g'(x) = g(x)[\ln x + 1] \therefore D_x[x^x] = x^x(\ln x + 1)$$

$$y' = a \cdot x^x \cdot (\ln x + 1) + e^x$$

$$y'(1) = a + e = 2$$

$$\therefore$$

$$a = 2 - e.$$

Questão 5.

a) Se $x = \ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)$, mostre que $\sec \theta = \cosh x$.

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$e^x = e^{\ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)} = \sec \theta + \operatorname{tg} \theta$$

$$e^{-x} = e^{-\ln(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)} = \frac{1}{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}$$

$$\cosh x = \frac{(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) + \frac{1}{\sec \theta + \operatorname{tg} \theta}}{2} = \frac{(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)^2 + 1}{2(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)}$$

$$\cosh x = \frac{\sec^2 \theta + 2 \sec \theta \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}^2 \theta + 1}{2(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)} ; \operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

$$\cosh x = \frac{2 \sec^2 \theta + 2 \sec \theta \operatorname{tg} \theta}{2(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)}$$

$$\cosh x = \frac{2 \sec \theta (\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)}{2(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta)}$$

$$\cosh x = \sec \theta.$$

b) Se o preço de uma passagem de ônibus de Maceió para Recife for fixado em x reais, uma empresa de transporte coletivo obtém uma receita mensal de $R(x) = 1,5x - 0,01x^2$ (em milhares de reais). Dê uma estimativa da variação da receita mensal se o preço for aumentado de R\$50,00 para R\$52,00. Use aproximação linear.

Quando $x = 50$, temos $R(50) = 1,5 \times 50 - 0,01 \times 50^2 = 75 - 25 = 50$.

$R'(x) = 1,5 - 0,02x$; $R'(50) = 1,5 - 1,0 = 0,5$.

A linearização ou aproximação linear de R em $x = 50$ é dada por:

$$L(x) = R(50) + R'(50) \cdot (x - 50)$$

$$L(x) = 50 + 0,5(x - 50)$$

$$L(52) = 50 + 0,5(52 - 50)$$

$$L(52) = 50 + 1,0$$

$$L(52) = 51.$$

Logo, a variação da receita mensal se o preço for aumentado de R\$50,00 para R\$52,00 é dado por $L(52) - R(50) = 51 - 50 = 1$. Ou seja, a variação da receita é de 1 milhar de reais.

2.7 4ª Prova – 19 de Maio de 2017

Questão 1. Dividindo-se um arame de comprimento L em duas partes, faz-se com uma delas uma circunferência e com a outra, um quadrado. Em que ponto se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas seja mínima?

Questão 2.

a) Use o Cálculo para demonstrar a Identidade Fundamental Trigonométrica: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, $\forall x > 0, \sqrt{x+1} < \frac{x+2}{2}$.

Questão 3.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$;

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{b}{x}}$.

Questão 4.

a) Determine $f(x)$, sabendo que $f'(x) = \sec^2 x + \frac{\sin(2x)}{\cos x}$ e que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

b) Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b e c de modo que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1, 2)$ e que a inclinação da reta tangente no ponto de inflexão seja -2 .

Questão 5. Dada a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}, & \text{se } x \geq -2 \text{ e } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$,

i) Determine os intervalos onde ela é crescente e os intervalos onde ela é decrescente;

ii) Descreva as concavidades;

iii) Encontre seus pontos de máximo e mínimo relativos e absolutos, se existirem;

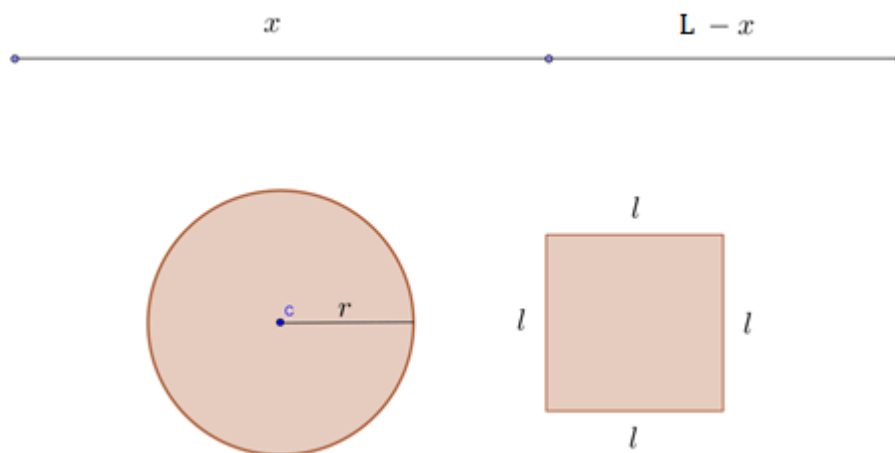
iv) Determine suas assíntotas, se existirem;

v) Aponte seus pontos de inflexão, caso existam.

DADO: $f'(x) = 1 - 8x^{-3}$.

De posse destas informações, trace o gráfico de f .

Questão 1. Dividindo-se um arame de comprimento L em duas partes, faz-se com uma delas uma circunferência e com a outra, um quadrado. Em que ponto se deve cortar o arame para que a soma das áreas geradas seja mínima?



* Vamos considerar que uma parte x do fio será usada para fazer o círculo, enquanto que a parte $y = L - x$ será usada na confecção do quadrado. Logo,

$$C = 2\pi r = x \quad \text{e} \quad P = 4l = L - x$$

— Dessas expressões, tiramos os valores de r e l em função do pedaço do fio:

$$r = \frac{x}{2\pi} \quad \text{e} \quad l = \frac{L - x}{4}$$

* A área total obtida pelo círculo mais o quadrado é:

$$A = A_{\text{Círculo}} + A_{\text{Quadrado}}$$

$$A = \pi r^2 + l^2$$

$$A = \pi \cdot \frac{x^2}{4\pi^2} + \left(\frac{L - x}{4}\right)^2$$

$$A = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(L - x)^2}{16}$$

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{(L - x)}{8}$$

$$A'(x) = \frac{x(4 + \pi) - \pi L}{8\pi}$$

— Analisando o comportamento (sinal) de $A'(x)$, temos:

$$- - - - - \left(\frac{\pi L}{4 + \pi}\right) + + + + + \quad A'(x) = x \left(\frac{4 + \pi}{8\pi}\right) - \frac{15}{2}$$

— Da análise acima, concluímos que em $x = \pi L / (4 + \pi)$ temos a área total sendo mínima. Logo, o arame deve ser cortado em dois pedaços, um medindo $\pi L / (4 + \pi)$ cm e o outro medindo $4L / (4 + \pi)$ cm.

Questão 2

a) Use o Cálculo para demonstrar a Identidade Fundamental Trigonométrica: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Considere $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$, com f contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x + 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x)$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x - 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = 0.$$

A consequência do Teorema do Valor Médio nos diz que:

"Se $f'(x) = 0$, para todo x em um intervalo (a, b) , então f é constante em (a, b) ."

Logo, f é constante em $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$. Portanto, $f(x) = C$ onde C é uma constante.

$$f(0) = \sin^2 0 + \cos^2 0 = 0^2 + 1^2 = 1 = C$$

Ou seja, $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Use o Teorema do Valor Médio para mostrar que, $\forall x > 0, \sqrt{x+1} < \frac{x+2}{2}$.

Considere $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x+2}{2}$, cujo domínio é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

f será dita contínua onde estiver definida, isto é, em seu domínio. Logo, f é contínua em $[-1, \infty)$.

$$f(0) = \sqrt{0+1} - \frac{0+2}{2} = 1 - 1 = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2}; \quad D(f') = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$$

$$f'(0) = 0 \text{ e } f'(x) < 0, \text{ se } x > 0.$$

Pelo domínio da função derivada, concluímos que f é derivável em $(-1, \infty)$.

Logo, f é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[0, x]$;
2. f é derivável no intervalo aberto $(0, x)$;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum $c \in (0, x)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Note que se $x > 0$, então $f'(x) < 0$ e, portanto, $f'(c) < 0$. Então ...

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < 0 \Rightarrow \frac{f(x) - 0}{x} < 0 \therefore f(x) < 0.$$

$$f(x) < 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} - \frac{x+2}{2} < 0, \text{ se } x > 0$$

$$\sqrt{x+1} < \frac{x+2}{2}, \forall x > 0$$

Questão 3

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$. Indeterminação do tipo " 1^∞ "

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} e^{\ln(1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \cdot \ln(1 + \cos x)};$$

Calculando o limite do expoente, temos ...

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \cdot \ln(1 + \cos x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}}{-\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{1}{1^2} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (1 + \cos x)^{\operatorname{tg} x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \cdot \ln(1 + \cos x)} = e^1 = e.$$

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{b}{x}}$. Indeterminação do tipo " 1^∞ "

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\ln(1 + ax)^{\frac{b}{x}}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \cdot \ln(1 + ax)}{x}};$$

Calculando o limite do expoente, temos ...

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \cdot \ln(1 + ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \cdot \frac{a}{1 + ax}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ab}{1 + ax} = \frac{ab}{1 + 0} = ab.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{b}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b \cdot \ln(1 + ax)}{x}} = e^{ab}.$$

Questão 4

a) Determine $f(x)$, sabendo que $f'(x) = \sec^2 x + \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\cos x}$ e que $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

$$f'(x) = \sec^2 x + \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \sec^2 x + 2 \operatorname{sen} x$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é dada por:

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \cos x + C$$

Como $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$, temos ...

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - 2 \cos \frac{\pi}{3} + C \\ \sqrt{3} &= \sqrt{3} - 2 \times \frac{1}{2} + C \\ C &= 1\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \operatorname{tg} x - 2 \cos x + 1$$

b) Se $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, determine a, b e c de modo que o gráfico de f tenha um ponto de inflexão em $(1,2)$ e que a inclinação da reta tangente no ponto de inflexão seja -2 .

Do enunciado temos as seguintes informações: $f(1) = 2$ e $f'(1) = -2$.

$$f(1) = a + b + c = 2 \quad (\text{Eq.1})$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(1) = 3a + 2b + c = -2 \quad (\text{Eq.2})$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

Se $a > 0$, temos $- - - - - (-b/3a) + + + + + f''(x)$

Se $a < 0$, temos $+ + + + + (-b/3a) - - - - - f''(x)$

Em ambos os casos, em $x = -b/3a$ ocorre mudança no sinal da derivada. Ou seja, há mudança na direção da concavidade de f em $x = -b/3a$ e, portanto, é um ponto de inflexão. Como este ponto de inflexão foi dado em $x = 1$, temos:

$$-\frac{b}{3a} = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (\text{Eq.3})$$

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 3a + 2b + c = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2a + b = -4 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \therefore a = 4 \text{ e } b = -12$$

$$\begin{aligned}a + b + c &= 2 \\ 4 - 12 + c &= 2 \therefore c = 10\end{aligned}$$

Logo, $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 10x$.

$$a = 4 ; b = -12 ; c = 10$$

Questão 5 Dada a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2}, & \text{se } x \geq -2 \text{ e } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x \leq -2 \end{cases}$,

- (i) Determine os intervalos onde ela é crescente e os intervalos onde ela é decrescente;
- (ii) Descreva as concavidades;
- (iii) Encontre seus pontos de máximo e mínimo relativos e absolutos, se existirem;
- (iv) Determine suas assíntotas, se existirem;
- (v) Aponte seus pontos de inflexão, caso existam.

DADO: $f'(x) = 1 - 8x^{-3}$.

De posse destas informações, trace o gráfico de f .

Domínio da função : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

Interseções com os eixos coordenados: Não há interseções!

Explicação: a expressão $\frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} > 0$, se $x \geq -2$ e $x \neq 0$

(i) Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}, \quad x > -2 \text{ e } x \neq 0$$

$$\begin{array}{lll} (-2) - - - - - (2) + + + + + & (x^3 - 8) \\ (-2) - - (0) + + + + + + + + & x^3 \\ (-2) + + (0) - - (2) + + + + + & f'(x) \end{array}$$

f é crescente onde $f' > 0$, ou seja, f é crescente em $(-2, 0) \cup (2, \infty)$;
 f é decrescente onde $f' < 0$, ou seja, f é decrescente em $(0, 2)$.

(ii) Concavidades:

$$f''(x) = \frac{24}{x^4}, \quad x > -2 \text{ e } x \neq 0$$

$f'' > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$.

f possui concavidade voltada para cima em $(-2, 0) \cup (0, \infty)$.

(iii) Pontos de Máximo e Mínimo Relativos e Absolutos.

Pelo Teste da Primeira Derivada $(2, f(2))$ é um ponto de mínimo relativo.
 Ponto de mínimo: $(2, 5)$.

