Volume 1
2015

UNIVERSIDADE FEDERAL
DE ALAGOAS

RESOLUÇÃO DO BANCO DE QUESTÕES DE CÁLCULO 1

Organizado por
Carlos Alberto Santos Barbosa

Apresentação

O objetivo principal desta resolução do Banco de Questões (extraído das avaliações escritas de turmas de Cálculo Unificado da Universidade Federal de Alagoas - UFAL) é auxiliar no desempenho dos estudantes da disciplina Cálculo 1, que durante o processo de conhecimento começam a inserir-se no aprendizado, mostrando-lhes uma noção de como resolver questões das provas realizadas, visando sempre a clareza e objetividade na obtenção dos resultados e suas implicações referentes ao quesito de modo a melhorar seu desempenho acadêmico na disciplina.

Esse Volume 1 contém as avaliações aplicadas durante os semestres letivos 2015.1 e 2015.2, bem como as resoluções das mesmas, divididos em dois capítulos (14 e 15), respectivamente aos semestres letivos citados. Os registros anteriores estão disponíveis no site do Instituto de Matemática da UFAL, os quais consistem no Banco de Questões organizado pelas docentes Natália Pinheiro e Viviane Oliveira, dividido em sete capítulos sendo o capítulo 7 destinado às provas do semestre letivo 2011.2.

As provas dos semestres subsequentes de 2012.1 a 2014.2 não foram incluídas no banco de questões. Esse material é fruto de uma iniciativa própria do autor em dar continuidade ao trabalho das docentes Natália e Viviane, durante o tempo em que o mesmo foi monitor efetivo da disciplina Cálculo 1.

SUMÁRIO

Capítulo 14 .... **3**
2015.1 .... **3**
1.1 1ª Prova – 10 de Abril de 2015 3
1.2 1ª Prova – 11 de Abril de 2015 9
1.3 2ª Prova – 08 de Maio de 2015 16
1.4 2ª Prova – 09 de Maio de 2015 23
1.5 3ª Prova – 16 de Outubro de 2015 32
1.6 3ª Prova – 17 de Outubro de 2015 41
1.7 4ª Prova – 13 de Novembro de 2015 49
1.8 4ª Prova – 14 de Novembro de 2015 60
1.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 27 de Novembro de 2015 70
1.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 28 de Novembro de 2015 81
1.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 27 de Novembro de 2015 88
1.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 28 de Novembro de 2015 97
1.13 Prova Final – 03 de Dezembro de 2015 108
Capítulo 15 .... **129**
2015.2 .... **129**
2.1 1ª Prova – 12 de Fevereiro de 2016 129
2.2 1ª Prova – 13 de Fevereiro de 2016 135
2.3 2ª Prova – 11 de Março de 2016 144
2.4 2ª Prova – 12 de Março de 2016 151
2.5 3ª Prova – 08 de Abril de 2016 157
2.6 3ª Prova – 09 de Abril de 2016 165
2.7 4ª Prova – 06 de Maio de 2016 174
2.8 4ª Prova – 07 de Maio de 2016 185
2.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 20 de Maio de 2016 194
2.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 21 de Maio de 2016 204
2.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 20 de Maio de 2016 211
2.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 21 de Maio de 2016 220
2.13 Prova Final – 27 de Maio de 2016 229

Capítulo 14

2015.1

1.1 1ª Prova – 10 de Abril de 2015

Questão 1.

a) *Calcule* $\lim_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

b) *Seja* f *a função definida por* $f(x) = x|x-1|$. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* f *no ponto de abscissa* 3.

Questão 2.

a) *Determine a assíntota horizontal da curva* $y = 2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

b) *Mostre que a curva* $y = \sqrt{1-x}$ *possui uma tangente vertical no ponto* $(1,0)$.

Questão 3.

a) *Seja* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; $x \neq 0$. *Defina* $f(0)$ *para que* f *seja contínua em* $x = 0$.

b) *Determine se a equação* $\operatorname{tg} x = x$ *possui solução real.*

Questão 4. *Analise a continuidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x+2)}, & x \leq 0 \\ \log_{10} x^2, & 0 < x < 2 \\ \log_{10} 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

em $\mathbb{R}$.

Questão 5. *O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação* $s = t^2 - 10t + 18$, *em que* t *é medido em segundos*.

a) *Encontre a velocidade média sobre o intervalo* $[3,4]$.

b) *Encontre a velocidade instantânea quando* $t = 4$.

***Questão* 1.**

a) Calcule $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$.

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-(2)^3}$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{\left(\sqrt[3]{x}-2\right)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}\ ;\qquad Se\ \sqrt[3]{x}\to 2\ quando\ x\to 8.\ \ então\ \left(\sqrt[3]{x}-2\right)\neq 0$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

$$=\frac{\lim_{x\to 8}1}{\sqrt[3]{\lim_{x\to 8}x^2}+2\sqrt[3]{\lim_{x\to 8}x}+\lim_{x\to 8}4}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4}$$

$$=\frac{1}{4+4+4}$$

$$=\frac{1}{12}.$$

b) Seja f a função definida por $f(x)=x|x-1|$. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa* 3.

Ponto de abscissa 3 : $f(3)=3|3-1|=3|2|=6.$ *Ponto* $(3,6)$.

$$f(x)=\begin{cases}x^2-x, & x\geq 1\\ -(x^2-x), & x<1\end{cases}$$

Coeficiente angular da reta tangente no ponto $(3,6)$:

$$m=f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(3+h)^2-(3+h)-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{9+6h+h^2-3-h-6}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{5h+h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(5+h)}{h}\ ;\quad h\neq 0$$

$$=\lim_{h\to 0}(5+h)$$

$$=5.$$

Equação da reta tangente no ponto $(3,6)$:

$$y-6=5(x-3)$$

$$y=5x-9$$

***Questão* 2.**

$a)$ *Determine a assíntota horizontal da curva* $y = 2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de uma função* f *se, somente se,* $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

Sabe-se que para todo número real x, *temos*

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$$

Para $x > 0$, *temos*

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Como $\lim_{x\to\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, *pelo Teorema do Confronto* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Analogamente, para $x < 0$, *temos*:

$$\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen} x}{x} \leq -\frac{1}{x}$$

Como $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$, *pelo Teorema do Confronto* $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

Aplicando os resultados anteriores na expressão da curva $y = 2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \left(2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 2 + \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2 + 0 = 2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} \left(2 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty} 2 + \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 2 + 0 = 2.$$

Logo, a reta $y = 2$ *é a assíntota horizontal da curva* $y = 2 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

$b)$ *Mostre que a curva* $y = \sqrt{1 - x}$ *possui uma tangente vertical no ponto* $(1,0)$.

***Questão* 3.**

$a)$ *Seja* $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$; $x \neq 0$. *Defina* $f(0)$ *para que* f *seja contínua em* $x = 0$.

Para que f *seja contínua em* 0, *pela definição de continuidade,*

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x).$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} . \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-1}{x.\left(\sqrt{1+x}+1\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} ; \quad Se\ x \to 0, então\ x \neq 0 \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to 0} 1 + \lim\limits_{x\to 0} x} + \lim\limits_{x\to 0} 1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$Logo, para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ 0, definimos\ f(0) = \frac{1}{2}.$

$b)\ Determine\ se\ a\ equação\ \operatorname{tg} x = x\ possui\ solução\ real.$

$Considere\ a\ função\ f(x) = \operatorname{tg} x - x.$ $A\ função\ é\ f\ é\ definida\ pela\ diferença\ entre\ funções\ contínuas\ em\ seus\ domínios\ e, portanto, f\ é\ contínua\ em\ seu\ domínio. Logo,$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad com\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$Considere\ o\ intervalo\ fechado\ \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]. Nos\ extremos\ desse\ intervalo, temos:$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \frac{\pi}{4} \therefore \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) < 0.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4} \therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

$Como\ f\ é\ uma\ função\ contínua\ no\ intervalo\ fechado\ \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\ e\ 0\ é\ um\ número\ entre\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\ e\ f\left(\frac{\pi}{4}\right), então, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário, existe\ algum\ número\ x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\ tal\ que\ f(x) = 0. De\ tal\ modo,$

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \operatorname{tg} x = x$$

$Logo, a\ equação\ \operatorname{tg} x = x\ possui\ solução\ real.$

$\boldsymbol{Questão\ 4}.$ *Analise a continuidade da função*

$$f(x) = \begin{cases} 2^{(x+2)}, & x \leq 0 \\ \log_{10} x^2, & 0 < x < 2 \\ \log_{10} 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

em $\mathbb{R}$.

A função f é uma função definida por partes, estas representadas por funções exponencial, logarítmica e constante, respectivamente. Essas funções são contínuas em seus domínios, ou seja, para as funções exponencial e constante, estas são contínuas em $\mathbb{R}$ e, em contrapartida, a função logarítmica está definida para $x > 0$.

Com base na análise anterior, podemos concluir que f é contínua em $(-\infty, 0) \cup (0,2) \cup (2, \infty)$. *Para concluir a análise da continuidade de f falta analisar a continuidade em $x = 0$ e em $x = 2$.*

Para que f seja contínua em 0,

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \\ e \\ f(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \end{cases}$$

$f(0) = 2^{(0+2)} = 2^2 = 4.$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2^{(x+2)} = 2^{\lim_{x \to 0^-}(x+2)} = 2^{(0+2)} = 2^2 = 4.$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} [\log_{10} x^2] = -\infty.$

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ *não existe, então f é descontínua em* 0.

Para que seja contínua em 2

$$f(2) = \lim_{x \to 0} f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) \\ e \\ f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \end{cases}$$

$f(2) = \log_{10} 4$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} [\log_{10} x^2] = \log_{10} \left[\lim\limits_{x \to 2^-} x^2\right] = \log_{10} 2^2 = \log_{10} 4$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} [\log_{10} 4] = \log_{10} 4.$

Como $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$, *então f é contínua em 2 e, portanto, com as informações anteriores, conclui-se que f é contínua em* $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

***Questão* 5.** *O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação* $s = t^2 - 10t + 18$, *em que* t *é medido em segundos.*

a) Encontre a velocidade média sobre o intervalo $[3,4]$.

A velocidade média (V_m) *é a razão entre a distância percorrida pela partícula e o intervalo de tempo decorrido correspondente ao deslocamento. Neste caso,*

$$V_m = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3}$$

$$= \frac{4^2 - 10 \times 4 + 18 - (3^2 - 10 \times 3 + 18)}{1}$$

$$= 16 - 40 + 18 - 9 + 30 - 18$$

$$= -3\ m/s$$

b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.

A velocidade instantânea é dada numericamente pelo valor da função derivada da função deslocamento num determinado instante t. Logo,

$$V_4 = \lim_{h \to 0} \frac{s(4+h) - s(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)^2 - 10(4+h) + 18 - (-6)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{16 + 8h + h^2 - 40 - 10h + 18 + 6}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h - 2)$$

$$= -2\ m/s.$$

1.2 1ª Prova – 11 de Abril de 2015

$Questão$ 1.

$a)$ $Calcule$ $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$.

$b)$ $Ache$ a $solução$ da $equação$ $f(x) = f'(x), onde$ $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

$Questão$ 2.

$a)$ $Encontre$ as $assíntotas, caso$ $existam, de$ $f(x) = \dfrac{|x|^2 - |x| + 6}{|x^2 - x + 6|}$.

$b)$ Use o $Teorema$ do $Valor$ $Intermediário$ $para$ $mostrar$ que $existe$ $algum$ $número$ $real$ $positivo$ que é $igual$ ao $dobro$ do seu $quadrado$.

$Questão$ 3. $Seja$ $f(x) = x^3 . \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), x \neq 0$.

$a)$ $Calcule$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

$b)$ $Seja$ $g(x) = 1 - f(x). Defina$ $g(0)$ $para$ que a $função$ g $seja$ $contínua$ em $x = 0, onde$ f é a $função$ do $item$ (a).

$Questão$ 4. $Dada$ a $função$

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x < 1 \\ mx^2 + 3x + n, & 1 \leq x < 2 \\ mx + n, & x \geq 2 \end{cases}$$

$determine$ os $valores$ de m e n $para$ os $quais$ a $função$ f é $contínua$ em $\mathbb{R}$.

$Questão$ 5. Se uma $bola$ for $empurrada$ $ladeira$ $abaixo, sobre$ um $plano$ $inclinado$, a uma $velocidade$ $inicial$ de $5\, m/s$, a $distância$ que ela $terá$ $rolado, após$ t $segundos$ $será$ $dada$ por $s = 5t + 3t^2$.

$a)$ $Determine$ sua $velocidade$ $após$ $2s$.

$b)$ $Quão$ $longe$ ela $estará$ do $ponto$ de $partida$ $quando$ sua $velocidade$ $atingir$ $35\, m/s$?

***Questão* 1.**

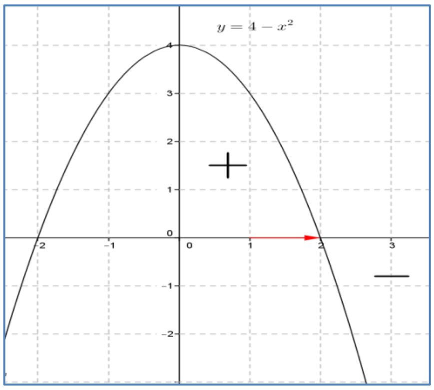
$a)\ Calcule\ \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$;

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}\right)=\lim_{x\to 2^-}\frac{4-x^2}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}=$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(2-x)(2+x)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)(x+2)}{(x-2)\sqrt{4-x^2}};\quad Se\ x\to 2^-, então\ x<2.\ Logo,(x-2)<0$$
$$\lim_{x\to 2^-}\frac{-(x+2)}{\sqrt{4-x^2}};$$

$*\ Analisando\ o\ denominador, temos:$

$Se\ x\to 2^-, então\ 4-x^2\to 0^+. Portanto,$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\overbrace{-(x+2)}^{-4}}{\underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{0^+}}=-\infty\ ,por\ definição,\ \lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}\ \nexists.$$



$b)\ Ache\ a\ solução\ da\ equação\ f(x)=f'(x), onde\ f(x)=x^2+3x+1.$

$*\ Pela\ definição\ de\ derivada, temos:$

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)+1-(x^2+3x+1)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+3x+3\Delta x+1-x^2-3x-1}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+\Delta x^2+3\Delta x}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(2x+3+\Delta x)}{\Delta x}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+3+\Delta x)\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}3+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\\
&=2x+3.
\end{aligned}$$

$\therefore\ f'(x)=2x+3.$

$Resolvendo\ a\ equação\ descrita\ inicialmente, temos:$

$$f(x) = f'(x)$$
$$x^2 + 3x + 1 = 2x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$\Delta = 1 + 8 = 9$$
$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \therefore x_1 = -2 \; e \; x_2 = 1$$

$* \, Logo, x = -2 \; e \; x = 1$ *são soluções da equação* $f(x) = f'(x)$*. Comprovando ...*

$f(-2) = (-2)^2 + 3(-2) + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$
$f'(-2) = 2(-2) + 3 = -4 + 3 = -1$

$f(1) = 1^2 + 3.1 + 1 = 1 + 3 + 1 = 5$
$f'(1) = 2.1 + 3 = 2 + 3 = 5$

Questão 2.

a) *Encontre as assíntotas, caso existam, de* $f(x) = \dfrac{|x|^2 - |x| + 6}{|x^2 - x + 6|}$;

$*$ *Obs*: $|x|^2 = |x^2| = x^2 \; ; \; |x| = \begin{cases} x, & se \; x \geq 0 \\ -x, & se \; x < 0 \end{cases}$.

$\rightarrow$ *Analisando o domínio da função f, obtemos*:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x + 6 \neq 0\}$$

$x^2 - x + 6 = 0$
$\Delta = 1 - 24 = -23 \; \therefore \Delta < 0 \Rightarrow x^2 - x + 6 \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
Consequentemente, a função $x^2 - x + 6$ *é estritamente positiva ou negativa.*
Usando o valor $x = 0$ *como referência, concluímos que* $x^2 - x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$ *Logo,* $|x^2 - x + 6| = x^2 - x + 6$ *, e ainda,* $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{x^2 - |x| + 6}{x^2 - x + 6} \; ; f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x + 6}{x^2 - x + 6}, & se \; x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 6}{x^2 - x + 6}, & se \; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 + x + 6}{x^2 - x + 6}, & x < 0 \end{cases}$$

1) *Assíntotas Horizontais*:

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se, somente se,*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 = 1$; *Portanto, a reta* $y = 1$ *é uma assíntota horizontal!*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 6}{x^2 - x + 6} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x^2}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} + \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6}{x^2}} = \frac{1+0+0}{1-0+0} = \frac{1}{1} = 1\,;$$

$* \, Logo, a\ reta\ y = 1$ *é a única assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

2) *Assíntotas Verticais*:

Dizemos que a reta $x = a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos casos abaixo*:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$*$ *Pela definição de continuidade de uma função no número* $x = a$, *concluímos que as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função, uma vez que,* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \nexists$.

$\rightarrow$ *A função* f *é uma função sentencial composta por uma função constante e uma função racional. A primeira função é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua em* $(0,+\infty)$ *onde está sentença é válida. As funções racionais são contínuas onde estão definidas, ou seja, em seus domínios. Como já foi constatado que o termo* $x^2 - x + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e o numerador é uma função polinomial, então essa função racional é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua em* $(-\infty, 0)$.

$*$ *Dessa forma, só podemos analisar a existência de assíntota vertical em* $x = 0$ *(único número onde não garantimos a continuidade)*

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 1 = 1;$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{x^2+x+6}{x^2-x+6} = \frac{\lim\limits_{x\to0^-}(x^2+x+6)}{\lim\limits_{x\to0^-}(x^2-x+6)} = \frac{\lim\limits_{x\to0^-} x^2 + \lim\limits_{x\to0^-} x + \lim\limits_{x\to0^-} 6}{\lim\limits_{x\to0^-} x^2 - \lim\limits_{x\to0^-} x + \lim\limits_{x\to0^-} 6} = \frac{6}{6} = 1$$

$*$ *Obs: Como o limite do denominador é diferente de zero, então podemos usar a propriedade do limite do quociente!*

$*$ *Como* $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ *então* $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ *existe e, portanto,* f *não possui assíntotas verticais.*

b) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe algum número real positivo que é igual ao dobro do seu quadrado.

$*$ *Devemos mostrar que existe algum* $x \in \mathbb{R}$, *com* $x > 0$, *tal que* $x = 2x^2$.

$*$ *Seja* $f(x) = 2x^2 - x$, *e calculamos os seguintes valores de* f:

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 2.\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2.\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}\,; \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$f(1) = 2.(1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1\,; \qquad\qquad f(1) = 1$$

$* f$ é uma função polinomial e, portanto, contínua em $\mathbb{R}$. Logo, f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ e $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0 < f(1)$. Então, existe algum número $c \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$ tal que $f(c) = 0$.

$f(c) = 0 \Rightarrow 2c^2 - c = 0 \rightarrow 2c^2 = c$; Logo, c é um número real positivo cujo valor é igual ao dobro do seu quadrado!

Questão 3. Seja $f(x) = x^3 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$.

a) Calcule $\lim_{x \to 0} f(x)$;

$* \forall x \in \mathbb{R}$, com $x \neq 0$, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$
$$-x^3 \leq x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^3 \quad ; \quad para\ x > 0$$

Seja $g(x) = -x^3$ e $h(x) = x^3$. Logo, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ e ainda, $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} h(x) = 0$, Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

$\rightarrow$ Analogamente ...

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$
$$-x^3 \geq x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \geq x^3 \quad ; \quad para\ x < 0$$

Seja $g(x) = -x^3$ e $h(x) = x^3$. Logo, $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ e ainda, $\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = 0$, Então, pelo Teorema do Confronto, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$.

$*$ Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$, então $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe e $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

b) Seja $g(x) = 1 - f(x)$. Defina $g(0)$ para que a função g seja contínua em $x = 0$, onde f é a função do item (a).

Definição: Dizemos que uma função f é contínua no número a se, somente se,

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

$*$ Aplicando a definição para a função g em $x = 0$, obtemos a igualdade

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{x \to 0} g(x) \\ &= \lim_{x \to 0} [1 - f(x)] \\ &= \lim_{x \to 0} 1 - \lim_{x \to 0} f(x) \end{aligned}$$

$*\ Obs:$ *podemos reverter o limite da diferença na diferença dos limites porque esses limites existem!*

$$g(0) = 1 - 0 = 1.$$

Logo, a função g pode ser representada na forma $g(x) = \begin{cases} 1 - f(x), & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

Questão 4. *Dada a função*

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x), & x < 1 \\ mx^2 + 3x + n, & 1 \leq x < 2 \\ mx + n, & x \geq 2 \end{cases}$$

determine os valores de m e n para os quais a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

$*$ *f é uma função sentencial e será contínua somente onde as suas sentenças forem contínuas considerando os intervalos onde predominam.*

A função trigonométrica $\cos(\pi x)$ *é uma função contínua em seu domínio. Portanto,* $\cos(\pi x)$ *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$*, porém, ela predomina apenas para* $x < 1$*. Logo, f é contínua em* $(-\infty, 1)$.

A segunda e terceira sentenças são funções polinomiais e, portanto, contínuas em $\mathbb{R}$*. Analisando onde essas funções predominam, concluimos que f é contínua em* $(1,2) \cup (2, +\infty)$

Logo, f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$.
Para que f seja contínua em $\mathbb{R}$ *basta determinarmos para quais valores de m e n tornam a função f contínua em* $x = 1$ *e em* $x = 2$ *simultaneamente.*

$*$ *Pela definição de continuidade num ponto, temos* $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$;

$-$*Analisando a continuidade em* $x = 1$:

$$1)\ f(1) = m + n + 3$$
$$2)\ \lim_{x \to 1} f(x);$$
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (mx^2 + 3x + n) = m + n + 3$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \cos(\pi x) = \cos \pi = -1$$

$*$ *Para que* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *exista,* $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$*, logo ...*

$$m + n + 3 = -1$$
$$m + n = -4 \qquad (I)$$

$-$*Analogamente, para* $x = 2$:

$$1)\ f(2) = 2m + n$$
$$2)\ \lim_{x \to 2} f(x);$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (mx + n) = 2m + n$$
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (mx^2 + 3x + n) = 4m + n + 6$$

$* \; Para \; que \; \lim_{x\to 2} f(x) \; existe, \; \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x), logo \ldots$

$$2m + n = 4m + n + 6$$
$$2m = -6$$
$$m = -3$$

$* \; Portanto, para \; m = -3, \lim_{x\to 2} f(x) \; existe \; e \; \lim_{x\to 2} f(x) = -6 + n \; e \; f(2) = -6 + n$

$* \; Logo, f \; \text{é} \; contínua \; em \; x = 2 \; para \; m = -3;$

$\rightarrow Voltando \; \text{à} \; equação \; (I), obtemos \; n = -4 - m \therefore n = -1. Para \; este \; valor \; de \; n$
$\lim_{x\to 1} f(x) \; existe \; e \; \lim_{x\to 1} f(x) = -1 \; e \; f(1) = -1.$

$* \; Conclusão: para \; m = -3 \; e \; n = -1 \; a \; função \; f \; \text{é} \; contínua \; em \; x = 1, x = 2 \; e,$
$considerando \; a \; continuidade \; definida \; inicialmente, f \; \text{é} \; contínua \; em \; (-\infty, +\infty),$
$ou \; seja, f \; \text{é} \; contínua \; em \; \mathbb{R}.$

Questão 5. *Se uma bola for empurrada ladeira abaixo, sobre um plano inclinado, a uma velocidade inicial de* $5\,m/s$ *, a distância que ela terá rolado, após t segundos será dada por* $s = 5t + 3t^2$.

$a)$ *Determine sua velocidade após* $2s$.

Do Cálculo 1, a interpretação cinemática da derivada com relação ao movimento de corpos, nos mostra que a velocidade no instante t é dada pelo valor da derivada da função posição × tempo, ou seja,

$$\begin{aligned} v(t) = s'(t) &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5(t+\Delta t) + 3(t+\Delta t)^2 - (5t+3t^2)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5t + 5\Delta t + 3t^2 + 6t\Delta t + 3\Delta t^2 - 5t - 3t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{5\Delta t + 6t\Delta t + 3\Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta t(5 + 6t + \Delta t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0} (5 + 6t + \Delta t) \\ v(t) &= 6t + 5 \end{aligned}$$

$* \; Em \; t = 2s, temos \; v(2) = 6(2) + 5 = 12 + 5 = 17\,m/s$

$b)$ *Quão longe ela estará do ponto de partida quando sua velocidade atingir* $35\,m/s$?

$$v(t) = 35 \Rightarrow 6t + 5 = 35 \rightarrow 6t = 30 \therefore t = 5s$$
$$s(5) = 5(5) + 3(5)^2 = 25 + 75 = 100m.$$

$*$ *A bola estará a* $100m$ *do ponto de partida quando sua velocidade atingir* $35\,m/s$.

1.3 2ª Prova – 08 de Maio de 2015

Questão 1

a) *As curvas* $y = x + ax + b$ *e* $y = cx - x^2$ *têm uma reta tangente em comum no ponto* $(1{,}0)$, *Determine* a, b *e* c.

b) *Sabe-se que* $f(x-1) = g\big(h(x^2-1)\big)$, *que* $h(15) = 0$, $h'(15) = 1$ *e que* $g'(0) = 2$. *Encontre* $f'(3)$.

Questão 2.

a) *Mostre que se a função* f *é a inversa da função* g, *então se tem* $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$
Seja $y = g(x)$, *e* $g^{-1}(x) = f(x)$, *então* $f\big(g(x)\big) = x$.

b) *Suponha que* f *e* f^{-1} *sejam diferenciáveis*, *Mostre que a reta tangente à curva* $y = f(x)$ *no ponto* (a,b) *nunca é perpendicular à reta tangente à curva* $y = f^{-1}(x)$ *no ponto* (b,a).

Questão 3.

a) *Determinem*, *caso existam*, *as equações das retas tangentes à curva* $x^2 + 4y^2 = 36$ *que passam pelo ponto* $(12{,}3)$.

b) *Encontre* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{(1-e^x)x^4}$.

Questão 4.

a) *Se* $f(x) = \dfrac{1}{\pi + (\operatorname{arctg} x)^2}$, *determine o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* f *no ponto de abscissa igual a* 1.

b) *Mostre que a curva* $y.\operatorname{tg}(x+y) = 4$ *não admite reta tangente horizontal*.

Questão 5.

a) *Mostre que* $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x) + \cos^4 x] = \cos\left(4x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) *Mostre que se* $f(x) = \operatorname{arcsec} x$, *então* $f'(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

$\boldsymbol{Questão\ 1}$

(a) *As curvas* $y = x + ax + b$ *e* $y = cx - x^2$ *têm uma reta tangente em comum no ponto* $(1{,}0)$*, Determine* a, b *e* c.

$*$ *Se ambas as curvas possuem a mesma reta tangente no ponto* $(1{,}0)$ *implica dizer que esse ponto pertence às curvas e que a derivada nesse ponto é igual para ambas. Logo,*

1) *Condição para que o ponto* $P = (1{,}0)$ *pertença às curvas:*

$y_1 = x + ax + b$ $\qquad\qquad$ $y_2 = cx - x^2$

$0 = 1 + a + b$ $\qquad\qquad$ $0 = c - 1$

$a + b = -1$ $\qquad\qquad$ $c = 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = x - x^2$

$*$ *Portanto, temos* $c = 1$ *e a condição* $a + b = -1$ $(eq.1)$

2) *Analisando o segundo critério: as derivadas nesse ponto são iguais para as curvas dadas.*

$y'_1 = 1 + a$ $\qquad\qquad$ $y'_2 = 1 - 2x$

$y'_1(1) = 1 + a$ $\qquad\qquad$ $y'_2(1) = 1 - 2 = -1$

Como $y'_1(1) = y'_2(1) \Rightarrow 1 + a = -1 \therefore a = -2$.
Voltando à eq.1, obtemos $a + b = -1 \rightarrow -2 + b = -1 \therefore b = 1$

$y_1 = x - 2x + 1$ $\qquad\qquad$ $y_2 = x - x^2$

$y_1 = -x + 1$

(b) *Sabe-se que* $f(x-1) = g\big(h(x^2-1)\big)$*, que* $h(15) = 0, h'(15) = 1$ *e que* $g'(0) = 2$*. Encontre* $f'(3)$.

$*$ *Derivando ambos os membros da igualdade pela Regra da Cadeia, obtemos:*

$$\frac{d}{dx}[f(x-1)] = \frac{d}{dx}\left[g\big(h(x^2-1)\big)\right]$$
$$[f'(x-1)].\frac{d}{dx}(x-1) = \left[g'\big(h(x^2-1)\big)\right].\frac{d}{dx}[h(x^2-1)]$$
$$f'(x-1) = g'\big(h(x^2-1)\big).h'(x^2-1).\frac{d}{dx}(x^2-1)$$
$$f'(x-1) = g'\big(h(x^2-1)\big).h'(x^2-1).[2x]$$

$f'(x-1) = f'(3) \Rightarrow x - 1 = 3 \therefore x = 4$ *. Logo,*

$f'(3) = g'\big(h(4^2-1)\big).h'(4^2-1).[2.4]$
$f'(3) = g'\big(h(16-1)\big).h'(16-1).8$
$f'(3) = g'\big(h(15)\big).h'(15).8$
$f'(3) = g'(0).1.8$
$f'(3) = 2.8 = 16$

$\textbf{Questão 2.}$

(a) *Mostre que se a função f é a inversa da função g, então se tem* $g'(x) = \dfrac{1}{f'(y)}$

Seja $y = g(x)$, *e* $g^{-1}(x) = f(x)$, *então* $f\big(g(x)\big) = x$.

$$f\big(g(x)\big) = x$$
$$\frac{d}{dx}\big[f\big(g(x)\big)\big] = \frac{d}{dx}[x]$$
$$f'\big(g(x)\big).g'(x) = 1$$
$$g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}$$

$*$ *Como* $y = g(x)$, *então ...*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}\ , com\ f'(y) \neq 0$$

(b) *Suponha que f e f^{-1} sejam diferenciáveis, Mostre que a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (a,b) nunca é perpendicular à reta tangente à curva $y = f^{-1}(x)$ no ponto (b,a).*

$*$ *A equação da reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (a,b) e coeficiente angular $m = f'(a)$ e dada pela expressão:*

$$y - b = f'(a).(x - a)$$

$*$ *Com base no item anterior, se $y = f(x)$ e $g(x) = f^{-1}(x)$, então,*

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

Logo,

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)}\ , com\ f'(a) \neq 0$$

$*$ *A equação da reta tangente à curva $y = f^{-1}(x)$ no ponto (b,a) e coeficiente angular $m = \dfrac{1}{f'(a)}$ é dada pela expressão:*

$$y - a = \frac{1}{f'(a)}(x - b)$$

$*$ *Duas retas são ditas perpendiculares se m_1 e m_2, coeficientes angulares das retas obedecem a relação $m_1.m_2 = -1$.*

Neste caso, $m_1 = f'(a)$ e $m_2 = \dfrac{1}{f'(a)}$. Logo, $m_1.m_2 = 1$. Portanto, a reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto (a,b) nunca é perpendicular à reta tangente à curva $y = f^{-1}(x)$ no ponto (b,a).

$\textbf{Questão 3.}$

(a) *Determinem, caso existam, as equações das retas tangentes à curva $x^2 + 4y^2 = 36$ que passam pelo ponto $(12,3)$.*

$* A\ equação\ de\ uma\ reta\ que\ passa\ pelo\ ponto\ (12{,}3)\ e\ possue\ coeficiente\ angular\ m$ $é\ dada\ pela\ expressão:$

$$y - 3 = m(x - 12)$$

$Onde\ m = y'\ é\ a\ derivada\ da\ curva\ dada\ impllicitamente\ pela\ expressão$ $x^2 + 4y^2 = 36.$

$* Derivando\ implicitamente, temos:$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(4y^2) = \frac{d}{dx}(36)$$
$$2x + 8yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{4y}$$

$Substituindo\ na\ equação\ da\ reta:$

$$y - 3 = -\frac{x}{4y}(x - 12)$$
$$4y^2 - 12y = -x^2 + 12x$$
$$x^2 + 4y^2 = 12x + 12y$$

$* Se\ essa\ reta\ tangente\ é\ tangente\ à\ curva, então\ o\ termo\ em\ destaque\ representa$ $o\ ponto\ de\ tangencia.\ Logo,$

$$36 = 12x + 12y$$
$$3 = x + y \quad (eq.1)$$

$* Devemos\ verificar\ se\ existe\ algum\ ponto\ P = (x, y)\ pertencente\ à\ curva\ tal\ que$ $x + y = 3. Substituindo\ na\ expressão\ da\ curva:$

$$x^2 + 4(3 - x)^2 = 36$$
$$x^2 + 4(9 - 6x + x^2) = 36$$
$$x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 36$$
$$5x^2 - 24x + 36 = 36$$
$$5x^2 - 24x = 0$$
$$x(5x - 24) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad e \quad x_2 = \frac{24}{5}$$

$* Voltando\ à\ eq.1, encontramos\ os\ ponto\ onde\ a\ reta\ tangente\ intersecta\ a\ curva:$

$$y_1 = 3 \rightarrow A = (0{,}3) \qquad e \quad y_2 = -\frac{9}{5} \rightarrow B = \left(\frac{24}{5}, -\frac{9}{5}\right)$$

$* \ Calculando\ os\ coeficiente\ angulars\ das\ retas\ tangete\ nos\ ponto\ A\ e\ B, obtemos:$

$$m_1 = -\frac{x_1}{4y_1} = -\frac{0}{12} = 0 \quad (Reta\ tangente\ horizontal!)$$
$$m_2 = -\frac{\frac{24}{5}}{4\left(-\frac{9}{5}\right)} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

$*$ *Equações das retas tangentes*:

t_1: $y - 3 = 0(x - 12) \rightarrow \quad t_1: y = 3$
t_2: $y - 3 = \dfrac{2}{3}(x - 12) \rightarrow \; t_2: y = \dfrac{2}{3}x - 5$

(b) *Encontre* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4} \cdot \frac{x}{x}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{x.\operatorname{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^5} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \cdot \frac{x}{(1 - e^x)}\right];$$

$*$ *Suponhamos que esse limite de um produto seja o produto dos limites, desde que esses limites existam. Logo,*

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \cdot \frac{x}{(1 - e^x)}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \times \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x}$$

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5}$; *seja* $\theta = x^5$. *Se* $x \to 0$, *então* $\theta \to 0$. *Logo,*
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} = \lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta} = 1$ (*Limite fundamental trigonométrico*)

$$(2) \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = -\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = -\lim_{x \to 0} \left[\frac{e^x - 1}{x}\right]^{-1} = -\left[\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}\right]^{-1} = -1$$

$*$ *Portanto, como os limites existem, então o limite do produto pode ser escrito como o produto dos limites. Logo,*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{(1 - e^x)x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^5)}{x^5} \times \lim_{x \to 0} \frac{x}{1 - e^x} = 1 \times (-1) = -1$$

Questão 4.