Como f é crescente em $(2, \infty)$, então f não possui ponto de máximo absoluto e, como $f(2) > f(x)$, se $x \leq -2$, então f não possui ponto de mínimo absoluto.

(iv) Assíntotas:

Assíntotas Verticais: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

* Obs.: Estas assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função.

Analisando a descontinuidade de f em 0, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\overbrace{x^3 + 2x^2 + 4}^4}{\underbrace{x^2}_{0^+}} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\overbrace{x^3 + 2x^2 + 4}^4}{\underbrace{x^2}_{0^+}} = +\infty$$

Portanto, a reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico da função f .

Assíntotas Horizontais: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1) = 1.$$

$y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 4}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 2) = \infty.$$

Logo, não existe assíntota horizontal ao gráfico da função f .

Assíntota Oblíqua: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 4}{x^2} = (x + 2) + \frac{4}{x^2}$$

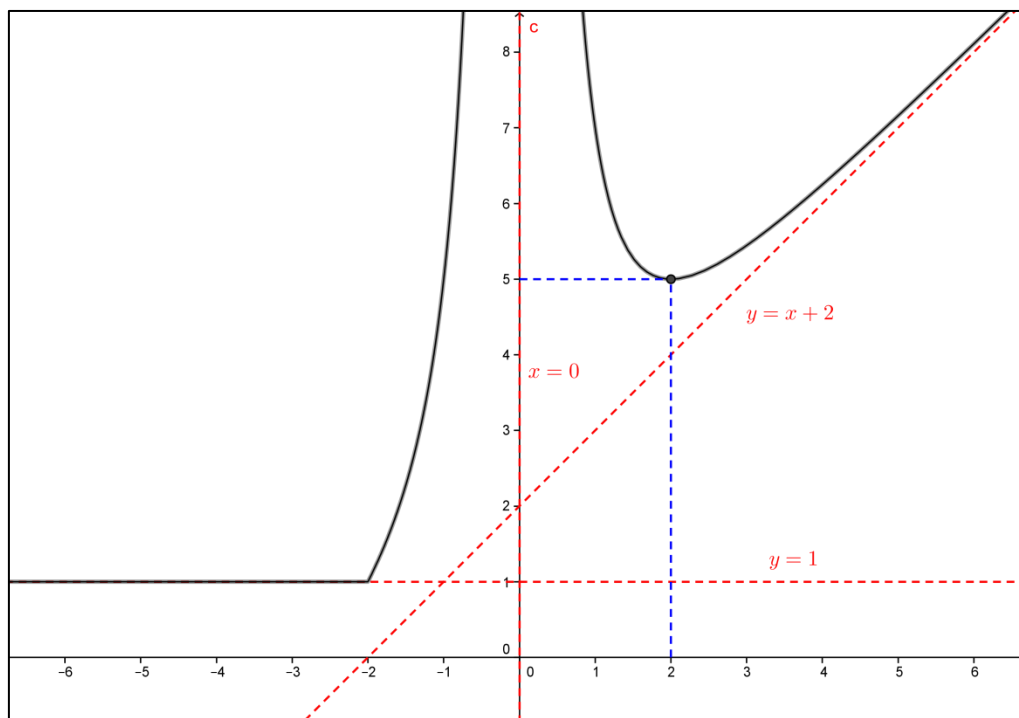
$$f(x) - (x + 2) = \frac{4}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Portanto, a reta $y = x + 2$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f .

(v) Pontos de Inflexão:

* Como não há mudança na direção da concavidade da função f , então f não possui pontos de inflexão!



2.8 4ª Prova – 20 de Maio de 2017

Questão 1. Encontre o trapézio de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio R , com uma das bases sobre o diâmetro do círculo.

Questão 2.

a) Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função $f(x) = \sinh x$ não tem duas raízes reais.

b) Use o Teorema do Valor Médio para provar que não existe uma função derivável em todo o conjunto dos reais cujo gráfico contém os pontos $(0, -1)$ e $(2, 4)$ e cujas tangentes têm inclinação menor que 2.

Questão 3.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]^x$;

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg(2x) \cdot \arctg x$;

Questão 4.

a) Seja $f''(x) = e^x + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} + 3 \cos(x) - \frac{\pi}{2}$, com $f'(0) = -1$ e $f(0) = e^2$.
Determine $f(x)$.

b) Dê as abscissas dos pontos de inflexão da curva $y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$, sendo a e b constantes.

Questão 5. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ e determine:

- i) Os intervalos de crescimento e decrescimento;
- ii) Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;
- iii) As assíntotas, se existirem;
- iv) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem;
- v) Os pontos de inflexão, se existirem.

DADOS: $f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3 \cdot (x-2)^3}$ e $f''(x) = 6 \cdot x^{-4} + 6 \cdot (x-2)^{-4}$.

OBSERVAÇÃO: 1 é raiz do polinômio que figura como numerador em $f'(x)$.

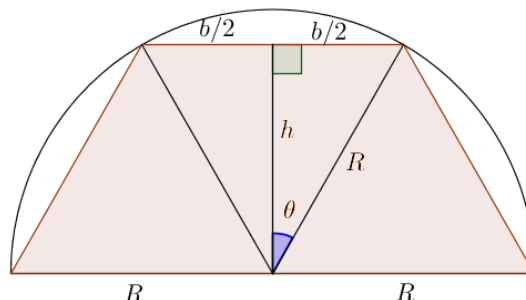
De posse destas informações, trace o gráfico de f .

Questão 1. Encontre o trapézio de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo de raio R , com uma das bases sobre o diâmetro do círculo.

$$A = \frac{(B + b)h}{2} ; \text{ onde } B = 2R.$$

$$* \sin \theta = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{R} = \frac{b}{2R} \therefore b = 2R \cdot \sin \theta$$

$$* \cos \theta = \frac{h}{R} \therefore h = R \cdot \cos \theta$$



$$A(\theta) = \frac{(2R + 2R \cdot \sin \theta)R \cdot \cos \theta}{2}$$

$$A(\theta) = R^2(1 + \sin \theta) \cdot \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi/2$$

$$A'(\theta) = R^2[\cos \theta \cdot \cos \theta - \sin \theta (1 + \sin \theta)]$$

$$A'(\theta) = R^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta)$$

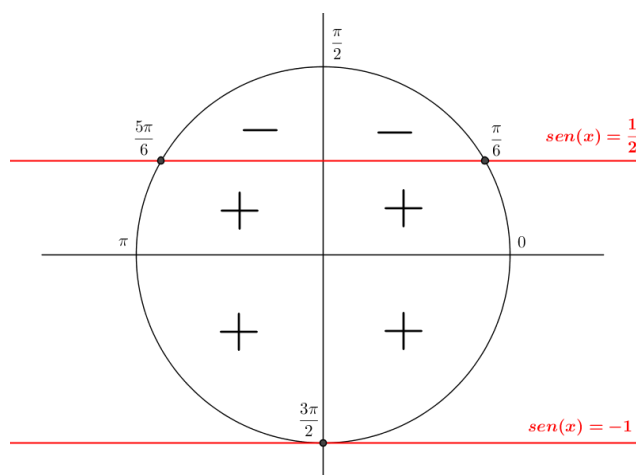
$$A'(\theta) = R^2(-2 \sin^2 \theta - \sin \theta + 1)$$

Seja $x = \sin \theta$, então ...

$$A'(x) = R^2(-2x^2 - x + 1)$$

++++(-1)----- (1/2)+++++ A'(x)

A análise acima é em relação a x , portanto devemos converter essa informação para a variável θ . Como $x = \sin \theta$, a análise da função quadrática convertida no ciclo trigonométrico nos dá a seguinte representação:



Logo, pelo Teste da Primeira Derivada, $\theta = \pi/6$ é o ângulo que maximiza a expressão da área e, portanto, $A(\pi/6)$ é o maior valor de área que o trapézio inscrito pode assumir.

$$A\left(\frac{\pi}{6}\right) = R^2 \left(1 + \sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos \frac{\pi}{6} = R^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \text{ u. A}$$

Questão 2

a) Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função $f(x) = \sinh x$ não tem duas raízes reais.

Suponhamos que f possui duas raízes reais a e b , tais que $f(a) = f(b)$, com $a \neq b$.

f é uma função contínua e derivável em $\mathbb{R}$ e, portanto, f satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
2. f é derivável no intervalo aberto (a, b) ;
3. $f(a) = f(b)$.

Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Contudo,

$$f'(x) = \cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Portanto, por contradição, f não possui duas raízes reais.

b) Use o Teorema do Valor Médio para provar que não existe uma função derivável em todo o conjunto dos reais cujo gráfico contém os pontos $(0, -1)$ e $(2, 4)$ e cujas tangentes têm inclinação menor que 2.

Seja uma função f derivável em $\mathbb{R}$. Se f é derivável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é uma função que satisfaz as seguintes hipóteses:

1. f é contínua no intervalo fechado $[0, 2]$;
2. f é derivável no intervalo aberto $(0, 2)$;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum $c \in (0, 2)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 - (-1)}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

Logo, deve existir algum ponto $c \in (0, 2)$ tal que $f'(c) = 2,5 > 2$. E, portanto, não existe uma função conforme foi definida cujas tangentes têm inclinação menor que 2, uma vez que, existe pelo menos um número c onde $f'(c) > 2$.

Questão 3

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]^x$; indeterminação do tipo " 1^∞ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\ln \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]^x} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]}{\frac{1}{x}}; \text{ Usando a Regra de L'Hôpital} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{a^x + b^x} \times \frac{1}{2} \times \left[\left(-\frac{1}{x^2}\right) a^{\frac{1}{x}} \ln a + \left(-\frac{1}{x^2}\right) b^{\frac{1}{x}} \ln b \right]}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^{\frac{1}{x}} \ln a + b^{\frac{1}{x}} \ln b}{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}} \\
 &= \frac{a^0 \ln a + b^0 \ln b}{a^0 + b^0} \\
 &= \frac{\ln a + \ln b}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \ln(ab) = \ln \sqrt{ab}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left[\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}}}{2} \right]} = e^{\ln \sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg(2x) \cdot \operatorname{arctg} x$; " $\infty \times 0$ "

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg(2x) \cdot \operatorname{arctg} x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{tg}(2x)}; \text{ Usando a Regra de L'Hôpital} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 \sec^2(2x)} \\
 &= \frac{1}{2 \sec^2 0} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cotg(2x) \cdot \operatorname{arctg} x = \frac{1}{2}.$$

Questão 4

a) Seja $f''(x) = e^x + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{3} + 3 \cos(x) - \frac{\pi}{2}$, com $f'(0) = -1$ e $f(0) = e^2$.
Determine $f(x)$.

A antiderivada mais geral de f'' é dada por:

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times x^{\frac{5}{3}} + 3 \operatorname{sen}(x) - \frac{\pi}{2} x + C$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3\operatorname{sen}(x) - \frac{\pi}{2}x + C$$

$$f'(0) = e^0 + \frac{1}{5} \times 0^{\frac{5}{3}} + 3\operatorname{sen}(0) - \frac{\pi}{2} \times 0 + C = -1$$

$$1 + 0 + 0 - 0 + C = -1$$

$$C = -2$$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}} + 3\operatorname{sen}(x) - \frac{\pi}{2}x - 2$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é dada por

$$f(x) = e^x + \frac{3}{8} \times \frac{1}{5} \times x^{\frac{8}{3}} - 3\cos(x) - \frac{\pi}{4}x^2 - 2x + D$$

$$f(x) = e^x + \frac{3}{40}x^{\frac{8}{3}} - 3\cos(x) - \frac{\pi}{4}x^2 - 2x + D$$

$$f(0) = e^0 + \frac{3}{40} \times 0^{\frac{8}{3}} - 3\cos(0) - \frac{\pi}{4} \times 0^2 - 2 \times 0 + D = e^2$$

$$1 + 0 - 3 - 0 - 0 + D = e^2$$

$$D = e^2 + 2$$

Portanto,

$$f(x) = e^x + \frac{3}{40}x^{\frac{8}{3}} - 3\cos(x) - \frac{\pi}{4}x^2 - 2x + (e^2 + 2)$$

b) Dê as abscissas dos pontos de inflexão da curva $y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}$, sendo a e b constantes.

* Obs.: $D(y) = \mathbb{R}$ e $y = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y' = e^{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^2} \cdot \left[-2 \left(\frac{x-a}{b} \right) \cdot \left(\frac{1}{b} \right) \right]$$

$$y' = y \cdot \left[-\frac{2}{b^2} \cdot (x-a) \right]$$

$$y' = -\frac{2}{b^2} [y \cdot (x-a)]$$

$$y'' = -\frac{2}{b^2} [y' \cdot (x-a) + y]$$

$$y'' = -\frac{2}{b^2} \left[-\frac{2}{b^2} y \cdot (x-a) \cdot (x-a) + y \right]$$

$$y'' = -\frac{2}{b^2} y \left[-2 \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 + 1 \right]$$

$$-2 \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \left(\frac{x-a}{b} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x-a}{b} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore x = a \pm \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

$$x_1 = a - \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x_2 = a + \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Estudo do sinal da Segunda Derivada (Estudo da Concavidade):

$$\begin{array}{rcl} \text{-----} & (-2y/b^2) & \\ ++++(x_1)----(x_2)++++ & \left[-2\left(\frac{x-a}{b}\right)^2+1\right] & \\ ----(x_1)+++++(x_2)---- & y'' & \end{array}$$

Como ocorre mudança na direção da concavidade da função y em x_1 e em x_2 , e ambos pertencem ao domínio da função, então x_1 e x_2 são as abscissas dos pontos de inflexão da função y .

$$x_1 = a - \frac{b\sqrt{2}}{2} \quad e \quad x_2 = a + \frac{b\sqrt{2}}{2}$$

Questão 5. Considere a função $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ e determine:

- i) Os intervalos de crescimento e decrescimento;
- ii) Os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo;
- iii) As assíntotas, se existirem;
- iv) Os pontos de máximo e de mínimo relativos e absolutos, se existirem;
- v) Os pontos de inflexão, se existirem.

$$DADOS: f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3 \cdot (x - 2)^3} \quad e \quad f''(x) = 6 \cdot x^{-4} + 6 \cdot (x - 2)^{-4}.$$

OBSERVAÇÃO: 1 é raiz do polinômio que figura como numerador em $f'(x)$.

De posse destas informações, trace o gráfico de f .

Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } x \neq 2\}$

Imagem da função: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

Interseções com os eixos coordenado: Não existem interseções com os eixos coordenados, pois $f(x) > 0$ para todo $x \in D(f)$ e $f(0)$ não está definido.

i) Crescimento e Decrescimento

$$f'(x) = \frac{-4(x^3 - 3x^2 + 6x - 4)}{x^3 \cdot (x-2)^3} = \frac{-4(x-1)(x^2 - 2x + 4)}{x^3 \cdot (x-2)^3}$$

$$\begin{array}{ll}
++++++(1)----- & [-4(x-1)] \\
++++++(1)++++++ & (x^2-2x+4) \\
---(0)++++++ & x^3 \\
------(2)++++ & (x-2)^3 \\
+++ (0) --- (1) ++ (2) ---- & f'(x)
\end{array}$$

f é crescente onde $f' > 0$, ou seja, f é crescente em $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$ e f é decrescente onde $f' < 0$, ou seja, f é decrescente em $(0, 1) \cup (2, \infty)$.

ii) *Concavidade:*

$$f''(x) = 6 \cdot x^{-4} + 6 \cdot (x-2)^{-4} = \frac{6}{x^4} + \frac{6}{(x-2)^4}$$

$$f''(x) > 0, \forall x \in D(f)$$

Logo, f possui concavidade voltada para cima em $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$.

iii) *Assíntotas*

Assíntotas Verticais: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

* *Obs.:* Esta assíntotas ocorrem nas descontinuidades da função.

Analisando as descontinuidade de f em 0 e em 2, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{x^2 + (x-2)^2}^4}{\underbrace{x^2(x-2)^2}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{x^2 + (x-2)^2}^4}{\underbrace{x^2(x-2)^2}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = 2$ é assíntota vertical do gráfico de f .

Assíntotas Horizontais: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + (x-2)^2}{x^2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + (x-2)^2}{x^2(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 4x + 4}{x^4 - 2x^3 + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{4}{x^4}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^2} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{0 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Logo, a reta $y = 0$ é a única assíntota horizontal do gráfico de f .

2.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 26 de Maio de 2017

Questão 1.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \llbracket e^x \rrbracket$.

b) Seja $f(x) = \frac{\sec(4x)}{\operatorname{tg}(4x)}$, $0 \leq x \leq \pi$. Determine os pontos nos quais $y = f(x)$ tem reta tangente horizontal.

Questão 2.

a) Sendo $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, encontre $y'(1)$.

b) Use a definição para calcular a derivada da função $f(x) = x^{-1/3}$.

Questão 3.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$.

b) A função de Bessel de ordem 0, $y = f(x)$, satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos os valores de x e seu valor em 0 é $J(0) = 1$.

i) Determine $J'(0)$

ii) Use a diferenciação implícita para encontrar $J''(0)$.

Questão 4.

a) Indique, se existirem, os pontos do gráfico de $f(x) = x(x^2 + x + 1)e^{2/x}$ onde a reta tangente é horizontal.

b) Determine, se existirem, as assíntotas horizontais e verticais da função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

Questão 5.

a) A função f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$ é descontínua em $x = 8$. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a removê-la.

b) Considere a função $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ e determine uma equação para a reta normal ao gráfico de f' , no ponto de f' em $x = \frac{\pi}{3}$.

Questão 1.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \llbracket e^x \rrbracket$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \llbracket e^x \rrbracket = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1.$$

* Se $x \rightarrow 0^+$, então $e^x \rightarrow 1^+$. Logo, $\llbracket e^x \rrbracket = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \llbracket e^x \rrbracket = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0.$$

* Se $x \rightarrow 0^-$, então $e^x \rightarrow 1^-$. Logo, $\llbracket e^x \rrbracket = 0$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \llbracket e^x \rrbracket \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \llbracket e^x \rrbracket$, então $\lim_{x \rightarrow 0} \llbracket e^x \rrbracket$ não existe!

b) Seja $f(x) = \frac{\sec(4x)}{\operatorname{tg}(4x)}$, $0 \leq x \leq \pi$. Determine os pontos nos quais $y = f(x)$ tem reta tangente horizontal.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{4 \sec(4x) \cdot \operatorname{tg}^2(4x) - 4 \sec^3(4x)}{\operatorname{tg}^2(4x)}$$

$$f'(x) = \frac{4 \sec(4x) [\operatorname{tg}^2(4x) - \sec^2(4x)]}{\operatorname{tg}^2(4x)}$$

$$f'(x) = -\frac{4 \sec(4x)}{\operatorname{tg}^2(4x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4 \sec(4x)}{\operatorname{tg}^2(4x)} = 0 \Leftrightarrow \sec(4x) = 0 \therefore \nexists x \in \mathbb{R} \mid \sec(4x) = 0.$$

Logo, f não possui pontos onde a reta tangente é horizontal.

Questão 2.

a) Sendo $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, encontre $y'(1)$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sqrt{1}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1}}\right)$$

$$y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$$

$$y'(1) = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}.$$

b) Use a definição para calcular a derivada da função $f(x) = x^{-1/3}$.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x + \Delta x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + \Delta x}}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x}} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x + \Delta x}}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2}}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2}} \right] \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - (x + \Delta x)}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt[3]{x + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x + \Delta x} + \sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} \right)} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} \right)} \\
 &= -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}} \\
 &= -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.
 \end{aligned}$$

Logo, $f'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$.

Questão 3.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{[(3 - x^3) - 2][(3 - x^3)^3 + 2(3 - x^3)^2 + 4(3 - x^3) + 8]}{x^3 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x^3)[(3 - x^3)^3 + 2(3 - x^3)^2 + 4(3 - x^3) + 8]}{-(1 - x^3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} -[(3 - x^3)^3 + 2(3 - x^3)^2 + 4(3 - x^3) + 8] \\
 &= -[(3 - 1^3)^3 + 2(3 - 1^3)^2 + 4(3 - 1^3) + 8] \\
 &= -[8 + 8 + 8 + 8] \\
 &= -32.
 \end{aligned}$$

b) A função de Bessel de ordem 0, $y = f(x)$, satisfaz a equação diferencial $xy'' + y' + xy = 0$ para todos os valores de x e seu valor em 0 é $J(0) = 1$.

i) Determine $J'(0)$ ii) Use a diferenciação implícita para encontrar $J''(0)$.

Substituindo $J(0) = 1$ na equação diferencial, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 \times y''(0) + y'(0) + 0 \times 1 &= 0 \\ 0 + y'(0) + 0 &= 0 \\ y'(0) = J'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xy'') + \frac{d}{dx}(y') + \frac{d}{dx}(xy) &= 0 \\ y'' + xy''' + y'' + y + xy' &= 0 \\ y''(0) + 0 \times y'''(0) + y''(0) + 1 + 0 \times y'(0) &= 0 \\ y''(0) + 0 + y''(0) + 1 + 0 &= 0 \\ 2y''(0) &= -1 \\ y''(0) = J''(0) &= -1/2 \end{aligned}$$

Questão 4.

a) Indique, se existirem, os pontos do gráfico de $f(x) = x(x^2 + x + 1)e^{2/x}$ onde a reta tangente é horizontal.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

$$f'(x) = [(x^2 + x + 1) + x(2x + 1)]e^{2/x} + x(x^2 + x + 1) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot e^{2/x}.$$

$$f'(x) = (3x^2 + 2x + 1)e^{2/x} - \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2} e^{2/x}$$

$$f'(x) = e^{2/x} \left(3x^2 + 2x + 1 - \frac{2x^3 + 2x^2 + 2x}{x^2} \right)$$

$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x^2} (3x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x^3 - 2x^2 - 2x)$$

$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x^2} (3x^4 - x^2 - 2x)$$

$$f'(x) = \frac{e^{2/x}}{x} (3x^3 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - x - 2 = 0$$

Note que $x = 1$ é raiz do polinômio $(3x^3 - x - 2)$. Usando o dispositivo de Briot – Ruffini, obtemos:

$$(3x^3 - x - 2) = (x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$$

Logo o ponto $(1, f(1)) = (1, 3e^2)$ é o ponto onde a reta tangente é horizontal.

b) Determine, se existirem, as assíntotase horizontais e verticais da função

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x, & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \cdot D(f) = \mathbb{R}$$

Assíntotas horizontais: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x\sqrt{1 + 1/x} + x} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} \\&= \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} \\&= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

A reta $y = 1/2$ é assíntota horizontal da função f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x};$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, temos:

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

Se $x < 0$, então ...

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x} &\geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x} &\leq \frac{\sin x}{x} \leq -\frac{1}{x}\end{aligned}$$

Seja $g(x) = 1/x$ e $h(x) = -1/x$.

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo $x < 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$, então pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

A reta $y = 0$ é assíntota horizontal da função f .

Assíntotas verticais: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$;

* Ocorrem nas descontinuidades da função!

Em posse do domínio de f , o único número possível de descontinuidade é o 0, pois é onde ocorre mudança de comportamento da função. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \sqrt{0^2 + 0} - 0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Logo, a reta $x = 0$ **não** é assíntota vertical da função f .

Questão 5.

a) **(ANULADA!)** A função f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - x}{x - 8}$ é contínua em $x = 8$.
 Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a removê-la.
 * Erro de digitação ... o enunciado era o que segue:

"A função f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}$ é descontínua em $x = 8$. Mostre que a descontinuidade é removível e redefina $f(8)$ de modo a removê-la."

Dizemos que a descontinuidade de f em um número a é removível se $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe, porém $f(a)$ não está definido, ou caso esteja, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 8} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \left[\frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2}{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2} \right] \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{(x - 8) \cdot (\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt[3]{x} - 2)}{(\sqrt[3]{x} - 2)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) \cdot (\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{1}{(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4) \cdot (\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} + 2)} \\
 &= \frac{1}{(\sqrt[3]{8^2} + 2\sqrt[3]{8} + 4)(\sqrt{2 + \sqrt[3]{8}} + 2)} \\
 &= \frac{1}{(4 + 4 + 4)(\sqrt{4} + 2)} \\
 &= \frac{1}{48}.
 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$ existe, porém $f(8)$ não está definido, então a descontinuidade em 8 é dita removível e podemos redefinir $f(8)$ de modo que f seja contínua em 8.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2 + \sqrt[3]{x}} - 2}{x - 8}, & \text{se } x \neq 8 \\ \frac{1}{48}, & \text{se } x = 8 \end{cases}$$

b) Considere a função $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ e determine uma equação para a reta normal ao gráfico de f' , no ponto de f' em $x = \frac{\pi}{3}$.