(a) *Se* $f(x) = \dfrac{1}{\pi + (\operatorname{arctg} x)^2}$, *determine o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* f *no ponto de abscissa igual a* 1.

$*$ *A questão pede, resumidamente, que determinemos* $m_N = -\dfrac{1}{f'(1)}$.

$f(x) = [\pi + (\operatorname{arctg} x)^2]^{-1}$
$f'(x) = -1[\pi + (\operatorname{arctg} x)^2]^{-2}.D_x[\pi + (\operatorname{arctg} x)^2]$
$f'(x) = -\dfrac{1}{[\pi + (\operatorname{arctg} x)^2]^2}.(2 \operatorname{arctg} x).\dfrac{1}{1 + x^2}$
$f'(1) = -\dfrac{1}{[\pi + (\operatorname{arctg}(1))^2]^2}.(2 \operatorname{arctg}(1)).\dfrac{1}{1 + 1^2}$

$$f'(1) = -\frac{1}{\left[\pi + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right]^2} . 2\left(\frac{\pi}{4}\right) . \frac{1}{2}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{\left[\pi + \frac{\pi^2}{16}\right]^2} . \frac{\pi}{4}$$

$$f'(1) = -\frac{1}{\left(\frac{16\pi + \pi^2}{16}\right)^2} . \frac{\pi}{4}$$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{4.\left[\frac{(16\pi + \pi^2)^2}{256}\right]} = -\frac{\pi}{\left[\frac{(16\pi + \pi^2)^2}{64}\right]} = -\frac{64\pi}{(16\pi + \pi^2)^2}$$

$*$ *Logo, o coeficiente angular da reta normal no ponto de abscicssa* $x = 1$ é:

$$m_N = -\frac{1}{f'(1)} = \frac{(16\pi + \pi^2)^2}{64\pi}$$

(b) *Mostre que a curva* $y.\text{tg}(x + y) = 4$ *não admite reta tangente horizontal.*
$*$ *Em outras palavras, mostre que* $y' \neq 0$ *para todo ponto pertencente à curva.*

Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dx}[y.\text{tg}(x + y)] = \frac{d}{dx}(4)$$
$$y'.\text{tg}(x + y) + y.(1 + y')\sec^2(x + y) = 0$$
$$y' = -\frac{y.\sec^2(x + y)}{\text{tg}(x + y) + y.\sec^2(x + y)}$$

Se um ponto pertence a curva então, $y.\text{tg}(x + y) = 4 \rightarrow \text{tg}(x + y) = \frac{4}{y}$;

$*$ *Da identidade trigonométrica:*

$$\text{tg}^2(x + y) + 1 = \sec^2(x + y)$$
$$\frac{16}{y^2} + 1 = \sec^2(x + y)$$
$$\sec^2(x + y) = \frac{y^2 + 16}{y^2}$$

$*$ *Com esses resultados, temos:*

$$y' = -\frac{y.\frac{y^2 + 16}{y^2}}{\frac{4}{y} + y.\frac{y^2 + 16}{y^2}} = -\frac{\frac{y^2 + 16}{y}}{\frac{y^2 + 20}{y}} = -\frac{y^2 + 16}{y^2 + 20}$$

$* \; y' = 0 \Rightarrow y^2 + 16 = 0 \Rightarrow y^2 = -16 \;\therefore \nexists y \in \mathbb{R}; y^2 = -16.$

$*$ *Sendo assim, não existe nenhum ponto da curva tal que* $y' = 0$, *ou seja, não existe ponto onde a reta tangente é horizontal.*

***Questão* 5.**

(a) *Mostre que* $\dfrac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4 x]=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4 x] &= \frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4 x]+\frac{d}{dx}[\cos^4 x]\\ &= 4\operatorname{sen}^3 x\,.\cos x-4\cos^3 x\,.\sin x\\ &= 4\operatorname{sen} x\,.\cos x\,[\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x]\\ &= 2\operatorname{sen}(2x)\,.[-\cos(2x)]\\ &= -2\operatorname{sen}(2x)\,.\cos(2x)\\ &= -\operatorname{sen}(4x)\end{aligned}$$

$*$ *Como* $\operatorname{sen}(x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ *e* $\operatorname{sen}(x)=-\operatorname{sen}(-x)$, *temos*:

$-\operatorname{sen}(4x)=\operatorname{sen}(-4x)$; $\operatorname{sen}(-4x)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-(-4x)\right)=\cos\left(4x+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Portanto,

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^4(x)+\cos^4 x]=\cos\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)$$

(b) *Mostre que se* $f(x)=\operatorname{arcsec} x$, *então* $f'(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

$*$ *Pela derivada da função inversa, temos*:

$g(x)=\sec x$ *e* $f(x)=g^{-1}(x)=\operatorname{arcsec} x$, *então*:

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$$
$$f'(x)=\frac{1}{\sec y\,.\operatorname{tg} y}$$

$$f'(x)=\frac{1}{\sec y\,.\sqrt{\sec^2 y-1}}$$

Se $y=f(x)=\operatorname{arcsec} x$, *então* $y=\operatorname{arcsec} x\Rightarrow x=\sec y$. *Portanto*,

$$f'(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$*$ ***Obs***: *essa expressão para* $f'(x)$ *é válida se, somente se*, $\operatorname{tg} y>0$, *ou seja*, *com* $0\leq y<\dfrac{\pi}{2}$ *ou* $\pi\leq y<\dfrac{3\pi}{2}$, *temos* $\operatorname{tg} y=+\sqrt{\sec^2 y-1}$.

1.4 2ª Prova – 09 de Maio de 2015

Questão 1.

a) *Seja* f *uma função tal que* $f(3) = f'(3) = 1$ *e tal que* $g(x^9 - 1) = f\big(3.f(3x)\big)$. *Calcule* $g'(0)$.

b) *Mostre que a soma das coordenadas das insterseções com os eixos* X *e* Y *de qualquer reta tangente à curva* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ *é igual a* c.

Questão 2.

a) *Seja* g *uma função duas vezes derivável e* f *uma função definida por* $f(x) = x.g(x^2)$. *Sabendo-se que* $g(2) = 2, g'(2) = \dfrac{1}{2}$ *e* $g''(2) = \dfrac{1}{4}$, *obtenha* $f'(\sqrt{2})$ *e* $f''(\sqrt{2})$.

b) *Qual é a posição relativa da reta normal ao gráfico de* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$, *no ponto em que* $x = 1$, *com relação ao gráfico da parábola* $y = x^2$.

Questão 3.

a) *Mostre que a reta tangente à curva* $y = x^3$ *em qualquer ponto* (a, a^3) *intercepta a curva novamente em um ponto em que* $\dfrac{dy}{dx}$ *é o quádruplo do coeficiente angular da reta tangente em* (a, a^3).

b) *Calcule* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x}$.

Questão 4.

a) *Encontre uma equação para a reta tangente à curva* $y = e^{\operatorname{sen} x}.\cos e^x + \cos 1$ *onde* $x = 0$.

b) *Em que ponto a reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = 2^{\arccos\sqrt{x}}$, *no ponto de ordenada* $2^{\frac{\pi}{3}}$ *intercepta o eixo das abscissas*.

Questão 5.

a) *Seja* $P: (a, b)$ *sobre a curva* $xy = 1$. *Determine as interseções da reta tangente à curva em* P *com os eixos coordenados e mostre que* P *é equidistante dessas interseções*.

b) *Se* n *for um inteiro positivo, demonstre que*

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen}^n x \,.\cos(nx)] = n \operatorname{sen}^{n-1}(x)\,.\cos[(n+1)x]$$

***Questão* 1.**

(a) *Seja f uma função tal que* $f(3) = f'(3) = 1$ *e tal que* $g(x^9 - 1) = f\big(3.f(3x)\big)$. *Calcule* $g'(0)$.

$$g(x^9 - 1) = f\big(3.f(3x)\big)$$

$*$ *Derivando pela regra da cadeia ambos os membros da igualdade, temos*:

$$\frac{d}{dx}[g(x^9-1)] = \frac{d}{dx}\big[f\big(3.f(3x)\big)\big]$$
$$g'(x^9-1).D_x[x^9-1] = \big[f'\big(3.f(3x)\big)\big].D_x[3.f(3x)]$$
$$9x^8.g'(x^9-1) = 3.\big[f'\big(3.f(3x)\big)\big].D_x[f(3x)]$$
$$9x^8.g'(x^9-1) = 3.\big[f'\big(3.f(3x)\big)\big].f'(3x).3$$
$$9x^8.g'(x^9-1) = 9.\big[f'\big(3.f(3x)\big)\big].f'(3x)$$
$$g'(x^9-1) = \frac{\big[f'\big(3.f(3x)\big)\big].f'(3x)}{x^8}$$

$g'(x^9-1) = g'(0) \Rightarrow x^9 - 1 = 0 \Rightarrow x^9 = 1 \therefore x = 1.$

$$g'(0) = \frac{\big[f'\big(3.f(3)\big)\big].f'(3)}{1^8} = \frac{[f'(3)].f'(3)}{1} = \frac{1\times 1}{1} = 1$$

(b) *Mostre que a soma das coordenadas das insterseções com os eixos X e Y de qualquer reta tangente à curva* $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ *é igual a c.*

$*$ *Dado um ponto $P(a,b)$ pertencente à curva, então* $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}$
O coeficiente angular m da reta tangente à essa curva é dado pela derivada da curva no ponto (a,b). Derivando implicitamente, temos:

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{d}{dx}\left(y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{d}{dx}\left(c^{\frac{1}{2}}\right)$$
$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}.y' = 0$$
$$y' = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

$*$ *No ponto* (a,b), $y' = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$.

$\rightarrow$ *Equação da reta tangente no ponto (a,b) e coeficiente angular* $m = -\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x-a)$$

$*$ *Interseções com os eixos X e Y*:

Para $x = 0$, *obtemos*:

$$y - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(0-a) \rightarrow y - b = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \rightarrow y - b = \sqrt{ab} \therefore y = \sqrt{ab} + b$$

$Para\ y = 0, obtemos:$

$$0 - b = -\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}(x - a) \rightarrow \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = x - a \rightarrow \sqrt{ab} = x - a \therefore x = a + \sqrt{ab}$$

$* \ Logo, a\ soma\ (S)\ das\ coordenadas\ das\ interseções\ é\ dada\ pela\ expressão:$

$$S = \sqrt{ab} + b + a + \sqrt{ab} = a + 2\sqrt{ab} + b = \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

$* \ Como\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{c}, a\ soma\ das\ coordenadas\ é\ S = \left(\sqrt{c}\right)^2 = c.$

Questão 2.

(a) $Seja\ g\ uma\ função\ duas\ vezes\ derivável\ e\ f\ uma\ função\ definida\ por$ $f(x) = x.g(x^2). Sabendo\text{-}se\ que\ g(2) = 2, g'(2) = \frac{1}{2}\ e\ g''(2) = \frac{1}{4}, obtenha$ $f'(\sqrt{2})\ e\ f''(\sqrt{2}).$

$$\frac{d}{dx}[f(x)] = \frac{d}{dx}[x.g(x^2)]$$

$$f'(x) = g(x^2) + x.g'(x^2).2x$$
$$f'(x) = g(x^2) + 2x^2.g'(x^2)$$

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx}[g(x^2) + 2x^2.g'(x^2)]$$

$$f''(x) = 2x.g'(x^2) + 4x.g'(x^2) + 2x^2.g''(x^2).2x$$
$$f''(x) = 6x.g'(x^2) + 4x^3.g''(x^2)$$

$$f'(\sqrt{2}) = g\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right) + 2.\left(\sqrt{2}\right)^2.g'\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$$
$$f'(\sqrt{2}) = g(2) + 4.g'(2)$$
$$f'(\sqrt{2}) = 2 + 4.\frac{1}{2}$$
$$f'(\sqrt{2}) = 2 + 2$$
$$f'(\sqrt{2}) = 4$$

$$f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}.g'\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right) + 4\left(\sqrt{2}\right)^3.g''\left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$$
$$f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}.g'(2) + 8\sqrt{2}.g''(2)$$
$$f''(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}.\frac{1}{2} + 8\sqrt{2}.\frac{1}{4}$$
$$f''(\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$$
$$f''(\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}$$

(b) *Qual é a posição relativa da reta normal ao gráfico de* $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arccotg} x}$, *no ponto em que* $x = 1$, *com relação ao gráfico da parábola* $y = x^2$.

$*$ *Primeiramente determinamos o ponto referente à abscissa* $x = 1$.

$$f(1) = \frac{\operatorname{arctg}(1)}{\operatorname{arccotg}(1)} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}} = 1 \ ; \ ponto\ (1,1)$$

$*$ *Esse ponto também pertence à parábola* $y = x^2$, *pois*, $1 = 1^2$.

A inclinação da reta normal ao gráfico de f *no ponto* $(1,1)$ *é dada pela expressão*:

$$m_N = -\frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}.\operatorname{arccotg} x - \left(-\frac{1}{1+x^2}\right).\operatorname{arctg} x}{(\operatorname{arccotg} x)^2} = \frac{\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x}{(1+x^2).(\operatorname{arccotg} x)^2}$$

$$f'(1) = \frac{\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arccotg} 1}{(1+1^2).(\operatorname{arccotg} 1)^2} = \frac{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}}{2.\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

Logo, o coeficiente da reta normal é $m_N = -\dfrac{\pi}{4}$

Equação da reta normal ao gráfico de f *no ponto* $(1,1)$ *e coeficiente angular* $-\dfrac{\pi}{4}$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 1 = -\frac{\pi}{4}(x-1)$$

Vamos verificar se essa reta normal possui algum ponto de interseção com a curva $y = x^2$, *além do ponto* $(1,1)$.

$$x^2 - 1 = -\frac{\pi}{4}(x-1)$$
$$x^2 + \frac{\pi}{4}x - \left(\frac{\pi}{4} + 1\right) = 0$$
$$\Delta = \frac{\pi^2}{16} + \pi + 4$$
$$\Delta = \left(\frac{\pi}{4} + 2\right)^2$$
$$x = \frac{-\frac{\pi}{4} \pm \left(\frac{\pi}{4} + 2\right)}{2}$$
$$x_1 = 1 \ \ e \ \ x_2 = -\frac{\pi}{4} - 1$$
$$P(1,1) \ \ e \ Q = \left(-\frac{\pi}{4} - 1, \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$*$ *Logo, a reta normal intercepta a parábola* $y = x^2$ *em dois pontos e, portanto, essa reta normal ao gráfico de* f *no ponto* $(1,1)$ *é secante em relação à parábola* $y = x^2$.

***Questão* 3.**

(a) *Mostre que a reta tangente à curva* $y = x^3$ *em qualquer ponto* (a, a^3) *intercepta a curva novamente em um ponto em que* $\frac{dy}{dx}$ *é o quádruplo do coeficiente angular da reta tangente em* (a, a^3).

$1^{\underline{o}}$ *passo: determinar a equação da reta tangente no ponto* (a, a^3).

Coeficiente angular da reta tangente $m = y' = 3x^2$; *no ponto* $(a, a^3), y' = 3a^2$.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - a^3 = 3a^2(x - a)$$
$$y = 3a^2x - 3a^3 + a^3$$
$$y = 3a^2x - 2a^3$$

$2^{\underline{o}}$ *passo: encontrar o segundo ponto onde essa reta intercepta a curva.*

$$x^3 = 3a^2x - 2a^3$$
$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$$

$*$ *Como* $x = a$ *é uma solução da equação, usando o dispositivo de Briot − Ruffini para abaixar o grau do polinômio, obtemos*:

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = (x - a)(x^2 + ax - 2a^2)$$
$$\Delta = a^2 + 8a^2 = 9a^2$$
$$x = \frac{-a \pm 3a}{2}$$
$$x_1 = a \quad x_2 = -2a$$

$*$ *Portanto, o segundo ponto onde a reta intercepta a curva é o ponto* $(-2a, -8a^3)$.

$3^{\underline{o}}$ *passo: comparar o valor das derivadas nesses pontos.*

$$m_2 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2a} = 3.(-2a)^2 = 3.(4a^2) = 4.(3a^2)$$

Como $m_1 = 3a^2$ *e* $m_2 = 4.(3a^2)$, *temos*:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{4(3a^2)}{3a^2} = 4$$

Portanto, o coeficiente angular no ponto onde a reta tangente em (a, a^3) *intercepta novamente a curva é o quádruplo do coeficiente angular da reta tangente em* (a, a^3).

(b) *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x}$;

$$\lim_{x\to 0} \frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x[\cos(\operatorname{sen} x) - 1]}{\operatorname{sen}^2 x} . \frac{\cos(\operatorname{sen} x) + 1}{\cos(\operatorname{sen} x) + 1}\right] =$$
$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x[\cos^2(\operatorname{sen} x) - 1]}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen} x) + 1]}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-x.\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen} x)}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen} x) + 1]};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x.\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen}x)+1]}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}.\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x}\right];$$

$*$ *Suponhamos que esse limite de um produto seja o produto dos limites, desde que esses limites existam. Logo,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x.\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{(\operatorname{sen}^2 x)[\cos(\operatorname{sen}x)+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x};$$

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1};\ \lim_{x\to 0}[\cos(\operatorname{sen}x)+1]=\cos 0+1=1+1=2.$$

$*$ *Como o limite do denominador é diferente de zero, então ...*

$$\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}=\frac{\lim_{x\to 0}(-x)}{\lim_{x\to 0}[\cos(\operatorname{sen}x)+1]}=\frac{0}{2}=0.$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right]^2=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right]^2;$$

$*$ *Seja* $\theta=\operatorname{sen}x$; *Se* $x\to 0$, *então* $\theta\to 0$. *Logo,*

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\right]^2=\left[\lim_{\theta\to 0}\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\theta}\right]^2=1^2=1;\quad \textit{Limite fundamental trigonométrico!}$$

$*$ *Portanto, como os limites existem, então o limite do produto pode ser escrito como o produto dos limites. Logo,*

$$\lim_{x\to 0}\frac{x[\cos(\operatorname{sen}x)-1]}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{\cos(\operatorname{sen}x)+1}\times\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}^2 x}=0\times 1=0.$$

***Questão* 4.**

(*a*) *Encontre uma equação para a reta tangente à curva* $y=e^{\operatorname{sen}x}.\cos e^x+\cos 1$ *onde* $x=0$.

1º *passo*: *determinar o ponto em questão*:

$y=e^{\operatorname{sen}0}.\cos e^0+\cos 1=e^0.\cos 1+\cos 1=\cos 1+\cos 1=2\cos 1$
$P(0{,}2\cos 1)$

2º *passo*: *Coeficiente angular da reta tangente no ponto* P.

$y'=(\cos x).e^{\operatorname{sen}x}.\cos e^x+e^{\operatorname{sen}x}.e^x.(-\operatorname{sen}e^x)$
$y'(0)=(\cos 0).e^{\operatorname{sen}0}.\cos e^0+e^{\operatorname{sen}0}.e^0.(-\operatorname{sen}e^0)$
$y'(0)=1.e^0.\cos 1-e^0.1.\operatorname{sen}1$
$y'(0)=\cos 1-\sin 1$

3º *passo*: *Equação da reta tangente no ponto* P *e coeficiente angular* $y'(0)$.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

$$y - 2\cos 1 = (\cos 1 - \sin 1).(x - 0)$$
$$y = (\cos 1 - \sin 1)x + 2\cos 1$$

(b) *Em que ponto a reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = 2^{\arccos\sqrt{x}}$, *no ponto de ordenada* $2^{\frac{\pi}{3}}$ *intercepta o eixo das abscissas.*

1º *passo: encontrar o ponto da função* f, *tal que* $f(x) = 2^{\frac{\pi}{3}}$;

$2^{\arccos\sqrt{x}} = 2^{\frac{\pi}{3}}$; $\frac{\pi}{3} = \arccos\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{1}{4}$;

2º *passo: encontrar a reta tangente à função* f *nesse ponto.*

Seja $u = \sqrt{x}$; $v = \arccos u$, *então* $y = f(v) = 2^v$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{df}{dx} = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{df}{dv}$$
$$f'(x) = u'(x).v'(u).f'(v)$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.2^v.\ln 2$$
$$f'(x) = -\frac{2^{\arccos\sqrt{x}}.\ln 2}{(2\sqrt{x}).\sqrt{1-x}}$$
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{\arccos\left(\frac{1}{2}\right)}.\ln 2}{\left(2.\frac{1}{2}\right).\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$$
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2}{\sqrt{\frac{3}{4}}}$$
$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2.2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 2}{\sqrt{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}$$

$*$ *Equação da reta tangente no ponto* $\left(\frac{1}{4}, 2^{\frac{\pi}{3}}\right)$;

$$y - 2^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$*$ *A interseção com o eixo das abscissas ocorre quando* $y = 0$. *Logo,*

$$0 - 2^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$
$$-2^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{2^{\frac{\pi}{3}}.\ln 4}{\sqrt{3}}.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$\sqrt{3} = \ln 16.\left(x - \frac{1}{4}\right)$$
$$x - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{\ln 4}$$
$$x = \frac{\sqrt{3}}{\ln 4} + \frac{1}{4}$$

O ponto onde a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{1}{4}, 2^{\frac{\pi}{3}}\right)$ intercepta o eixo das abscissas é o ponto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{\ln 4} + \frac{1}{4}, 0\right)$.

Questão 5.

(a) *Seja $P{:}\,(a,b)$ sobre a curva $xy = 1$. Determine as interseções da reta tangente à curva em P com os eixos coordenados e mostre que P é equidistante dessas interseções.*

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$
$$y' = -1.x^{-2}$$
$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$*$ *No ponto $P(a,b)$, $y' = -\frac{1}{a^2}$;*

$*$ *Como o ponto P pertence à curva, então $a.b = 1$; $b = \frac{1}{a}$*

Equação da reta tangente no ponto $P(a,b)$ e coeficiente angular $y' = -\frac{1}{a^2}$;

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - b = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

$*$ *Interseções com os eixos coordenados:*

Para $x = 0$, obtemos:

$$y - b = -\frac{1}{a^2}(-a) \rightarrow y - b = \frac{1}{a} \therefore y = \frac{1}{a} + b \Rightarrow y = b + b = 2b$$

Para $y = 0$, obtemos:

$$0 - b = -\frac{1}{a^2}(x - a) \rightarrow x - a = a^2 b \therefore x = a^2 b + a \Rightarrow x = a(ab + 1) = 2a$$

Interseções $A(0,2b)$ e $B(2a,0)$;

Devemos provar que P é o ponto médio entre A e B. Portanto,

$$P = \left(\frac{0 + 2a}{2}, \frac{2b + 0}{2}\right) = \left(\frac{2a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = (a,b)$$

$*$ *Logo, P é equidistante das interseções!*

(b) *Se n for um inteiro positivo, demonstre que*

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\, x\,.\cos(nx)] = n\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}(x)\,.\cos[(n+1)x]$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\, x\,.\cos(nx)] &= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\, x\,.\cos x\,.\cos(nx) + \mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\, x\,.\,n.\,[-\mathrm{sen}(nx)] \\
&= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\, x\,.\cos x\,.\cos(nx) - n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}(x)\,.\mathrm{sen}(nx) \\
&= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\, x\,.\cos x\,.\cos(nx) - n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}(x)\,.\mathrm{sen}(x)\,.\mathrm{sen}(nx) \\
&= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\, x\,[\cos x\,.\cos(nx) - \mathrm{sen}(x)\,.\mathrm{sen}(nx)] \\
&= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\, x\,.\cos(nx + x) \\
&= n.\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}\, x\,.\cos[(n+1)x]
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx}[\mathrm{sen}^{\mathrm{n}}\, x\,.\cos(nx)] = n\,\mathrm{sen}^{\mathrm{n-1}}(x)\,.\cos[(n+1)x]$$

1.5 3ª Prova – 16 de Outubro de 2015

Questão 1

a) *Use diferenciação logarítmica para achar* y', *onde* $y = \sqrt[3]{(3x-1)\sqrt{2x+5}}$.

b) *Encontre* $k \in \mathbb{R}$, *de modo que a equação* $\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x) + \arccos(\operatorname{tgh} x) = k$, *seja verdadeira para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Questão 2

a) *Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos críticos da função* $y = \operatorname{sen}(4x) + \cos(4x)$, *com* $x \in (0, 2\pi)$.

b) *Um ponto de abscissa* P *se move ao longo da parábola* $y^2 = x, y \geq 0$, *de modo que sua abscissa aumenta* 4*cm por segundo*. *A projeção de* P *sobre o eixo* Ox *é o ponto* M. *Com que rapidez aumenta a área do triângulo* OPM *quando* P *está no ponto de abscissa* 9?

Questão 3

a) *Determine a interseção da reta que tangencia o gráfico de* $y = \operatorname{tgh}(e^{\operatorname{sen} x})$ *no ponto em que* $x = 0$ *com o eixo-*x.

b) *Um helicóptero da polícia está voando a* $150\, km/h$ *a uma altitude constante de* $0{,}5 km$, *acima de uma rodovia reta*. *O piloto usa um radar para determinar que um carro em movimento está a uma distância de* $1{,}5 km$ *do helicóptero*, *e que essa distância está diminuindo a* $250\, km/h$. *Determine a velocidade do carro*.

Questão 4

a) *A resistência elétrica de um fio é proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado de seu diâmetro*. *Suponha que a resistência de um fio*, *de comprimento dado*, *é calculada a partir da medida do diâmetro*, *com uma possibilidade de erro relativo de* 0,01. *Encontre o possível erro relativo no cálculo da resistência*.

b) *Um foguete é lançado verticalmente para cima e*, *após t segundos ele está a s metros do solo*, *onde* $s(t) = 560t - 16t^2$ *e o sentido positivo é o de baixo para cima*. *Quanto tempo levará o foguete para atingir sua altura máxima*?

Questão 5

a) *Mostre que a função* $f(x) = x + \ln(\cosh x) + \operatorname{senh} \pi$, *possui no máximo*, *uma raíz real*.

b) *Mostre que*, *no intervalo* $(0, \pi)$, *o gráfico da função* $f(x) = \log_3[\log_5|\operatorname{sen} x|]$ *não possui reta tangente horizontal*.

Questão 1

(a) *Use diferenciação logarítmica para achar* y', *onde* $y = \sqrt[3]{(3x-1)\sqrt{2x+5}}$

$$\ln y = \ln\left[(3x-1)\sqrt{2x+5}\right]^{1/3}$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\left[\ln(3x-1) + \ln(2x+5)^{\frac{1}{2}}\right]$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\left[\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x+5)\right]$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(3x-1) + \frac{1}{6}\ln(2x+5)$$

Derivando ambos os membros, obtemos:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(3x-1)}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(2x+5)}\cdot 2$$

$$y' = y\left[\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3(2x+5)}\right]$$
$$y' = \sqrt[3]{(3x-1)\sqrt{2x+5}}\left[\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{3(2x+5)}\right]$$

(b) *Encontre* $k \in \mathbb{R}$, *de modo que a equação* $\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x) + \arccos(\operatorname{tgh} x) = k$, *seja verdadeira para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{senh} x)$ *e* $g(x) = -\arccos(\operatorname{tgh} x)$, *então devemos encontrar* k *tal que*, $f(x) - g(x) = k$.

$*$ *Se* $f - g$ *é constante para todo* $x \in (a,b)$ *então* $f'(x) = g'(x)$ *para todo* x *no intervalo* (a,b). *Portanto, As funções* f *e* g *diferem por uma constante, ou seja* $f(x) - g(x) = k$.

$*$ *Analisando a função* f, *sabemos que* $D(\operatorname{arctg} x) = \mathbb{R}$, *porém o argumento em questão é o* $\operatorname{senh} x$ *cujo domínio* $D(\sinh x) = \mathbb{R}$ *e sua imagem* $Im(\operatorname{senh} x) = \mathbb{R}$, *portanto*, f *está definida para todo* $x \in \mathbb{R}$.

$*$ *Analisando a função* g, *sabemos que* $D(\arccos x) = [-1,1]$, *porém o argumento em questão é a* $\operatorname{tgh} x$ *cujo domínio é* $D(\operatorname{tgh} x) = \mathbb{R}$ *com imagem* $Im(\operatorname{tgh} x) = [-1,1]$ *Logo*, g *está definida para todo* $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{senh}^2 x}\cdot\cosh x = \frac{1}{\cosh^2 x}\cdot\cosh x = \frac{1}{\cosh x} = \operatorname{sech} x \;;$$

$$g'(x) = -\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{tgh}^2 x}}\right)\cdot\operatorname{sech}^2 x = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sech}^2 x}}\cdot\operatorname{sech}^2 x = \operatorname{sech} x \;;$$

$*$ *Como* $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, *então para determinar a constante* k *basta aplicar qualquer valor de* x. *Usando* $x = 0$, *obtemos*:

$$f(0) - g(0) = k$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{senh} 0) + \arccos(\operatorname{tgh} 0) = k$$
$$\operatorname{arctg}(0) + \arccos(0) = k$$
$$0 + \frac{\pi}{2} = k$$
$$k = \frac{\pi}{2}$$

$*\ Obs$: *as análises das funções f e g foram feitas para verificar se realmente o critério de verificação$(x \in \mathbb{R})$ condiz com o domínio de ambas as funções, caso contrário não poderíamos afirmar esse valor de k para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Questão 2

(a)*Ache o coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos críticos da função* $y = \operatorname{sen}(4x) + \cos(4x)$, *com* $x \in (0,2\pi)$.

$*$ *Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que,* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

Como $y = f(x)$ é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, $f'(x)\ \exists\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4\cos(4x) - 4\operatorname{sen}(4x)$
$f'(x) = 4[\cos(4x) - \operatorname{sen}(4x)]$
$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(4x) = \operatorname{sen}(4x)$

$*\ Obs$: *há uma inconsistência no enunciado que explicarei no final da questão!*

$*$ *Lembrando que no intervalo $(0,2\pi)$ os arcos cujo seno é igual ao cosseno são* $\frac{\pi}{4}$ *e* $\frac{5\pi}{4}$, *portanto, temos:*

$$4x = \frac{\pi}{4} \quad e\ 4x = \frac{5\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{16} \quad e\ x = \frac{5\pi}{16}$$

$$y_1 = f\left(\frac{\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad P_1\left(\frac{\pi}{16}, \sqrt{2}\right)$$
$$y_2 = f\left(\frac{5\pi}{16}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \quad P_2\left(\frac{5\pi}{16}, -\sqrt{2}\right)$$

O coeficiente angular da reta que passa pelos dois pontos críticos é dado por,

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}}{\frac{5\pi}{16} - \frac{\pi}{16}} = -\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$*\ Obs$: *os pontos encontrados não são os únicos pontos críticos de f no intervalo*

$(0,2\pi)$, *o argumento* $4x$ *pode assumir outros valores de arcos côngruos a* $\frac{\pi}{4}$ *ou* $\frac{5\pi}{4}$. *Ou seja,*

$$4x = \frac{\pi}{4} + k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}_+; k = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

$*$ *Por que isso? note que para* $k = 0$ *temos o primeiro número crítico* $x = \frac{\pi}{16}$, *para* $k = 7$ *temos* $x = \frac{29\pi}{16}$ *que também pertence ao intervalo* $(0,2\pi)$. *Portanto, temos* 8 *pontos críticos no intervalo dado.*

$*$ *A questão poderia ter sido mais objetiva ao solicitar um intervalo que contivesse apenas* 2 *pontos críticos consecutivos, ex:* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

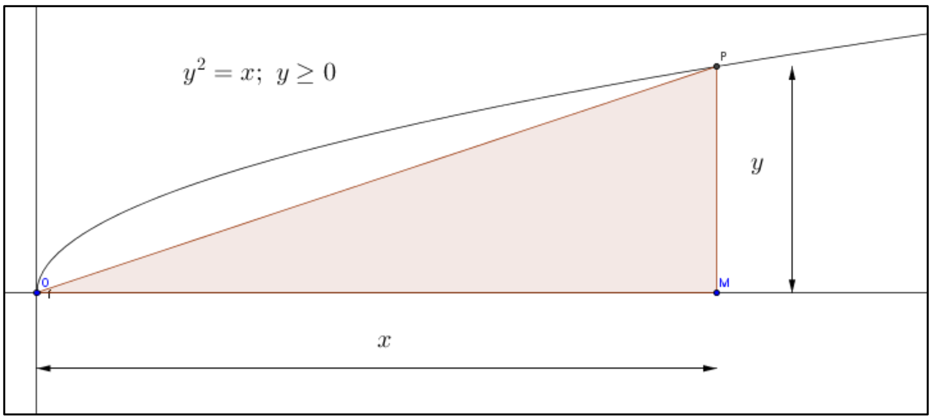
$*$ *Caso escolhêssemos os pontos com* $k = 1$ *e* $k = 2$, *nosso coficiente angular* m *seria igual a,*

$$m = \frac{\sqrt{2} - \left(-\sqrt{2}\right)}{\frac{9\pi}{16} - \frac{5\pi}{16}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi}$$

$\rightarrow$ *Esses são os valores que o coeficiente angular pode assumir para dois pontos críticos consecutivos.*

(b) *Um ponto de abscissa* P *se move ao longo da parábola* $y^2 = x, y \geq 0$, *de modo que sua abscissa aumenta* 4cm *por segundo. A projeção de* P *sobre o eixo* Ox é *o ponto* M. *Com que rapidez aumenta a área do triângulo* OPM *quando* P *está no ponto de abscissa* 9?