Equação da reta normal ao gráfico de f' no ponto em que $x = \pi/3$:

$$y - f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'(x) = 2 \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \sec^2 \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}.$$

$$f''(x) = 2[\sec^4 x + 2 \sec^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x]$$

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left[\sec^4 \frac{\pi}{3} + 2 \sec^2 \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}\right] = 2[2^4 + 2 \times 2^2 \times 3] = 2[16 + 24] = 80$$

Equação da reta normal ...

$$y - 8\sqrt{3} = -\frac{1}{80}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = -\frac{1}{80}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 8\sqrt{3}$$

2.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 27 de Maio de 2017

Questão 1.

a) O ponto onde a abscissa é dada por $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ e a ordenada é dada por $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ pertence a uma circunferência centrada na origem. Qual é a sua equação?

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sec\left(e^{\frac{1}{x}}\right)}$.

Questão 2.

a) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz às seguintes condições: $g(0) = -1$ e $g(1) = 2$. Prove que existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = c^2$.

b) Use a definição de derivada para calcular a derivada de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Questão 3.

a) Seja $f(x) = \sin^4(3x) - \cos^4(3x)$. Mostre que $f'(x) = 6 \cdot \sin(6x)$.

b) Seja $G(x) = f(f(x))$. Se o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(2,1)$ é 5, determine o valor de $G'(2)$, sabendo que $f'(1) = 4$.

Questão 4.

a) Determine os pontos da lemniscata $2 \cdot (x^2 + y^2)^2 = 25 \cdot (x^2 - y^2)$, fora do eixo das ordenadas, onde a reta tangente à curva é horizontal.

b) Ache os dois pontos de intersecção da reta tangente à curva $y = (2x + 1)^2 \cdot \cos^2 x$ no ponto $(0,1)$ com a elipse $2x^2 + y^2 = 1$.

Questão 5.

a) Determine as abscissas dos pontos nos quais as retas tangente às curvas $y = e^{x^4 - x}$ e $y = x \cdot (x^3 - 1)$ são paralelas.

b) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais da curva seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}, & \text{se } x \geq 1 \\ 3x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Questão 1.

a) O ponto onde a abscissa é dada por $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ e a ordenada é dada por

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ pertence a uma circunferência centrada na origem. Qual é a sua equação?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{x^2 + 5}}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4 - x^2)(3 + \sqrt{x^2 + 5})}{(4 - x^2)}; \quad \text{Se } x \rightarrow 2, \text{ então } x \neq 2. \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (3 + \sqrt{x^2 + 5}) \quad \text{Logo, } (4 - x^2) \neq 0. \\ &= 3 + \sqrt{9} \\ &= 6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x}(3^{2x} - 1)}{3^{-x}(3^{2x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{2x} - 1}{3^{2x} + 1}; \quad \text{Se } x \rightarrow -\infty, \text{ então } 3^{2x} \rightarrow 0. \\ &= \frac{0 - 1}{0 + 1} \quad \text{Logo, } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{2x} = 0. \\ &= -1. \end{aligned}$$

Ponto $(6, -1)$.

Equação da circunferência centrada na origem:

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 \\ R^2 &= 6^2 + (-1)^2 \\ R^2 &= 37 \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 = 37$$

É a equação da circunferência centrada na origem que contém o ponto $(6, -1)$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sec\left(\frac{1}{e^x}\right)}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sec\left(\frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{e^x}\right);$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, temos:

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{e^x}\right) \leq 1$$

Se $x^3 > 0$, então..

$$-x^3 \leq x^3 \cos\left(\frac{1}{e^x}\right) \leq x^3$$

Seja $f(x) = -x^3$, $g(x) = x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ e $h(x) = x^3$.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de 0 **pela direita** e, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$. (Teorema do Confronto)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \cdot \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

Se $x^3 < 0$, então..

$$-x^3 \geq x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \geq x^3$$

$$x^3 \leq x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) \leq -x^3$$

Seja $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)$ e $h(x) = -x^3$.

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de 0 **pela esquerda** e, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$, então $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = 0$. (Teorema do Confronto)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \cdot \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$, então $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ existe e $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sec\left(e^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \cdot \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = 0.$$

Questão 2.

a) Seja $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua que satisfaz às seguintes condições: $g(0) = -1$ e $g(1) = 2$. Prove que existe $c \in (0,1)$ tal que $g(c) = c^2$.

Seja $h(x) = g(x) - x^2$, e h é uma função contínua em $\mathbb{R}$, pois h é dada pela diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, h é contínua no intervalo fechado $[0,1]$.

$$h(0) = g(0) - 0^2 = -1 - 0 = -1.$$

$$h(1) = g(1) - 1^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

Como h é uma função contínua no intervalo fechado $[0,1]$ e 0 é um número entre $h(0)$ e $h(1)$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum $c \in (0,1)$ tal que $h(c) = 0$. De modo que $h(c) = 0 \Rightarrow g(c) - c^2 = 0$. Portanto,

$$g(c) = c^2, \text{ para algum } c \in (0,1)$$

b) Use a definição de derivada para calcular a derivada de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x + \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x [1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x]} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x [1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x]} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \cdot \sec^2 x}{\Delta x [1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x]} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} \right]
\end{aligned}$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos \Delta x} = 1 \times 1 = 1.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} = \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \times 0} = \frac{\sec^2 x}{1 - 0} = \sec^2 x.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x}{\Delta x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \Delta x} = 1 \times \sec^2 x = \sec^2 x.$$

Logo, $f'(x) = \sec^2 x$.

Questão 3.

a) Seja $f(x) = \operatorname{sen}^4(3x) - \cos^4(3x)$. Mostre que $f'(x) = 6 \cdot \operatorname{sen}(6x)$.

$$f(x) = [\operatorname{sen}^2(3x) - \cos^2(3x)] \cdot [\operatorname{sen}^2(3x) + \cos^2(3x)]$$

$$f(x) = -[\cos^2(3x) - \operatorname{sen}^2(3x)] \times 1$$

$$f(x) = -\cos(6x)$$

$$f'(x) = -6 \times (-\operatorname{sen}(6x))$$

$$f'(x) = 6 \operatorname{sen}(6x)$$

b) Seja $G(x) = f(f(x))$. Se o coeficiente angular da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto $(2,1)$ é 5, determine o valor de $G'(2)$, sabendo que $f'(1) = 4$.

Do enunciado, temos $f(2) = 1$, $f'(2) = 5$ e $f'(1) = 4$. Logo,

$$G'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$G'(2) = f'(f(2)) \cdot f'(2)$$

$$G'(2) = f'(1) \times 5$$

$$G'(2) = 4 \times 5$$

$$G'(2) = 20.$$

Questão 4.

a) Determine os pontos da lemniscata $2 \cdot (x^2 + y^2)^2 = 25 \cdot (x^2 - y^2)$, fora do eixo das ordenadas, onde a reta tangente à curva é horizontal.

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned}
2 \frac{d}{dx} (x^2 + y^2)^2 &= 25 \cdot \frac{d}{dx} (x^2 - y^2) \\
4(x^2 + y^2)(2x + 2yy') &= 25(2x - 2yy') \\
4(x^2 + y^2)(x + yy') &= 25(x - yy') \\
y'[4y(x^2 + y^2) + 25y] &= 25x - 4x(x^2 + y^2) \\
y' &= \frac{25x - 4x(x^2 + y^2)}{25y + 4y(x^2 + y^2)} ; y \neq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y' = 0 &\Rightarrow 25x - 4x(x^2 + y^2) = 0 \\
25 - 4(x^2 + y^2) &= 0 \\
x^2 + y^2 &= \frac{25}{4}
\end{aligned}$$

Substituindo na expressão da curva, obtemos:

$$\begin{aligned}
2 \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^2 &= 25 \cdot \left(x^2 - \left(\frac{25}{4} - x^2\right)\right) \\
\frac{25}{8} &= 2x^2 - \frac{25}{4} \\
2x^2 &= \frac{75}{8} \\
x^2 &= \frac{75}{16} \therefore x = \pm \frac{5\sqrt{3}}{4} \\
y^2 &= \frac{25}{16} \therefore y = \pm \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

Pontos $A\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}\right), B\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}, -\frac{5}{4}\right), C\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}, \frac{5}{4}\right)$ e $D\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}, -\frac{5}{4}\right)$.

b) Ache os dois pontos de intersecção da reta tangente à curva $y = (2x + 1)^2 \cdot \cos^2 x$ no ponto (0,1) com a elipse $2x^2 + y^2 = 1$.

$$y' = 4(2x + 1) \cos^2 x - 2(2x + 1) \sin x \cdot \cos x$$

$$y'(0) = 4(0 + 1) \cos^2 0 - 2(0 + 1) \sin 0 \cdot \cos 0$$

$$y'(0) = 4 - 0$$

$$y'(0) = 4.$$

Equação da reta tangente à curva no ponto (0,1):

$$\begin{aligned}
y - 1 &= 2(x - 0) \\
y &= 4x + 1
\end{aligned}$$

Intersecção entre a reta tangente e a elipse:

$$\begin{aligned}
2x^2 + (4x + 1)^2 &= 1 \\
2x^2 + 16x^2 + 8x + 1 &= 1 \\
18x^2 + 8x &= 0 \\
2x(9x + 4) &= 0
\end{aligned}$$

$$x = 0 \text{ e } x = -\frac{4}{9}$$

$$y = 1 \text{ e } y = -\frac{7}{9}$$

Pontos de intersecção: $A(0,1)$ e $B\left(-\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}\right)$.

Questão 5.

a) Determine as abscissas dos pontos nos quais as retas tangente às curvas $y = e^{x^4-x}$ e $y = x \cdot (x^3 - 1)$ são paralelas.

$$y'_1 = e^{x^4-x} \cdot (4x^3 - 1)$$

$$y'_2 = (x^3 - 1) + x(3x^2)$$

Nos pontos onde as retas tangentes são paralelas ...

$$y'_1 = y'_2$$

$$e^{x^4-x} \cdot (4x^3 - 1) = x^3 - 1 + 3x^3$$

$$e^{x^4-x} \cdot (4x^3 - 1) = 4x^3 - 1$$

$$(4x^3 - 1) \cdot (e^{x^4-x} - 1) = 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} = 4^{-\frac{1}{3}}$$

$$e^{x^4-x} - 1 = 0$$

$$e^{x^4-x} = 1$$

$$e^{x^4-x} = e^0$$

$$x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ e } x = 1.$$

Nos pontos de abscissas $x = \left\{0, 4^{-\frac{1}{3}}, 1\right\}$ as retas tangentes à curva são paralelas.

b) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais da curva seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}, & \text{se } x \geq 1 \\ 3x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Assíntotas horizontais: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty.$$

Assíntotas verticais: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$;

* Ocorrem nas descontinuidades da função!

Em posse do domínio de f , o único número possível de descontinuidade é o 1, pois é onde ocorre mudança de comportamento da função. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1 - 2 + 1}{1 + 2 + 1} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 3x = 3 \times 1 = 3.$$

Logo, a reta $x = 1$ **não** é assíntota vertical do gráfico de f .

2.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 26 de Maio de 2017

Questão 1.

a) Encontre os pontos sobre a parábola $y = 1 - x^2$, tais que o triângulo ABC formado pelo eixo x e as retas tangentes nesses pontos seja equilátero.

b) Use aproximação linear para estimar $\sqrt[5]{99.999}$.

Questão 2.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x}{\cotg(2x)}$.

b) Determine os pontos nos quais o gráfico de $y = \ln(x^2)$ possui reta tangente passando pela origem.

Questão 3.

a) Determine a função $y = f(x)$ tal que $f(0) \neq 1$, sabendo que a reta tangente a seu gráfico num ponto (x, y) tem inclinação dada por $y' = \sqrt{x+1}$.

b) Use derivadas para mostrar que $\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \arctg\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\pi}{4}$.

Questão 4.

a) Usando a regra de L'Hôspital, ache $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

b) Tome todas as informações necessárias e trace o gráfico de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Questão 5.

a) Encontre as dimensões do cone de volume máximo que tenha uma área lateral igual a 1.

b) Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x - 2 \arctg x$ no intervalo $[0, 4]$.

Questão 1.

a) Encontre os pontos sobre a parábola $y = 1 - x^2$, tais que o triângulo ABC formado pelo eixo x e as retas tangentes nesses pontos seja equilátero.

Seja A e B os pontos sobre o eixo x e C a interseção entre as retas que definem os lados AC e BC do triângulo. Como o triângulo é equilátero, então seus ângulos internos medem 60° e, portanto, a inclinação da reta tangente à parábola que representa um dos lados do triângulo é 60° e a inclinação da outra reta é 120° .

Procuramos os pontos da parábola tais que:

$$\begin{aligned} y' &= \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \text{ e } y' = \operatorname{tg} 120^\circ = -\sqrt{3} \\ y' &= -2x \\ \therefore \\ x_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Pontos de tangência: $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $Q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

As retas tangentes no pontos P e Q juntamente com o eixo x delimitam o triângulo equilátero ABC .

b) Use aproximação linear para estimar $\sqrt[5]{99.999}$.

Considere $f(x) = \sqrt[5]{x}$.

Sabendo que $f(100.000) = f(10^5) = 10$ e $f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; $f'(10^5) = \frac{1}{5 \times 10^4}$.

A aproximação linear ou linearização de f em $x = 10^5$ é dada por:

$$\begin{aligned} L(x) &= f(10^5) + f'(10^5) \cdot (x - 10^5) \\ L(x) &= 10 + \frac{1}{5 \times 10^4} (x - 10^5) \\ \sqrt[5]{99.999} &\approx L(10^5 - 1) = 10 - \frac{1}{5 \times 10^4} = 10 - 2 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

Questão 2.

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x}{\cotg(2x)}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x}{\cotg(2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin x} \right]; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} &= \frac{\cos 0}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x}{\sin x} \cdot \frac{x}{x} \cdot \frac{2x}{2x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{2x}{x} \right] = 1 \times 1 \times 2 = 2.$$

* Obs.: Limite Fundamental Trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1, k \neq 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotg x}{\cotg(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x}{\cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\cos 2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x} = 1 \times 2 = 2.$$

b) Determine os pontos nos quais o gráfico de $y = \ln(x^2)$ possui reta tangente passando pela origem.

$$D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

Equação geral de uma reta que passa pela origem:

$$y = mx$$

Se esta reta é tangente ao gráfico de $\ln(x^2)$ em algum ponto $(x, \ln x^2)$, então $m = y'$ nesse ponto.

$$\begin{aligned} \ln(x^2) &= \left(\frac{1}{x^2} \cdot 2x \right) \cdot x \\ \ln(x^2) &= 2 \\ x^2 &= e^2 \\ x &= \pm e \end{aligned}$$

Pontos onde a reta tangente passa pela origem : $A(-e, 2)$ e $B(e, 2)$.

Questão 3.

a) Determine a função $y = f(x)$ tal que $f(0) \neq 1$, sabendo que a reta tangente a seu gráfico num ponto (x, y) tem inclinação dada por $y' = \sqrt{x+1}$.

A expressão mais geral para a antiderivada de y' é dada por:

$$\begin{aligned} y = f(x) &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C \\ f(0) &= \frac{2}{3} + C \neq 1 \\ \therefore C &\neq \frac{1}{3} \\ f(x) &= \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + C, \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

Caso fosse para determinar $y = f(x)$ tal que $f(0) = 1$, então $C = \frac{1}{3}$ e, portanto

$$f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}$$

b) Use derivadas para mostrar que $\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \text{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\pi}{4}$.

Sejam f e g funções tais que $f(x) = \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ e $g(x) = \text{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ onde $D(f) = \mathbb{R}$ e $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Então,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)}{1+x^2} \right]$$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2} \cdot \left[\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \cdot \left[\frac{1-x - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \right]$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Logo, $f'(x) = g'(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

"Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b) então $f - g$ é constante em (a, b) ; isto é, $f(x) = g(x) + C$, em que C é uma constante"

No caso em questão $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (-\infty, +\infty)$ então $f - g$ é constante em $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Logo, $f(x) = g(x) + C$, onde C é uma constante a ser determinada. Note, que devido ao domínio da função g podemos ter valores distintos para C caso $x \in (-\infty, 1)$ ou caso $x \in (1, +\infty)$.

Calculando a expressão para $x = 0$, obtemos o valor de C caso $x \in (-\infty, 1)$.

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) + C \\ \arcsen 0 &= \operatorname{arctg} 1 + C \\ 0 &= \frac{\pi}{4} + C \quad \therefore C = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{4}$ e, portanto,

$$\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\pi}{4}, \forall x \in (-\infty, 1)$$

Caso $x \in (1, +\infty)$, calculando o valor da identidade para $x = \sqrt{3}$, temos:

$$\begin{aligned} f(\sqrt{3}) &= g(\sqrt{3}) + C \\ \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg}\left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2}\right) + C$$

$$C = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}(-2 - \sqrt{3})$$

* Como a função $\operatorname{arctg} x$ é uma função ímpar, então:

$$C = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}(2 + \sqrt{3})$$

$$\operatorname{tg} \theta = 2 + \sqrt{3}; \quad \operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \therefore \sec^2 \theta = 8 + 4\sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{8 + 4\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{8 - 4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \quad e \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Calculando a expressão $\sin 2\theta$ temos:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{2} \therefore 2\theta = \frac{\pi}{6} \text{ ou } 2\theta = \frac{5\pi}{6}$$

Como $\sin \theta > \frac{1}{2}$ então $\theta > \frac{\pi}{6}$. Logo,

$$2\theta = \frac{5\pi}{6} \therefore \theta = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{Portanto, } C = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

Então, para $x \in (1, +\infty)$, temos:

$$f(x) = g(x) + \frac{3\pi}{4}$$

$$\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{3\pi}{4}, \forall x \in (1, +\infty)$$

* Poderíamos obter os mesmos resultados calculando o limite da expressão $f - g$ quando $x \rightarrow 1^+$ e quando $x \rightarrow 1^-$. Demonstrando:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim_{x \rightarrow 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}.$$

* Portanto, a identidade exposta é válida somente para $x \in (-\infty, 1)$.

Questão 4.

a) Usando a regra de L'Hôspital, ache $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)]};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x+3} \cdot \left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{1} = 3.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} [x \cdot \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)]} = e^3.$$

b) Tome todas as informações necessárias e trace o gráfico de $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Domínio da função: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

2. Interseções com os eixos coordenados: $f(x) > 0, \forall x \in D(f)$ e $f(0)$ não está definido. Logo, não há interseções com os eixos!

3. Intervalos de crescimento e decrescimento:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}; \quad f'(x) < 0, \forall x \in D(f)$$

Logo, f é decrescente em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

* Consequentemente, pelo Teste da Primeira Derivada, f não possui pontos de máximo ou mínimo relativos.

4. Intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo:

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

$$f''(x) > 0, \text{ se } x > -1/2 \text{ com } x \neq 0$$

$$f''(x) < 0, \text{ se } x < -1/2$$

f possui concavidade voltada para cima em $(-1/2, 0) \cup (0, \infty)$

f possui concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -1/2)$.

Como ocorre mudança na direção da concavidade em $x = -1/2$ e este número pertence ao domínio de f , então f possui um ponto de inflexão em $-1/2$.

Ponto de inflexão: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{e^2}\right)$.

5. Assíntotas:

5.1 Assíntota vertical:

A reta $x = a$ é assíntota vertical de f se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$.

* Pela definição de continuidade, as assíntotas verticais ocorrem nas descontinuidades da função. Verificando a reta $x = 0$, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Portanto, a reta $x = 0$ é assíntota vertical do gráfico de f .

5.2 Assíntota horizontal:

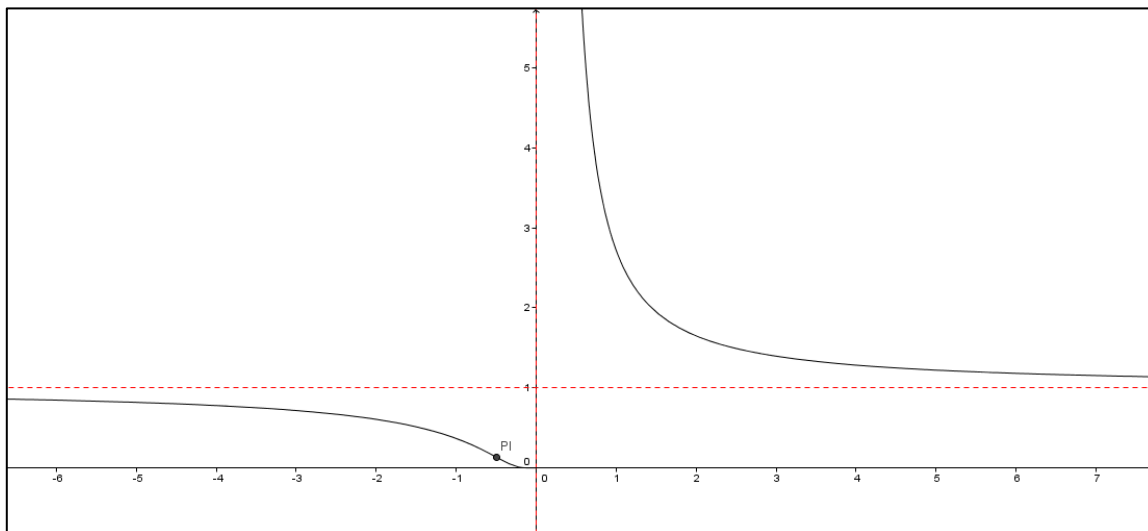
A reta $y = L$ é assíntota horizontal de f se, somente se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

Portanto, a reta $y = 1$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

6. Esboço Gráfico



Questão 5.

a) Encontre as dimensões do cone de volume máximo que tenha uma área lateral igual a 1.

Área Lateral do Cone: $A_L = \pi r g$; $g = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$\begin{aligned}
 A_L &= \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = 1 \\
 \left(\pi r \sqrt{r^2 + h^2} \right)^2 &= 1 \\
 \pi^2 r^2 (r^2 + h^2) &= 1 \\
 h^2 &= \frac{1}{\pi^2 r^2} - r^2 \\
 h^2 &= \frac{1 - \pi^2 r^4}{\pi^2 r^2} \\
 h &= \frac{\sqrt{1 - \pi^2 r^4}}{\pi r} \quad (I)
 \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$V(r) = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot \frac{\sqrt{1 - \pi^2 r^4}}{\pi r}$$

$$V(r) = \frac{1}{3} r \sqrt{1 - \pi^2 r^4}$$

$$V'(r) = \frac{1}{3} \left[\sqrt{1 - \pi^2 r^4} + r \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - \pi^2 r^4}} \cdot (-4\pi^2 r^3) \right]$$

$$V'(r) = \frac{1}{3} \left[\frac{1 - \pi^2 r^4 - 2\pi^2 r^4}{\sqrt{1 - \pi^2 r^4}} \right]$$

$$V'(r) = \frac{1 - 3\pi^2 r^4}{3\sqrt{1 - \pi^2 r^4}} = \frac{(1 - \sqrt{3} \cdot \pi \cdot r^2)(1 + \sqrt{3} \cdot \pi \cdot r^2)}{3\sqrt{(1 - \pi r^2)(1 + \pi r^2)}}$$

Estudo do sinal da função derivada de V:

$$\begin{array}{l}
 \text{-----} \left(-3^{-\frac{1}{4}} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \right) + + + + \left(3^{-\frac{1}{4}} \cdot \pi^{-\frac{1}{2}} \right) \text{-----} \quad (1 - \sqrt{3} \cdot \pi \cdot r^2) \\
 + \quad (1 + \sqrt{3} \cdot \pi \cdot r^2) \\
 \left(-\pi^{-\frac{1}{2}} \right) + \left(\pi^{-\frac{1}{2}} \right) \quad 3\sqrt{1 - \pi^2 r^4} \\
 \\
 \left(-\pi^{-\frac{1}{2}} \right) \text{--} \left(-3^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} \right) + + + + \left(3^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}} \right) \text{--} \left(\pi^{-\frac{1}{2}} \right) \quad V'(r)
 \end{array}$$

Pelo Teste da Primeira derivada, $r = 3^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}}$ é um número crítico associado ao ponto de máximo relativo da função V e, portanto, para $r = 3^{-\frac{1}{4}} \pi^{-\frac{1}{2}}$, temos o cone de área lateral igual a 1 com a maior capacidade.

$$\text{Dimensões: } r = \frac{1}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\pi}} \quad \text{e} \quad h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{\pi}}$$

b) Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de $f(x) = x - 2 \arctg x$ no intervalo $[0,4]$.

f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ pois é a diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[0,4]$.

"Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[0,4]$, então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d , tal que $c, d \in [0,4]$." (Teorema do Valor Extremo)

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. Os valores de f nos extremos do intervalo:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 - 2 \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ f(4) &= 4 - 2 \operatorname{arctg}(4) > 0. \end{aligned}$$

2. Os valores de f nos números críticos de f em $(0,4)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{1+x^2} = \frac{x^2-1}{x^2+1} \quad D(f') = \mathbb{R}$$

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe."

Como f é derivável em $\mathbb{R}$, se c é um número crítico de f então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$. Logo,

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 \therefore x = 1 \quad (x = -1 \text{ não pertence ao intervalo!})$$

$$f(1) = 1 - 2 \operatorname{arctg}(1) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$$

Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2 concluímos que $(4 - \operatorname{arctg} 4)$ é o valor máximo absoluto e $(1 - \pi/2)$ é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[0,4]$.