Ilustração do problema!



A área do triângulo é dada por $A = \dfrac{b.h}{2}$ *, onde b é o comprimento da base e h é a altura do triângulo, expressando em termos de x e y, obtemos:*

$$A = \frac{x.y}{2}\ ; mas\ y^2 = x \therefore y = \sqrt{x}$$

$$A = \frac{x\sqrt{x}}{2} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}$$

$*$ *Do enunciado temos que a taxa com a qual a abscissa aumenta é 4cm por segundo, ou seja,*

$$\frac{dx}{dt} = 4\,cm/s$$

$*$ *Queremos determinar a taxa de variação da área do triângulo OPM quando P estiver na abscissa* $x = 9$. *Pela Regra da Cadeia,*

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{4}.4$$

$$\frac{dA}{dt} = 3\sqrt{x}$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{x=9} = 3\sqrt{9} = 3.3 = 9\,cm^2/s$$

Logo, a área do triângulo OPM está aumentando à taxa de $9cm^2/s$ *quando o P está no ponto de abscissa 9.*

Questão 3

(a) *Determine a interseção da reta que tangencia o gráfico de* $y = \operatorname{tgh}(e^{\operatorname{sen} x})$ *no ponto em que* $x = 0$ *com o eixo-x.*

$*$ *Primeiramente determinamos o ponto do gráfico associado à abscissa* $x = 0$.

$$y = \operatorname{tgh}(e^{\operatorname{sen} 0}) = \operatorname{tgh}(e^0) = \operatorname{tgh}(1) = \frac{e - \frac{1}{e}}{e + \frac{1}{e}} = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\ ; P\ (0, \operatorname{tgh} 1)\ ou\ \left(0, \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}\right);$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos x . e^{\operatorname{sen} x}.\operatorname{sech}^2(e^{\operatorname{sen} x})\ ; \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \operatorname{sech}^2(1) = \frac{4}{\left(e + \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{4e^2}{(e^2+1)^2}$$

Equação da reta tangente:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2}(x - 0)$$

$* \, Como \ queremos \ determinar \ a \ interseção \ da \ reta \ com \ o \ eixo - x \ façamos \ y = 0.$

$$0 - \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{4e^2}{(e^2 + 1)^2}x$$

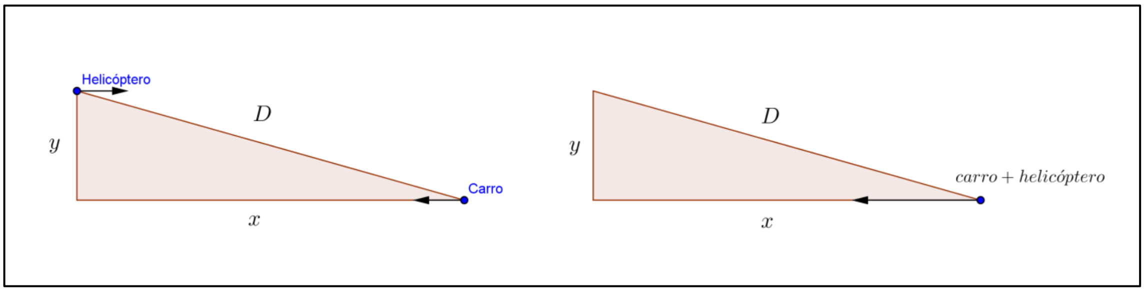
$$x = -\frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)^2}{4e^2(e^2 + 1)}$$

$$x = -\frac{(e^2 - 1)(e^2 + 1)}{4e^2}$$

$$x = -\frac{e^4 - 1}{4e^2}$$

$* \, Ponto \ de \ interseção \ com \ o \ eixo \ x \ é \ P = \left(-\frac{e^4 - 1}{4e^2}, 0\right).$

(b) *Um helicóptero da polícia está voando a* $150\,km/h$ *a uma altitude constante de* $0{,}5km$*, acima de uma rodovia reta. O piloto usa um radar para determinar que um carro em movimento está a uma distância de* $1{,}5km$ *do helicóptero, e que essa distância está diminuindo a* $250\,km/h$*. Determine a velocidade do carro.*



Do enunciado da questão, temos os seguintes dados:

$$\frac{dx_{hel}}{dt} = 150\,km/h \ ; \left.\frac{dD}{dt}\right|_{D=1{,}5km} = 250\,km/h \ ; altitude = y = 0{,}5km$$

A taxa de variação da distancia horizontal entre o helicóptero e o carro é dada pela expressão:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_{carro}}{dt} + \frac{dx_{hel}}{dt}$$

$*$ *Obs: por convenção, adotei a diminuição da distância entre o helicóptero e o carro sendo positiva. De tal modo, a distancia horizontal entre ambos possui uma velocidade relativa* $\left(v_{carro} + v_{helicóptero}\right)$ *e como essa distância também está diminuindo* $\frac{dx}{dt}$ *(velocidade relativa) é positiva por essa convenção.*

Pela relação de triângulo temos,

$$D^2 = x^2 + y^2$$

Quando $D = 1{,}5km$ *e* $y = 0{,}5km$*, temos* $x = \sqrt{2}km$*. Por fim, derivando ambos os membros em relação ao tempo, obtemos:*

$$\frac{d}{dt}(D^2) = \frac{d}{dt}(x^2) + \frac{d}{dt}(y^2)$$
$$2D.\frac{dD}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}$$

$*\ Como\ a\ altitude\ \acute{e}\ constante\ \left(\frac{dy}{dt} = 0\right);$

$$D.\frac{dD}{dt} = x.\frac{dx}{dt}$$
$$1{,}5.(250) = \sqrt{2}.\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{750}{2\sqrt{2}} = \frac{750\sqrt{2}}{4} = \frac{375\sqrt{2}}{2} km/h$$

$$\frac{dx_{carro}}{dt} + \frac{dx_{hel}}{dt} = \frac{375\sqrt{2}}{2}$$
$$\frac{dx_{carro}}{dt} = \frac{375\sqrt{2}}{2} - 150$$
$$\frac{dx_{carro}}{dt} = v_{carro} = \frac{375\sqrt{2} - 300}{2} km/h \approx 115\, km/h$$

$*$ *Obs: a ilustração equivalente à direita foi feita em considerar que ambos, carro e helicóptero contribuem para a diminuição da distancia* x*. Logo, pode considerar uma variação única combinando suas velocidades.*

Questão 4

(*a*) *A resistência elétrica de um fio é proporcional ao seu comprimento e inversamente proporcional ao quadrado de seu diâmetro. Suponha que a resistência de um fio, de comprimento dado, é calculada a partir da medida do diâmetro, com uma possibilidade de erro relativo de* 0,01. *Encontre o possível erro relativo no cálculo da resistência.*

$$R \propto l\,;\ R \propto \frac{1}{D^2}$$

Ou seja, podemos escrever uma expressão para R *da forma:*

$$R = \rho.\frac{L}{D^2}$$

Onde ρ *é uma constante de proporcionalidade,* L *é o comprimento do fio e* D *é o diâmetro.*

$*$ *Como* ρ *e* L *são constantes para esse caso, temos então* $R(D)$.
$*$ *O erro relativo no cálculo da resistência é dado por:*

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R}$$

$$\frac{dR}{dD} = -2\rho.\frac{L}{D^3} \rightarrow dR = -2\rho.\frac{L}{D^3}dD \quad e \quad R = \rho.\frac{L}{D^2}$$

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{dR}{R} = \frac{-2\rho.\frac{L}{D^3}dD}{\rho.\frac{L}{D^2}} = -2.\frac{dD}{D}$$

$* \frac{dD}{D}$ *é o erro relativo da medida do diâmetro do fio, ou seja,* $0{,}01$.

Logo, o erro relativo no cálculo da resistência $\frac{dR}{R} = -0{,}02$ *; considerando o valor absoluto temos um erro relativo de* $0{,}02$ *no cálculo da resistência elétrica do fio.*

(b) *Um foguete é lançado verticalmente para cima e , após t segundos ele está a s metros do solo, onde* $s(t) = 560t - 16t^2$ *e o sentido positivo é o de baixo para cima. Quanto tempo levará o foguete para atingir sua altura máxima?*

* *Na altura máxima a velocidade do foguete é nula, ou seja,* $v(t) = 0$.
* *Utilizando os conhecimentos do cálculo 1, sabemos que a derivada da posição em função do tempo é a função velocidade. Logo,*

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 560 - 32t$$
$$v(t) = 0 \Rightarrow 560 - 32t = 0 \therefore t = \frac{560}{32} = \frac{35}{2}s = 17{,}5s$$

* *Portanto, o foguete atinge a altura máxima após* $17{,}5s$.

Questão 5

(a) *Mostre que a função* $f(x) = x + \ln(\cosh x) + \operatorname{senh}\pi$ *, possui no máximo, uma raíz real.*

* *Obs: o argumento* $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, *logo o termo* $\ln(\cosh x)$ *está bem definido para* $x \in \mathbb{R}$.

* Obs_2: *a função f é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, f é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$.

→ *Suponha que existem a e b* $\in \mathbb{R}$ *tais que* $f(a) = f(b) = 0$, *então pelo Teorema de Rolle, existe algum* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 1 + \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = 1 + \operatorname{tgh} x$$

Como a função $\operatorname{tgh} x$ *possui imagem no intervalo* $(-1{,}1)$ *então,* $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo, f não admite duas raízes reais e por contradição, f possui, no máximo, uma raíz real.*

(b) *Mostre que, no intervalo* $(0,\pi)$, *o gráfico da função* $f(x) = \log_3[\log_5|\operatorname{sen} x|]$ *não possui reta tangente horizontal.*

$*$ *Em resumo devemos mostrar que não existe* $x \in D(f)$ *e* $x \in (0,\pi)$ *tal que* $f'(x) = 0$.

$*$ *Note que* $0 < |\operatorname{sen} x| \leq 1$ *no intervalo* $(0,\pi)$ *e, consequentemente*, $\log_5|\operatorname{sen} x| < 0$ *e, por fim,* $\log_3[\log_5|\operatorname{sen} x|]$ *não existe!*

$*$ *Se a própria função não está definida nesse intervalo o que dirá dos pontos onde poderíamos ter alguma reta tangente horizontal.*

Obs: caso a escrita da função tenha sido equivocada, e $f(x)$ *fosse, na verdade,* $f(x) = \log_3|\log_5|\operatorname{sen} x||$ *, então podemos analisar melhor a situação!*

Fazendo as mesmas análises anteriores temos $f(x)$ *definida para todo* x *tal que* $|\operatorname{sen} x| \neq 0$ *e* $|\operatorname{sen} x| \neq 1$, *ou seja, para* $x \in (0,\pi)$, $x \neq \dfrac{\pi}{2}$.

$f(x) = \log_3|\log_5(\operatorname{sen} x)|$; $0 < \operatorname{sen} x \leq 1$ *em* $(0,\pi) \therefore |\operatorname{sen} x| = \operatorname{sen} x$
$\log_5(\operatorname{sen} x) < 0 \therefore |\log_5(\operatorname{sen} x)| = -\log_5(\operatorname{sen} x)$

$$f(x) = \log_3(-\log_5(\operatorname{sen} x))$$

$$f'(x) = \frac{1}{-\log_5(\operatorname{sen} x) . \ln 3} . \frac{d}{dx}[-\log_5(\operatorname{sen} x)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 3 . \log_5(\operatorname{sen} x)} . \frac{\cos x}{\ln 5 . \operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\ln 3 . \dfrac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\ln 5} . \ln 5 . \operatorname{sen} x} \qquad ; \ * \ \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} \ \ (\textit{mudança de base!})$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{sen} x) . \ln 3}$$

Para o intervalo $(0,\pi)$ *com* $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ *o denominador está definido e, portanto,* $\operatorname{sen} x . \ln(\operatorname{sen} x) . \ln 3 \neq 0$. *Nos resta então analisar a possibilidade de que o numerador venha a ser zero para contradizer o enunciado. Porém,* $\cos x = 0$ *implica em* $x = \dfrac{\pi}{2}$ *que não pertence ao domínio da função* f.

Conclusão, $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in (0,\pi)$ *e com isso,* f *não possui reta tangente horizontal nesse intervalo.*

1.6 3ª Prova – 17 de Outubro de 2015

Questão 1

$a)$ *Começando na origem, um ponto* P *se move ao longo da parábola* $y = x^2$, *de maneira que sua coordenada* x *aumenta* $3\,cm/s$. *Seja* Q *o ponto que determina sobre o eixo* Ox *a reta que passa por* $(0,-4)$ *e* P. *Descubra a velocidade de* Q *quando* P *está no ponto* $(1,1)$.

$b)$ *Encontre os pontos de extremos absolutos e relativos da função* $f(x) = 2 - \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x$, *no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

Questão 2

$a)$ *Determine, caso existam, os pontos nos quais a curva* $y = \dfrac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$ *possui reta tangente horizontal.*

$b)$ *Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade seguinte*:

$$|\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)| < |a - b|\ ; \quad a \neq b$$

Questão 3

$a)$ *Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada de* $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$b)$ *Dê um valor aproximado para* $\cos 59°15'$.

Questão 4

$a)$ *Há uma reta que tangencia o gráfico da função* $f(x) = x^{\log_3 x}$ *no ponto em que* $x = 1$. *Verifique se essa reta toca em algum ponto do gráfico de* $g(x) = 1 + \cosh x$.

$b)$ *Mostre que a função* $f(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - 4\cos x - \dfrac{1}{8}\cos(2x) + \cos 17$ *possui no máximo um ponto crítico.*

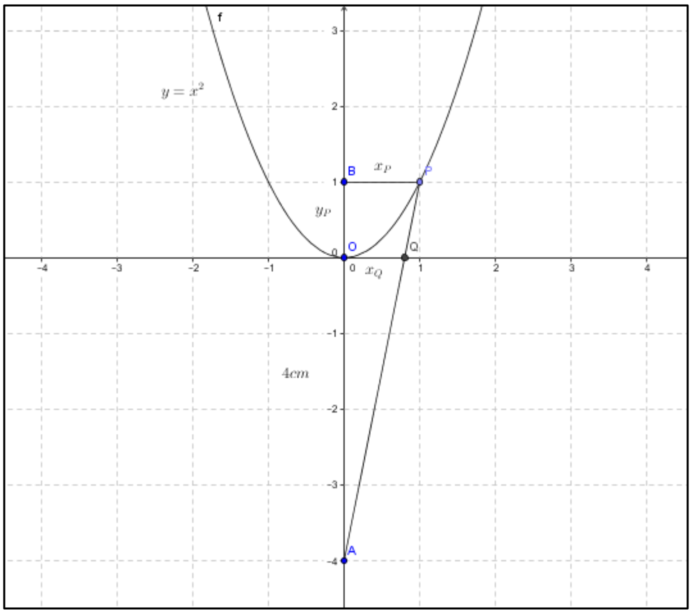
Questão 5

$a)$ *A distância de uma locomotiva à estação de partida é dada pela fórmula* $s(t) = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. *Determine o instante depois do qual, pela primeira vez, a locomotiva passa a se aproximar da origem.*

$b)$ *Uma lâmpada está acesa no topo de um poste de* $30m$ *de altura. Um objeto é jogado da mesma altura de um ponto a* $10m$ *de distância da lâmpada, de modo que sua altura num instante* t, *em segundos, é dada por* $h(t) = 30 - \dfrac{9{,}8}{2}t^2$. *Quão rápido a sombra do objeto se move no chão um segundo depois?*

***Questão* 1**

(a) *Começando na origem, um ponto P se move ao longo da parábola $y = x^2$, de maneira que sua coordenada x aumenta $3\,cm/s$. Seja Q o ponto que determina sobre o eixo Ox a reta que passa por $(0,-4)$ e P. Descubra a velocidade de Q quando P está no ponto $(1,1)$.*



Pela ilustração do problema, temos por relação de triângulo:

$$\frac{x_Q}{4} = \frac{x_P}{4 + y_P}$$

Como P é um ponto da parábola $y = x^2$, então $y_P = x_P^2$. Logo,

$$x_Q = \frac{4x_P}{4 + x_P^2}$$

Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{dx_Q}{dx_P} \cdot \frac{dx_P}{dt}$$

$$\frac{dx_Q}{dx_P} = \frac{4(4 + x_P^2) - 4x_P(2x_P)}{(4 + x_P^2)^2}$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{4(4 + x_P^2) - 4x_P(2x_P)}{(4 + x_P^2)^2} . (3)$$

Quando P está no ponto $(1,1)$ $x_P = 1$. Logo,

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{4(4 + 1^2) - 4.1.(2.1)}{(4 + 1^2)^2} . (3)$$

$$\frac{dx_Q}{dt} = \frac{20 - 8}{25} . (3) = \frac{36}{25} cm/s$$

$*$ *Logo, o ponto Q se move à velocidade de $\frac{36}{25}$ cm/s quando P está no ponto $(1,1)$.*

(b) *Encontre os pontos de extremos absolutos e relativos da função* $f(x) = 2 - \operatorname{sen}^2 x + 3\cos^2 x$, *no intervalo* $[-\pi, \pi]$.

$*$ *Como a função* f *é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua em* $[-\pi, \pi]$ *e diferenciável em* $(-\pi, \pi)$.

Aplicando o Método do Intervalo Fechado na função f *em* $[-\pi, \pi]$, *temos:*

1) *Os valores de* f *nos extremos do intervalo;*

$f(-\pi) = 2 - \operatorname{sen}^2(-\pi) + 3\cos^2(-\pi) = 2 - 0^2 + 3.(-1)^2 = 5$

$f(\pi) = 2 - \operatorname{sen}^2 \pi + 3\cos^2 \pi = 2 - 0^2 + 3.(-1)^2 = 5$

2) *Os valores de* f *nos números críticos;*

$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *tal que* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

$\rightarrow$ *Como* f *e diferenciável em* $(-\pi, \pi)$, *nos resta saber onde* $f'(x) = 0$. *Então,*

$f'(x) = -2\operatorname{sen} x \,.\cos x - 6\operatorname{sen} x \,.\cos x$

$f'(x) = -8\sin x \,.\cos x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin x \,.\cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \quad ou \\ \cos x = 0 \end{cases} \therefore x = \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$$

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \operatorname{sen}^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos^2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 - (-1)^2 + 3.(0) = 1$

$f(0) = 2 - \operatorname{sen}^2 0 + 3\cos^2 0 = 2 - 0^2 + 3.(1)^2 = 5$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 - (1)^2 + 3.(0) = 1$

3) *Comparando os valores obtidos, temos:*

$f(-\pi) = f(\pi) = 5$ *é o valor máximo absoluto, enquanto que* $f(0) = 5$ *é um valor máximo local ou relativo, por ocorrer em um número crítico.*

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ *é o valor mínimo local e absoluto da função no intervalo.*

Questão 2

(a) *Determine, caso existam, os pontos nos quais a curva* $y = \dfrac{1 + \operatorname{senh} x}{1 + \cosh x}$ *possui reta tangente horizontal.*

$*$ *Obs: analisando o denominador da função temos* $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ *e, portanto,* $1 + \cosh x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Como o numerador não apresenta restrição alguma, concluímos que o domínio da função* $y = f(x)$ *é* $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\cosh x\,(1 + \cosh x) - \operatorname{senh} x\,(1 + \operatorname{senh} x)}{(1 + \cosh x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x + \cosh x - \operatorname{senh} x}{(1 + \cosh x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1 + \cosh x - \operatorname{senh} x}{(1 + \cosh x)^2}$$

$*$ *Como o denominador de* f' *está definido para* $x \in \mathbb{R}$, *então, se* f *possui reta tangente horizontal em* $x = a$ *implica dizer que* $f'(a) = 0$. *Portanto,* $f'(x) = 0$ *resulta em …*

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \cosh x - \operatorname{senh} x = 0$

$$1 + \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$$
$$1 + e^{-x} = 0$$

$*$ *Note que* $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *logo não há solução para equação acima. Consequentemente* $\nexists x \in \mathbb{R}; f'(x) = 0$, *ou seja,* f *não possui reta tangente horizontal em nenhum ponto do seu domínio.*

(b) *Use o Teorema do Valor Médio para provar a desigualdade seguinte*:

$$|\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)| < |a - b|\ ;\ \ a \neq b$$

Com $a \neq b$ *podemos dividir toda a desigualdade por* $|a - b| \neq 0$. *Logo,*

$$\left|\frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b}\right| < 1$$
$$-1 < \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b} < 1$$

$*$ *Seja* $f(x) = \ln(\cosh x)$, *então* $f'(x) = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \operatorname{tgh} x$. *Contudo, sabemos que a imagem da função* $\operatorname{tgh} x$ *é* $Im(\operatorname{tgh} x) = (-1,1)$. *Logo,*

$$-1 < f'(x) < 1$$

$*$ *Como* $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\cosh x)$ *está definido para todos os reais. Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[a,b]$ *e diferenciável no intervalo* (a,b). *Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe algum* $x \in (a,b)$ *tal que*:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{b - a}$$
$$-1 < f'(x) < 1$$
$$-1 < \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{b - a} < 1$$
$$-1 < \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{-(a - b)} < 1$$

$$1 > \frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b} > -1$$

$*$ *E essa desigualdade remete à expressão,*

$$\left|\frac{\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)}{a - b}\right| < 1$$
$$|\ln(\cosh b) - \ln(\cosh a)| < |a - b|$$

Questão 3

(a) *Use a diferenciação logarítmica para achar a derivada de* $y = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$

$*$ *Aplicando o logarítmo natural em ambos os membros da igualdade, temos:*

$$\ln y = \ln(\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$$
$$\ln y = \frac{1}{\ln x}.\ln(\ln x)$$

$*$ *Por diferenciação logarítmica, derivando em relação a x, obtemos:*

$$\frac{y'}{y} = \left[-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}.\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}.\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x}\right]$$
$$\frac{y'}{y} = \left[-\frac{1}{x(\ln x)^2}.\ln(\ln x) + \frac{1}{x.(\ln x)^2}\right]$$
$$y' = y.\frac{1}{x(\ln x)^2}[1 - \ln(\ln x)]$$
$$y' = (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}.\frac{1}{x(\ln x)^2}[1 - \ln(\ln x)]$$

(b) *Dê um valor aproximado para* $\cos 59°15'$.

Seja $f(x) = \cos x$ *, conhecemos o valor do* $\cos 60°$ *e queremos estimar o valor do* $\cos 59°15'$ *. Então,*

$$1° = 60' = \frac{\pi}{180} rad\ ; logo, 45' = \frac{3}{4}.\frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{720} rad \lll 1 rad$$

Com relação a diferenciais, para pequenas variações de x, temos

$$\Delta y \approx dy$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x).dx$$

$*$ *Nesse caso* $x = \frac{\pi}{3} rad, \Delta x = dx = -\frac{3\pi}{720} rad$ *e* $f'(x) = -\operatorname{sen} x$ *para* $x = \frac{\pi}{3} rad.$

$$f\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{720}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right).\left(-\frac{3\pi}{720}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{720}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx -\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(-\frac{3\pi}{720}\right)$$

$$\cos(59°15') - \frac{1}{2} \approx -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{3\pi}{720}\right)$$
$$\cos(59°15') \approx \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{240} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{480}$$

Questão 4

(a) *Há uma reta que tangencia o gráfico da função* $f(x) = x^{\log_3 x}$ *no ponto em que* $x = 1$. *Verifique se essa reta toca em algum ponto do gráfico de* $g(x) = 1 + \cosh x$.

$f(1) = 1^{\log_3 1} = 1^0 = 1$; *ponto de tangencia* $(1,1)$.

$\ln f(x) = \ln x^{\log_3 x}$
$\ln f(x) = \log_3 x \,.\ln x$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{x.\ln 3}.\ln x + \log_3 x\,.\dfrac{1}{x}$
$f'(x) = f(x)\left[\dfrac{1}{x.\ln 3}.\ln x + \dfrac{1}{x}.\log_3 x\right]$
$f'(1) = f(1)\left[\dfrac{1}{\ln 3}.\ln 1 + \dfrac{1}{1}.\log_3 1\right]$
$f'^{(1)} = 1[0+0] = 0.$

Equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *no ponto* $(1,1)$;
$$y - 1 = 0(x-1)$$
$$y = 1$$

Verificando se a reta $y = 1$ *intercepta o gráfico de* $g(x) = 1 + \cosh x$, *temos*:

$$g(x) = 1$$
$$1 + \cosh x = 1$$
$$\cosh x = 0$$

$*$ *Note que* $\cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, *logo não há solução para a equação acima e, consequentemente, a reta que tangencia* $f(x)$ *no ponto* $(1,1)$ *não toca o gráfico de* $g(x)$.

(b) *Mostre que a função* $f(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - 4\cos x - \dfrac{1}{8}\cos(2x) + \cos 17$ *possui no máximo um ponto crítico.*

Obs: *a função* f *é uma soma de funções contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *também é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$.

$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *tal que* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe. Por essa definição, analisando a função* f *temos apenas a possibilidade de* $f'(x) = 0$.

$*$ *Suponha que* f *possui dois pontos críticos em* a *e* b *tal que* $f'(a) = f'(b) = 0$. *Então, pelo Teorema de Rolle existe algum* $x \in (a,b)$; $f''(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{9}{2}x + 4\,\text{sen}\,x + \frac{1}{4}\text{sen}(2x)$$
$$f''(x) = \frac{9}{2} + 4\cos x + \frac{1}{2}\cos(2x)$$
$$f''(x) = \frac{9 + 8\cos x + \cos(2x)}{2}$$
$$f''(x) = \frac{2\cos^2 x + 8\cos x + 8}{2}$$
$$f''(x) = \cos^2 x + 4\cos x + 8$$

$*$ *Façamos* $f''(x) = 0$, *obtemos*:

$$\cos^2 x + 4\cos x + 8 = 0$$

$$\Delta = 16 - 32 = -16 \ \ (\Delta < 0)$$

Logo, não há solução para $f''(x) = 0$ *e, por contradição, como* f *não pode ter* 2 *números críticos,* f *possui no máximo* 1 *número crítico associado à um ponto crítico.*

Questão 5

(*a*) *A distância de uma locomotiva à estação de partida é dada pela fórmula* $s(t) = 3t^4 - 44t^3 + 144t^2$. *Determine o instante depois do qual, pela primeira vez, a locomotiva passa a se aproximar da origem.*

$*$ *Depois de* $t = 0$, *queremos determinar quando* $s'(t) = 0$, *pois, isso implica dizer que a locomotiva estará voltando à estação.*

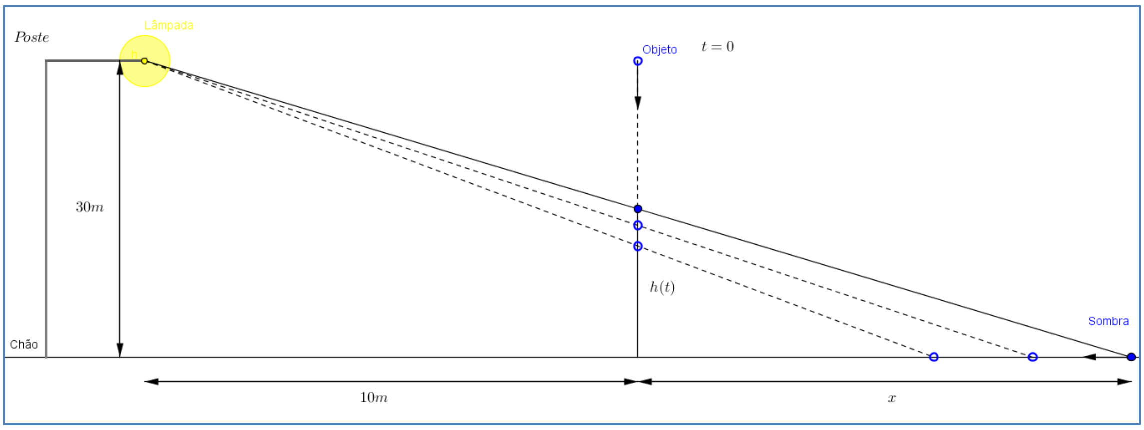
$$s'(t) = 0\ , t \neq 0$$
$$12t^3 - 132t^2 + 288t = 0$$
$$12t(t^2 - 11t + 24) = 0$$
$$\Delta = (-11)^2 - 4(1)(24)$$
$$\Delta = 121 - 96$$
$$\Delta = 25$$

$$t = \frac{11 \pm 5}{2} \therefore t_1 = 8s \ \ e \ \ t_2 = 3s$$

$*$ *Logo, a locomotiva passa a se aproximar da origem em* $t = 3s$, *depois de passar pela primeira vez pela estação.*

(*b*) *Uma lâmpada está acesa no topo de um poste de* 30*m de altura. Um objeto é jogado da mesma altura de um ponto a* 10*m de distância da lâmpada, de modo que sua altura num instante* t, *em segundos, é dada por* $h(t) = \mathbf{30} - \frac{9{,}8}{2}t^2$. *Quão rápido a sombra do objeto se move no chão um segundo depois?*

$Ilustração\ do\ problema:$



$*\ A\ velocidade\ com\ a\ qual\ a\ sombra\ se\ move\ no\ chão\ é\ numericamente\ igual\ a\ variação\ da\ distância\ x\ indicada\ na\ figura.$

$Por\ semelhança\ de\ triângulo, temos:$

$$\frac{30}{h} = \frac{10 + x}{x}$$
$$10h + xh = 30x$$
$$x(h - 30) = -10h$$
$$x = -\frac{10h}{h - 30}$$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia,$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dx}{dh} = -\left[\frac{10(h - 30) - 10h.(1)}{(h - 30)^2}\right] = \frac{300}{(h - 30)^2}$$

$$\frac{dh}{dt} = -9{,}8t$$

$Reunindo\ as\ expressões\ e\ substituindo\ na\ Regra\ da\ Cadeia, temos:$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{300}{(h - 30)^2} \cdot 9{,}8t$$

$Quando\ t = 1s, temos\ h = h(1) = 30 - 4{,}9. Logo,$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{300}{(-4{,}9)^2} \cdot 9{,}8$$
$$\frac{dx}{dt} = -\frac{600}{4{,}9} m/s$$

1.7 4ª Prova – 13 de Novembro de 2015

Questão 1.

$a)$ *Uma função* f é *tal que* $f'(x) = x^3 - 1$ *e a reta* $2x + y + 1 = 0$ é *tangente ao seu gráfico. Encontre* $f(2)$.

$b)$ *Determine as assíntotas do gráfico de* $f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x \leq 0 \\ \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}, & x > 0 \end{cases}$.

Questão 2.

Dada a função $f(x)$, *determine*:

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} \;;\; f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} \;;\; f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$a)$ *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*
$b)$ *Os intervalos onde* f é *crescente e onde* f é *decrescente, e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de* f é *côncavo para cima e onde* é *côncavo para baixo.*
Por fim, esboce o gráfico de $f(x)$.

Questão 3.

$a)$ *Os vértices de um losango são os pontos* $A = (0,1)$, $B = (2x, 1)$, $C = (x, 0)$ *e* $D = \big(x, f(x)\big)$, *onde* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, *com* $x > 0$. *Determine os vértices do losango de forma que sua área seja mínima.*

$b)$ *Determine os pontos de inflexão da curva* $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

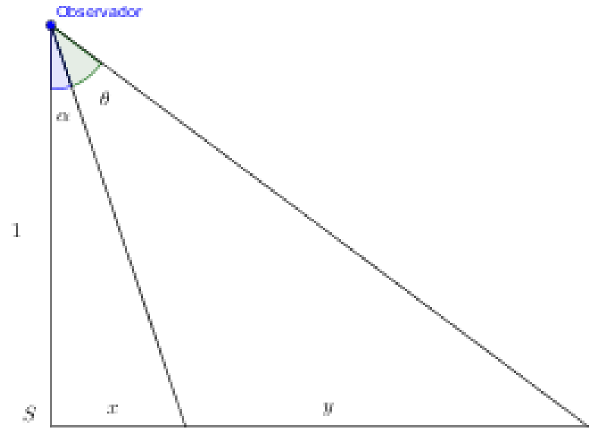
Questão 4. *Calcule os seguintes limites*:

$a)$ $\lim\limits_{t \to \infty} \left[t.\ln\left(1 + \dfrac{3}{t}\right)\right]$.

$b)$ $\lim\limits_{y \to 0^+} [\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}$.

Questão 5.

Um observador permanece em um ponto P, *distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto* S *da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo* θ *de visão do observador entre os corredores.* [*Dica*: *Maximize* $\operatorname{tg}\theta$] .


Observador
α
θ
1
S
x
y

***Questão* 1**

$a)$ *Uma função f é tal que $f'(x) = x^3 - 1$ e a reta $2x + y + 1 = 0$ é tangente ao seu gráfico. Encontre $f(2)$.*

Se a reta $2x + y + 1 = 0$ é tangente ao gráfico de f, então existe algum x no domínio de f tal que $f'(x)$ é igual ao coeficiente angular da reta tangente.