2.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 27 de Maio de 2017

Questão 1.

a) Considere a função $f(x) = \sin^2 x$, restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$ e dê seus intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos de concavidade para cima ou para baixo, os pontos de inflexão e seus extremos absolutos e relativos.

b) Ache $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cot x}$.

Questão 2.

a) Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{x^x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{(\cos x)^3}$.

b) Uma partícula tem função posição dada por $s(t) = \frac{3}{t^2}$, $t \geq 0$, onde t é medido em segundos e s em metros. Use diferenciais para estimar o erro na posição do objeto, no instante $t = 2$, sabendo que o relógio pode estar adiantado ou atrasado em 5 milésimos de segundos.

Questão 3.

a) Mostre que $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsen x$, para $-1 < x < 1$.

b) Mostra que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem números α e β , tais que $a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} = \alpha \cdot \cosh(x + \beta)$.

Questão 4.

a) O dono de uma chácara possui 84m^2 de azulejos para piscina e pretende construir uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, com profundidade de 2m e volume máximo. Quais devem ser as outras dimensões da piscina?

b) Encontre a área máxima de um triângulo formado no primeiro quadrante pelos eixos coordenados e uma reta tangente ao gráfico de $y = (x + 1)^{-2}$.

Questão 5.

a) Verifique se a função $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Em caso afirmativo, determine o número c no aberto $(-1, 1)$ que satisfaz a conclusão do Teorema.

b) Seja a função $g(x) = \sin x \cdot \cos x$. Determine a função $y = f(x)$, tal que $f'(x) = g(x)$ e $f(0) = 1$.

Questão 1.

a) Considere a função $f(x) = \sin^2 x$, restrita ao intervalo $[0, 2\pi]$ e dê seus intervalos de crescimento e decrescimento, os intervalos de concavidade para cima ou para baixo, os pontos de inflexão e seus extremos absolutos e relativos.

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\begin{array}{l} (0) \quad + + + (\pi/2) \quad + + + (\pi) \quad - - - (3\pi/2) \quad - - - (2\pi) \quad 2 \sin x \\ (0) \quad + + + (\pi/2) \quad - - - (\pi) \quad - - - (3\pi/2) \quad + + + (2\pi) \quad \cos x \\ (0) \quad + + + (\pi/2) \quad - - - (\pi) \quad + + + (3\pi/2) \quad - - - (2\pi) \quad f'(x) \end{array}$$

f é crescente em $(0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)$ e
 f é decrescente em $(\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)$.

Pelo Teste da Primeira Derivada, temos:

Pontos de máximo relativo: $(\pi/2, 1), (3\pi/2, 1)$

Pontos de mínimo relativo: $(\pi, 0)$

O valor máximo absoluto 1 ocorre em $x = \{\pi/2, 3\pi/2\}$ e o valor mínimo absoluto ocorre em $x = \{0, \pi, 2\pi\}$.

$$f''(x) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$f''(x) = 2 \cos(2x)$$

$$(0) \quad + + \left(\frac{\pi}{4}\right) \quad - - \left(\frac{\pi}{2}\right) \quad - - \left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad + + (\pi) \quad + + \left(\frac{5\pi}{4}\right) \quad - - \left(\frac{3\pi}{2}\right) \quad - - \left(\frac{7\pi}{4}\right) \quad + + (2\pi) \quad f''(x)$$

f possui concavidade voltada para cima em $\left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$ e

f possui concavidade voltada para baixo em $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$.

Os pontos de inflexão ocorrem onde há mudança na direção da concavidade.

Logo, f possui pontos de inflexão em $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$.

Pontos de inflexão: $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ e $\left(\frac{7\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

b) Ache $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x}$. Indeterminação " ∞^0 "

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cotg x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\ln(\operatorname{tg} x)^{\cotg x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} e^{\cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cotg x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x \cdot \ln(\tg x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tg x)}{\tg x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tg x}}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\tg x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tg x)^{\cotg x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cotg x \cdot \ln(\tg x)} = e^0 = 1.$$

Questão 2.

a) Encontre a derivada da função $f(x) = \frac{x^x \cdot \sqrt[3]{x^2}}{(\cos x)^3}$.

$$D(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$f(x) = \frac{x^x \cdot x^{\frac{2}{3}}}{(\cos x)^3}$$

$$\ln f(x) = \ln \left[\frac{x^x \cdot x^{\frac{2}{3}}}{(\cos x)^3} \right]$$

$$\ln f(x) = \ln x^x + \ln x^{\frac{2}{3}} - \ln(\cos x)^3$$

$$\ln f(x) = x \cdot \ln x + \frac{2}{3} \ln x - 3 \ln(\cos x)$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 + \frac{2}{3x} + 3 \tg x$$

$$f'(x) = \frac{x^x \cdot x^{\frac{2}{3}}}{(\cos x)^3} \left[\ln x + 1 + \frac{2}{3x} + 3 \tg x \right]$$

b) Uma partícula tem função posição dada por $s(t) = \frac{3}{t^2}$, $t \geq 0$, onde t é medido em segundos e s em metros. Use diferenciais para estimar o erro na posição do objeto, no instante $t = 2$, sabendo que o relógio pode estar adiantado ou atrasado em 5 milésimos de segundos.

Por diferenciais, temos:

$$\begin{aligned} \Delta s &\cong ds \\ \Delta s &\cong s'(t) \cdot dt \end{aligned}$$

$$s'(t) = -\frac{6}{t^3} \therefore s'(2) = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}.$$

$$\Delta t = dt = \pm 5 \times 10^{-3} \text{ segundos}$$

$$\Delta s \cong s'(2) \cdot dt$$

$$\Delta s \cong -\frac{3}{4} \times (\pm 5 \times 10^{-3})$$

$$\Delta s \cong -\frac{15}{4} \times 10^{-3} m = \pm 3,75 mm$$

Questão 3.

a) Mostre que $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x$, para $-1 < x < 1$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, onde $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ e $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ onde $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x)}{1-x^2} \right)$$

$$f'(x) = (1-x^2) \cdot \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em $(-1,1)$ então $f - g$ é constante em $(-1,1)$. Isto, é $f(x) = g(x) + C$, onde C é uma constante.

Sendo $x = 0$, onde $0 \in (-1,1)$, temos:

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) + C \\ \operatorname{arctg} 0 &= \operatorname{arcsen} 0 + C \\ 0 &= 0 + C \\ C &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \operatorname{arcsen} x, \text{ para } -1 < x < 1$$

b) Mostra que se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então existem números α e β , tais que $a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} = \alpha \cdot \cosh(x + \beta)$.

$$a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} = \frac{\alpha}{2} \cdot (e^{x+\beta} + e^{-x-\beta})$$

$$a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{\beta} \cdot e^x + \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-x}$$

Igualando o coeficientes dos termos exponenciais, temos:

$$a \cdot e^x = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{\beta} \cdot e^x \Rightarrow \alpha \cdot e^{\beta} = 2a \quad (I)$$

$$b \cdot e^{-x} = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\beta} \cdot e^{-x} \Rightarrow \alpha \cdot e^{-\beta} = 2b \quad (II)$$

Dividindo as equações, obtemos:

$$e^{2\beta} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2\beta = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \therefore \beta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\alpha \cdot e^\beta = 2a \Rightarrow \alpha = \frac{2a}{e^\beta} = \frac{2a}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \therefore \alpha = 2\sqrt{ab}$$

Logo,

$$a \cdot e^x + b \cdot e^{-x} = 2\sqrt{ab} \cdot \cosh\left(x + \ln \sqrt{\frac{a}{b}}\right).$$

Questão 4.

a) O dono de uma chácara possui 84m^2 de azulejos para piscina e pretende construir uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, com profundidade de 2m e volume máximo. Quais devem ser as outras dimensões da piscina?

$$A_T = 84\text{m}^2 = 2bh + 2lh + bl ; \text{com } h = 2\text{m}$$

$$84 = 4b + 4l + bl$$

$$l = \frac{84 - 4b}{(4 + b)} = \frac{4(21 - b)}{(4 + b)}$$

$$\text{Volume da piscina: } V = blh$$

$$V = 2bl$$

$$V(b) = 2b \cdot \frac{4(21 - b)}{(4 + b)}$$

$$V(b) = 8 \cdot \frac{21b - b^2}{4 + b}$$

$$V'(b) = 8 \cdot \frac{(21 - 2b)(4 + b) - (21b - b^2)}{(4 + b)^2}$$

$$V'(b) = 8 \frac{-b^2 - 8b + 84}{(4 + b)^2}$$

$$\Delta = 64 + 336 = 400$$

$$b = \frac{8 \pm 20}{-2} \therefore b_1 = 6 \text{ e } b_2 = -14$$

$$\begin{array}{l} - - - - (-14) + + + + + (6) - - - - \quad 8(-b^2 - 8b + 84) \\ + + + + + + + + (-4) + + + + + + + \quad (4 + b)^2 \\ - - - - (-14) + (-4) + (6) - - - - \quad V'(b) \end{array}$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, temos que para $b = 6\text{m}$ a piscina terá o volume máximo com área de 84m^2 . Logo,

$$l = \frac{4(21 - b)}{(4 + b)} = \frac{4(21 - 6)}{4 + 6} = \frac{60}{10} = 6\text{m}$$

As dimensões da piscina são $6\text{m} \times 6\text{m} \times 2\text{m}$.

b) Encontre a área máxima de um triângulo formado no primeiro quadrante pelos eixos coordenados e uma reta tangente ao gráfico de $y = (x + 1)^{-2}$.

Dado um ponto (a, b) do gráfico de $y = (x + 1)^{-2}$ temos $b = (a + 1)^{-2}$. A equação da reta tangente ao gráfico neste ponto é dada por:

$$y - b = y'(a) \cdot (x - a)$$

$$y' = -2(x + 1)^{-3}$$

$$y'(a) = -2(a + 1)^{-3}$$

$$y - \frac{1}{(a + 1)^2} = -\frac{2}{(a + 1)^3}(x - a)$$

Intersecção da reta tangente com os eixos coordenados:

Para $x = 0$, temos:

$$y = \frac{2a}{(a + 1)^3} + \frac{1}{(a + 1)^2} = \frac{3a + 1}{(a + 1)^3}$$

Para $y = 0$, temos:

$$x = \frac{a + 1}{2} + a = \frac{3a + 1}{2}$$

Área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a + 1}{(a + 1)^3} \cdot \frac{3a + 1}{2}$$

$$A(a) = \frac{(3a + 1)^2}{4(a + 1)^3}$$

$$A'(a) = \frac{24(3a + 1)(a + 1)^3 - 12(3a + 1)^2(a + 1)^2}{16(a + 1)^6}$$

$$A'(a) = \frac{6(3a + 1)(a + 1) - 3(3a + 1)^2}{4(a + 1)^4}$$

$$A'(a) = \frac{3(3a + 1)[2(a + 1) - (3a + 1)]}{4(a + 1)^4}$$

$$A'(a) = \frac{3(3a + 1)(1 - a)}{4(a + 1)^4}$$

$$\begin{array}{l} - - - - (-1/3) + + + + (1) - - - - \quad 3(3a + 1)(1 - a) \\ + + + + + + + + (-1) + + + + + + + \quad 4(a + 1)^4 \\ - - - - (-1/3) + (-1) + + (1) - - - - \quad A'(a) \end{array}$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, para $a = 1$ temos o triângulo de área máxima definido pela reta tangente ao gráfico de $y = (1 + x)^{-2}$ e os eixos coordenados.

A área máxima é

$$A = \frac{(3 \times 1 + 1)^2}{4(1 + 1)^3} = \frac{4^2}{4 \times 2^3} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} u. A$$

Questão 5.

a) Verifique se a função $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $x \in [-1, 1]$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle. Em caso afirmativo, determine o número c no aberto $(-1, 1)$ que satisfaz a conclusão do Teorema.

Domínio da função: $D(f) = \mathbb{R}$.

Como f é contínua onde está definida, então f é contínua em seu domínio, ou seja, f é contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $[-1, 1]$.

$$f'(x) = \frac{-2x(1 + x^2) - 2x(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = -\frac{4x}{(1 + x^2)^2} \quad D(f') = \mathbb{R}$$

Como f' está definida em $\mathbb{R}$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$.

Portanto, a função f satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle:

- 1. f é contínua no intervalo fechado $[-1, 1]$;*
- 2. f é derivável no intervalo aberto $(-1, 1)$;*

Então, existe um número $c \in (-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow -\frac{4c}{(1 + c^2)^2} = 0 \therefore c = 0.$$

b) Seja a função $g(x) = \sin x \cdot \cos x$. Determine a função $y = f(x)$, tal que $f'(x) = g(x)$ e $f(0) = 1$.