$f'(x) = x^3 - 1\,;\quad y = -2x - 1$ (*coeficiente angular* $= -2$)

$f'(x) = 2 \Longrightarrow x^3 - 1 = -2 \;\Rightarrow x^3 = -1 \;\therefore\; x = -1$

Logo, a reta $2x + y + 1 = 0$ é tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = -1$. Para $x = -1$, obtemos pela equação da reta $y = 1$. Portanto, o ponto $P = (-1,1)$ pertence ao gráfico da função f.

A antiderivada mais geral de $f'(x) = x^3 - 1$ é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x + C$$

Como $P = (-1,1)$ pertence a função, temos:

$$1 = \frac{1}{4} + 1 + C \therefore C = -\frac{1}{4}$$

Logo, $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - x - \dfrac{1}{4}$.

$f(2) = \dfrac{1}{4}(2)^4 - 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{16}{4} - 2 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{7}{4}\quad;\quad f(2) = \dfrac{7}{4}$.

$b)$ *Determine as assíntotas do gráfico de* $f(x) = \begin{cases} e^x - 2, & x \le 0 \\ \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}, & x > 0 \end{cases}$.

Analisando as sentenças que formam a função f, temos $(e^x - 2)$, uma função contínua em $\mathbb{R}$ e, portanto, contínua em $(-\infty, 0)$.
Contudo, temos $\left(\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}\right)$, uma função racional contínua para $x \in \mathbb{R}; x^2 - 4 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$. Obs: $x = -2$ não pertence ao domínio dessa sentença!

$*$ *Obs*: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0\,;\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \quad e \quad f(0) = -1$

$\rightarrow$ *Assíntotas Verticais*:

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de assíntota vertical, devemos procurar onde a função f é descontínua.

$\rightarrow$ *Note que* $x = 0$ não é *uma assíntota vertical, embora* f *seja descontínua em* $x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x^3 - x}^{\substack{6\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 4}}} = -\infty$$

$*$ *Obs: se* $x \rightarrow 2^-$, *então* $x < 2$ *e, portanto,* $x - 2 < 0$.

Logo, a reta $x = 2$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* f.

$\rightarrow$ *Assíntotas Horizontais:*

Dizemos que a reta $y = L$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* f *se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} (e^x - 2) = \lim_{x\to -\infty} e^x - \lim_{x\to -\infty} 2 = 0 - 2 = -2$$

Logo, a reta $y = -2$ é *uma assíntota horizontal ao gráfico de* f.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 1}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x}{2} = +\infty.$$

$\rightarrow$ *Assíntota Obliqua:*

Dizemos que a reta $y = ax + b$ é *uma assíntota obliqua ao gráfico de* f *se, somente se,*

$$\lim_{x\to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

A segunda sentença de $f(x)$ *pode ser reescrita como:* $\dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4} = x + \dfrac{3x}{x^2 - 4}$.

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} - x\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{x^2 - 4} \overset{L'H}{\longrightarrow} \lim_{x\to +\infty} \frac{3}{2x} = 0$$

Portanto, a reta $y = x$ é *uma assíntota oblíqua ao gráfico de* f.

$*$ *Caso* f *admita uma assíntota oblíqua para a primera sentença devemos ter* $a = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} \neq 0$. *Calculando, temos:*

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x - 2}{x} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x\to -\infty} e^x = 0$$

Logo, $y = x$ é *a* única *assíntota oblíqua ao gráfico de* f.

Questão 2

Dada a função $f(x)$, determine:

$$f(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}\ ;\ f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}\ ;\ f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

Antes de responder os itens ... $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$;

Interseções com os eixos:

$$f(0)=1\ ;\quad f(x)=0\Rightarrow 2x^2+x-1=0\Rightarrow 2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\therefore x=\frac{1}{2}$$

Pontos de interseção $A=(0,1)$ e $B=\left(\frac{1}{2},0\right)$; Obs: $x=-1\notin D(f)$.

a) As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.

→ Assíntotas Verticais:

Dizemos que a reta $x=a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\quad ou\quad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

Pela definição de assíntota vertical, devemos procurar onde a função f é descontínua.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{2x^2+x-1}^{\substack{2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}\underbrace{(x+1)}_{\substack{\downarrow\\ 2}}}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\overbrace{2x^2+x-1}^{\substack{2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-1)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}\underbrace{(x+1)}_{\substack{\downarrow\\ 2}}}=-\infty$$

Portanto, a reta $x=1$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f.

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{2(x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x-1}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}.$$

$*$ Obs: se $x\to -1$ então $x\neq -1$ e, portanto, $x+1\neq 0$.

$(*)$ Logo, a reta $x=-1$ não é assíntota vertical ao gráfico de f.

$\rightarrow$ *Assíntotas Horizontais*:

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* f *se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{2+0-0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2.$$

Logo, a reta $y = 2$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* f.

$\rightarrow$ *Assíntota Oblíqua*:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ *é uma assíntota obliqua ao gráfico de* f *se, somente se,*

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

$*$ *Caso* f *admita uma assíntota oblíqua devemos ter* $a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0.$

Calculando, temos:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-1}{x^3-x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

Portanto, f *não possui assíntota oblíqua.*

$b)$ *Os intervalos onde* f *é crescente e onde* f *é decrescente, e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0\,, \forall x \in \mathbb{R}; x \neq 1.$$

$Portanto, f$ *é sempre decrescente em* $(-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$
$*$ *Como não há mudança de comportamento da função (sempre decresce),*
não existem pontos de máximo e mínimo relativos.

$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.*

$$f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$$

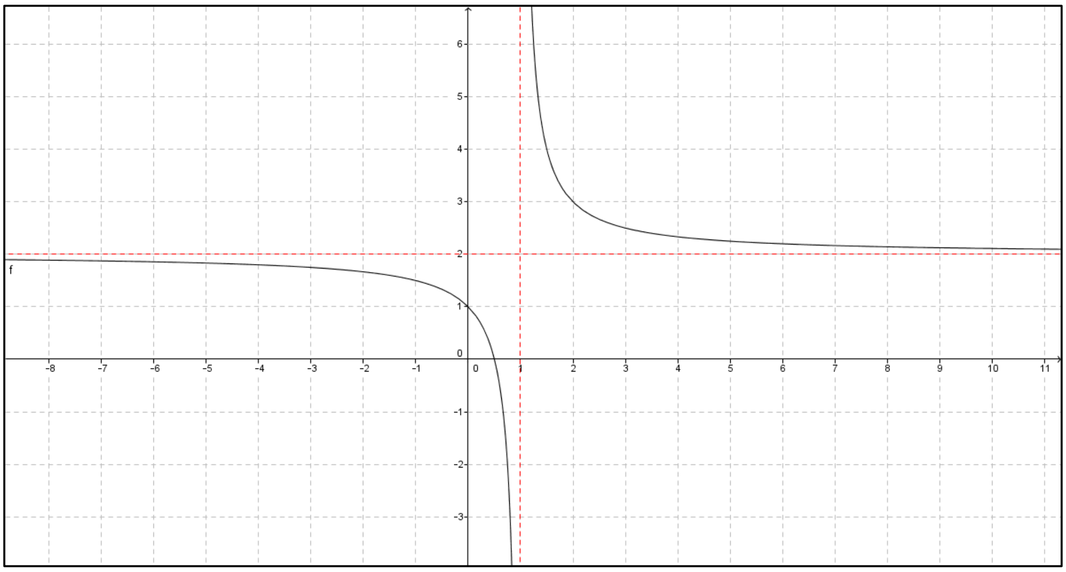
$- - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + \quad (x-1)^3$

$- - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + \quad f''(x) = 2/(x-1)^3$

Com a análise acima, concluimos que:

f *possui C.V.C em* $(1,+\infty)$ *e* $\quad *$ *C.V.C (Concavidade Voltada para Cima)*
f *possui C.V.B em* $(-\infty,-1) \cup (-1,1)$; $*$ *C.V.B (Concavidade Voltada para Baixo)*

Embora haja mudança na direção da concavidade em $x = 1$, note que
$x = 1 \notin D(f)$ e, portanto, não existem pontos de inflexão no gráfico de f.



Questão 3

$a)$ *Os vértices de um losango são os pontos* $A = (0,1)$, $B = (2x,1)$, $C = (x,0)$ *e* $D = (x, f(x))$, *onde* $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, *com* $x > 0$. *Determine os vértices do losango de forma que sua área seja mínima.*

Sobre um losango sabemos que suas diagonais são perpendiculares.
Observando os vértices A, B, C e D, notamos que A e B estão sobre a mesma reta $y = 1$, e que C e D estão sobre um única reta vertical com equação $x = a$.

$Logo, as\ diagonais\ do\ losango\ são\ os\ segmentos\ \overline{AB}\ e\ \overline{CD}\ .$

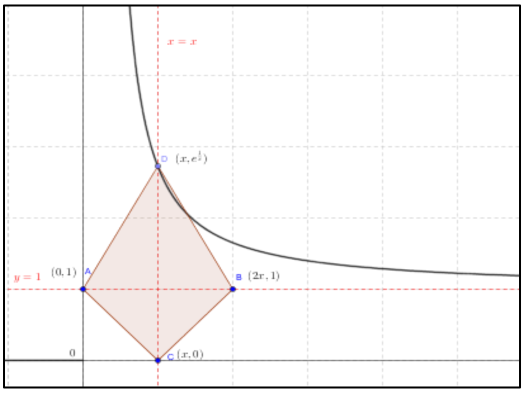
$*\ Obs: B\ é\ o\ ponto\ simétrico\ de\ A\ em\ relação\ ao\ segmento\ \overline{CD}.$

$$Área\ do\ Losango:\ A = \frac{D \times d}{2}$$

$Como\ desconhecemos\ a\ priori\ quem\ são\ as\ diagonais\ maior\ e\ menor, apenas\ considere\ a\ área\ como\ a\ metade\ do\ produto\ dos\ tamanhos\ das\ diagonais.$

$$d_1 = d(A,B) = 2x$$
$$d_2 = d(C,D) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$A(x) = \frac{d_1 \times d_2}{2} = \frac{2x \times e^{\frac{1}{x}}}{2} = xe^{\frac{1}{x}}$$



$Encontrar\ o\ valor\ que\ de\ x\ que\ minimiza\ a\ área\ do\ losango\ é\ encontra\ o\ número\ crítico\ associado\ ao\ ponto\ de\ mínimo\ relativo\ da\ função\ A(x). Logo,$

$$A'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x.\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

$$A'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

$A'(x) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x-1}{x} = 0 \therefore x = 1.$

$Analisando\ o\ comportamento\ (sinal)\ de\ A'(x), temos:$

$$\begin{array}{ll}
+ + + + + + + + + + + + + + + + & e^{\frac{1}{x}} \\
(0) - - - - (1) + + + + + + + + + & x - 1 \\
(0) + + + + + + + + + + + + + + & x \\
(0) - - - - (1) + + + + + + + + + & A'(x)
\end{array}$$

$Com\ a\ análise\ acima\ concluimos\ que\ x = 1\ é\ um\ número\ crítico\ associado\ ao\ ponto\ de\ mínimo\ local\ ou\ relativo\ da\ função\ A(x)\ e, portanto, para\ x = 1\ a\ área\ do\ losango\ determinado\ pelos\ vértices\ A, B, C\ e\ D\ é\ mínima.$

$$A = (0,1)\ ; B = (2,1)\ ; C = (1,0)\ \ e\ D = (1,e)\ ;\ \ A_{mín} = e$$

$b)\ Determine\ os\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva\ f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}\ ; D(f) = \mathbb{R}_+^*.$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-\frac{x+1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}=\frac{x-1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$f''(x)=\frac{2x^{\frac{3}{2}}-(x-1)3x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}=\frac{-x^{\frac{3}{2}}+3x^{\frac{1}{2}}}{4x^3}=\frac{\sqrt{x}(3-x)}{4x^3}$$

Analisando a concavidade da função f, temos:

$(0)+++++++++++++\quad \sqrt{x}$
$(0)++++++(3)------\quad (3-x)$
$(0)+++++++++++++\quad 4x^3$
$(0)++++++(3)------\quad f''(x)$

Com a análise acima observamos a mudança na direção da concavidade em $x=3$ *que pertence ao domínio da função f e, portanto, em* $x=3$ *temos um ponto de inflexão.*

$$f(3)=\frac{3+1}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\quad ;\quad P.I=\left(3,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$$

Questão 4. *Calcule os seguintes limites:*

$a)\ \lim_{t\to\infty}\left[t.\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)\right]$; *indeterminação do tipo* "$\infty\times 0$"

$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t}}$; *Com essa manipulação algébrica, temos a indeterminação* "$\frac{0}{0}$"

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{t}\right)}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{3}{t}\right)}.\left(-\frac{3}{t^2}\right)}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-\frac{3}{t^2+3t}}{-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3t^2}{t^2+3t}=\lim_{t\to\infty}\frac{6t}{2t+3}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{6}{2}=3.$$

$b)\ \lim_{y\to 0^+}[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}$; *indeterminação do tipo* "1^∞"

$$\lim_{y\to 0^+}[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}=\lim_{y\to 0^+}e^{\ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}}=e^{\lim_{y\to 0^+}\ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}};$$

$\to$ *Calculando o limite do expoente, temos:*

$$\lim_{y\to 0^+} \ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y^2}\ln[\cos(2y)] = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln[\cos(2y)]}{y^2}\ ; indeterminação\ "\frac{0}{0}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

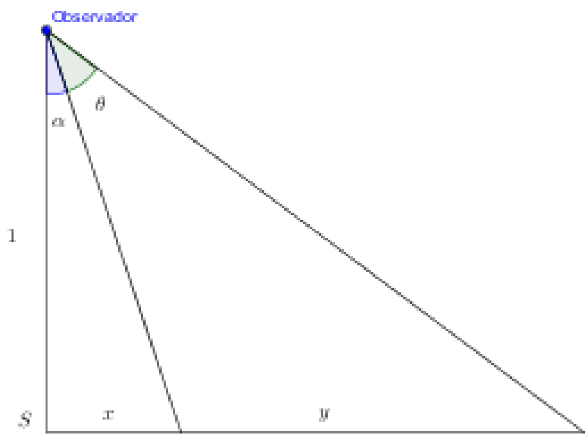
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{\ln[\cos(2y)]}{y^2} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{-2\,\mathrm{sen}(2y)}{\cos(2y)}}{2y} = \lim_{y\to 0^+} -\frac{\mathrm{tg}(2y)}{y} = \lim_{y\to 0^+} -2\sec^2(2y) = -2.$$

Logo,

$$\lim_{y\to 0^+} [\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}} = e^{\lim_{y\to 0^+} \ln[\cos(2y)]^{\frac{1}{y^2}}} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

***Questão* 5.**

Um observador permanece em um ponto P, *distante uma unidade de uma pista. Dois corredores iniciam no ponto* S *da figura e correm ao longo da pista. Um corredor corre três vezes mais rápido que o outro. Encontre o valor máximo do ângulo* θ *de visão do observador entre os corredores.* [*Dica*: *Maximize* $\mathrm{tg}\,\theta$] .



O corredor mais rápido percorre o triplo da distância que o outro corredor, ou seja, se este último percorre x, *o mais rápido percorre* $3x$ *no mesmo intervalo de tempo. Portanto*, $y + x = 3x \Rightarrow y = 2x.$; *obs*: $x > 0$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x}{1} = x \quad ; \quad \mathrm{tg}(\alpha+\theta) = \frac{x+y}{1} = x + y = 3x\ ;\ \mathrm{tg}(\alpha+\theta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\theta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,.\,\mathrm{tg}\,\theta}\ ;$$

$$\frac{x + \mathrm{tg}\,\theta}{1 - x.\mathrm{tg}\,\theta} = 3x \implies x + \mathrm{tg}\,\theta = 3x - 3x^2\,\mathrm{tg}\,\theta \implies \mathrm{tg}\,\theta\,(1 + 3x^2) = 2x.$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{2x}{1+3x^2}\quad ; Seja\ f(x) = \frac{2x}{1+3x^2}$$

$Lembremos\ a\ função\ tangente\ é\ ímpar\ e\ que\ f(x) = -f(-x), ou\ seja, f\ também$ $é\ uma\ função\ ímpar.$

$$f'(x) = \frac{2(1+3x^2) - 2x(6x)}{(1+3x^2)^2} = \frac{2(1-3x^2)}{(1+3x^2)^2}$$

$$(0) + + + + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - - - - \quad f'(x)$$

$Logo, em\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}\ temos\ um\ ponto\ de\ máximo\ local\ ou\ relativo.$

$Contudo, observe\ que\ f(0) = 0\ e\ f\ é\ crescente\ em\ \left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ e, portanto,$ $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > f(0)\ e, consequentemente, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \geq f(x), \forall x \geq 0. Logo, em\ x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $temos\ um\ valor\ máximo\ absoluto\ da\ função\ f.$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\left(1/\sqrt{3}\right)}{1 + 3\left(1/\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\left(1/\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$\theta = \frac{\pi}{6}\ \ é\ o\ valor\ máximo\ do\ ângulo\ de\ visão\ do\ observador\ entre\ os\ corredores.$

1.8 4ª Prova – 14 de Novembro de 2015

Questão 1

a) *Sabe-se que o gráfico de uma função* f *passa pelo ponto* $(0,1)$ *e que* $f''(x) = 3x^2$ *e* $f'(-1) = 0$. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* f *no ponto em que* $x = 2$.

b) *Determine as assíntotas do gráfico* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x+1}{x-1}, & x < 1 \\ \operatorname{tgh} x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Questão 2

Dada a função $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$. *Determine*:

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2-4x+3} \; ; \; f''(x) = \frac{-2(x^2-4x+5)}{(x^2-4x+3)^2}$$

a) *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*
b) *Os intervalos onde* f *é crescente e onde* f *é decrescente, e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
c) *Os intervalos onde o gráfico de* f *é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo.*
Por fim, esboce o gráfico de $f(x)$.

Questão 3

a) *Considere as parábolas* $y_1 = -x^2 + 4$ *e* $y_2 = x^2 - 4$. *Determine o raio da circunferência centrada na origem e tangente às curvas dadas.*

b) *A função gaussiana tem a forma* $f(x) = a.e^{-\frac{(x-b)^2}{8}}$, *onde* a *e* b *são constantes positivas. Determine os valores de* a *e* b, *de modo que* f *tenha máximo local em* $(2,3)$.

Questão 4

a) $\lim_{x \to 1^+} \left[(x-1)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$.

b) $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

Questão 5

A resistência de uma viga retangular é o produto da largura pelo quadrado da altura de sua seção transversal. Determine as dimensões da viga mais resistente que podemos cortar de um cilindro de madeira de raio r.

***Questão* 1**

a) Sabe-se que o gráfico de uma função f *passa pelo ponto* $(0,1)$ *e que* $f''(x) = 3x^2$ *e* $f'(-1) = 0$. *Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* f *no ponto em que* $x = 2$.

A antiderivada mais geral de $f''(x)$ *é dada por* $f'(x) = x^3 + C$.
Sabemos que $f'(-1) = 0 \implies (-1)^3 + C = 0 \implies -1 + C = 0 \therefore C = 1$.

$f'(x) = x^3 + 1$ *; a antiderivada mais geral de* $f'(x)$ *é* $f(x)$ *dada por:*

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + K$ *; como o gráfico de* f *passa pelo ponto* $(0,1) \Rightarrow f(0) = 1$.

$f(0) = K \therefore K = 1.$; $\quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + 1$

Equação da reta tangente ao gráfico de f *no ponto em que* $x = 2$.

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$$

$f(2) = \frac{1}{4}(2)^4 + 2 + 1 = \frac{16}{4} + 3 = 4 + 3 = 7$
$f'(2) = 2^3 + 1 = 8 + 1 = 9$

$$y - 7 = 9(x - 2)$$
$$y = 9x - 11$$

b) Determine as assíntotas do gráfico $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}, & x < 1 \\ \operatorname{tgh} x, & x \geq 1 \end{cases}$.

Analisando as sentenças que formam a função f, *temos* $\left(\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}\right)$, *uma função racional e, portanto, contínua onde está definida, ou seja,* $\forall x \in \mathbb{R}; x \neq 1$, *e como esta sentença é válida para* $x < 1$ *então* f *é contínua em* $(-\infty, 1)$.

A segunda sentença é a função hiperbólica $\operatorname{tgh} x$ *contínua em* $\mathbb{R}$ *e, por ser válida em* $x \geq 1$, *temos que* f *é contínua em* $(1, +\infty)$.

$*$ *O único número* x *no domínio de* f *que não garantimos a continuidade é para* $x = 1$.

$\rightarrow$ *Assíntotas Verticais:*

Dizemos que a reta $x = a$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* f *se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de assíntota vertical, devemos procurar onde a função f é descontínua. Neste caso, vamos verificar se a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical, uma vez que, $x = 1$ é o único número do domínio de f em que nada temos a respeito da continuidade.

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \operatorname{tgh} x = \operatorname{tgh} 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x^2 + x + 1}^{\substack{3 \\ \uparrow}}}{\underbrace{x - 1}_{\substack{\downarrow \\ 0^-}}} = -\infty$$

Obs: *se* $x \to 1^-$, *então* $x < 1$ *e, portanto*, $x - 1 < 0$

Como a condição $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, *a reta* $x = 1$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* f.

→ *Assíntotas Horizontais*:

Dizemos que a reta $y = L$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{tgh} x = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{2e^x} = 1.$$

Logo, a reta $y = 1$ é uma assíntota horizontal ao gráfico da função f.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \overset{L'H}{\longrightarrow}= \lim_{x \to -\infty} \frac{2x + 1}{1} = \lim_{x \to -\infty} (2x + 1) = -\infty.$$

→ *Assíntota Obliqua*:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota obliqua ao gráfico de f se, somente se,

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

A primeira sentença de $f(x)$ pode ser reescrita como:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = (x + 2) + \frac{3}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} - (x + 2)\right] = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{x - 1} = 0.$$

Logo, a reta $y = x + 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de f.

Caso a função f admita uma assíntota oblíqua para $x > 1$, devemos ter $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0$. *Calculando, temos:*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{\operatorname{tgh} x}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{x}_{\substack{\downarrow\\ \infty}}} = 0$$

Portanto, a reta $y = x + 2$ é a única assíntota oblíqua ao gráfico da função f.

Questão 2

Dada a função $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)$. *Determine:*

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 3} \;;\; f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$\rightarrow$ *Antes de responder os itens ...* $D(f) = x \in \mathbb{R}; x^2 - 4x + 3 > 0$;

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \implies x < 1 \text{ ou } x > 3.$$

Portanto, $D(f) = x \in \mathbb{R}; x < 1$ *ou* $x > 3$.

Interseções com os eixos:

$f(0) = \ln 3$; $f(x) = 0 \implies \ln(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 1$

$x^2 - 4x + 2 = 0 \implies x = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} \therefore x_1 = 2 + \sqrt{2}$ *e* $x_2 = 2 - \sqrt{2}$;

Pontos de interseção com os eixos: $A = (0, \ln 3); B = \left(2 + \sqrt{2}, 0\right)$ *e* $C = \left(2 - \sqrt{2}, 0\right)$.

a) As assíntotas horizontais e verticais, se existirem.

$\rightarrow$ *Assíntotas Verticais:*

Dizemos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical ao gráfico de f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Como f é contínua onde está definida, ou seja, em $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ devemos verificar se as retas $x = 1$ e $x = 3$ são assíntotas ao gráfico de f. Uma vez que f não está definida em $(1,3)$, então só podemos calcular $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}} = -\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 1\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}} = -\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 3\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f.$

$\to Assíntotas\ Horizontais:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L\ é\ uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \ln \underbrace{(x^2 - 4x + 3)}_{\substack{\downarrow \\ \infty}} = \infty$$

$Portanto, não\ há\ assíntotas\ horizontais\ ao\ gráfico\ da\ função\ f.$

$b) Os\ intervalos\ onde\ f\ é\ crescente\ e\ onde\ f\ é\ decrescente\ e\ os\ pontos\ de\ máximo\ e\ mínimo\ relativos, caso\ existam.$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)}{x^2 - 4x + 3}$$

$Elaborando\ o\ estudo\ de\ sinal\ da\ primeira\ derivada, temos:$

$------\ ----(2)+++++++++++ \qquad 2(x-2)$
$+++++(1)------\ -----(3)+++++ \qquad x^2 - 4x + 3$
$-----(1)------\ -----(3)+++++ \qquad f'(x)$

$Obs: o\ intervalo\ em\ destaque\ (1{,}3)\ não\ é\ levado\ em\ consideração\ para\ o\ estudo\ da\ função\ f\ em\ razão\ do\ domínio\ de\ f.$

$Com\ a\ análise\ acima, temos:$

$f\ é\ crescente\ em\ (3,+\infty)\ e\ f\ é\ decrescente\ em\ (-\infty,1)$

$*\ Pela\ análise\ acima, concluímos\ que\ f\ não\ possui\ números\ críticos\ associados\ a\ valores\ de\ máximo\ ou\ mínimo\ relativo, pois\ x = 1\ e\ x = 3\ embora\ f'(1)\ e\ f'(3)\ não\ existam, eles\ não\ pertencem\ ao\ domínio\ da\ função.$

$c)$ *Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

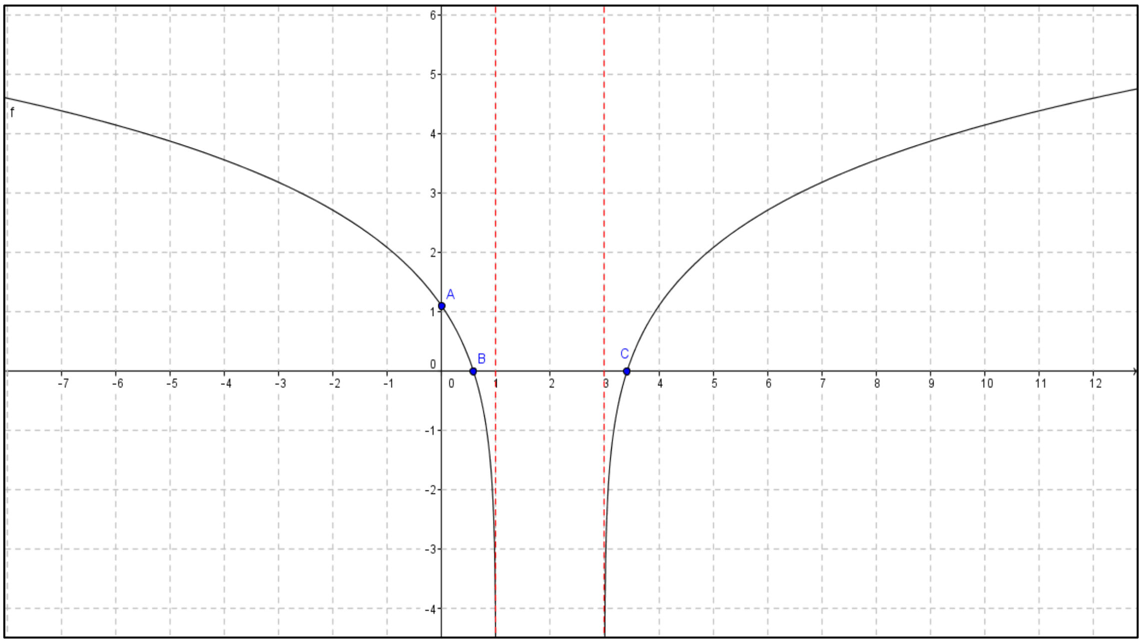
$$f''(x) = \frac{-2(x^2 - 4x + 5)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Analisando o sinal de $f''(x)$, temos:

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - -$	$-2(x^2 - 4x + 5)$
$+ + + + (1) + + + + + + (3) + + + + +$	$(x^2 - 4x + 3)^2$
$- - - - (1) - - - - - - - (3) - - - - - -$	$f''(x)$

Com a análise acima, concluimos que f é sempre côncava para baixo em $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

$*$ *Como não há mudança na direção da concavidade da função f, então não há pontos de inflexão.*



Questão 3

$a)$ *Considere as parábolas $y_1 = -x^2 + 4$ e $y_2 = x^2 - 4$. Determine o raio da circunferência centrada na origem e tangente às curvas dadas.*

Equação de uma circunferência centrada na origem: $x^2 + y^2 = r^2$

Usando o fato de que y_1 e y_2 são funções pares, ou seja, $y_1(x) = y_1(-x)$ e $y_2(x) = y_2(-x)$, basta idenficarmos qual o ponto onde a reta tangente a uma dessas parábolas é tangente em relação à circunferência.

Podemos fazer isso tranquilamente aproveitando o fato de que essas parábolas são simétricas em relação ao eixo x $(y_1 = -y_2)$

Equação da reta tangente a um ponto (x_0, y_0) *da parábola* $y = -x^2 + 4$:

$$y - y_0 = -2x_0(x - x_0)$$
$$y - (-x_0^2 + 4) = -2x_0 x + 2x_0^2$$
$$y = -2x_0 x + x_0^2$$

Mas o ponto (x_0, y_0) *pertence a circunferência e, portanto,* $x_0^2 + y_0^2 = r^2$
E a reta descrita por $y = -2x_0 x + x_0^2$ *é tangente à circunferência em* (x_0, y_0).

Derivando implicitamente a equação da circunferência, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(r^2)$$
$$2x + 2yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

A reta tangente a parábola no ponto (x_0, y_0) *deve ser a mesma reta tangente a circunferência em* (x_0, y_0). *Portanto,* $y' = -2x_0$ *em* (x_0, y_0).

$$y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x_0}{y_0} = -2x_0 \implies y_0 = \frac{1}{2}$$

Pela expressão da parábola, temos $x_0^2 = 4 - y_0$, *substituindo na expressão da circunferência, obtemos*:

$$4 - y_0 + y_0^2 = r^2$$
$$4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = r^2$$
$$r^2 = \frac{15}{4} \therefore r = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

$b)$ *A função gaussiana tem a forma* $f(x) = a.e^{-\frac{(x-b)^2}{8}}$, *onde a e b são constantes positivas. Determine os valores de a e b, de modo que f tenha máximo local em* $(2,3)$.

$*$ *Pela informação do enunciado, temos* $f(2) = 3$ *e, como f é uma função contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$, *se f admite um valor máximo local em* $x = 2$ *e* $f'(2)$ *existe, então* $f'(2) = 0$ *(afirmação pelo Teorema de Fermat).*

$$f(2) = 3 \implies 3 = a.e^{-\frac{(2-b)^2}{8}} \quad (1)$$

$$f'(x) = -a.\frac{(x-b)}{4}.e^{-\frac{(x-b)^2}{8}};$$

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow -\frac{a(2-b)}{4}.e^{-\frac{(2-b)^2}{8}} = 0 \therefore -\frac{a(2-b)}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ ou \\ b = 2 \end{cases}$$

$*\, Note\ que\ a = 0\ torna\ f(x) = 0. Logo, b = 2\ é\ a\ solução\ do\ sistema\ acima.$
$Voltando\ a\ expressão\ (1), temos:$

$$3 = a.e^{-\frac{(2-2)^2}{8}} \Rightarrow 3 = a.e^0 \therefore a = 3.$$

$Logo, f(x) = 3.e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}\ satisfazendo\ as\ condições\ acima\ f(2) = 3\ e\ f'(2) = 0.$

$Para\ confirmar\ que\ em\ x = 2\ temos\ de\ fato\ um\ valor\ máximo\ local, observe$
$o\ estudo\ do\ sinal\ de\ f'(x)\ para\ os\ valores\ de\ a\ e\ b\ determinados.$

$$f'(x) = -\frac{3}{4}(x-2).e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$$

$+ + + + + + + + + + (2) - - - - - - - - -$	$-\frac{3}{4}(x-2)$
$+ +$	$e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$
$+ + + + + + + + + + (2) - - - - - - - - -$	$f'(x)$

$Com\ essa\ análise\ concluímos\ que\ f\ é\ crescente\ em\ (-\infty, 2)\ e\ f\ é\ decrescente$
$em\ (2, +\infty)\ e, portanto, x = 2\ é\ um\ número\ crítico\ associado\ ao\ ponto\ de$
$máximo\ local.$

Questão 4

$a)\ \lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]$; *indeterminação do tipo* "$0 \times \infty$"

$$\lim_{x\to 1^+}\left[(x-1)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right] = \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$$; *indeterminação do tipo* "$\frac{0}{0}$"

$Aplicando\ a\ Regra\ de\ L'Hôspital\ ...$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{\mathrm{cotg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\mathrm{cossec}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{2}{\pi.\mathrm{cossec}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = -\frac{2}{\pi}.$$

$b)\ \lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$; *indeterminação do tipo* "∞^0"

$$\lim_{x\to\infty}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]};$$

$Calculando\ o\ limite\ do\ expoente, temos:$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}\ ;\ \textit{indeterminação do tipo}\ "\frac{\infty}{\infty}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(e^x+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{e^x}=1.$$

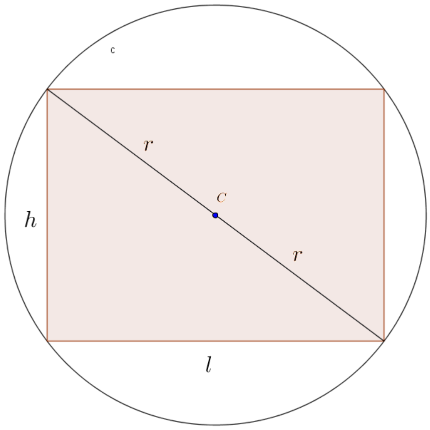
Logo,

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right]}=e^1=e.$$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

Questão 5

A resistência de uma viga retangular é o produto da largura pelo quadrado da altura de sua seção transversal. Determine as dimensões da viga mais resistente que podemos cortar de um cilindro de madeira de raio r.



A resistência da viga é $R=l\times h^2$

Da ilustração temos a seguinte relação,

$(2r)^2=h^2+l^2\Longrightarrow h^2=4r^2-l^2$

Voltando a expressão da resistência, temos:

$R=l(4r^2-l^2)\Longrightarrow R(l)=4lr^2-l^3$

$R'(l)=4r^2-3l^2$

Analisando o sinal da derivada da resistência em relação à largura da viga, temos:

$$(0)++++++\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)------\quad(4r^2-3l^2)$$
$$(0)++++++\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right)-------\quad R'(l)$$

$*$ *Obs: para a análise da função $R(l)$ consideramos apenas $l\in(0,2r)$ por estarmos trabalhando com dimensões.*

Com a análise da derivada, concluímos que a resistência da viga cresce até $l=\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$ e decresce em seguida. Caracterizando, portanto, um número crítico da

$função\ R(l)\ associado\ ao\ valor\ máximo\ da\ função. Logo, para\ l = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}\ temos\ a$ $viga\ mais\ resistente\ que\ pode\ ser\ extraida\ do\ cilindro\ de\ madeira\ de\ raio\ r.$

$As\ dimensões\ da\ viga\ mais\ resistente\ são:$

$$l = \frac{2r}{\sqrt{3}} \quad e$$

$$h^2 = 4r^2 - \frac{4r^2}{3} = \frac{8r^2}{3} \therefore h = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}r = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

1.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 27 de Novembro de 2015

Questão 1.

$a)$ *Onde a função*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x \neq 2, x \neq -2 \\ 3, & x = 2 \\ 4, & x = -2 \end{cases}$$

é *contínua*?

$b)$ *Em que ponto a reta normal* à *curva* $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ *em* $(1,1)$ *cruza a curva novamente*?

Questão 2

$a)$ *Verifique se a função* $f(x) = |x^2 - \pi|$ é *derivável em* $x = \sqrt{\pi}$, *usando o conceito de derivada lateral*.

$b)$ *As assíntotas verticais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{9}}{6x^3 - 5x^2 + x}$ *intersectam o gráfico de* $g(x) = x^4$ *nos pontos* A *e* B. *Determine a área do triângulo formado pelos pontos* A, B *e* $C = (4,0)$.

Questão 3

$a)$ *Calcule, caso exista,* $\lim\limits_{x \to -1^+} \left[\ln(-x) \cos^2\left(\dfrac{1}{\ln(-x)}\right)\right]$.

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação*

$$[\![x]\!] + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

admite uma solução no intervalo $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}\right)$.

Questão 4

$a)$ *Encontre a reta tangente ao gráfico de* $y = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{e^x}$ *no ponto de abscissa* $x = \pi$.

$b)$ *Em quais pontos o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ *tem reta tangente horizontal? Existem pontos onde a reta tangente tem inclinação igual a* -1?

$Questão\ 5$

$a)$ $Se\ g$ é $uma\ função\ duas\ vezes\ diferenciável\ e\ f(x) = x.g(x^2+1),$
$encontre\ f''(1)\ sabendo\text{-}se\ que\ g'(2) = g''(2) = 1.$

$b)$ $Determine\ as\ assíntotas\ horizontais\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x) = \dfrac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}}.$

***Questão* 1.**

$a)$ *Onde a função*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}, & x\neq 2, x\neq -2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=-2\end{cases}$$

é *contínua*?

$*\ Obs$: *a primeira sentença da função* $f(x)$ *pode ser reescrita na forma* ...
$\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$, *como a sentença é válida para* $x\neq 2$, *então* $(x-2)\neq 0$.

Logo, a função $f(x)$ *pode ser reescrita na forma*:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}, & x\neq 2 \ e \ x\neq -2\\ 3, & x=2\\ 4, & x=-2\end{cases}$$

f é *uma função sentencial formada por funções constantes e racionais e, portanto,* f é *contínua onde está definida. Logo,* f é *contínua em* $(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$. *Precisamos verificar se* f é *contínua em* $x=-2$ *e* $x=2$, *os únicos valores aos quais não podemos garantir a continuidade da função* $f(x)$.

$*$ *Dizemos que uma função* f é *contínua no número* $x=a$ *se, somente se,* $f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)$. *Para isso,* $f(a)$ *e* $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ *devem existir*.

Se $x\to 2$, *então* $x\neq 2$. *Se* $x\to -2$, *então* $x\neq -2$. *Logo, para ambos os limites calculados a seguir,* $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$, *temos* $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$.

Em $x=-2$, *temos* $f(-2)=4$.

$$\lim_{x\to-2^+}f(x)=\lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\lim_{x\to-2^+}\frac{\overbrace{x^2+2x+4}^{4}}{\underbrace{x+2}_{0^+}}=+\infty$$

$*$ *Com isso, já podemos concluir que* $\lim\limits_{x\to-2}f(x)\nexists$ *e, portanto,* $f(x)$ *não é contínua em* $x=-2$.

Em $x=2$, *temos* $f(2)=3$.

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2+\lim\limits_{x\to 2}2x+\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}=$$

$$\frac{4+4+4}{2+2} = \frac{12}{3} = 4.$$

$* \, Como \; f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) \; então \; f(x) \; é \; contínua \; em \; x = 2.$

$Com \; essas \; informações \; conclui - se \; que \; f(x) \; é \; contínua \; em \; (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty), ou \; ainda, f \; é \; contínua \; em \; \mathbb{R} - \{-2\}.$

$b) \; Em \; que \; ponto \; a \; reta \; normal \; à \; curva \; x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \; em \; (1,1) \; cruza \; a \; curva \; novamente?$

$Primeiro \; verificamos \; se \; o \; ponto \; (1,1) \; pertence \; à \; curva \; dada:$
$(1)^2 + 2(1)(1) - 3(1)^2 = 1 + 2 - 3 = 3 - 3 = 0\,; \; (1,1) \; pertence \; a \; curva.$

$Derivando \; a \; expressão \; da \; curva \; implicitamente, obtemos:$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(2xy) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$2x + \frac{d}{dx}(2x).y + (2x)\frac{dy}{dx} - 3.\frac{d}{dx}(y^2) = 0$$
$$2x + 2y + 2x.y' - 6y.y' = 0$$
$$x + y + x.y' - 3y.y' = 0$$
$$y'(x - 3y) = -(x + y)$$
$$y' = -\frac{x+y}{x-3y}$$

$O \; coeficiente \; angular \; da \; reta \; normal \; em \; (1,1) \; é \; dado \; por:$

$$m_N = -\frac{1}{y'_{(1,1)}} = \frac{1}{\frac{1+1}{1-3}} = -\frac{2}{2} = -1$$

$Equação \; da \; reta \; normal \; a \; curva \; no \; ponto \; (1,1):$

$$y - 1 = -1(x - 1)$$
$$y = -x + 2$$

$Substituindo \; a \; equação \; da \; reta \; normal \; na \; expressão \; da \; curva, temos:$

$$x^2 + 2x(-x + 2) - 3(-x + 2)^2 = 0$$
$$x^2 - 2x^2 + 4x - 3x^2 + 12x - 12 = 0$$
$$-4x^2 + 16x - 12 = 0$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0$$
$$(x - 3)(x - 1) = 0$$
$$\therefore x = 3 \; ou \; x = 1$$

$* \, Obs: para \; x = 1 \; temos \; o \; ponto \; (1,1) \; que \; já \; foi \; mencionado \; no \; problema, logo \; x = 3 \; é \; a \; abscissa \; do \; ponto \; onde \; a \; reta \; normal \; em \; (1,1) \; cruza \; a \; curva \; novamente.$

$$y = -x + 2$$

$$y = -3 + 2$$
$$y = -1$$

Ponto $A = (3, -1)$ *é o ponto onde a reta normal em* $(1,1)$ *cruza a curva novamente.*

Questão 2

a) *Verifique se a função* $f(x) = |x^2 - \pi|$ *é derivável em* $x = \sqrt{\pi}$*, usando o conceito de derivada lateral.*

Pela definição de derivada em um ponto $x = a$*, temos:*

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ ; façamos } h = x - a, \text{ então}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$* \; Obs: f(x) = |x^2 - \pi| = \begin{cases} x^2 - \pi, & x \leq -\sqrt{\pi} \text{ ou } x \geq \sqrt{\pi} \\ -(x^2 - \pi) & , -\sqrt{\pi} < x < \sqrt{\pi} \end{cases};$$

$*$ *Se* $x \to \sqrt{\pi}^+$*, então* $x > \sqrt{\pi} \Rightarrow x \neq \sqrt{\pi}$ *e, portanto,* $f(x) = (x^2 - \pi)$

$$f'_+(\sqrt{\pi}) = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} \frac{f(x) - f(\sqrt{\pi})}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} \frac{x^2 - \pi - 0}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} \frac{x^2 - \pi}{x - \sqrt{\pi}} =$$

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} \frac{(x - \sqrt{\pi})(x + \sqrt{\pi})}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} (x + \sqrt{\pi}) = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} x + \lim_{x \to \sqrt{\pi}^+} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi} + \sqrt{\pi} = 2\sqrt{\pi}.$$

$*$ *Se* $x \to \sqrt{\pi}^-$*, então* $x < \sqrt{\pi} \Rightarrow x \neq \sqrt{\pi}$ *e, portanto,* $f(x) = -(x^2 - \pi)$

$$f'_-(\sqrt{\pi}) = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} \frac{f(x) - f(\sqrt{\pi})}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} \frac{-(x^2 - \pi) - 0}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} \frac{-(x^2 - \pi)}{x - \sqrt{\pi}} =$$

$$\lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} \frac{-(x - \sqrt{\pi})(x + \sqrt{\pi})}{x - \sqrt{\pi}} = \lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} -(x + \sqrt{\pi}) = -\lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} x - \lim_{x \to \sqrt{\pi}^-} \sqrt{\pi} =$$

$$-\sqrt{\pi} - \sqrt{\pi} = -2\sqrt{\pi}.$$

Como $f'_+(\sqrt{\pi})$ *e* $f'_-(\sqrt{\pi})$ *existem, porém, são diferentes, dizemos que* f *não é derivável ou diferenciável em* $x = \sqrt{\pi}$.

b) *As assíntotas verticais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x^2 - \frac{1}{9}}{6x^3 - 5x^2 + x}$ *intersectam o gráfico de* $g(x) = x^4$ *nos pontos* A *e* B*. Determine a área do triângulo formado pelos pontos* A, B *e* $C = (4,0)$.

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{6x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}\ ;\ \ D(f)=\left\{x\in\mathbb{R};x\neq 0,x\neq\frac{1}{2}\ e\ x\neq\frac{1}{3}\right\}$$

Dizemos que a reta $x=a$ é uma assíntota vertical ao gráfico da função f se ocorrer um dos seguintes casos:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty\ \ ou\ \ \lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$$

Logo, pela definição de continuidade de uma função em um número $x=a$, devemos procurar as assíntotas verticais onde a função $f(x)$ é descontínua. Como f é uma função polinomial racional e, portanto, contínua onde está definida, devemos verificar se as retas $x=0, x=1/2$ e $x=1/3$ são assíntotas verticais, uma vez que, f é descontínua nesses números.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^2-\frac{1}{9}}^{-1/9}}{\underbrace{6x}_{0^+}\underbrace{\left(x-\frac{1}{3}\right)}_{-1/3}\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{-1/2}}=-\infty$$

$*$ *Portanto, a reta $x=0$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.*

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}^+}\frac{\overbrace{x^2-\frac{1}{9}}^{5/36}}{\underbrace{6x}_{3}\underbrace{\left(x-\frac{1}{3}\right)}_{1/6}\underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)}_{0^+}}=+\infty$$

$*$ *Portanto, a reta $x=\frac{1}{2}$ é uma assíntota vertical ao gráfico de $f(x)$.*

$*$ *Se $x\to\frac{1}{3}$ então $x\neq\frac{1}{3}\Rightarrow\left(x-\frac{1}{3}\right)\neq 0$. Logo, podemos reescrever $f(x)$ na forma:*

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{6x\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\frac{x+\frac{1}{3}}{6x\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x+\frac{1}{3}}{6x\left(x-\frac{1}{2}\right)}=\lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{x+\frac{1}{3}}{6x^2-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}x+\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{1}{3}}{\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}6x^2-\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}3x}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}-1}=\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}=-2.$$

$* \ Portanto, a\ reta\ x = \frac{1}{3}$ $não$ $é\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$Logo, os\ pontos\ A\ e\ B\ definidos\ pela\ interseção\ das\ retas\ x = 0\ e\ x = \frac{1}{2}\ com\ o$ $gráfico\ da\ função\ g(x) = x^4$ são:

$$A = (0, g(0)) = (0,0) \quad e \quad B = \left(\frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{16}\right)$$

$O\ triângulo\ formado\ pelos\ pontos\ A, B\ e\ C\ tem\ base\ no\ eixo\ x\ dada\ pela\ distância$ $entre\ A\ e\ C\ [d(A, C) = 4]\ e\ altura\ igual\ a\ ordenada\ do\ ponto\ B\ [h = 1/16]. Logo,$ $a\ área\ do\ triângulo\ \Delta ABC$ é:

$$S = \frac{b.h}{2} = \frac{4 \times \frac{1}{16}}{2} = \frac{1}{8} u.A$$

Questão 3

$a)\ Calcule, caso\ exista,\ \lim_{x\to -1^+}\left[\ln(-x)\cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right)\right].$

$\forall x \in \mathbb{R}, com\ x < 0, temos$:

$$0 \leq \cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) \leq 1$$

$* \ Se\ x \to -1^+, então\ \ln(-x) \to 0^-\ e, portanto, \ln(-x) < 0. Logo,$

$$0 \geq \ln(-x)\cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) \geq \ln(-x)$$

$Seja\ g(x) = 0, f(x) = \ln(-x)\cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right)\ e\ h(x) = \ln(-x). Com\ isso,$

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} 0 = 0$
$\lim_{x\to -1^+} h(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln(-x) = 0$

$Se\ h(x) \leq f(x) \leq g(x)\ quando\ x\ está\ próximo\ de -1\ (exceto\ possivelmente\ em$ $-1)\ e\ \lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} h(x) = 0. Então, pelo\ Teorema\ do\ Confronto, \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$
$Portanto,$

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(-x)\cos^2\left(\frac{1}{\ln(-x)}\right) = 0$$

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação*

$$[\![x]\!] + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

admite uma solução no intervalo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

Seja $f(x) = [\![x]\!] + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$. *Devemos provar que* $f(x)$ *admite uma raíz real no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[\!\left[\frac{1}{2}\right]\!\right] + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0 + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}(0) = \frac{1}{2} \;\; ; \;\; f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \left[\!\left[\frac{3}{4}\right]\!\right] + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\pi\right] = 0 + \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} \;\; ; \;\; f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$$

$*\, Obs_1$: *lembremos que a função* $[\![x]\!]$ *é contínua em* $x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ *e, portanto, a função* $[\![x]\!]$ *é contínua no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

$*\, Obs_2$: *a função* $\operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right]$ *assim como a função constante* $\frac{1}{2}$ *são contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínuas no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

Logo, f *é contínua no intervalo fechado* $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ *e* 0 *é um número entre* $f\left(\frac{1}{2}\right)$ *e* $f\left(\frac{3}{4}\right)$, *onde* $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 > f\left(\frac{3}{4}\right)$. *Então, existe algum número* $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Portanto,* f *admite raíz real no intervalo* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ *tal que*

$$[\![x]\!] + \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)\pi\right].$$

Questão 4

$a)$ *Encontre a reta tangente ao gráfico de* $y = \dfrac{x^2 \operatorname{sen} x}{e^x}$ *no ponto de abscissa* $x = \pi$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x^2.\operatorname{sen} x)\right]e^x - (x^2.\operatorname{sen} x).\frac{d}{dx}(e^x)}{(e^x)^2}$$

$$y' = \frac{[2x.\operatorname{sen} x + x^2 \cos x]e^x - x^2.\operatorname{sen} x\,.\,e^x}{(e^x)^2} \;\; ; \;\; e^x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$y' = \frac{2x.\operatorname{sen} x + x^2(\cos x - \operatorname{sen} x)}{e^x}$$

$*$ $Em\ x = \pi\ temos\ \ y = \dfrac{\pi^2.\operatorname{sen}\pi}{e^\pi} = 0. Ponto\ (\pi, 0)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\pi} = y'_\pi = \frac{2\pi.\operatorname{sen}\pi + \pi^2(\cos\pi - \operatorname{sen}\pi)}{e^\pi} = -\frac{\pi^2}{e^\pi}$$

Equação da reta tangente em $(\pi, 0)$:

$$y - 0 = -\frac{\pi^2}{e^\pi}(x - \pi)$$
$$y = \frac{-\pi^2 x + \pi^3}{e^\pi}$$

$b)$ *Em quais pontos o gráfico da função* $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ *tem reta tangente horizontal? Existem pontos onde a reta tangente tem inclinação igual a* -1?

Dizemos que uma reta tangente é horizontal quando a inclinação da reta é zero em relação ao eixo x, *ou seja, quando* $m = f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$
$$x = \frac{4 \pm 2}{6} \therefore x_1 = 1\ \ e\ \ x_2 = \frac{1}{3}$$

Logo, os pontos onde a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *é horizontal são:*
$A = \big(1, f(1)\big) = (1, -1)\ \ e\ B = \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{23}{27}\right)$.

Existem pontos onde a reta tangete tem inclinação $m = f'(x) = -1$?

$f'(x) = -1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = -1$
$3x^2 - 4x + 2 = 0$
$\Delta = 16 - 24 = -8 \qquad (\Delta < 0 \Rightarrow$ *não existe solução em* $x \in \mathbb{R})$

$*$ *Portanto, não existe reta tangente ao gráfico de* $f(x)$ *com inclinação igual a* -1.

Questão 5

$a)$ *Se* g *é uma função duas vezes diferenciável e* $f(x) = x.g(x^2 + 1)$, *encontre* $f''(1)$ *sabendo-se que* $g'(2) = g''(2) = 1$.

$$f'(x) = g(x^2+1) + x.\frac{d}{dx}[g(x^2+1)]$$

$* \, Pela \ Regra \ da \ Cadeia,$

$$\frac{d}{dx}[g(x^2+1)] = g'(x^2+1).\frac{d}{dx}(x^2+1) = g'(x^2+1).2x$$

$$f'(x) = g(x^2+1) + 2x^2.g'(x^2+1)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[g(x^2+1)] + 4x.g'(x^2+1) + 2x^2.\frac{d}{dx}[g'(x^2+1)]$$
$$f''(x) = 2x.g'(x^2+1) + 4xg'(x^2+1) + 2x^2.\frac{d}{dx}[g'(x^2+1)]$$

$Pela \ Regra \ da \ Cadeia,$

$$\frac{d}{dx}[g'(x^2+1)] = g''(x^2+1).\frac{d}{dx}(x^2+1) = 2x.g''(x^2+1)$$

$$f''(x) = 6x.g'(x^2+1) + 4x^3.g''(x^2+1)$$
$$f''(1) = 6.g'(2) + 4.g''(2)$$
$$f''(1) = 6.1 + 4.1$$
$$f''(1) = 6 + 4 = 10$$

$b) \ Determine \ as \ assíntotas \ horizontais \ do \ gráfico \ da \ função \ f(x) = \dfrac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}}.$

$Dizemos \ que \ a \ reta \ y = L \ é \ uma \ assíntota \ horizontal \ do \ gráfico \ de \ f(x) \ se \ ou$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4x+5}{|x|}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4x+5}{x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}};$$

$* \, Obs_1: se \ x \to +\infty, então \ |x| = x \ , e \ ainda, |x| = \sqrt{x^2}.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 4 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{4+0}{\sqrt{2+0}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$Portanto, a \ reta \ y = 2\sqrt{2} \ é \ uma \ assíntota \ horizontal \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4x+5}{|x|}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{|x|}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4x+5}{-x}}{\frac{\sqrt{2x^2+1}}{\sqrt{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4-\frac{5}{x}}{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}};$$

$* \, Obs_1: se \ x \to -\infty, então \ |x| = -x \ , e \ ainda, |x| = \sqrt{x^2}.$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{-4 - \frac{5}{x}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{-\lim\limits_{x \to -\infty} 4 - \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} 2 + \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}}} = \frac{-4 - 0}{\sqrt{2 + 0}} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}.$$

$Portanto, a \ reta \ y = -2\sqrt{2}$ é $uma \ assíntota \ horizontal \ ao \ gráfico \ de \ f(x).$

1.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 28 de Novembro de 2015

Questão 1.

a) *Defina* $g(4)$ *de maneira que estenda* $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$ *para ser contínua em* $x = 4$.

b) *Determine os dois pontos em que a curva* $x^2 + xy + y^2 = 7$ *cruza o eixo* x *e mostre que as tangentes à curva nesses pontos são paralelas. Qual é o coeficiente angular comum dessas tangentes?*

Questão 2.

a) *Determine as assíntotas do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *e a seguir obtenha os pontos de contato delas com o gráfico da função* $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

b) *Calcule, caso exista,* $\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\left[(3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)}\right]$.

Questão 3.

a) *Ache a derivada de* $f(x) = \cos(\pi^{\operatorname{arccotg} x})$.

b) *Obtenha a equação da reta tangente à curva* $y = \dfrac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec} x}$ *no ponto em que* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Questão 4.

a) *Seja* $f(x) = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)(x-2)e^x$. *Calcule a área do triângulo delimitado pelos eixos coordenados e a reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto de abscissa* $x = 1$.

b) *Considere* $f(x) = x^n$, n *inteiro positivo. Use a definição de derivada para provar que* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Questão 5.

a) *Seja* $g(x) = f\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2+4}}\right)$. *Sendo* $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{2}$, *calcule* $g'(2)$.

b) *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o gráfico da função* $f(x) = -x^2$ *intercepta a circunferência de raio* 1 *e centrada na origem num ponto do* 3º *quadrante.*

$\boldsymbol{Questão\ 1}$

$a)\ Defina\ g(4)\ de\ maneira\ que\ estenda\ g(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}\ para\ ser\ contínua\ em\ x = 4.$

$Dizemos\ que\ g(x)\ é\ contínua\ em\ x = 4\ se, somente\ se, g(4) = \lim\limits_{x\to 4} g(x).$
$Contudo, g(4)\ e\ \lim\limits_{x\to 4} g(x)\ \ devem\ existir.$

$$\lim_{x\to 4} f(x) = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)}\ ;$$

$Obs: se\ x \to 4, então\ x \neq 4\ e, portanto, x-4 \neq 0.$

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)} = \lim_{x\to 4}\frac{x+4}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 4}{\lim\limits_{x\to 4} x + \lim\limits_{x\to 4} 1} = \frac{4+4}{4+1} = \frac{8}{5}$$

$Portanto, para\ que\ g(x)\ seja\ contínua\ em\ x = 4, g(4) = \dfrac{8}{5}.$

$b)\ Determine\ os\ dois\ pontos\ em\ que\ a\ curva\ x^2 + xy + y^2 = 7\ cruza\ o\ eixo\ x\ e\ mostre\ que\ as\ tangentes\ à\ curva\ nesses\ pontos\ são\ paralelas. Qual\ é\ o\ coeficiente\ angular\ comum\ dessas\ tangentes?$

$Os\ pontos\ onde\ a\ curva\ cruza\ o\ eixo\ x\ possui\ ordenada\ igual\ a\ zero\ (y = 0).$
$Logo,$

$$x^2 + x.0 + 0^2 = 7 \Longrightarrow x^2 = 7 \therefore x_1 = \sqrt{7}\ \ e\ x_2 = -\sqrt{7}.$$

$Pontos\ A = \left(\sqrt{7}, 0\right)\ e\ B = \left(-\sqrt{7}, 0\right).$

$Derivando\ a\ expressão\ da\ curva\ implicitamente\ em\ relação\ a\ x, temos:$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(7)$$
$$2x + y.\frac{dx}{dx} + x.\frac{dy}{dx} + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + y + xy' + 2yy' = 0$$
$$y'(x+2y) = -(2x+y)$$
$$y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_A = y'_A = -\frac{2\sqrt{7}+0}{\sqrt{7}+2.0} = -2 \qquad ; \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_B = y'_B = -\frac{2\left(-\sqrt{7}\right)+0}{\left(-\sqrt{7}\right)+2.0} = -2$$

$*\ Duas\ retas\ são\ ditas\ paralelas\ quando\ possuem\ a\ mesma\ inclinação, ou\ seja, mesmo\ coeficiente\ angular. Como\ y'_A = y'_B\ então\ as\ retas\ tangentes\ em\ A\ e\ B\ são\ paralelas\ e\ o\ coeficiente\ angular\ em\ comum\ é\ m = -2.$

***Questão* 2**

$a)$ *Determine as assíntotas do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *e a seguir obtenha os pontos de contato delas com o gráfico da função* $g(x) = \operatorname{arcsen} x$.

Domínio da função $f(x)$: *como* $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e* $e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *então* f *está definida nos reais e, portanto,* $D(f) = \mathbb{R}$.

$*$ *Como* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *então* f *não possui assíntotas verticais, pois estas assíntotas ocorrem nos pontos de descontinuidade de uma função.*

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se ou* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{1-0}{1+0} = \frac{1}{1} = 1 \ ; se\ x \to +\infty, \frac{1}{e^{2x}} \to 0.$$

Portanto, a reta $y = 1$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} - \lim\limits_{x\to-\infty} 1}{\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} + \lim\limits_{x\to-\infty} 1} = \frac{0-1}{0+1} = \frac{-1}{1} = -1 \ ; se\ x \to -\infty, e^{2x} \to 0$$

Portanto, a reta $y = -1$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$

$*$ *A interseção entre as assíntotas com o gráfico de* $g(x) = \operatorname{arcsen} x$ *são:*

$y = 1 = g(x) \Longrightarrow 1 = \operatorname{arcsen} x \therefore x = \operatorname{sen} 1$
$y = -1 = g(x) \Longrightarrow -1 = \operatorname{arcsen} x \therefore x = \operatorname{sen}(-1) = -\operatorname{sen}(1)$

Pontos de contato : $A = (\operatorname{sen}(1), 1)$ *e* $B = (-\operatorname{sen}(1), -1)$

$b)$ *Calcule, caso exista,* $\lim\limits_{x\to3^+} \left[(3 - x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)}\right]$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, *com* $x \neq 3$, *temos:*

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{3-x}\right) \leq 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

$* \, Obs$: *como* $0 < \frac{1}{2} < 1$ *a função exponencial é decrescente e, portanto, o sentido da desigualdade inverte.*

$$2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \geq \frac{1}{2}$$

Se $x \to 3^+$, *então* $x > 3$ *e, portanto,* $3 - x < 0$. *Logo,*

$$2(3-x) \leq (3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} \leq \frac{1}{2}(3-x)$$

Seja $f(x) = 2(3-x)$, $g(x) = (3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)}$ *e* $h(x) = \frac{1}{2}(3-x)$, *então* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 2(3-x) = 0$$
$$\lim_{x\to 3^+} h(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{1}{2}(3-x) = 0.$$

Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 3 *por valores maiores que* 3 (*exceto possivelmente em* 3) *e* $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} h(x) = 0$ *então, pelo Teorema do Confronto,* $\lim_{x\to 3^+} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 3^+} (3-x)\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos\left(\frac{1}{3-x}\right)} = 0$$

Questão 3

a) Ache a derivada de $f(x) = \cos(\pi^{\operatorname{arccotg} x})$.

Seja $u = \operatorname{arccotg} x$, $v = \pi^u$ *e* $f(v) = \cos(v)$. *Pela Regra da Cadeia, temos:*

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \frac{du}{dx}.\frac{dv}{du}.\frac{df}{dv}$$
$$f'(x) = \left[-\frac{1}{1+x^2}\right].(\pi^u.\ln\pi).(-\operatorname{sen} v)$$
$$f'(x) = \frac{\pi^{\operatorname{arccotg} x}.\ln\pi.\operatorname{sen}(\pi^{\operatorname{arccotg} x})}{1+x^2}$$

b) Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \frac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cossec} x}$ *no ponto em que* $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{(-\operatorname{cossec}^2 x).\operatorname{cossec} x - (-\operatorname{cossec} x\,.\operatorname{cotg} x)(\operatorname{cotg} x - 1)}{\operatorname{cossec}^2 x}$$

$$y' = \frac{-\operatorname{cossec} x\,(\operatorname{cossec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x + \operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cossec}^2 x} \; ; \quad \operatorname{cotg}^2 x + 1 = \operatorname{cossec}^2 x$$

$$y' = -\frac{(1 + \operatorname{cotg} x)}{\operatorname{cossec} x} = -(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

$Em\ x = \frac{\pi}{2}, y' = -\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}\right) = -(1+0) = -1.$

$Quando\ x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2} - 1}{\operatorname{cossec}\frac{\pi}{2}} = \frac{0-1}{1} = \frac{-1}{1} = -1\ ; Ponto\ \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

Equação da reta tangente em $x = \pi/2$:

$$y - 1 = -1\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$y = -x + \frac{2+\pi}{2}$$

Questão 4

a) *Seja* $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)(x-2)e^x$. *Calcule a área do triângulo delimitado pelos eixos coordenados e a reta tangente ao gráfico de* $y = f(x)$ *no ponto de abscissa* $x = 1$.

Ponto do gráfico de $f(x)$ *com abscissa* $x = 1$:

$$f(1) = \left(\frac{\ln 1}{1}\right)(1-2)e^1 = 0 \ \ ; ponto\ (1{,}0)$$

$$f'(x) = D_x\left[\frac{\ln x}{x}\right].(x-2)e^x + \left(\frac{\ln x}{x}\right).D_x[(x-2)e^x]$$
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2}.(x-2)e^x + \left(\frac{\ln x}{x}\right).[e^x + (x-2)e^x]$$
$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}(x-2)e^x + \frac{\ln x}{x}e^x(x-1)$$
$$f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1}(1-2)e^1 + \frac{\ln 1}{1}e^1(1-1)$$
$$f'(1) = -e$$

Equação da reta tangente em $P = (1{,}0)$:

$$y - 0 = -e(x-1)$$

Interseções com os eixos coordenados: $(0, e)$ *e* $(1{,}0)$

Área do triângulo delimitado pela reta e os eixos coordenados:

$$A = \frac{1.e}{2} = \frac{e}{2}u.A$$

$b)$ *Considere* $f(x) = x^n$, *n inteiro positivo. Use a definição de derivada para provar que* $f'(x) = nx^{n-1}$.

Pela definição de derivada, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$(x + \Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \Delta x^k = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x^2 + \cdots + nx\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right]}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$*$ *Se* $\Delta x \to 0$ *então todos os termos com* Δx *também tendem a zero. Logo,*

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Questão 5

$a)$ *Seja* $g(x) = f\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right)$. *Sendo* $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \sqrt{2}$, *calcule* $g'(2)$.

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right) . D_x\left[\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right]$$

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right) . D_x\left[(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$g'(x) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{x^2+4}}\right)\left[-\frac{1}{2}(x^2+4)^{-\frac{3}{2}}.(2x)\right]$$

$$g'(2) = f'\left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left[-\frac{1}{2}(8)^{-\frac{3}{2}}(4)\right]$$

$$g'(2) = f'\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right).\left[-2.\frac{1}{8\sqrt{8}}\right] = \sqrt{2}.\left[-\frac{1}{4\sqrt{8}}\right] = -\frac{1}{4\sqrt{4}} = -\frac{1}{8}$$

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que o gráfico da função* $f(x) = -x^2$ *intercepta a circunferência de raio* 1 *e centrada na origem num ponto do* 3º *quadrante.*

Equação da circunferência de raio 1 *centrada na origem:*

$$x^2 + y^2 = 1$$

Seja $[g(x)]^2 = 1 - x^2$ *, com* $g(x) \leq 0$, *então* $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ *representa a semicircunferência compreendida no* 3º *e* 4º *quadrante.*

Devemos mostrar que $f(x) = g(x)$ *para algum ponto* (x, y) *no* 3º *quadrante, ou seja,* $x < 0$ *e* $y < 0$. *Como* $g(x) \leq 0$ *então a segunda condição já é satisfeita* $(y < 0)$. *Seja* $h(x) = f(x) - g(x) = -x^2 + \sqrt{1 - x^2}$.

$h(-1) = -(-1)^2 + \sqrt{1 - (-1)^2} = -1 + \sqrt{0} = -1$; $h(-1) < 0$
$h(0) = -(0)^2 + \sqrt{1 - 0^2} = 0 + \sqrt{1} = 1$; $h(0) > 0$

h *é uma função contínua no intervalo fechado* $[-1,0]$ *e* 0 *é um número entre* $h(-1)$ *e* $h(0)$, *onde* $h(-1) < 0 < h(0)$. *Então, existe algum* $x \in (-1,0)$ *tal que* $h(x) = 0$. *Portanto,* $h(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x)$ *para algum* $x \in (-1,0)$ *onde* $x < 0$. *E como* $y = g(x) = f(x) < 0$, *então o ponto de interseção pertence ao* 3º *quadrante.*

$*$ *Obs: essa questão também pode ser resolvida utilizando a expressão obtida pela substituição de* $f(x)$ *na equação da circunferênica* $(x^2 + x^4 = 1)$ *e fazer o mesmo procedimento, mostrando que* $x < 0$ *e* $y < 0$.

1.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 27 de Novembro de 2015

Questão 1.

a) *Mostre que a equação* $2x - 1 = \operatorname{sen} x$ *tem exatamente uma raíz real.*

b) *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função* $f(x) = 2\cos x - \cos(2x)\,, x \in [0{,}2\pi]$.