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cdot \cos x = 2g(x)$$

Logo,

$$g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

A antiderivada mais geral para a função g é:

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x + C$$

Como $f(0) = 1$, temos:

$$f(0) = 1 = -\frac{1}{4} \cos 0 + C$$

$$1 = -\frac{1}{4} + C \therefore C = \frac{5}{4}$$

Portanto,

$$f(x) = -\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{5}{4}.$$

2.13 Prova Final – 02 de Junho de 2017

Questão 1

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$.

b) Seja g uma função derivável tal que $g(0) = \pi/2$ e $g'(0) = 1$. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^{\cos[g(x)]}$ no ponto onde a abscissa é zero.

Questão 2

a) Seja $f(x) = \ln(\sin x)$, com $0 < x < \pi$. Para quais valores de x a reta tangente a f é paralela à reta $y = -x + 2$?

b) Encontre a primitiva da função $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$ cuja imagem em $x = 2$ é igual a 4.

Questão 3

a) Um quadro de 20cm de altura está em uma parede de tal forma que seu bordo inferior está a 60cm acima do nível do olho do observador. Determine a que distância de um ponto diretamente abaixo do cartaz o observador deve se colocar para maximizar o ângulo entre a linha de visão do topo e da base do cartaz.

b) Seja N uma reta tangente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$. Mostre que a soma dos valores das coordenadas das intersecções de N com os eixos coordenados é igual a k .

Questão 4

a) Calcule $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta^2}}$.

b) Use aproximações lineares para calcular $\sqrt[3]{0,95}$.

Questão 5

a) Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$, tais que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que existem números k e j tais que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(k, f(k))$ é paralela à reta tangente ao gráfico de g no ponto $(j, g(j))$.

b) Determine, se existir, uma assíntota horizontal do gráfico da função $f(x) = \frac{\ln x - e^x}{e^x}$, se $x > 0$.

Questão 6

a) Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com 4m de altura e raio da base 2m. Se entra água no tanque à razão de $0,001 \text{ m}^3/\text{min}$, em qual profundidade a água estará subindo com uma velocidade de

$$\frac{1}{250\pi} \text{ m/min}?$$

b) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = \cos^x(x)$ no ponto em que $x = 0$.

Questão 7

a) Defina $f(0)$ para que a função definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+k^3} - k}{x}$, k constante, seja contínua em todos os reais.

b) Sabendo que $|f(x) + 3| \leq \pi \cdot (1 + \sin x)^4$ para todo $x \in \mathbb{R}$, encontre $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$.

Questão 8

a) Use o teste da segunda derivada (se possível) para determinar os pontos de máximo e de mínimo relativos da função $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, no intervalo $(-\pi, \pi)$.

b) Use a definição para mostrar que a derivada de $f(x) = \cos x$ é igual a $g(x) = -\sin x$.

Questão 9

a) Prove que a equação $\arctg(x) = 1 - x$ tem pelo menos uma raiz real.

b) Determine as equações das retas horizontais tangentes ao gráfico de $f(x) = \sec(x^2 - 1)$.

Observação: considere $\sec(-1) = 1,85$, e $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Questão 10

a) Seja $f(x) = \arctg\left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)$, mostre que todas as retas tangentes ao gráfico de $y = f(x)$ são paralelas.

b) Seja $f(x) = \operatorname{cotg} x - \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 x$, com $x \in (0, \pi)$. Determine o valor máximo absoluto de f .

Questão 1

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}; \text{ * } \begin{array}{l} \text{Se } x \rightarrow 2, \text{ então } x \neq 2 \\ \text{Logo, } (x - 2) \neq 0. \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}{x^2 + 2x + 4}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 2x^2 + 4x + 8)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \frac{2^3 + 2 \times 2^2 + 4 \times 2 + 8}{2^2 + 2 \times 2 + 4}$$

$$= \frac{8 + 8 + 8 + 8}{4 + 4 + 4}$$

$$= \frac{32}{12}$$

$$= \frac{8}{3}.$$

Questão 1

b) Seja g uma função derivável tal que $g(0) = \pi/2$ e $g'(0) = 1$. Determine uma equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^{\cos[g(x)]}$ no ponto onde a abscissa é zero.

$$f(0) = e^{\cos[g(0)]} = e^{\cos(\frac{\pi}{2})} = e^0 = 1. \text{ Ponto de tangencia: } (0,1).$$

$$f'(x) = e^{\cos[g(x)]} \cdot \{-\sin[g(x)]\} \cdot g'(x)$$

$$f'(0) = e^{\cos[g(0)]} \cdot \{-\sin[g(0)]\} \cdot g'(0)$$

$$f'(0) = e^{\cos(\frac{\pi}{2})} \cdot \left\{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\} \cdot 1$$

$$f'(0) = e^0 \times (-1)$$

$$f'(0) = -1.$$

Equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(0,1)$:

$$y - 1 = -1(x - 0)$$

$$\mathbf{y = -x + 1}$$

Questão 2

a) Seja $f(x) = \ln(\sin x)$, com $0 < x < \pi$. Para quais valores de x a reta tangente a f é paralela à reta $y = -x + 2$?

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi < x < (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Se a reta tangente ao gráfico de f num ponto $(x, f(x))$ é paralela à reta $y = -x + 2$, então ambas possuem o mesmo coeficiente angular. Isto é, no ponto $(x, f(x))$, temos $f'(x) = -1$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x$$

$$f'(x) = \cotg x$$

$$f'(x) = -1 \Rightarrow \cotg x = -1 \therefore x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Como $x \in (0, \pi)$, então ... $x = \frac{3\pi}{4}$.

Questão 2

b) Encontre a primitiva da função $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-1}$ cuja imagem em $x = 2$ é igual a 4.

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} ; \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ e } x \neq -1\}$$

* Se f é descontínua em $x = \{-1, 1\}$ então sua primitiva também é descontínua em $x = \{-1, 1\}$. Logo ...

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$f(x) = 1 + 2 \cdot \frac{1}{x-1}$$

A primitiva ou antiderivada mais geral da função f é dada por:

$$F(x) = x + 2 \ln(x-1) + C$$

$$F(2) = 2 + 2 \ln 1 + C = 4$$

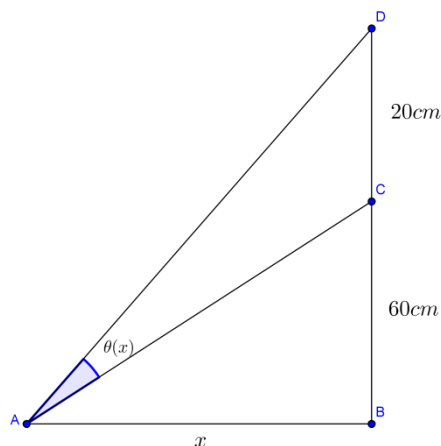
$$2 + 0 + C = 4$$

$$\therefore C = 2.$$

$$\mathbf{F(x) = x + 2 \ln(x - 1) + 2}$$

Questão 3

a) Um quadro de 20cm de altura está em uma parede de tal forma que seu bordo inferior está a 60cm acima do nível do olho do observador. Determine a que distância de um ponto diretamente abaixo do cartaz o observador deve se colocar para maximizar o ângulo entre a linha de visão do topo e da base do cartaz.



Seja $\alpha = \widehat{BAC}$, então ... $\operatorname{tg} \alpha = \frac{60}{x}$ e, portanto, $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{x}\right)$.

Do triângulo ABD, temos:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\theta + \alpha) &= \frac{80}{x} \\ \theta + \alpha &= \operatorname{arctg}\left(\frac{80}{x}\right) \\ \theta(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{x}\right) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{80}{x}\right) \\ \theta(x) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{80}{x}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{60}{x}\right) \\ \theta'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{80}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{80}{x^2}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{60}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{60}{x^2}\right) \\ \theta'(x) &= -\frac{80}{x^2 + 80^2} + \frac{60}{x^2 + 60^2} \\ \theta'(x) &= \frac{-80(x^2 + 3600) + 60(x^2 + 6400)}{(x^2 + 6400)(x^2 + 3600)} \\ \theta'(x) &= \frac{-20x^2 + 1000(-8 \times 36 + 6 \times 64)}{(x^2 + 6400)(x^2 + 3600)} \\ \theta'(x) &= \frac{-20x^2 + 96000}{(x^2 + 6400)(x^2 + 3600)}\end{aligned}$$

$$- - - - - (-40\sqrt{3}) + + + (0) + + + (40\sqrt{3}) - - - - - \theta'(x)$$

* Obs.: A distância x é positiva! Por isso o intervalo em destaque não é considerado na análise do resultado.

Pelo Teste da Primeira Derivada para uma distância $x = 40\sqrt{3}\text{cm}$ do quadro, o observador terá o maior ângulo entre a linha do topo e da base do quadro.

Questão 3

b) Seja N uma reta tangente a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$. Mostre que a soma dos valores das coordenadas das intersecções de N com os eixos coordenados é igual a k .

Seja N uma reta tangente a curva no ponto (x_0, y_0) , então $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} = \sqrt{k}$.

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) &= \frac{d}{dx}\left(k^{\frac{1}{2}}\right) \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\end{aligned}$$

No ponto (x_0, y_0) temos $y' = -\sqrt{y_0}/\sqrt{x_0}$.

Equação da reta tangente N :

$$y - y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}} \cdot (x - x_0)$$

Intersecções da reta N com os eixos coordenados:

Para $x = 0$, temos ...

$$y = y_0 + \frac{x_0 \sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}} \therefore y = y_0 + \sqrt{x_0 y_0}$$

Ponto $(0, y_0 + \sqrt{x_0 y_0})$

Para $y = 0$, temos ...

$$-y_0 = -\frac{\sqrt{y_0}}{\sqrt{x_0}}(x - x_0) \Rightarrow x - x_0 = \frac{y_0 \sqrt{x_0}}{\sqrt{y_0}} \therefore x = x_0 + \sqrt{x_0 y_0}$$

Ponto $(x_0 + \sqrt{x_0 y_0}, 0)$

Soma das coordenadas dos pontos de intersecção:

$$\begin{aligned}S &= x_0 + \sqrt{x_0 y_0} + y_0 + \sqrt{x_0 y_0} \\ S &= x_0 + 2\sqrt{x_0 y_0} + y_0 \\ S &= (\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0})^2 \\ S &= (\sqrt{k})^2 \\ S &= k\end{aligned}$$

Logo, a soma dos valores das coordenadas das intersecções de N com os eixos coordenados é igual a k .

Questão 4

a) Calcule $\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta^2}}$.

** Indeterminação do tipo " 1^∞ "*

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta^2}} = \lim_{\theta \rightarrow 0} e^{\ln \left[\left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta^2}} \right]} = \lim_{\theta \rightarrow 0} e^{\left[\frac{1}{\theta^2} \cdot \ln \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right) \right]} = e^{\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)}{\theta^2} \right]}.$$

Calculando o limite do expoente, obtemos ...

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)}{\theta^2} \right] &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\theta}{\text{sen } \theta} \cdot \frac{\theta \cdot \cos \theta - \text{sen } \theta}{\theta^2}}{2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\frac{\theta \cdot \cos \theta - \text{sen } \theta}{\theta \cdot \text{sen } \theta}}{2\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta \cdot \cos \theta - \text{sen } \theta}{2\theta^2 \cdot \text{sen } \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - \theta \cdot \text{sen } \theta - \cos \theta}{4\theta \cdot \text{sen } \theta + 2\theta^2 \cdot \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-\theta \cdot \text{sen } \theta}{4\theta \cdot \text{sen } \theta + 2\theta^2 \cdot \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-1}{4 + 2 \frac{\theta}{\text{sen } \theta} \cdot \cos \theta} \\ &= \frac{-1}{4 + 2 \times 1 \times 1} \\ &= -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)^{\frac{1}{\theta^2}} = e^{\lim_{\theta \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(\frac{\text{sen } \theta}{\theta} \right)}{\theta^2} \right]} = e^{-\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}.$$

Questão 4

b) Use aproximações lineares para calcular $\sqrt[3]{0,95}$.

Considere $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Logo, temos $f(1) = 1$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{3}$ e queremos calcular $f(0,95)$.