Questão 2.

a) *Um triângulo retângulo tem um cateto com lado de* 5*m e ângulo agudo oposto com* $45°$*, com um possível erro de* $\pm\, 2°$*. Use diferenciais para estimar o erro no cálculo do outro cateto.*

b) *Uma partícula, inicialmente em repouso, dá uma volta completa num círculo, respeitando a função de posição* $s(t) = 2 - \cos[\ln(t+1)]$*. Determine em que instante, após o início do movimento, a partícula volta ao repouso. Qual o deslocamento neste intervalo de tempo?*

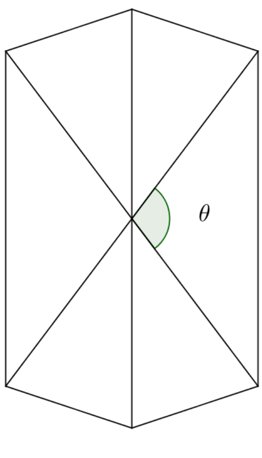
Questão 3.

a) *Um avião voa horizontalmente a uma altitude de* 2*km, a* $800\, km/h$*, e passa diretamente sobre uma estação de radar. Determine a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta, quando ele está a* 3*km da estação.*

b) *Determine os pontos críticos, o domínio e os valores extremos (absolutos e relativos) da função* $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

Questão 4.

a) *Pedrinho está construindo uma pipa com* 3 *palitos de tamanhos* 2*r cm, cruzando-se seus pontos médios, como na figura, onde o palito vertical é um eixo de simetria para o hexágono resultante. Qual o ângulo* θ *que maximiza a área da pipa?*

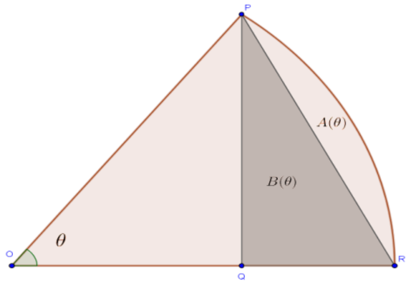


b) Os pontos $(-1,3)$ e $(0,2)$ estão no gráfico da função f para a qual $f''(x) = 2 - 4x$. Verifique se o gráfico de f intercepta o gráfico da função $g(x) = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{3}$.

Questão 5.

a) Verifique se existe função derivável na qual $f'(x) \leq 5$, $f(2) = -1$ e $f(4) = 10$, quando restrita ao intervalo $(2,4)$.

b) A figura mostra o setor de um círculo com ângulo central θ. Seja $A(\theta)$ a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja $B(\theta)$ a área do triângulo PQR. Encontre $\lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{A(\theta)}{B(\theta)}$.



Questão 1

$a)$ *Mostre que a equação* $2x - 1 = \operatorname{sen} x$ *tem exatamente uma raíz real.*

Seja $f(x) = 2x - 1 - \operatorname{sen} x$ *. Devemos mostrar que* $f(x)$ *possui exatamente uma raíz real.*

$f(0) = 2.(0) - 1 - \operatorname{sen} 0 = 0 - 1 - 0 = -1$; $f(0) = -1 < 0$
$f(\pi) = 2\pi - 1 - \operatorname{sen} \pi = 2\pi - 1 - 0 = 2\pi - 1$; $f(\pi) = 2\pi - 1 > 0$

Como f *é uma composição de funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *é contínua no em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,\pi]$ *e* 0 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(\pi)$, *onde* $f(0) < 0 < f(\pi)$, *então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum número* $x \in (0,\pi)$ *tal que* $f(x) = 0$. *Com isso, concluimos que* f *possui uma raíz real em* $(0,\pi)$.

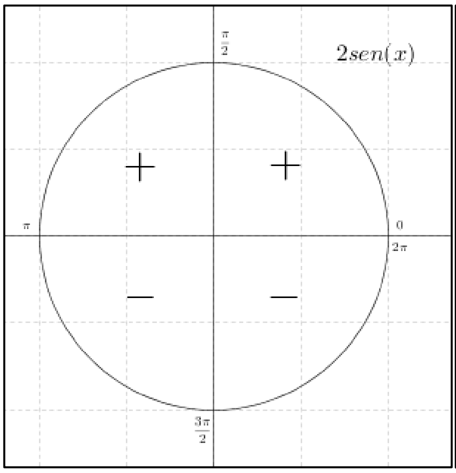
Suponha que f *possua duas raízes reais* a *e* b *tais que* $f(a) = f(b) = 0$. *Como* f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[a,b]$ *e diferenciável no intervalo aberto* (a,b), *e* $f(a) = f(b)$ *pelo Teorema de Rolle existe algum* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

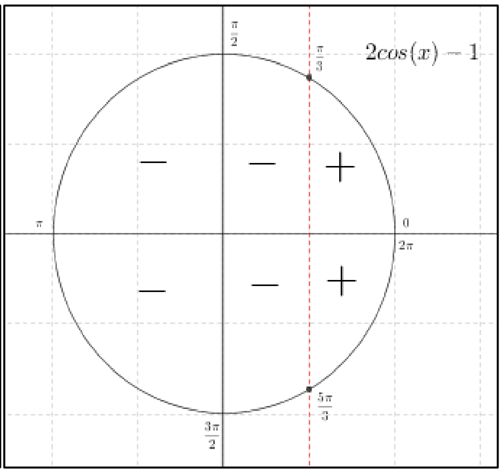
$$f'(x) = 2 - \cos x;$$
$$-1 \leq -\cos x \leq 1$$
$$2 - 1 \leq 2 - \cos x \leq 2 + 1$$
$$1 \leq f'(x) \leq 3$$

$*$ *Logo,* $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ *e, portanto,* f *não possui duas raízes reais e, por contradição,* f *possui no máximo 1 raíz real. Como já comprovamos a existência dessa raíz pelo Teorema do Valor Intermediário, então* f *possui exatamente uma raíz real.*

$b)$ *Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função* $f(x) = 2\cos x - \cos(2x)$, $x \in [0,2\pi]$.

$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen}(2x)$
$f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 4\operatorname{sen} x . \cos x$
$f'(x) = 2\operatorname{sen} x\,(2\cos x - 1)$





$Com\ essa\ análise\ acima\ chegamos\ ao\ seguinte\ comportamento\ de\ f'(x)$:

$$(0)++++\left(\frac{\pi}{3}\right)------(\pi)++++++\left(\frac{5\pi}{3}\right)----(2\pi)\quad f'(x)$$

f é $crescente\ onde\ f'(x)>0, portanto, f$ é $crescente\ em\ \left(0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{3}\right)$.
f é $decrescente\ onde\ f'(x)<0, portanto, f$ é $decrescente\ em\ \left(\frac{\pi}{3},\pi\right)\cup\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$.

Questão 2

a) Um triângulo retângulo tem um cateto com lado de 5m e ângulo agudo oposto com 45°, com um possível erro de ± 2°. Use diferenciais para estimar o erro no cálculo do outro cateto.

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{5}{x}\ ;x=5\operatorname{cotg}\theta\ ;\ \Delta\theta=d\theta=\pm2\frac{\pi}{180}rad=\pm\frac{\pi}{90}rad.$$

$Como\ d\theta \ll 1rad, então\ \Delta x\approx dx. Logo,$

$$\Delta x\approx dx$$
$$\Delta x\approx x'(\theta).d\theta$$
$$\Delta x\approx -5.\operatorname{cossec}^2\theta\,.d\theta$$
$$\Delta x\approx -5.\operatorname{cossec}^2\left(\frac{\pi}{4}\right).\left(\pm\frac{\pi}{90}\right)$$
$$\Delta x\approx -5.(2).\left(\pm\frac{\pi}{90}\right)=\pm\frac{\pi}{9}m$$

$Logo, o\ erro\ no\ cálculo\ do\ comprimento\ do\ outro\ cateto$ é $\pm\frac{\pi}{9}m.$

b) Uma partícula, inicialmente em repouso, dá uma volta completa num círculo, respeitando a função de posição $s(t)=2-\cos[\ln(t+1)]$. Determine em que instante, após o início do movimento, a partícula volta ao repouso. Qual o deslocamento neste intervalo de tempo?

$Inicialmente\ (t=0)\ temos\ s(0)=2-\cos[\ln(1)]=2-\cos 0=2-1=1.$

$$s'(t)=v(t)=\frac{\operatorname{sen}[\ln(t+1)]}{t+1}$$

$O\ momento\ em\ que\ a\ partícula\ volta\ ao\ repouso\ refere-se\ ao\ tempo\ t>0,$
$tal\ que\ s'(t)=v(t)=0.$

$v(t)=0\Longrightarrow \operatorname{sen}[\ln(t+1)]=0$

$\ln(t+1)=0\Longrightarrow t=0\ (referente\ ao\ início\ do\ movimento)$
$\ln(t+1)=\pi\Longrightarrow t=e^{\pi}-1.$

$* \, Portanto, t = e^{\pi} - 1$ *é o instante, após o início do movimento, que a partícula volta ao repouso.*

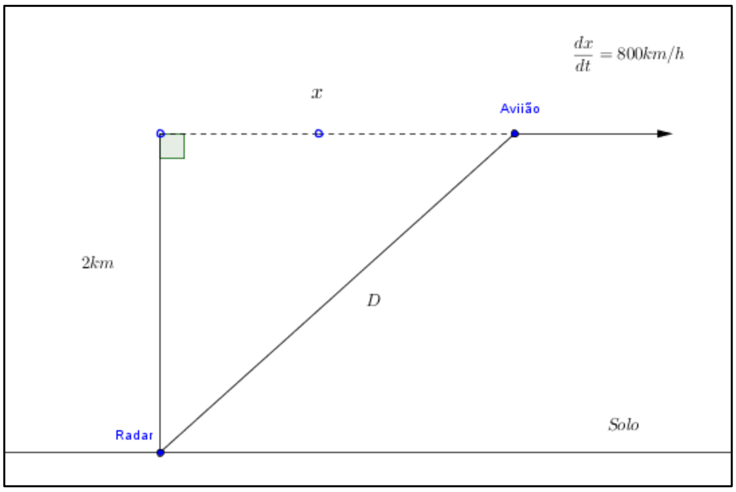
O deslocamento nesse intervalo de tempo é dado por $\Delta s = s(e^{\pi} - 1) - s(0)$.

$$s(e^{\pi} - 1) = 2 - \cos[\ln(e^{\pi})] = 2 - \cos \pi = 2 - (-1) = 3.$$

Logo, o deslocamento da partícula foi $\Delta s = 3 - 1 = 2$.

Questão 3

a) *Um avião voa horizontalmente a uma altitude de* $2km$, *a* $800 \, km/h$, *e passa diretamente sobre uma estação de radar. Determine a taxa segundo a qual a distância entre o avião e a estação aumenta, quando ele está a* $3km$ *da estação.*



Pela ilustração acima, tiramos a seguinte relação:

$$D^2 = 2^2 + x^2$$
$$D^2 = 4 + x^2$$

Quando $D = 3km$ *temos ...*

$$x^2 = D^2 - 4 = 9 - 4 = 5 \therefore x = \sqrt{5}km$$

Derivando a expressão inicial em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(D^2) = \frac{d}{dt}(4) + \frac{d}{dt}(x^2)$$
$$2D.\frac{dD}{dt} = 0 + 2x.\frac{dx}{dt}$$

Onde $\frac{dx}{dt}$ *é velocidade do avião, ou seja,* $800km/h$ *e* $\frac{dD}{dt}$ *a velocidade com a qual varia a distância entre o avião e a estação de radar. Logo, para* $D = 3km$ *e* $x = \sqrt{5}km$, *temos:*

$$2.(3).\frac{dD}{dt} = 2.\sqrt{5}.800$$
$$\frac{dD}{dt} = \frac{800\sqrt{5}}{3} km/h$$

$*$ *Portanto, a distância entre o avião e a estação está aumentando a taxa de* $\frac{800\sqrt{5}}{3} km/h$ *quando o avião está a 3km de distância da estação.*

b) Determine os pontos críticos, o domínio e os valores extremos (absolutos e relativos) da função $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$.

Primeiramente devemos definir o domínio da função $f(x)$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 4 - x^2 \geq 0\} \therefore D(f) = \{x \in \mathbb{R};\ -2 \leq x \leq 2\}$$

$$f'(x) = \sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{2(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}\ ; D(f') = \{x \in \mathbb{R};\ -2 < x < 2\}$$

Como f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[-2,2]$ *e diferenciável no intervalo aberto* $(-2,2)$ *podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos (absolutos e relativos) de* $f(x)$ *no intervalo fechado* $[-2,2]$.

Obs_1: f *é uma função ímpar, ou seja,* $f(x) = -f(-x)$

1. *Os valores de* f *nas extremidades do intervalo.*

$$f(-2) = -2\sqrt{4 - (-2)^2} = -2\sqrt{4 - 4} = -2\sqrt{0} = 0.$$
$$f(2) = 2\sqrt{4 - (2)^2} = 2\sqrt{4 - 4} = 2\sqrt{0} = 0.$$

2. *Os valores de* f *nos números críticos.*

$*$ *Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

Como f *é derivável em* $(-2,2)$ *os números críticos ocorrem onde* $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \therefore x = \pm\sqrt{2}$$
$$f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sqrt{4 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{2}.\sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2.$$

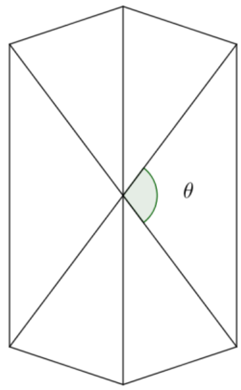
Usando o fato de que f *é uma função ímpar:* $f(-\sqrt{2}) = -f(\sqrt{2}) = -2$.

3. *Comparando os valores obtidos nas etapas 1 e 2, concluimos que*

$*$ $f(\sqrt{2}) = 2$ *é o valor máximo absoluto e local da função* f *no intervalo* $[-2,2]$;
$*$ $f(-\sqrt{2})$ *é o valor mínimo absoluto e local da função* f *no intervalo* $[-2,2]$;

Questão 4

a) Pedrinho está construindo uma pipa com 3 palitos de tamanhos 2r cm, cruzando-se seus pontos médios, como na figura, onde o palito vertical é um eixo de simetria para o hexágono resultante. Qual o ângulo θ que maximiza a área da pipa?



Como o palito vertical é um eixo de simetria podemos nos ater apenas a metade do hexágono resultante. Como os palitos estão unidos pelo seu ponto médio, então todos os triângulos observados no hexágono são isósceles com lados iguais medindo r cm.

Dado 2 lados do triângulo e o ângulo adjacente entre eles, a área desse triângulo é dada pela expressão:

$$A = \frac{1}{2} a.b.\operatorname{sen}\alpha$$

$*$ *O triângulo central possui abertura θ, com $0 < \theta < \pi$ enquanto que os outros por simetria, possui abertura de $(\pi/2 - \theta/2)$ cada um. Logo,*

$$A_1 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\theta \quad e \; A_2 = A_3 = \frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} r^2 \cos\frac{\theta}{2}$$

$*$ *Portanto, a área total do hexágono resultante (pipa) é dada pela expressão:*

$$A_T(\theta) = r^2 \operatorname{sen}\theta + 2r^2 \cos\theta = r^2\left(\operatorname{sen}\theta + 2\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

$$A'_T(\theta) = r^2\left(\cos\theta - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \quad ; \quad \cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}$$

$$A'_T(\theta) = r^2\left(-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 1\right)$$

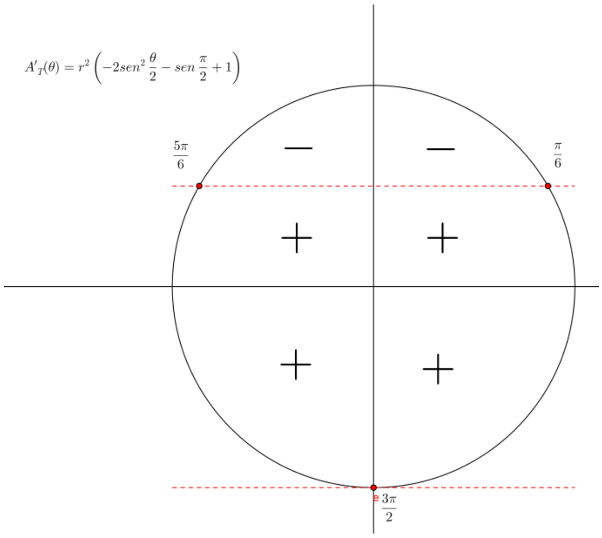
Analisando a função quadrática em incógnita $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, *temos:*

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1 \pm 3}{-4} \Longrightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -1 \quad e \quad \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(-1) + + + + + + + + + (1/2) - - - - - - - (1) \qquad \left(-2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} + 1\right)$$

Analisando o círculo trigonométrico para a função $A'_T(\theta)$, temos:



Pelo teste da primeira derivada, para $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6}$ *temos um ponto crítico associado ao valor máximo local da função da área da pipa. Logo,* $\theta = \frac{\pi}{3}$ é *o valor do ângulo* θ *que maximiza a área da pipa que Pedrinho está construindo*.

$b)$ *Os pontos* $(-1,3)$ *e* $(0,2)$ *estão no gráfico da função* f *para a qual* $f''(x) = 2 - 4x$. *Verifique se o gráfico de* f *intercepta o gráfico da função* $g(x) = \frac{3x^2 - 2x^3}{3}$.

$f'(x) = 2x - 2x^2 + C_1 \;\; ; \quad f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + C_1x + C_2$

Como os pontos $(0,2)$ *e* $(-1,3)$ *pertencem ao gráfico de* f, *então* $f(0) = 2$ *e* $f(-1) = 3$. *Substituindo na expressão de* $f(x)$, *obtemos*:

$$f(0) = C_2 \therefore \;\; C_2 = 2$$

$f(-1) = 1 + \frac{2}{3} - C_1 + 2 = 3 \therefore C_1 = \frac{2}{3}$

$f(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 \quad ; \quad g(x) = x^2 - \frac{2}{3}x^3$

Interseção entre $f(x)$ *e* $g(x)$:

$$f(x) = g(x)$$
$$x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x + 2 = x^2 - \frac{2}{3}x^3$$
$$\frac{2}{3}x + 2 = 0$$
$$x = -3$$

Interseção: $(-3, g(-3))$;

$g(-3) = (-3)^2 - \frac{2}{3}(-3)^3 = 9 + 18 = 27.$ *Interseção* $P = (-3,27)$;

***Questão* 5**

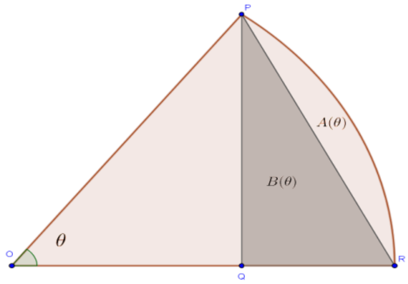
a) Verifique se existe função derivável na qual $f'(x) \leq 5, f(2) = -1$ *e* $f(4) = 10$, *quando restrita ao intervalo* $(2,4)$.

Se f *é contínua no intervalo fechado* $[2,4]$ *e derivável em* $(2,4)$, *pelo Teorema do Valor Médio, existe algum* $x \in (2,4)$ *tal que*

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{10 - (-1)}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

$*$ *Portanto, não pode existir uma função derivável na qual* $f'(x) \leq 5$ *com essas condições, uma vez que, pelo Teorema do Valor Médio deve existir, pelo menos, algum* $x \in (2,4)$ *tal que* $f'(x) = 5,5$.

b) A figura mostra o setor de um círculo com ângulo central θ. *Seja* $A(\theta)$ *a área do segmento entre a corda PR e o arco PR. Seja* $B(\theta)$ *a área do triângulo PQR. Encontre* $\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$.



$$A(\theta) = \frac{1}{2}\theta r^2 - \frac{1}{2}r^2 \operatorname{sen}\theta = \frac{r^2}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$$

$$B(\theta) = \frac{1}{2}b \times h = \frac{1}{2}(r - r.\cos\theta) \times (r.\operatorname{sen}\theta) = \frac{r^2}{2}(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta}\ ; \textit{indeterminação do tipo } "\frac{0}{0}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{(1 - \cos\theta)\operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1 - \cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta + \cos\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{1 - \cos\theta}{-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1};$$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1 - \cos\theta}{-2\cos^2\theta + \cos\theta + 1} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{4\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta\,(4\cos\theta - 1)} =$$

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{1}{4\cos\theta - 1} = \frac{\lim_{\theta \to 0^+} 1}{\lim_{\theta \to 0^+} 4\cos\theta - \lim_{\theta \to 0^+} 1} = \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

1.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 28 de Novembro de 2015

Questão 1

a) *Uma partícula se desloca em linha reta, de acordo com a função de posição* $s(t) = \ln\left[\frac{(t-2)^2+1}{5}\right]$.
i. Determine em que momento a partícula volta à *posição inicial.*
ii. Determine em que intervalos de tempo a partícula se move para trás ou para frente e em que ocasião ela estará em instantâneo repouso.

b) *A curva* $y = \operatorname{senh}[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$ *possui reta tangente horizontal? Caso possua, dê sua equação.*

Questão 2

a) *Uma piscina com borda quadrada de* 10*m de lado possui um fundo inclinado com profundidade* 1*m numa lateral, crescendo até* 2*m na lateral oposta. Se a piscina está sendo enchida à velocidade de* $0{,}4\, m^3/min$, *determine a taxa de variação da altura no nível da água, no instante em que ele é de* 0,5*m na extremidade mais profunda.*

b) *Seja* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & se\ 0 \le x \le \pi/2 \\ -\frac{2}{\pi}x + 2, & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$. *Mostre que* $f(0) = f(\pi)$.
Existe $c \in (0,\pi)$, *tal que* $f'(c) = 0$?

Questão 3

a) *Encontre as abscissas dos pontos da curva* $y = -2\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$, *com* $0 < x < 2\pi$, *onde a concavidade é mínima e onde a concavidade é máxima.*

b) *Considere a função* f *que satisfaz às seguintes condições*: $f''(x) < 0$, $f'(0) = 2$ *e* $f(0) = 1$. *Mostre que* $f(x) \le 2x + 1$, *em* $[-1,1]$.

Questão 4

a) *Determine os pontos críticos, o domínio e o valores extremos (absolutos e locais) para a função* $f(x) = x^{1/3} + x^{4/3}$.

b) *Calcule* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2.\cos x}\right]$.

Questão 5

a) *Sabemos que* $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$ *e que* $f(2) = 5$. *Determine as assíntotas horizontais, verticais e oblíquas de* f, *caso existam.*

$b)$ *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$, *depois de determinar*

- *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
- *Os pontos de máximos e mínimos locais*;
- *As assíntotas, caso existam*;
- *Os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo*;
- *Os pontos de inflexão*.

Questão 1

a) Uma partícula se desloca em linha reta, de acordo com a função de posição $s(t) = \ln\left[\frac{(t-2)^2+1}{5}\right]$.

i. Determine em que momento a partícula volta à posição inicial.

A posição inicial da partícula é $s(0) = \ln\left[\frac{(0-2)^2+1}{5}\right] = \ln\left[\frac{4+1}{5}\right] = \ln 1 = 0$

Queremos determinar quando $s(t) = 0$ *para* $t \neq 0$. *Logo,*

$$s(t) = 0 \Longrightarrow \ln\left[\frac{(t-2)^2+1}{5}\right] = 0 \Rightarrow \frac{(t-2)^2+1}{5} = e^0 = 1 \Rightarrow (t-2)^2+1 = 5$$

$(t-2)^2 = 4 \therefore (t-2) = \pm 2 \therefore t = 0$ *ou* $t = 4$.

Portanto, em $t = 4$ *a partícula volta à posição inicial.*

ii. Determine em que intervalos de tempo a partícula se move para trás ou para frente e em que ocasião ela estará em instantâneo repouso.

$$v(t) = s'(t) = \frac{5}{(t-2)^2+1}.\frac{1}{5}.2(t-2) = \frac{2(t-2)}{(t-2)^2+1}$$

Analisando o comportamento (sinal) da função velocidade, temos:

$$(0) - - - - - - - - (2) + + + + + + + + + + \quad v(t)$$

Portanto, onde $v(t) < 0$ *a partícula se move para trás, ou seja, em* $t \in (0,2)$. *Logo,* $v(t) > 0$ *significa dizer que a partícula se move para frente em* $t \in (2, +\infty)$. *E excepcionalmente em* $t = 2$ *a partícula encontra-se em instantâneo repouso* $(v(t) = 0)$.

b) A curva $y = \operatorname{senh}[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$ *possui reta tangente horizontal? Caso possua, dê sua equação.*

$$y' = [e^x.\cosh(e^x) - e^x].\cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$$
$$y' = e^x[\cosh(e^x) - 1]\cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$$

Devemos verificar se existe $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $y' = 0$. *Logo,*

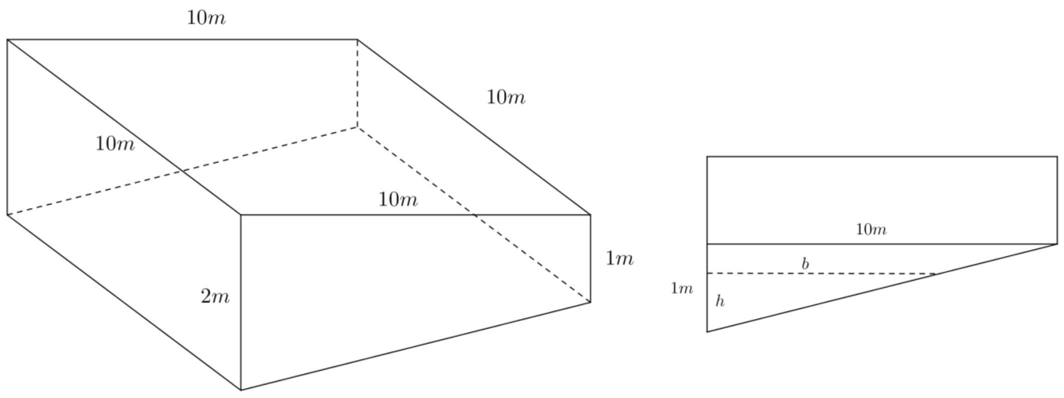
$$y' = 0 \Longrightarrow \begin{cases} e^x = 0 \\ \cosh(e^x) - 1 = 0 \\ \cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x] = 0 \end{cases};$$

$*$ Obs_1: $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto, a primeira equação não tem solução.*
$*$ Obs_2: $\cosh(e^x) > 1, \forall x \in \mathbb{R}$. *Logo,* $\cosh(e^x) - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto, a segunda equação não tem solução.*
$*$ Obs_2: $\cosh[\operatorname{senh}(e^x) - e^x] > 1, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto, a terceira equação não tem solução.*

Com essas análises, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y' = 0$ e, portanto, o gráfico de $y = \operatorname{senh}[\operatorname{senh}(e^x) - e^x]$ não possui reta tangente horizontal.

Questão 2

a) Uma piscina com borda quadrada de 10m de lado possui um fundo inclinado com profundidade 1m numa lateral, crescendo até 2m na lateral oposta. Se a piscina está sendo enchida à velocidade de $0{,}4\, m^3/min$, determine a taxa de variação da altura no nível da água, no instante em que ele é de 0,5m na extremidade mais profunda.



$$V = A_{Transversal} \times Comprimento = \frac{1}{2} h.b.10 = 5hb$$

Pelo triângulo ilustrado na figura à direita, temos:

$$\frac{10}{1} = \frac{b}{h} \therefore b = 10h \Longrightarrow V = 50h^2$$

Pela regra da cadeia,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$
$$0{,}4 = 100h.\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{250h}$$

Quando a água está com 0,5m de profundidade, temos:

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=0{,}5m} = \frac{1}{125} m/min = 0{,}008\, m/min$$

A taxa de variação da altura no nível da água é de $0{,}008 m/min$ quando ela está 0,5m de profundidade na extremidade mais profunda.

$b)$ *Seja* $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x\,, & se\ 0 \leq x \leq \pi/2 \\ -\dfrac{2}{\pi}x + 2, & \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$. *Mostre que* $f(0) = f(\pi)$.
Existe $c \in (0,\pi)$, *tal que* $f'(c) = 0$?

$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 \quad ; \quad f(\pi) = -\dfrac{2}{\pi}\pi + 2 = -2 + 2 = 0. \; ; \quad f(0) = f(\pi) = 0.$

Se f *é uma função contínua no intervalo fechado* $[0,\pi]$ *e diferenciável em* $(0,\pi)$, *e* $f(0) = f(\pi)$, *pelo Teorema de Rolle deve existir algum* $c \in (0,\pi)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x\,, & se\ 0 < x < \pi/2 \\ -\dfrac{2}{\pi}, & se\ \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

$*$ *Obs*: $f'(x) = 0 \Longrightarrow \cos x = 0 \therefore x = \dfrac{\pi}{2}$. *Entretanto*, $f'_+\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{2}{\pi}$ *e* $f'_-\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.
Como as derivadas laterais existem, mas são diferentes, então f *não é derivável em* $x = \pi/2$.

Portanto, não existe $c \in (0,\pi)$ *tal que* $f'(c) = 0$ *e isso não contradiz o Teorema de Rolle, uma vez que,* f *não é derivável em* $(0,\pi)$.

Questão 3

$a)$ *Encontre as abscissas dos pontos da curva* $y = -2\cos x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$, *com* $0 < x < 2\pi$, *onde a concavidade é mínima e onde a concavidade é máxima.*

Devemos encontrar os valores de x *tal que* $f''(x)$ *seja máximo ou mínimo, ou seja, faremos o estudo de* $f'''(x)$ *para encontrar os números críticos associados aos valores máximos e mínimos locais da concavidade.*

$y = f(x) = -2\cos x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$
$f'(x) = 2\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$
$f''(x) = 2\cos x + \operatorname{sen}(2x)$

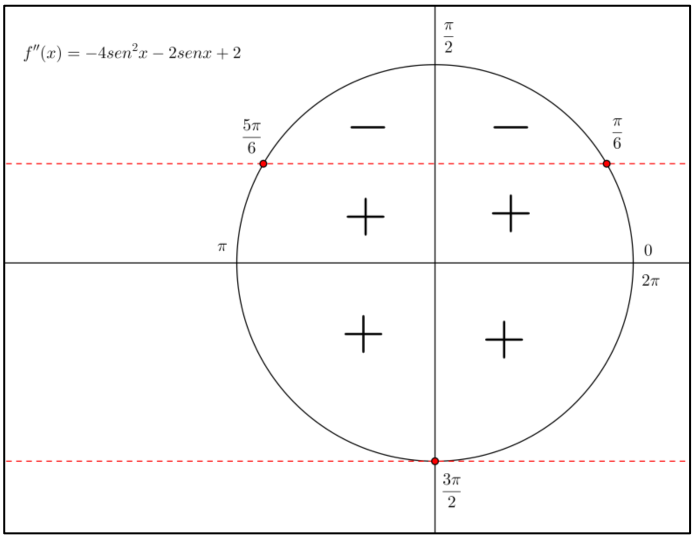
$f'''(x) = -2\operatorname{sen} x + 2\cos(2x) \;\; ; \; \cos(2x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \; ;$
$f'''(x) = -4\operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x + 2$

$$\Delta = 4 + 32 = 36$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{2 \pm 6}{-8} \therefore \operatorname{sen} x_1 = -1 \ ou\ \operatorname{sen} x_2 = \frac{1}{2}$$

$* \operatorname{sen} x_1 = -1 \therefore x_1 = \dfrac{3\pi}{2} \quad ; * \operatorname{sen} x_2 = \dfrac{1}{2} \therefore x_2 = \dfrac{\pi}{6} \;\; e \;\; x_2 = \dfrac{5\pi}{6}$

$Analisando\ a\ função\ f'''(x)\ pelo\ círculo\ trigonométrico\ abaixo, temos:$



$Com\ a\ análise\ acima, concluimos\ que$

$f''(x)$ é $crescente\ em\ (0,\pi/6) \cup (5\pi/6, 2\pi)\ e$
$f''(x)$ é $decrescente\ em\ (\pi/6, 5\pi/6)$

$Com\ isso\ temos\ que\ x = \dfrac{3\pi}{2}$ é $apenas\ um\ número\ crítico, não\ está\ associado\ a\ nenhum\ valor\ extremo\ de\ f''(x). Entretanto, pelo\ teste\ da\ primeira\ derivada\ de\ f''(x)\ temos\ em\ x = \dfrac{\pi}{6}\ um\ valor\ máximo\ local\ e\ em\ x = \dfrac{5\pi}{6}\ um\ valor\ mínimo\ local.$

$Portanto, em\ x = \dfrac{\pi}{6}\ a\ concavidade$ é $máxima\ e\ em\ x = \dfrac{5\pi}{6}\ a\ concavidade$ é $mínima.$

$b)\ Considere\ a\ função\ f\ que\ satisfaz$ às $seguintes\ condições: f''(x) < 0,$
$f'(0) = 2\ e\ f(0) = 1. Mostre\ que\ f(x) \leq 2x + 1, em\ [-1,1].$

$Seja\ h(x) = f(x) - 2x - 1. Devemos\ mostrar\ que\ h(x) \leq 0\ em\ [-1,1]$

$$h(-1) = f(-1) + 1\ e\ h(1) = f(1) - 3.$$

$h'(x) = f'(x) - 2$
$h''(x) = f''(x) < 0$

$Como\ h''(x) < 0\ em\ (-1,1)\ então, h'(x)$ é $decrescente\ em\ (-1,1). Logo,$
$h'(0) = f'(0) - 2 = 2 - 2 = 0. E\ como\ h'(x)$ é $decrescente\ então, para\ x > 0,$
$h'(x) < 0\ e\ para\ x < 0, h'(x) > 0. Com\ isso, podemos\ concluir\ que\ h(x)$ é
$crescente\ em\ (-1,0)\ e\ decrescente\ em\ (0,1), em\ que\ x = 0$ é $um\ número$
$crítico\ associado\ a\ um\ valor\ máximo\ local, pelo\ teste\ da\ primeira\ derivada.$

$$h(0) = f(0) - 2.0 - 1 = 1 - 0 - 1 = 0.$$

Como $h(0) = 0$ *é o valor máximo local e absoluto de* $h(x)$, *pois, pela análise de* $h'(x)$ *temos* $h(-1) < h(0)$ *e* $h(0) > h(1)$, *consequentemente, para todo o intervalo fechado* $[-1,1]$, $h(x) \leq h(0) \Longrightarrow h(x) \leq 0$. *Portanto,*

$$f(x) \leq 2x + 1 \ \ em\ [-1,1]$$

Questão 4

a) Determine os pontos críticos, o domínio e o valores extremos (absolutos e locais) para a função $f(x) = x^{1/3} + x^{4/3}$. $D(f) = \mathbb{R}$

Um número crítico de uma função f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)$ *não existe.*

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = \frac{1+4x}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad D(f') = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 + 4x = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{4}$ *e* $f'(x) \nexists$ *para* $x = 0$.

Como $x = -\dfrac{1}{4}$ *e* $x = 0$ *pertencem ao domínio de* f, *ambos são números críticos da função* $f(x)$.

Pontos críticos: $(0,0)$ *e* $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\right)$

Analisando o crescimento e decrescimento da função $f(x)$, *temos:*

$$- - - - - - \left(-\frac{1}{4}\right) + + + (0) + + + + + + + + \quad f'(x)$$

Pelo teste da primeira derivada, $f\left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$ *é um valor mínimo local e absoluto de* f *e em* $x = 0$ *temos um ponto crítico que nem é de máximo nem de mínimo local.*

b) Calcule $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\dfrac{x}{\operatorname{cotg} x} - \dfrac{\pi}{2.\cos x}\right]$; *Indeterminação do tipo* "$\infty - \infty$"

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x}{\operatorname{cotg} x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\cos x - \pi\operatorname{cotg} x}{2\cos x\,.\operatorname{cotg} x}\right] \text{; indeterminação tipo } "\frac{0}{0}"$$

$* \cos x = \operatorname{cotg} x\,.\operatorname{sen} x$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\cos x - \pi\operatorname{cotg} x}{2\cos x\,.\operatorname{cotg} x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\operatorname{cotg} x\operatorname{sen} x - \pi\operatorname{cotg} x}{2\cos x\,.\operatorname{cotg} x}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\operatorname{sen} x - \pi}{2\cos x}\right];$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, temos:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2x.\operatorname{sen}x-\pi}{2\cos x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2\operatorname{sen}x+2x.\cos x}{-2.\operatorname{sen}x}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[-1+x.\operatorname{cotg}x]=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}-1+\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}x.\operatorname{cotg}x=-1+0=-1.$$

Portanto, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{x}{\operatorname{cotg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right]=-1.$

Questão 5

a) Sabemos que $f'(x)=1-\frac{8}{x^3}$ *e que* $f(2)=5$. *Determine as assíntotas horizontais, verticais e oblíquas de* f, *caso existam.*

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}+C\ \ ; f(2)=5=2+1+C\ \therefore\ C=2$$

$$f(x)=x+\frac{4}{x^2}+2=\frac{x^3+2x^2+4}{x^2}\ ;\ \ D(f)=\{x\in\mathbb{R};x\neq 0\}$$

Assíntotas Verticais:

Dizemos que a reta $x=a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty\qquad ou\qquad \lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty$$

Pela definição de continuidade de uma função no número $x=a$, *devemos procurar essa assíntota onde a função* f *é descontínua. Logo, verifcamos se a reta* $x=0$ *é uma assíntota.*

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+2x^2+4}^{\to 4}}{\underbrace{x^2}_{\to 0^+}}=+\infty$$

Portanto, a reta $x=0$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

Assíntotas Horizontais:

Dizemos que a reta $y=L$ *é uma assíntota horizontal se ou* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+4}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(x+2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+2+\frac{4}{x}\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(x+2+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2} = \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x}\right) = -\infty$$

Portanto, não há assíntotas horizontal ao gráfico de $f(x)$.

Assíntotas Oblíquas:

Dizemos que a reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico da função $f(x)$ se, somente se, $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$

$$f(x) = (x+2) + \frac{4}{x^2} \ ; \ \ f(x) - (x+2) = \frac{4}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x+2)] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$

Portanto, a reta $y = x + 2$ é uma assíntota oblíqua ao gráfico de $f(x)$.

Assíntotas do gráfico da função $f(x)$: as retas $x = 0$ e $y = x + 2$.

b) Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$, *depois de determinar*

- *Os intervalos de crescimento e decrescimento*;
- *Os pontos de máximos e mínimos locais*;
- *As assíntotas, caso existam*;
- *Os intervalos onde a concavidade é para cima ou para baixo*;
- *Os pontos de inflexão.*

1) $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq -2 \ e \ x \neq 2\}$;

2) *Interseções com os eixos coordenados*: $(0,0)$

$$f'(x) = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = -\frac{x^2+4}{(x^2-4)^2} \ ; \qquad f''(x) = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

3) *Intervalos de crescimento e decrescimento*;

$- - - - - - - - - - - - - - - - - - \quad (-x^2-4)$
$+ + + + (-2) + + + + + (2) + + + + + \quad (x^2-4)^2$
$- - - - (-2) - - - - - (2) - - - - - \quad f'(x)$

Com a análise acima, concluimos que f é sempre decrescente em seu domínio.

4) *Os pontos de máximos e mínimos locais*;

Os pontos de máximos e minimos locais ocorrem nos números críticos de uma função.

Um número de uma função f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou* $f'(c)\ \nexists$.

Analisando $f'(x)$ *temos que a derivada não existe em* $x = -2$ *e em* $x = 2$, *mas esses números não pertencem ao domínio da função. Portanto, não há pontos de máximos e mínimos locais em* $f(x)$.

5) *Assíntotas*:

∗ *Verticais*:

Dizemos que a reta $x = a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos*:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Como esssas assíntotas ocorrem em pontos de descontinuidade da função, vamos verificar se as retas $x = -2$ *e* $x = 2$ *são assíntotas.*

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\overbrace{x}^{\substack{-2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow\\ -4}}\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{\overbrace{x}^{\substack{-2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow\\ -4}}\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

Portanto, a reta $x = -2$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\overbrace{x}^{\substack{2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 4}}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\overbrace{x}^{\substack{2\\ \uparrow}}}{\underbrace{(x-2)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}\underbrace{(x+2)}_{\substack{\downarrow\\ 4}}} = -\infty$$

Portanto, a reta $x = 2$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

∗ *Horizontal*:

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se ou* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x}}$$
$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x}}$$
$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

Portanto, a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal ao gráfico de $f(x)$.

6) *Concavidade e Pontos de Inflexão*:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

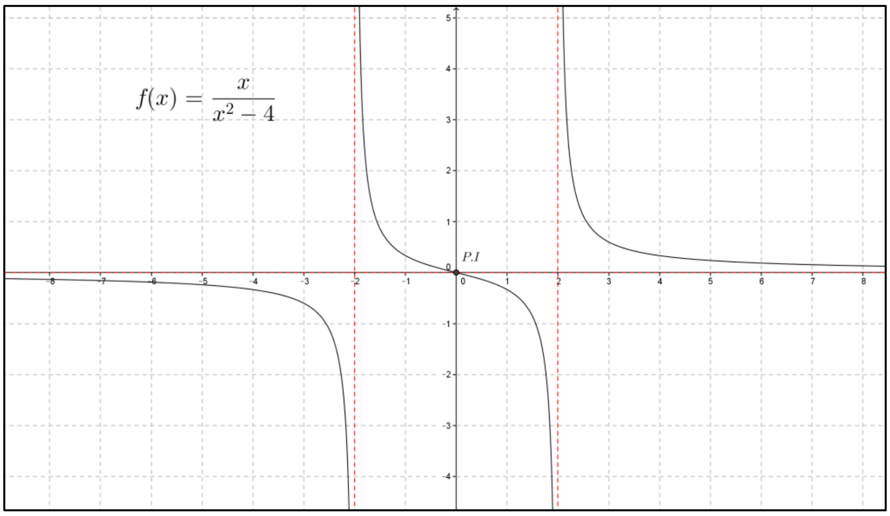
$- - - - - - - (0) + + + + + + + +$ $\quad (2x)$
$+ + + + + + + + + + + + + + + +$ $\quad (x^2+12)$
$+ + + (-2) - - - - - (2) + + + + +$ $\quad (x^2-4)^3$
$- - - (-2) + + (0) - - (2) + + + +$ $\quad f''(x)$

Com a análise acima, concluimos que

f possui C.V.C em $(-2,0) \cup (2,+\infty)$; C.V.C – Concavidade Voltada para Cima
f possui C.V.B em $(-\infty,-2) \cup (0,2)$; C.V.B – Concavidade Voltada para Baixo

$*$ Em $x = 0$ ocorre mudança na direção da concavidade e, portanto, $(0,0)$ é um ponto de inflexão da função f. Embora em $x = -2$ e $x = 2$ ocorre mudança na direção da concavidade, estes não pertencem ao domínio de f. Logo, $(0,0)$ é o único ponto de inflexão de f.

7) *Esboço gráfico*:



1.13 Prova Final – 03 de Dezembro de 2015

Questão 1

a) *Verifique se o existe* $\lim_{x\to 5} \frac{|x-5|}{x-5}$.

b) *Seja* f *definida em* $\mathbb{R}$ *e tal que, para todo* x, $|f(x)-3| \leq 2|x-1|$. *Calcule* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Questão 2

a) *Mostre que a equação* $x^2 = \pi \cos x$ *tem, pelo menos uma raíz real.*

b) *Seja* $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Prove que* $\operatorname{tg} c > c$.

Questão 3

a) *Um triângulo isósceles tem lados iguais a* 3,2; 3,2 *e* 2. *Estime sua área, usando aproximações lineares.*

b) *A função* $f(x) = |x-1|(\log_3 x)$ *é derivável em* $x = 1$? *Em caso afirmativo, determine* $f'(1)$.

Questão 4

a) *Sendo* $f(x) = \log_x 2$, *encontre uma equação para a reta normal à curva* $y = f(x)$ *no ponto de ordenada* 1.

b) *Encontre a derivada da função* $f(x) = x^{\ln x}$.

Questão 5

a) *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \,.\, \ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x,$$

no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Nota: Tome* $\ln 2 = 0{,}69$.

b) *Determine uma equação para a reta normal à curva* $x^3y^3 - 2xy = 6x + y + 1$, *no ponto em que* $x = 0$.

Questão 6

a) *Sendo* $f(x) = \ln[\cos(\operatorname{arcsec} x)]$, *determine* $f'(2)$.

$b)$ *Uma função f tem segunda derivada* $f''(x) = 6(x-1)$. *Encontre a função* f, *sabendo-se que seu gráfico passa pelo ponto* $(2,1)$ *e que nesse ponto ele é tangente à reta* $y = 3x - 5$.

Questão 7

$a)$ *Um dos vértices de um retângulo, que tem por abscissa o número* $\ln 2$, *está situado sobre o gráfico da função* $f(x) = 5\,\mathrm{tgh}\, x$ *e é simétrico dos outros três em relação aos eixos coordenados ou em relação à origem. Determine a área deste retângulo.*

$b)$ *Seja f uma função definida por* $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}, & x = 0. \end{cases}$. *Mostre que f é contínua em* $x = 0$.

Questão 8. Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{4x^2+8}{-2x-2}$, *tendo*

$$f'(x) = -\frac{8(x^2+x-2)}{(-2x-1)^2} \qquad e \qquad f''(x) = -\frac{72}{(2x+1)^3}$$

apontando:

(a) *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*
(b) *Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente e os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
(c) *Os intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

Questão 9. Um pedaço de arame com comprimento l será dobrado para formar um círculo, um quadrado ou ambos (dividindo-se o arame em dois pedaços). Determine como dividir o arame para que a área total contornada seja máxima ou seja mínima.

Questão 10. Uma esfera está inscrita num cubo cuja diagonal cresce à taxa de. $3\,mm/s$. *Com que velocidade estará crescendo o volume da esfera, no instante em que a aresta medir* $\sqrt[4]{3}\,mm$?

$\boldsymbol{Questão\ 1}$

$(a) Verifique\ se\ o\ existe\ \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$; $\quad * |x-5| = \begin{cases} x-5, & x \geq 5 \\ -(x-5), & x < 5 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x \to 5^+} \frac{x-5}{x-5} = \lim_{x \to 5^+} 1 = 1$$

$* Obs: se\ x \to 5^+, então\ x > 5. Logo, |x-5| = x-5$

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{|x-5|}{x-5} = \lim_{x \to 5^-} \frac{-(x-5)}{x-5} = -\lim_{x \to 5^-} \frac{x-5}{x-5} = -\lim_{x \to 5^-} 1 = -1.$$

$* Obs: se\ x \to 5^-, então\ x < 5. Logo, |x-5| = -(x-5)$

$Como\ os\ limites\ laterais\ existe, mas\ são\ diferentes, dizemos\ que\ \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{|x-5|}{x-5}$ $não\ existe.$

Questão 1

(b) *Seja* f *definida em* $\mathbb{R}$ *e tal que, para todo* x, $|f(x) - 3| \leq 2|x - 1|$. *Calcule* $\lim_{x \to 1} f(x)$.

Pela desigualdade modular, temos:

$$-2|x - 1| \leq f(x) - 3 \leq 2|x - 1|$$
$$-2|x - 1| + 3 \leq f(x) \leq 2|x - 1| + 3$$

Se $x \geq 1$, *temos que* $x - 1 \geq 0$ *e, portanto,* $|x - 1| = x - 1$. *Logo,*

$$-2(x - 1) + 3 \leq f(x) \leq 2(x - 1) + 3$$
$$-2x + 5 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

Se $-2x + 5 \leq f(x) \leq 2x + 1$ *quando* x *está próximo de* 1 *pela direita de* 1 (*exceto possivelmente em* 1) *e* $\lim_{x \to 1^+}(-2x + 5) = \lim_{x \to 1^+}(2x + 1) = 3$, *então pelo Teorema do Confronto,*

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3.$$

Se $x < 1$, *temos que* $x - 1 < 0$ *e, portanto* $|x - 1| = -(x - 1)$. *Logo,*

$$2(x - 1) + 3 \geq f(x) \geq -2(x - 1) + 3$$
$$2x + 1 \geq f(x) \geq -2x + 5$$
$$-2x + 5 \leq f(x) \leq 2x + 1$$

Se $-2x + 5 \leq f(x) \leq 2x + 1$ *quando* x *está próximo de* 1 *pela esquerda de* 1 (*exceto possivelmente em* 1) *e* $\lim_{x \to 1^-}(-2x + 5) = \lim_{x \to 1^-}(2x + 1) = 3$, *então pelo Teorema do Confronto, temos*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$$

Como os limites laterais existem e são iguais, isto é, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$, *então* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *existe e* $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$.

Questão 2

(a) *Mostre que a equação* $x^2 = \pi\cos x$ *tem, pelo menos uma raíz real.*

Seja $f(x) = x^2 - \pi\cos x$. *Devemos mostrar que* f *possui pelo menos uma raíz real. Sabendo – se que* $f(0) = -\pi$ *e* $f(\pi) = \pi^2 + \pi$, *temos* $f(0) < 0$ *e* $f(\pi) > 0$.

Como a função f *é constituída por funções polinomial e trigonométrica, ambas contínuas em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,\pi]$ *e* 0 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(\pi)$, *então existe algum* $x \in (0,\pi)$ *tal que* $f(x) = 0$. *(Teorema do Valor Intermediário)*

Como $f(x) = 0$ *para algum* $x \in (0,\pi)$, *então …*

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - \pi\cos x = 0 \therefore x^2 = \pi\cos x \;, \text{para algum } x \in (0,\pi).$$

Com isso mostramos que a equação dada possui pelo menos uma raiz real.

Questão 2

(b) *Seja* $c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Prove que* $\operatorname{tg} c > c$.

Seja $f(c) = \operatorname{tg} c - c$. *Queremos provar que* $f(c) > 0, \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$$f'(c) = \sec^2 c - 1.$$

Como $\sec^2 c > 1, \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *então* $f'(c) > 0$ *em* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

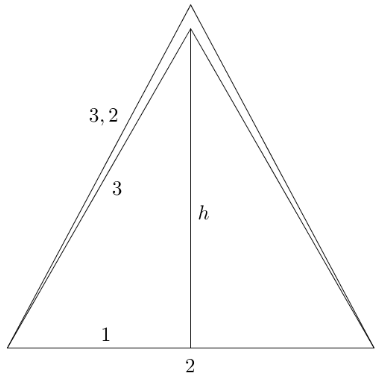
Como $f'(c) > 0$ *em* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *pelo Teste da Primeira Derivada,* f *é crescente no intervalo* $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *e, portanto,* $f(c) > f(0), \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

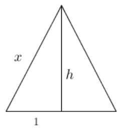
Logo,

$$\begin{gathered} f(c) > f(0) \\ \operatorname{tg} c - c > \operatorname{tg} 0 - 0 \\ \operatorname{tg} c - c > 0 \\ \operatorname{tg} c > c \qquad , \forall c \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{gathered}$$

Questão 3

(a)*Um triângulo isósceles tem lados iguais a* 3,2; 3,2 *e* 2.*Estime sua área, usando aproximações lineares.*





Do triângulo à direita da imagem, temos:

$$x^2 = 1^2 + h^2$$
$$h^2 = x^2 - 1$$
$$h = \sqrt{x^2 - 1}$$

A área do triângulo isósceles com lados iguais medindo C:

$$A = \frac{b \times h}{2} = \frac{2 \times \sqrt{x^2 - 1}}{2}$$
$$A(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

Para $x = 3$, *temos* $A(3) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ u.A.$

$$A'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\ ; \quad A'(3) = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Por aproximação linear ou linearização em $x = 3$, *temos*:

$$L(x) = A(3) + A'(3).(x - 3)$$
$$L(x) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(x - 3)$$

Para $x = 3{,}2$, *temos*:

$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(3{,}2 - 3)$$
$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}(0{,}2)$$
$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4}.\frac{2}{10}$$
$$L(3{,}2) = 2\sqrt{2} + \frac{3\sqrt{2}}{20} = \frac{43\sqrt{2}}{20}\ u.A$$

Logo, a área estimada para o triângulo isósceles acima é $\frac{43\sqrt{2}}{20}\ u.A$

Questão 3

(b) *A função* $f(x) = |x-1|(\log_3 x)$ *é derivável em* $x = 1$? *Em caso afirmativo, determine* $f'(1)$.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\log_3 x, & x > 1 \\ -(x-1)\log_3 x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Como f *é contínua onde está definida, então* f *é contínua em* $(0, +\infty)$.

Se $x > 1$, *então*:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[(x-1)\log_3 x] = \log_3 x + \frac{x-1}{x.\ln 3}$$

Se $0 < x < 1$, *então*:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[-(x-1)\log_3 x] = -\log_3 x - \frac{(x-1)}{x.\ln 3}$$

Logo, uma expressão para derivada da função f *é*:

$$f'(x) = \begin{cases} \log_3 x + \dfrac{x-1}{x.\ln 3}, & x > 1 \\ -\log_3 x - \dfrac{(x-1)}{x.\ln 3}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Analisando a diferenciabilidade em $x = 1$, *temos*:

$$f'_+(1) = \log_3 1 + \frac{1-1}{\ln 3} = 0 + 0 = 0.$$

$$f'_-(1) = -\log_3 1 - \frac{1-1}{\ln 3} = -0 - 0 = 0.$$

Como f *é contínua em* $x = 1$ *e as derivadas laterais existem e são iguais, isto é,* $f'_+(1) = f'_-(1)$, *então dizemos que* f *é diferenciável em* $x = 1$ *e* $f'(1) = 0$.

$\boldsymbol{Quest\tilde{a}o\ 4}$

(a) *Sendo* $f(x) = \log_x 2$ *, encontre uma equação para a reta normal à curva* $y = f(x)$ *no ponto de ordenada* 1.

$$f(x) = 1 \Longrightarrow \log_x 2 = 1 \Longrightarrow 2 = x^1 \therefore x = 2. \quad Ponto\ P(2{,}1)$$

$$f(x) = \log_x 2 = \frac{\ln 2}{\ln x}\ (Mudança\ de\ Base)$$

$$f'(x) = -\frac{\ln 2}{x(\ln x)^2}\ ; \quad f'(2) = -\frac{\ln 2}{2(\ln 2)^2} = -\frac{1}{2\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2^2} = -\frac{1}{\ln 4}.$$

O coeficiente angular da reta normal em $x = 2$ é $m_n = -\dfrac{1}{f'(2)} = \ln 4$.

Equação da reta normal ao gráfico de $f(x)$ *no ponto* $P(2{,}1)$:

$$y - 1 = \ln 4\,(x - 2)$$
$$y = x.\ln 4 - 2.\ln 4 + 1$$
$$y = x.\ln 4 - \ln 16 + 1$$

$\boldsymbol{Questão\ 4}$

(b) $Encontre\ a\ derivada\ da\ função\ f(x) = x^{\ln x}$.

$Domínio\ da\ função\ f$: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

$\ln f(x) = \ln x^{\ln x}$
$\ln f(x) = (\ln x).\ln x$
$\ln f(x) = (\ln x)^2$

$Por\ diferenciação\ logarítmica, temos$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2.\ln x \, . \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = f(x) \left[2.\ln x \, . \frac{1}{x}\right]$$

$$f'(x) = x^{\ln x}[2.\ln x \, . \, x^{-1}]$$

$$f'(x) = 2x^{\ln x - 1}.\ln x$$

***Questão* 5**

(a) *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função*

$$f(x) = \operatorname{sen} x \,.\ln(\operatorname{sen} x) - \operatorname{sen} x$$

no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. ***Nota***: *Tome* $\ln 2 = 0{,}69$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \operatorname{sen} x > 0\}$$
$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \quad com\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Como f é uma composição de função trigonométrica e logarítmica, sendo as trigonométricas definidas em $\mathbb{R}$ e a função composta $\ln(\operatorname{sen} x)$ definida apenas para o logaritmando maior do que. Portanto, a continuidade da função f é definida pelo seu domínio. Logo, para $k = 0$, temos que f é contínua em $(0, \pi)$ e, portanto, f é contínua no intervalo fechado $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1) *Os valores de f nos extremos do intervalo*:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\left[\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) - 1\right] = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{1}{2} - 1\right] = \frac{1}{2}[-\ln 2 - 1] = -\frac{1{,}69}{2} = -0{,}845.$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left[\ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) - 1\right] = 1[\ln 1 - 1] = -1$$

2) *Os valores de f nos números críticos de f em* $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe*"

$$f'(x) = \cos x\,[\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + \operatorname{sen} x\left[\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right] \;;\; \operatorname{sen} x \neq 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$f'(x) = \cos x\,[\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + \cos x$$
$$f'(x) = \cos x \,.\ln(\operatorname{sen} x)$$

Como f é diferenciável em $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ se f possui algum número crítico c nesse intervalo, então $f'(c)$ existe e $f'(c) = 0$. Logo,

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ ou \\ \ln(\operatorname{sen} x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ ou \\ \operatorname{sen} x = 1 \end{cases} \therefore x = \frac{\pi}{2} \;; (\textit{não pertence ao intervalo!})$$

Logo, f não possui números críticos em $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Comparando os valores obtidos, -1 é o valor mínimo absoluto e $-0{,}845$ é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[\pi/6, \pi/2]$.

$Questão$ 5

(b) *Determine uma equação para a reta normal à curva* $x^3y^3 - 2xy = 6x + y + 1$, *no ponto em que* $x = 0$.

Ponto em questão: $P(0, -1)$

Derivando a expressão da curva implicitamente, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(xy)^3 - 2.\frac{d}{dx}(xy) = 6.\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$3(xy)^2[y + xy'] - 2(y + xy') = 6 + y' + 0$$

$$y'[3x(xy)^2 - 2x - 1] = 6 + 2y - 3y(xy)^2$$

$$y' = \frac{6 + 2y - 3y(xy)^2}{3x(xy)^2 - 2x - 1}$$

No ponto $P(0, -1)$, *temos* $y' = -4$. *Logo, o coeficiente angular da reta normal em* $P(0, -1)$ é $m_n = \frac{1}{4}$.

Equação da reta normal à curva em P:

$$y - (-1) = \frac{1}{4}(x - 0)$$
$$y + 1 = \frac{1}{4}x$$
$$y = \frac{1}{4}x - 1$$
$$4y - x + 4 = 0$$

Questão 6

(a) *Sendo* $f(x) = \ln[\cos(\operatorname{arcsec} x)]$, *determine* $f'(2)$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 1\}$$

$$* \operatorname{arcsec} x = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \ln\left[\cos\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]$$

$$f(x) = \ln\frac{1}{x}$$

$$f(x) = -\ln x$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x}$$

$$f'(2) = -\frac{1}{2}.$$

$- -$

** Caso fôssemos derivar pela regra da cadeia, teríamos:*

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsec} x)}.[-\operatorname{sen}(\operatorname{arcsec} x)].\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$f'(x) = -\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arcsec} x)}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\theta = \operatorname{arcsec} x \Longrightarrow \sec\theta = x\ ;\ \ \operatorname{tg}^2\theta = \sec^2\theta - 1 \Longrightarrow \operatorname{tg}^2\theta = x^2 - 1 \therefore \operatorname{tg}\theta = \sqrt{x^2-1}$$

$$f'(x) = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{x}\ ;\ \ f'(2) = -\frac{1}{2}.$$

Questão 6

(b) Uma função f tem segunda derivada $f''(x) = 6(x-1)$. Encontre a função f, sabendo-se que seu gráfico passa pelo ponto $(2,1)$ e que nesse ponto ele é tangente à reta $y = 3x - 5$.

A antiderivada mais geral para $f''(x)$ é:

$$f'(x) = 3(x-1)^2 + C$$

Pelo enunciado temos que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,1)$ é 3. Logo, $f'(2) = 3$.

$$f'(2) = 3(2-1)^2 + C = 3$$
$$3(1)^2 + C = 3$$
$$C = 0$$

$$f'(x) = 3(x-1)^2$$

A antiderivada mais geral para $f'(x)$ é:

$$f(x) = (x-1)^3 + K$$

Como o gráfico de f passa pelo ponto $(2,1)$ então $f(2) = 1$.

$$f(2) = (2-1)^2 + K = 1$$
$$1^2 + K = 1$$
$$K = 0$$

Portanto, $f(x) = (x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Questão 7

$(a)\ f(x) = 5\ \text{tgh}\, x$; *o ponto de abscissa* $x = \ln 2$ *juntamente com os pontos simétricos a ele em relação aos eixos coordenados e à origem, formam os 4 vértices de um retângulo. Determinar a área do retângulo.*

$$f(\ln 2) = 5\ \text{tgh}(\ln 2) = 5.\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = 5.\frac{2 - \frac{1}{2}}{2 + \frac{1}{2}} = 5.\frac{3}{5} = 3.$$

Ponto $A(\ln 2\, , 3)$

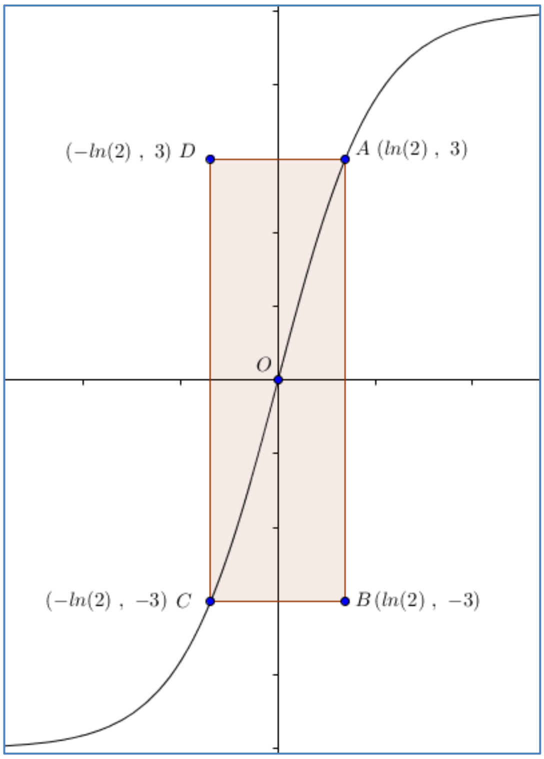
Ponto simétrico em relação ao eixo x : $B(\ln 2\, , -3)$

Ponto simétrico em relação à origem: $C(-\ln 2\, , -3)$

Ponto simétrico em relação ao eixo y: $D(-\ln 2\, , 3)$

Área do retêngulo $ABCD$:

$A_{ABCD} = b \times l = (2 \times \ln 2) \times (2 \times 3) = 12 \ln 2\ u.A$



Questão 7

(b) *Seja f uma função definida por* $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{e}}, & x=0.\end{cases}$ *Mostre que f é contínua em $x=0$.*

Mostrar que uma função é contínua em um número $x=a$ é mostrar que

$$f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

Para tanto, $f(a)$ deve existir e $\lim_{x\to a} f(x)$ deve existir.

Para a função $f(x)$ acima, temos que $f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

$\lim_{x\to 0} f(x)$; *se $x\to 0$, então $x\neq 0$ e, portanto, $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.*

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2};\ \textit{Indeterminação do tipo}\ "\frac{0}{0}"$$

$*$ *Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg} x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sec^2 x}{2}=-\frac{\lim_{x\to 0}\sec^2 x}{\lim_{x\to 0} 2}=-\frac{\sec^2 0}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Como $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ então f é contínua em $x=0$.

Questão 8

Esboce o gráfico da função $f(x)=\dfrac{4x^2+8}{-2x-1}$, *tendo*

$$f'(x)=-\frac{8(x^2+x-2)}{(-2x-1)^2} \quad e \quad f''(x)=-\frac{72}{(2x+1)^3}$$

Domínio da função f: $D(f)=\{x\in\mathbb{R};\, x\neq -1/2\}$
Interseções com os eixos coordenados: $A(0,-4)$

(*a*) *Assíntotas Verticais, Horizontais e Oblíquas*:

$*$ *Verticais* $\rightarrow$ *a reta* $x=a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos* : $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ *ou* $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$

Pela definição de continuidade de uma função em um número $x=a$, *as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Verificamos se a reta* $x=-1$ *é uma assíntota vertical.*

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+}\frac{\overbrace{4x^2+8}^{\substack{12\\ \uparrow}}}{\underbrace{-2x-1}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}}=-\infty \quad e \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-}\frac{\overbrace{4x^2+8}^{\substack{12\\ \uparrow}}}{\underbrace{-2x-1}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}}=+\infty$$

Logo, a reta $x=-1/2$ *é uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$*$ *Horizontais* $\rightarrow$ *a reta* $y=L$ *é uma assíntota horizontal se* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ *ou* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^2+8}{-2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x}{-2}=\lim_{x\to+\infty}-4x=-\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+8}{-2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{8x}{-2}=\lim_{x\to-\infty}-4x=+\infty$$

Logo, não há assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.

$*$ *Oblíquas* $\rightarrow$ *a reta* $y=ax+b$ *é uma assíntota oblíqua se, somente se,* $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

$$f(x)=\frac{4x^2+8}{-2x-1}=-2x+1+\frac{9}{-2x-1}$$
$$f(x)-(-2x+1)=\frac{9}{-2x-1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-2x+1)]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9}{-2x-1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(-2x+1)]=0$$

Logo, a reta $y=-2x+1$ *é uma assíntota oblíqua ao gráfico de* $f(x)$.

***Questão* 8**

(b) *Intervalos de crescimento e decrescimento e pontos extremos relativos*:

$$f'(x) = -\frac{8(x^2 + x - 2)}{(-2x-1)^2}$$

$$\begin{array}{ll} ------(-2)++++++++++(1)------ & -8(x^2+x-2) \\ +++++++++++(-1/2)+++++++++++ & (-2x-1)^2 \\ ------(-2)+++(-1/2)+++(1)----- & f'(x) \end{array}$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, concluimos que

f *é crescente em* $(-2,-1) \cup (-1,1)$ *e* f *é decrescente em* $(-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$.

Em $x = -2$ *temos um ponto de mínimo local (ou relativo) e em* $x = 1$ *temos um ponto de máximo local (ou relativo). Pontos* $B(-2,8)$ *e* $C(1,-4)$

(c) *Concavidade e Pontos de Inflexão*:

$$f''(x) = -\frac{72}{(2x+1)^3}$$

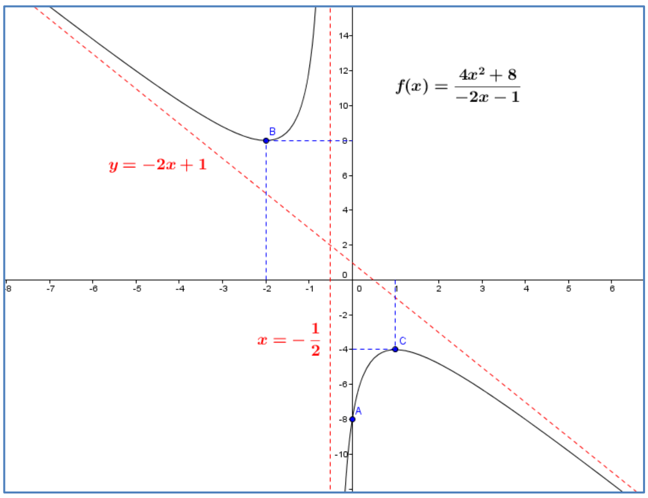
$$+++++++(-1/2)-------\quad f''(x)$$

Pelo estudo do sinal da segunda derivada de f, *concluimos que*

o gráfico de f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty,-1/2)$ *e o gráfico de* f *possui concavidade voltada para baixo em* $(-1/2,+\infty)$.