Por aproximação linear ou linearização de f em 1, temos:

$$L(x) = f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$L(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$f(0,95) \cong L(0,95)$$

$$\begin{aligned} L(0,95) &= 1 + \frac{1}{3}(0,95 - 1) \\ &= 1 - \frac{0,05}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{60} \\ &= \frac{59}{60}. \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } \sqrt[3]{0,95} \cong \frac{59}{60}.$$

Questão 5

a) Sejam f e g duas funções deriváveis em $\mathbb{R}$, tais que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$ para $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que existem números k e j tais que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(k, f(k))$ é paralela à reta tangente ao gráfico de g no ponto $(j, g(j))$.

Se f e g são funções deriváveis em $\mathbb{R}$, então f e g são contínuas em $\mathbb{R}$. Logo, f e g satisfazem as seguintes hipóteses:

1. f e g são contínuas no intervalo fechado $[a, b]$;
2. f e g são deriváveis no intervalo aberto (a, b) ;

Então, pelo Teorema do Valor Médio, existem números $k, j \in (a, b)$ tais que

$$f'(k) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{e} \quad g'(j) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

Como $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$, então $f'(k) = g'(j)$. Logo, as retas tangentes ao gráfico de f em $(k, f(k))$ e ao gráfico de g em $(j, g(j))$ possuem o mesmo coeficiente angular e, portanto, são retas tangentes paralelas.

Questão 5

b) Determine, se existir, uma assíntota horizontal do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\ln x - e^x}{e^x}, \text{ se } x > 0.$$

A reta $y = L$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f se, somente se $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Como $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, então só podemos calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Logo,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x - e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln x}{e^x} - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right];$$

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{xe^x} = 0.$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ existe, então ...

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\ln x}{e^x} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{e^x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 0 - 1 = -1.$$

Portanto, a reta $y = -1$ é assíntota horizontal do gráfico da função f .

Questão 6.

a) Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com 4m de altura e raio da base 2m. Se entra água no tanque à razão de $0,001 \text{ m}^3/\text{min}$, em qual profundidade a água estará subindo com uma velocidade de

$$\frac{1}{250\pi} \text{ m/min}?$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

No enunciado temos a taxa de variação do volume em relação ao tempo e a taxa de variação do nível da água (h) em relação ao tempo num determinado instante. Substituindo essas informações, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1000} &= \frac{dV}{dh} \cdot \frac{1}{250\pi} \\ \frac{dV}{dh} &= \frac{\pi}{4} \text{ m}^3/\text{m} \end{aligned}$$

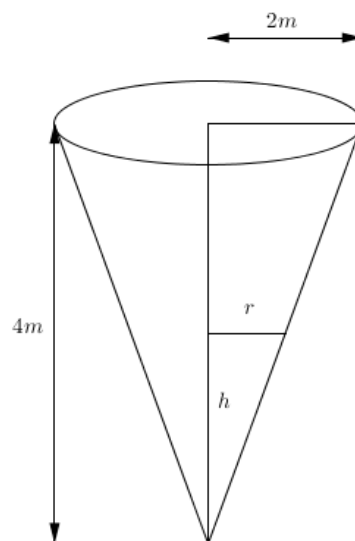
Por semelhança de triângulo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{4}{2} &= \frac{h}{r} \\ \therefore r &= \frac{h}{2} \\ V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ V(h) &= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h \\ V(h) &= \frac{1}{12} \pi h^3 \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{4} \pi h^2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \pi h^2 &= \frac{\pi}{4} \\ h^2 &= 1 \\ \therefore h &= 1 \text{ m} \end{aligned}$$



Logo, quando o nível da água estiver com 1m de profundidade a água estará subindo a uma velocidade de $\frac{1}{250\pi} \text{ m/min}$.

Questão 6

b) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = \cos^x(x)$ no ponto em que $x = 0$.

Ponto de tangência: (0,1).

$$\ln y = \ln(\cos x)^x$$

$$\ln y = x \cdot \ln(\cos x)$$

Por diferenciação logarítmica, temos:

$$\frac{y'}{y} = \ln(\cos x) - x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y' = y[\ln(\cos x) - x \cdot \operatorname{tg} x]$$

$$y'(0) = y(0)[\ln(\cos 0) - 0 \times 0]$$

$$y'(0) = 1[\ln 1 - 0]$$

$$y'(0) = 0.$$

Equação da reta tangente no ponto (0,1):

$$y - 1 = 0(x - 0)$$

$$y = 1$$

Questão 7

a) Defina $f(0)$ para que a função definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+k^3} - k}{x}$, k constante, seja contínua em todos os reais.

Domínio da função f : $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.

f é uma função racional e, portanto, f será dita contínua onde estiver definida. Isto é, f é contínua em seu domínio. Logo, f é contínua em $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Para que f seja contínua em $\mathbb{R}$, f deve ser contínua em 0. Então, pela definição de continuidade de uma função num número, devemos ter

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Como $f(0)$ não está definido, se existir $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ concluímos que a descontinuidade de f em 0 é dita removível e, portanto, podemos definir $f(0)$ de modo que f seja contínua em 0 e, com a análise anterior, contínua em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+k^3} - k}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt[3]{x+k^3} - k}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+k^3)^2} + k\sqrt[3]{x+k^3} + k^2}{\sqrt[3]{(x+k^3)^2} + k\sqrt[3]{x+k^3} + k^2} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + k^3 - k^3}{x \left[\sqrt[3]{(x+k^3)^2} + k\sqrt[3]{x+k^3} + k^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \left[\sqrt[3]{(x+k^3)^2} + k\sqrt[3]{x+k^3} + k^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+k^3)^2} + k\sqrt[3]{x+k^3} + k^2} \\ &= \frac{1}{k^2 + k^2 + k^2} \\ &= \frac{1}{3k^2}. \end{aligned}$$

Definindo $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3k^2}$, f será dita contínua em 0 e, pelo seu domínio, contínua em $\mathbb{R}$.

Questão 7

b) Sabendo que $|f(x) + 3| \leq \pi \cdot (1 + \sin x)^4$ para todo $x \in \mathbb{R}$, encontre $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$.

Pela inequação modular, temos

$$\begin{aligned} -\pi \cdot (1 + \sin x)^4 &\leq f(x) + 3 \leq \pi \cdot (1 + \sin x)^4 \\ -3 - \pi \cdot (1 + \sin x)^4 &\leq f(x) \leq \pi \cdot (1 + \sin x)^4 - 3 \end{aligned}$$

Considere $g(x) = -3 - \pi \cdot (1 + \sin x)^4$, e $h(x) = \pi \cdot (1 + \sin x)^4 - 3$. Então,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} [-3 - \pi \cdot (1 + \sin x)^4] = -3 - \pi \cdot \left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^4 = -3 - \pi \cdot 0^4 = -3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} [-3 + \pi \cdot (1 + \sin x)^4] = -3 + \pi \cdot \left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^4 = -3 + \pi \cdot 0^4 = -3.$$

Se $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ quando x está próximo de $-\pi/2$ (exceto possivelmente em $-\pi/2$) e $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} h(x) = 0$, então, pelo Teorema do Confronto

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = 0.$$

Questão 8

a) Use o teste da segunda derivada (se possível) para determinar os pontos de máximo e de mínimo relativos da função $f(x) = \sin^2 x + \cos x$, no intervalo $(-\pi, \pi)$.

f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua no intervalo fechado $[-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cdot \cos x - \sin x \\ f'(x) &= \sin x (2 \cos x - 1) \quad D(f') = \mathbb{R} \end{aligned}$$

f é derivável em $\mathbb{R}$.

"Se f possuir um máximo ou mínimo relativo em c e a derivada em c existir, então $f'(c) = 0$." (Teorema de Fermat)

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \text{ou} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \therefore x = \left\{ -\frac{\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \cos x (2 \cos x - 1) + \sin x (-2 \sin x) \\ f''(x) &= 2 \cos^2 x - \cos x - 2 \sin^2 x \\ f''(x) &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) - \cos x \\ f''(x) &= 2 \cos(2x) - \cos x \end{aligned}$$

Pelo Teste da Segunda Derivada, se c é um número crítico de f e $f''(c) > 0$, então $(c, f(c))$ é um ponto de mínimo local e, se $f''(c) < 0$, então $(c, f(c))$ é um ponto de máximo local.

$$\begin{aligned} f''\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ f''(0) &= 2 \cos 0 - \cos 0 = 2 \times 1 - 1 = 1. \\ f''\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \text{ Ponto } \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right). \\ f(0) &= \sin^2 0 + \cos 0 = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1. \text{ Ponto } (0, 1) \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}. \text{ Ponto } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right). \end{aligned}$$

Pelo Teste da Segunda Derivada, temos:

$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$ e $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5}{4}\right)$ são pontos de mínimo relativos e $(0, 1)$ é um ponto de máximo relativo.

Questão 8

b) Use a definição para mostrar que a derivada de $f(x) = \cos x$ é igual a $g(x) = -\sin x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \sin x \cdot \sin \Delta x - \cos x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1) - \sin x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

* Suponhamos que o limite da diferença seja dado pela diferença entre os limites, desde que estes limites existam.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1) - \sin x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x}.$$

$$\begin{aligned} * \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\cos x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} \cdot \frac{(\cos \Delta x + 1)}{(\cos \Delta x + 1)} \right] \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin^2 \Delta x}{\Delta x \cdot (\cos \Delta x + 1)} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{-\cos x \cdot \sin \Delta x}{\cos \Delta x + 1} \cdot \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \right] \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin \Delta x}{\cos \Delta x + 1} \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= - \left[\cos x \cdot \frac{0}{1 + 1} \right] \times 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$* \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} = \sin x \times \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \sin x \times 1 = \sin x.$$

* Obs.: Limite Fundamental Trigonométrico $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{kx} = 1, k \neq 0$.

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = 0 - \sin x$$

$$f'(x) = -\sin x = g(x)$$

Questão 9

a) Prove que a equação $\operatorname{arctg}(x) = 1 - x$ tem pelo menos uma raiz real.

Considere a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = \operatorname{arctg}(x) - 1 + x$. Como f é definida pela diferença entre funções contínuas em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 - 1 + 0 = 0 - 1 = -1.$$

$$f(1) = \operatorname{arctg} 1 - 1 + 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Como f é uma função contínua em $\mathbb{R}$, então f é contínua no intervalo fechado $[0,1]$ e 0 é um número entre $f(0)$ e $f(1)$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$. Isto é, a função f tem pelo menos uma raiz real. Ou seja,

$$\begin{aligned} f(c) = 0 &\Rightarrow \operatorname{arctg}(c) - 1 + c = 0 \\ \operatorname{arctg}(c) &= 1 - c \end{aligned}$$

Questão 9

b) Determine as equações das retas horizontais tangentes ao gráfico de $f(x) = \sec(x^2 - 1)$.

Observação: considere $\sec(-1) = 1,85$, e $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(x) = 2x \cdot \sec(x^2 - 1) \cdot \operatorname{tg}(x^2 - 1)$$

Obs.: $\operatorname{Im}[\sec(x^2 - 1)] = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Se a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x, f(x))$ é horizontal, então $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ \text{ou} \\ \operatorname{tg}(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \therefore x = \{-1, 0, 1\}$$

As equações das retas tangentes nos pontos de abscissa $x = \{-1, 0, 1\}$:

$$y = \sec((-1)^2 - 1) = \sec(0) = 1. \quad \text{Reta } y = 1$$

$$y = \sec(0^2 - 1) = \sec(-1) = 1,85. \quad \text{Reta } y = 1,85$$

$$y = \sec(1^2 - 1) = \sec(0) = 1. \quad \text{Reta } y = 1$$

Questão 10

a) Seja $f(x) = \arctg\left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)$, mostre que todas as retas tangentes ao gráfico de $y = f(x)$ são paralelas.

Se todas as retas tangentes ao gráfico de f são paralelas, então f' é constante para qualquer $x \in D(f)$. Ou seja, $f'(x) = C$, onde C é uma constante.

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}\right)^2} \times \left[\frac{\sec^2 x \cdot (1 - \operatorname{tg} x) - (1 + \operatorname{tg} x) \cdot (-\sec^2 x)}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} \right]$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \operatorname{tg} x)^2}{(1 - \operatorname{tg} x)^2 + (1 + \operatorname{tg} x)^2} \times \left[\frac{\sec^2 x - \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x + \sec^2 x + \sec^2 x \cdot \operatorname{tg} x}{(1 - \operatorname{tg} x)^2} \right]$$

$$f'(x) = \frac{(1 - \operatorname{tg} x)^2}{1 - 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 + 2 \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x} \times \frac{2 \sec^2 x}{(1 - \operatorname{tg} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2 \sec^2 x}{2 + 2 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}; \text{ Identidade trigonométrica: } 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x.$$

$$f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x}$$

$$f'(x) = 1$$

Logo, f' é constante para todo $x \in D(f)$ e, portanto, todas as retas tangentes ao gráfico de f são paralelas.