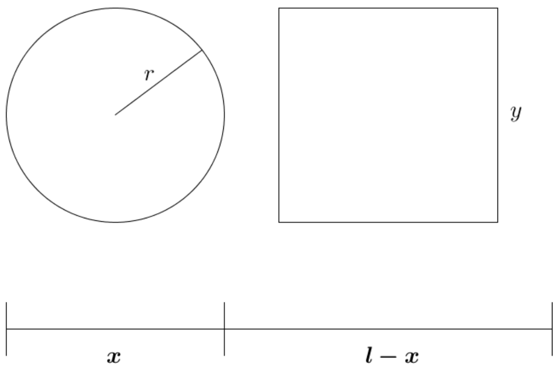
Embora ocorra mudança na direção da concavidade em $x = -1/2$, *o mesmo não pertence ao domínio da função* f *e, portanto, não é ponto de inflexão. Logo, não há pontos de inflexão no gráfico de* $f(x)$.

Esboço Gráfico:



Questão 9

Um pedaço de arame com comprimento l será dobrado para formar um círculo, um quadrado ou ambos (dividindo-se o arame em dois pedaços). Determine como dividir o arame para que a área total contornada seja máxima ou seja mínima.



De todo o comprimento l uma parte x será utilizada para formar o círculo e a parte $(l-x)$ para formar o quadrado. Portanto,

$$P_{círculo} = x \Longrightarrow 2\pi r = x \therefore r = \frac{x}{2\pi}$$
$$P_{quadrado} = l - x \Longrightarrow 4y = l - x \therefore y = \frac{1}{4}(l-x)$$

$$A_{círculo} = \pi r^2 = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi} \; ; \quad A_{quadrado} = y^2 = \frac{1}{16}(l-x)^2$$

$$A_{total} = A_{círculo} + A_{quadrado} = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{1}{16}(l-x)^2 \; ; \quad 0 \le x \le l$$

Como a expressão da área total é uma função polinomial e, portato, contínua no intervalo fechado $[0, l]$, para encontrar os valores extremos absolutos de $A(x)$ utilizamos o Método do Intervalo Fechado.

1) *Valores de A nos extremos do intervalo*:

$A(0) = \frac{l^2}{16}$ (*todo o arame utilizado para formar o quadrado*)
$A(l) = \frac{l^2}{4\pi}$ (*todo o arame utilizado para formar o círculo*)

2) *Valores de A nos números críticos de A em $(0, l)$*:

"*Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe*".

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{(l-x)}{8} = \frac{4x - \pi(l-x)}{8\pi} = \frac{x(4+\pi) - \pi l}{8\pi}$$

Questão 9

Como A é uma função polinomial contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, se A admite algum número crítico c então $A'(c)$ existe e $A'(c) = 0$.

Se A tiver um máximo ou mínimo local em c e se $A'(c)$ existir, então $A'(c) = 0$ (Teorema de Fermat)

$$A'(x) = 0 \Longrightarrow x(4+\pi) - \pi l = 0 \therefore x = \frac{\pi l}{4+\pi}$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, concluimos que o número crítico $\frac{\pi l}{4+\pi}$ está associado a um ponto de mínimo local.

$$A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right) = \frac{\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2}{4\pi} + \frac{1}{16}\left(l - \frac{\pi l}{4+\pi}\right)^2 = \frac{\pi l^2}{4(4+\pi)^2} + \frac{(4l)^2}{16(4+\pi)^2} = \frac{l^2}{(4+\pi)^2}\left[\frac{\pi}{4} + 1\right]$$

$$A\left(\frac{\pi l}{4+\pi}\right) = \frac{l^2}{4(4+\pi)}$$

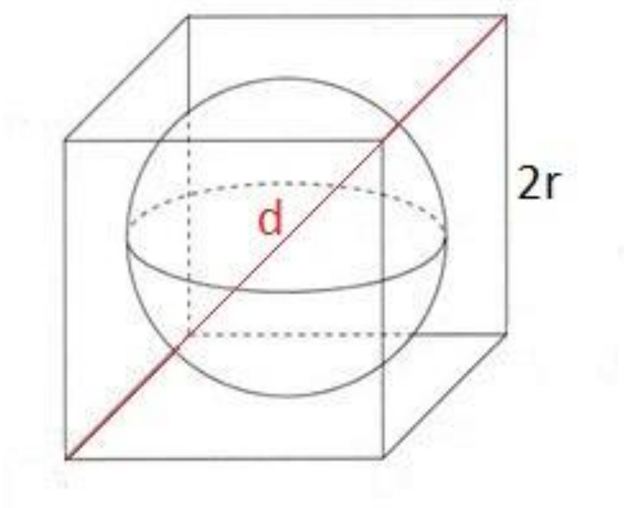
Comparando os valores obtidos, $\frac{l^2}{4(4+\pi)}$ é o valor mínimo absoluto e $\frac{l^2}{4\pi}$ é o valor máximo absoluto do intervalo $[0, l]$.

$*$ Para obtermos a área contornada sendo a máxima possível devemos utilizar todo o arame na confecção do círculo.

$*$ Para obtermos a área contornada sendo a mínima possível devemos utilizar $\frac{\pi l}{4+\pi}$ de comprimento do arame para confeccionar o círculo e $\frac{4l}{4+\pi}$ para formar o quadrado.

Questão 10

Uma esfera está inscrita num cubo cuja diagonal cresce à taxa de 3 mm/s. Com que velocidade estará crescendo o volume da esfera, no instante em que a aresta medir $\sqrt[4]{3}mm$?



$$d = 2r\sqrt{3}$$
$$\frac{dd}{dt} = 2\sqrt{3}.\frac{dr}{dt}$$
$$3 = 2\sqrt{3}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}mm/s$$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dV}{dt} = (4\pi r^2).\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quando $r = \sqrt[4]{3}/2\,mm$, *temos*:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=\frac{\sqrt[4]{3}}{2}} = \left(4\pi\frac{\sqrt{3}}{4}\right).\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{2}mm^3/s$$

O volume da esfera estárá crescendo à taxa de $3\pi/2\ mm^3/s$ *quando o raio dela for* $\sqrt[4]{3}/2\,mm$ *com o raio crescendo a taxa de* $\frac{\sqrt{3}}{2}\ mm/s$.

Capítulo 15

2015.2

2.1 1ª Prova – 12 de Fevereiro de 2016

Questão 1. *Calcule*:

$a)\ \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2};$

$b)\ \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right];$

Questão 2.

$a)$ *Encontre as assíntotas do gráfico da função* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$

$b)\ \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} (2^{\cos x}.\operatorname{tg} x);$

Questão 3.

$a)$ *Determine o valor de* k *a fim de que a função* $f(x)=\begin{cases} \frac{x^4-16}{2-x}, x \neq 2 \\ k^2+12k, x=2 \end{cases}$

seja contínua em $\mathbb{R}$.

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação* $\cos x = x$ *possui uma solução em* $\mathbb{R}$.

Questão 4.

$a)$ *Encontre as assíntotas horizontais do gráfico de* $f(x)=\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}}.$

$b)$ *Determine uma equação para a reta tangente à curva* $y=2\sqrt{x}$ *no ponto* $(1,2)$.

Questão 5.

$a)$ *Estude a continuidade da função* $f(x)=[\![\operatorname{sen} x]\!]$, *se* $x \in [0,\pi]$.

$b)$ *Analise os limites laterais da função* $f(x)=\operatorname{tg} x-|\operatorname{tg} x|$, *em torno de* $x=\frac{\pi}{2}.$

$\textit{Questão 1. Calcule:}$

$a)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}$; *indeterminação tipo* "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{7-x}-2}.\frac{\sqrt{4-x}+1}{\sqrt{4-x}+1}.\frac{\sqrt{7-x}+2}{\sqrt{7-x}+2}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{7-x}+2\right)}{(3-x)\left(\sqrt{4-x}+1\right)};$$

$*$ *Se* $x\to 3$ *então* $x\neq 3$. *Logo*, $(3-x)\neq 0$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{7-x}+2\right)}{(3-x)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{7-x}+2}{\sqrt{4-x}+1}=\frac{\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{7-x}+2\right)}{\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{4-x}+1\right)}=\frac{\lim_{x\to 3}\sqrt{7-x}+\lim_{x\to 3}2}{\lim_{x\to 3}\sqrt{4-x}+\lim_{x\to 3}1}=$$
$$\frac{\sqrt{7-3}+2}{\sqrt{4-3}+1}=\frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{1}+1}=\frac{2+2}{1+1}=\frac{4}{2}=2.$$

$b)\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right];$

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$0\leq \operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\leq 1$$
$$1\leq 1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\leq 2$$

$*$ *Se* $x\to 0^+$, $x>0$ *e, consequentemente*, $\sqrt{x}>0$. *Logo*,

$$\sqrt{x}\leq\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]\leq 2\sqrt{x}$$

Seja $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]$ *e* $h(x)=2\sqrt{x}$. *Então*, $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$.

$*\ \lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=\sqrt{0}=0;$

$*\ \lim_{x\to 0^+}h(x)=\lim_{x\to 0^+}2\sqrt{x}=2\sqrt{0}=0;$

Se $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela direita, exceto possivelmente em* 0, *e* $\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}h(x)=0$ *então, pelo Teorema do Confronto*, $\lim_{x\to 0^+}g(x)=0$.

$$\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\left[1+\operatorname{sen}^2\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right]=0.$$

$\textit{Questão 2.}$

$a)$ *Encontre as assíntotas do gráfico da função* $f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

$*$ *Primeiramente definimos o domínio da função* f.

$D(f)=\{x\in\mathbb{R};4-x^2>0\}$; $4-x^2>0\Rightarrow -2<x<2$
$D(f)=\{x\in\mathbb{R};-2<x<2\};$

Assíntotas Verticais:

$Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ \text{é}\ uma\ ass\acute{\imath}ntota\ vertical\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos,$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Pela\ defini\c{c}\tilde{a}o\ de\ continuidade\ de\ uma\ fun\c{c}\tilde{a}o, as\ ass\acute{\imath}ntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ fun\c{c}\tilde{a}o. Analisando\ o\ dom\acute{\imath}nio\ da\ fun\c{c}\tilde{a}o\ f\ verificamos\ se\ as\ retas\ x = -2\ e\ x = 2\ s\tilde{a}o\ ass\acute{\imath}ntotas\ verticais. Para\ isso\ s\acute{o}\ podemos\ calcular\ \left(devido\ ao\ D(f)\right)\ \lim_{x\to -2^+} f(x)\ e\ \lim_{x\to 2^-} f(x).$

$*\ Se\ x \to -2^+, ent\tilde{a}o\ 4 - x^2 \to 0^+. Portanto,$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(2-x)(2+x)}}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = -2\ \text{é}\ uma\ ass\acute{\imath}ntota\ vertical\ do\ gr\acute{a}fico\ de\ f(x).$

$*\ Se\ x \to 2^-, ent\tilde{a}o\ 4 - x^2 \to 0^+. Portanto,$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{(2-x)(2+x)}}_{\substack{\downarrow \\ 0^+}}} = +\infty$$

$Logo, a\ reta\ x = 2\ \text{é}\ uma\ ass\acute{\imath}ntota\ vertical\ do\ gr\acute{a}fico\ de\ f(x).$

$Ass\acute{\imath}ntotas\ Horizontais:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L\ \text{é}\ uma\ ass\acute{\imath}ntota\ horizontal\ se,$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

$Como\ a\ fun\c{c}\tilde{a}o\ f\ est\acute{a}\ definida\ para\ x \in (-2,2), ou\ seja, n\tilde{a}o\ existe\ Im(f)\ para\ x > 2\ ou\ x < -2. Logo, \lim_{x\to\infty} f(x) \nexists. Portanto,$ **$n\tilde{a}o\ h\acute{a}\ ass\acute{\imath}ntotas\ horizontais$** $no\ gr\acute{a}fico\ de\ f(x).$

$b)\ \lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^-} (2^{\cos x}.\operatorname{tg} x);$

$Pela\ desigualdade\ trigonom\acute{e}trica, temos:$

$$-1 \le \cos x \le 1$$
$$2^{-1} \le 2^{\cos x} \le 2^1$$

$*\ Obs: o\ sentido\ da\ desigualdade\ permanece\ inaltaredo\ porque\ a\ base\ exponencial\ \text{é}\ maior\ do\ que\ 1.$

$$\frac{1}{2} \le 2^{\cos x} \le 2$$

$Se\ x \to \frac{3\pi}{2}^{-}$ $então\ \text{tg}\, x > 0. Logo,$

$$\frac{1}{2}\text{tg}\, x \leq 2^{\cos x}.\text{tg}\, x \leq 2\,\text{tg}\, x$$

$Seja\ f(x) = \frac{1}{2}\text{tg}\, x\,, g(x) = 2^{\cos x}.\text{tg}\, x\ \ e\ h(x) = 2\,\text{tg}\, x\,. Se\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ quando$ $x\ está\ próximo\ de\ \frac{3\pi}{2}\ pela\ esquerda\ e\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} f(x) = +\infty\ e\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} h(x) = +\infty\ então$ $\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}^-}(2^{\cos x}.\text{tg}\, x) = +\infty.$

Questão 3.

$a)\ Determine\ o\ valor\ de\ k\ a\ fim\ de\ que\ a\ função\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-16}{2-x}, x \neq 2 \\ k^2 + 12k, x = 2 \end{cases}$

$seja\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$Reescrevendo\ a\ primeira\ sentença\ da\ função\ f\ ...$

$$\frac{x^4-16}{2-x} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{-(x-2)} = \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{-(x-2)}$$

$Como\ essa\ sentença\ é\ válida\ \forall x \neq 2, então\ (x-2) \neq 0. Logo,$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)(x^2+4), x \neq 2 \\ \quad k^2 + 12k, x = 2 \end{cases}$$

$A\ função\ polinomial\ é\ contínua\ em\ \mathbb{R}, porém, esta\ função\ é\ válida\ apenas\ para$ $x \neq 2. Portanto, f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 2) \cup (2, +\infty). Devemos\ verificar\ a$ $a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = 2\ para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$Dizemos\ que\ uma\ função\ f\ é\ contínua\ no\ número\ a\ se, somente\ se, \lim_{x\to a} f(x) = f(a).$ $Para\ isso, f(a)\ e\ \lim_{x\to a} f(x)\ devem\ existir. Analisando\ em\ x = 2, temos:$

$f(2) = k^2 + 12k$

$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}[-(x+2)(x^2+4)] = \left[\lim_{x\to 2} -(x+2)\right] \times \left[\lim_{x\to 2}(x^2+4)\right] = (-4)(8) = -32$

$Logo, para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 2, devemos\ ter\ \lim_{x\to 2} f(x) = f(2).$

$$-32 = k^2 + 12k$$
$$k^2 + 12k + 32 = 0$$
$$\Delta = 144 - 128 = 16$$
$$k = \frac{-12 \pm 4}{2} \Rightarrow k = -4\ e\ k = -8$$

Logo, para $k=-4$ *ou* $k=-8$, f *é contínua em* $x=2$ *e, consequentemente,* f *é contínua em* $(-\infty,+\infty)$, *ou seja,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *para* $k=-4$ *ou* $k=-8$.

b) Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a equação $\cos x = x$ *possui uma solução em* $\mathbb{R}$.

Seja $f(x)=\cos x - x$. *A função assim definida é um composição de uma função trigonométrica contínua em* $\mathbb{R}$ *e uma função polinomial contínua em* $\mathbb{R}$. *Portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Ainda temos que* $f(0)=1$ *e* $f(\pi)=-(1+\pi)$.

Como f *é uma função contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[0,\pi]$ *e* 0 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(\pi)$, *existe algum* $x\in(0,\pi)$ *tal que* $f(x)=0$.
$f(x)=0 \Rightarrow \cos x - x = 0 \therefore \cos x = x$, *para algum* $x\in(0,\pi)$, *com* $x\in\mathbb{R}$.

Questão 4.

a) Encontre as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x)=\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$D(f)=\{x\in\mathbb{R}; x<-1 \text{ ou } x>1\}$$

Dizemos que a reta $y=L$ *é uma assíntota horizontal se,*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}};$$

$*$ *Se* $x\to+\infty$, *então* $|x|=x$. *Logo,*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{2-0}{\sqrt{1-0}}=2.$$

Portanto, a reta $y=2$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}};$$

$*$ *Se* $x\to-\infty$, *então* $|x|=-x$. *Logo,*

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-4}{-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2+\frac{4}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}-2+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{4}{x}}{\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}1-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{-2+0}{\sqrt{1-0}}=-2$$

Portanto, a reta $y=-2$ *é uma assíntota horizontal ao gráfico de* $f(x)$.

$b)$ *Determine uma equação para a reta tangente à curva* $y = 2\sqrt{x}$ *no ponto* $(1,2)$

Verifica − se que o ponto $P = (1,2)$ *pertence à curva* $y = 2\sqrt{x}$*. Logo, o coeficiente angular* m *da reta tangente à curva no ponto de abscissa* $x = 1$ *é dado por*:

$$m = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2(\sqrt{x}-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right] =$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Equação da reta tangente no ponto $(1,2)$ *e coeficiente angular* $m = 1$:

$$y - 2 = 1(x-1)$$
$$y = x + 1$$

***Questão* 5.**

$a)$ *Estude a continuidade da função* $f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!]$*, se* $x \in [0,\pi]$.

$*$ *Para* $x \in [0,\pi]$*, temos* $0 \le \operatorname{sen} x \le 1$*. Logo,*

$$f(x) = [\![\operatorname{sen} x]\!] = \begin{cases} 0, & se\ x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ 1, & se\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad x \in [0,\pi]$$

Como f *é uma função constante em* $x \in [0,\pi]$ *tal que* $x \neq \frac{\pi}{2}$*, então* f *é contínua em* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$*. Analisando a continuidade em* $x = \frac{\pi}{2}$*, temos* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$ *e* $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$*. Como* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$*, então* f *não é contínua em* $\frac{\pi}{2}$ *e, portanto,* f *é contínua em* $\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

$b)$ *Analise os limites laterais da função* $f(x) = \operatorname{tg} x - |\operatorname{tg} x|$*, em torno de* $x = \frac{\pi}{2}$.

$*$ *Para* $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\operatorname{tg} x > 0$ *e para* $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\operatorname{tg} x < 0$

$*$ *Se* $x \to \frac{\pi^-}{2}$ *, então* $x < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x > 0$ *e, consequentemente,* $|\operatorname{tg} x| = \operatorname{tg} x$*. Logo,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}[\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 0 = 0.$$

$*$ *Se* $x \to \frac{\pi^+}{2}$ *, então* $x > \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x < 0$ *e, consequentemente,* $|\operatorname{tg} x| = -\operatorname{tg} x$*. Logo,*

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}[\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} 2\operatorname{tg} x = -\infty.$$

2.2 1ª Prova – 13 de Fevereiro de 2016

Questão 1. *Calcule*:

$a)$ $\lim_{x \to 0} x^3 . 2^{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$;

$b)$ $\lim_{x \to -1} \left| \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \right|$.

Questão 2.

$a)$ *Calcule as assíntotas verticais dos gráficos da função* $f(x) = \frac{x^3 + 1}{6x^2 - 2x^3}$.

$b)$ *Na Teoria da Relatividade, a massa de uma partícula com velocidade* v é

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_o é *a massa da partícula em repouso e* c, *a velociade da luz. O que acontece se* $v \to c^-$?

Questão 3.

$a)$ *Determine o maior intervalo (ou reunião de intervalos) em que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x + 5, & x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2}, & -3 \leq x \leq 3 \\ 3 - x, & x > 3 \end{cases}$$ é *contínua*.

$b)$ *Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 5$ *possui, pelo menos, duas raízes reais*.

Questão 4.

$a)$ *Calcule os pontos de intersecção das assíntotas da curva* $y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{3x - 2}$.

$b)$ *Determine as equações de todas as retas com coeficiente angular* -1 *que sejam tangentes* à *curva* $y = \frac{1}{x - 1}$.

Questão 5.

$a)$ *Determine* $\lim_{x \to a} ([\![x]\!]^2 + [\![x^2]\!])$, *nos casos em que* $a = 2$ *e* $a = 1{,}5$.

$b)$ *Calcule* $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

$\boldsymbol{Questão\ 1}. Calcule:$

$a)\ \lim_{x\to 0} x^3.2^{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)};$

$$\lim_{x\to 0} x^3.2^{-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0} x^3.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)};$$

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$-1 \le \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \le 1$$

Como $0 < \frac{1}{2} < 1$, *a função exponencial* $\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ *é decrescente. Logo, o sinal da desigualdade inverte.*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{1}$$

Reescrevendo a desigualdade,

$$\frac{1}{2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \le 2$$

$*$ *Obs: Se* $x \to 0^+, x^3 > 0$ *e se* $x \to 0^-, x^3 < 0$. *Então,*

1º *caso:* $x^3 < 0$. *A desigualdade inverte novamente de sentido.*

$$\frac{1}{2}x^3 \ge x^3\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \ge 2x^3$$

$$2x^3 \le x^3\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \le \frac{1}{2}x^3$$

Seja $f(x) = 2x^3, g(x) = x^3\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ *e* $h(x) = \frac{1}{2}x^3$. *Então, se* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela esquerda e,* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} h(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$. *(Teorema do Confronto)*

2º *caso:* $x^3 > 0$. *A desigualdade permanece a mesma.*

$$\frac{1}{2}x^3 \le x^3\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} \le 2x^3$$

Seja $f(x) = \frac{1}{2}x^3, g(x) = x^3\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$ *e* $h(x) = 2x^3$. *Então, se* $f(x) \le g(x) \le h(x)$ *quando* x *está próximo de* 0 *pela direita e,* $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. *(Teorema do Confronto)*

Como $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$, *então* $\lim_{x\to 0} g(x)$ *existe e* $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. *Portanto,*

$$\lim_{x\to 0} x^3.\left(\frac{1}{2}\right)^{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$b)\ \lim\limits_{x\to -1}\left|\dfrac{x^2-x-2}{x+1}\right|$; $(No\ final\ do\ arquivo\ tem\ a\ resolução\ mais\ detalhada)$

$$\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1}\left|\frac{(x+1)(x-2)}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1}\frac{|x+1|.|x-2|}{|x+1|}\ ;$$

$*\ Se\ x\to -1, então\ x\neq -1\ e, portanto, x+1\neq 0\ \Rightarrow |x+1|\neq 0. Logo,$

$$\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|.|x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1}|x-2| = |-1-2| = |-3| = 3.$$

Questão 2

$a)\ Calcule\ as\ assíntotas\ verticais\ dos\ gráficos\ da\ função\ f(x) = \dfrac{x^3+1}{6x^2-2x^3}$;

$$f(x) = \frac{x^3+1}{2x^2(3-x)}\ ;\ \ D(f) = \{x\in\mathbb{R}\,; x\neq 0\ e\ x\neq 3\}\ ou\ D(f) = \mathbb{R}-\{0,3\}$$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ da\ função\ f\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função, as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função. Logo, calculamos\ \lim\limits_{x\to 0} f(x)\ e\ \lim\limits_{x\to 3} f(x).$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{1}}{\underbrace{2x^2}_{0^+}\underbrace{(3-x)}_{3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{1}}{\underbrace{2x^2(3-x)}_{0^+}} = +\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 0\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x).$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{1}}{\underbrace{2x^2}_{18}\underbrace{(3-x)}_{0^-}} = \lim_{x\to 3^+}\frac{\overbrace{x^3+1}^{1}}{\underbrace{2x^2(3-x)}_{0^-}} = -\infty$$

$*\ Logo, a\ reta\ x = 3\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ da\ função\ f(x).$

$b)\ Na\ Teoria\ da\ Relatividade, a\ massa\ de\ uma\ partícula\ com\ velocidade\ v\ é$

$$m = \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$onde\ m_o\ é\ a\ massa\ da\ partícula\ em\ repouso\ e\ c, a\ velociade\ da\ luz. O\ que\ acontece\ se\ v\to c^-?$

$$\lim_{v\to c^-} m = \lim_{v\to c^-} \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}};$$

$* Obs: se\ v \to c^-, então\ \frac{v^2}{c^2} \to 1^-. Logo, \frac{v^2}{c^2} < 1\ e, portanto, \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \to 0^+.$

$$\lim_{v\to c^-} \frac{m_o}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \lim_{v\to c^-} \frac{m_o}{\underbrace{\sqrt{1-v^2/c^2}}_{\downarrow\ 0^+}} = +\infty$$

$Conclusão: Quando\ v \to c^-\ a\ massa\ da\ partícula\ se\ expande\ infinitamente.$

Questão 3

$a)$ $Determine\ o\ maior\ intervalo\ (ou\ reunião\ de\ intervalos)\ em\ que\ a\ função$

$f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -3 \\ \sqrt{9-x^2}, & -3 \le x \le 3 \\ 3-x, & x > 3 \end{cases}$ é $contínua.$

f é $uma\ função\ sentencial, composta\ por\ função\ polinomial\ e\ função\ raíz,$
$cada\ uma\ dessas\ funções\ com\ suas\ particularidades. Logo, f$ é $contínua$
$onde\ cada\ sentença\ for\ contínua, respeitando\ o\ intervalo\ onde\ estão\ definidas.$

$As\ funções\ polinomiais\ (x+5)\ e\ (3-x)\ são\ contínuas\ em\ \mathbb{R}. Porém, como\ estas$
$funções\ são\ válidas, respectivamente, para\ x \in (-\infty,-3)\ e\ x \in (3,+\infty), então\ f$
é $contínua\ em\ (-\infty,-3) \cup (3,+\infty).$

$A\ funçã\ raíz\ \sqrt{9-x^2}$ é $contínua\ onde\ está\ definida, ou\ seja, em\ seu\ domínio. Logo,$
$essa\ função\ está\ definida\ para\ (9-x^2) \ge 0 \Rightarrow -3 \le x \le 3. Como\ esta\ sentença$
é $válida\ para\ x \in [-3,3], então\ f$ é $contínua\ em\ (-3,3).$

$Verificando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = -3\ e\ em\ x = 3, onde\ a\ função\ f(x)$
$muda\ de\ comportamento, temos:$

$Dizemos\ que\ uma\ função\ f$ é $contínua\ num\ número$ a $se, somente\ se,$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$Em\ x = -3, temos:$

$f(-3) = \sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$
$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (x+5) = 3+5 = 8$
$\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(=3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$

$* Como\ \lim_{x\to -3^+} f(x) \neq \lim_{x\to -3^-} f(x)\ então\ \lim_{x\to -3} f(x)\ \nexists.$

$Logo, f\ não$ é $contínua\ em\ x = -3.$

$Em\ x = 3, temos:$

$f(3) = \sqrt{9-(3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$
$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^-} (3-x) = 3-3 = 0$
$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-(3)^2} = \sqrt{9-9} = \sqrt{0} = 0.$

$*\ Como\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x)\ então\ \lim_{x\to 3} f(x) = 0.\ f(3) = \lim_{x\to 3} f(x).$
$Logo, f\ é\ contínua\ em\ x = 3.$

$Reunindo\ os\ resultados, podemos\ concluir\ que\ f\ é\ contínua\ em\ (-\infty,-3) \cup (-3,+\infty).$
$Essa\ é\ a\ maior\ reunião\ de\ intervalos\ onde\ f\ é\ contínua.$

$b)\ Use\ o\ Teorema\ do\ Valor\ Intermediário\ para\ mostrar\ que\ a\ função$
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 5\ possui, pelo\ menos, duas\ raízes\ reais.$

$Calculando\ os\ valores\ de\ f\ para\ x = \{0,1,4\}\ temos:$

$f(0) = 0^3 - 9\times 0^2 + 20\times 0 - 5 = -5\ ;\qquad f(0) = -5$
$f(1) = 1^3 - 9\times 1^2 + 20\times 1 - 5 = 7\ ;\qquad f(1) = 7$
$f(4) = 4^3 - 9\times 4^2 + 20\times 4 - 5 = 64 - 144 + 80 - 5 = -5;\qquad f(4) = -5$

$f\ é\ uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ \mathbb{R}. Logo, f\ é\ contínua\ nos$
$intervalos\ fechados\ [0,1]\ e\ [1,4]\ e\ 0\ é\ um\ número\ entre\ f(0)\ e\ f(1), assim\ como,$
$entre\ f(1)\ e\ f(4), então\ existe\ algum\ \mathrm{c} \in (0,1)\ e\ algum\ \mathrm{d} \in (1,4)\ tais\ que\ f(c) = 0$
$e\ f(d) = 0. Logo, f\ possui, pelo\ menos, duas\ raízes\ reais\ \mathrm{c}\ e\ \mathrm{d}.$

Questão 4

$a)\ Calcule\ os\ pontos\ de\ intersecção\ das\ assíntotas\ da\ curva\ y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2}\ ;$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 2/3\}$$

$Assíntota\ Vertical:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ da\ função\ f\ se$
$ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \quad ou \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função, as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem$
$nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função. Logo, calculamos\ \lim_{x\to 2/3} f(x).$

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{2}{3}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{\sqrt{13}/3}}{\underbrace{3x-2}_{0^+}} = +\infty$$

$*\ Obs: se\ x \to 2/3^+, então\ x > 2/3. Logo, 3x - 2 > 0.$

$Logo, a\ reta\ x = 2/3$ é $uma\ assíntota\ vertical\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$Assíntota\ Horizontal:$

$Dizemos\ que\ a\ reta\ y = L$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ se\ ocorrer\ um\ dos\ seguintes\ casos:$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad ou \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2};$$

$* Obs: se\ x \to +\infty, então\ |x| = x.$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)} =$$
$$\frac{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty} 3 - \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{3-0} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3}.$$

$Logo, a\ reta\ y = 1/3$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2};$$

$* Obs: se\ x \to +\infty, então\ |x| = -x.$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{3x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-3+\frac{2}{x}} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty}\left(-3+\frac{2}{x}\right)} =$$
$$\frac{\sqrt{\lim_{x\to-\infty} 1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to-\infty} -3 + \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{-3+0} = \frac{\sqrt{1}}{-3} = -\frac{1}{3}.$$

$Logo, a\ reta\ y = -1/3$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ do\ gráfico\ de\ f(x).$

$Pontos\ de\ intersecção\ das\ assíntotas\ de\ f(x)\ são: A = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\ e\ B = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right).$

$b)\ Determine\ as\ equações\ de\ todas\ as\ retas\ com\ coeficiente\ angular$ -1 $que\ sejam\ tangentes$ à $curva\ y = \frac{1}{x-1}.$

Precisamos determinar, primeiramente, os pontos da curva $y = \dfrac{1}{x-1}$ *onde a reta tangente possui coeficiente angular* $m = -1$.

O coeficiente angular de uma reta tangente à uma curva é dado pelo valor da função derivada naquele ponto. Logo,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x - 1} - \dfrac{1}{x-1}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - 1 - (x + \Delta x - 1)}{\Delta x (x + \Delta x - 1)(x-1)} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - 1 - x - \Delta x + 1}{\Delta x (x + \Delta x - 1)(x-1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x - 1)(x-1)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x + \Delta x - 1)(x-1)} =$$
$$\frac{-1}{(x-1)^2} \quad \therefore \quad y' = -\frac{1}{(x-1)^2}.$$

$*$ *Onde* $y' = -1$?

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1 \;\Rightarrow\; (x-1)^2 = 1 \therefore x = 0 \text{ e } x = 2.$$

Pontos da curva onde a reta tangente possui inclinação -1: $A = (0,-1)$ *e* $B = (2,1)$.

Equação das retas tangentes nos pontos A *e* B:

$$y_1 - (-1) = -1(x - 0) \qquad y_2 - 1 = -1(x - 2)$$
$$y_1 = -x - 1 \qquad y_2 = -x + 3$$

Questão 5

$a)$ *Determine* $\lim_{x \to a} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket)$, *nos casos em que* $a = 2$ *e* $a = 1{,}5$.

$\lim_{x \to 2} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket)$; *Como* $x = 2 \in \mathbb{Z}$ *vamos analisar os limites laterais!*

$$\lim_{x \to 2^+} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket) = \lim_{x \to 2^+} \llbracket x \rrbracket^2 + \lim_{x \to 2^+} \llbracket x^2 \rrbracket \;;$$

$*$ *Obs: se* $x \to 2^+$, *então* $\llbracket x \rrbracket = 2$, $x^2 \to 4^+$ *e, portanto,* $\llbracket x^2 \rrbracket = 4$. *Logo,*

$$\lim_{x \to 2^+} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket) = \lim_{x \to 2^+} \llbracket x \rrbracket^2 + \lim_{x \to 2^+} \llbracket x^2 \rrbracket = 2^2 + 4 = 4 + 4 = 8.$$

$$\lim_{x \to 2^-} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket) = \lim_{x \to 2^-} \llbracket x \rrbracket^2 + \lim_{x \to 2^+} \llbracket x^2 \rrbracket \;;$$

$*$ *Obs: se* $x \to 2^-$, *então* $\llbracket x \rrbracket = 1$, $x^2 \to 4^-$ *e, portanto,* $\llbracket x^2 \rrbracket = 3$. *Logo,*

$$\lim_{x \to 2^-} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket) = \lim_{x \to 2^-} \llbracket x \rrbracket^2 + \lim_{x \to 2^-} \llbracket x^2 \rrbracket = 1^2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Como $\lim_{x \to 2^+} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket) \neq \lim_{x \to 2^-} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket)$ *então* $\lim_{x \to 2} (\llbracket x \rrbracket^2 + \llbracket x^2 \rrbracket) \nexists$.

$$\lim_{x\to 1,5}([\![x]\!]^2+[\![x^2]\!])=\lim_{x\to 1,5}[\![x]\!]^2+\lim_{x\to 1,5}[\![x^2]\!]\ ;$$

$*\ Obs: se\ x\to 1{,}5, então\ [\![x]\!]=1, x^2\to 2{,}25\ e, portanto, [\![x^2]\!]=2. Logo,$

$$\lim_{x\to 1,5}([\![x]\!]^2+[\![x^2]\!])=\lim_{x\to 1,5}[\![x]\!]^2+\lim_{x\to 1,5}[\![x^2]\!]=1^2+2=1+2=3.$$

$b)\ Calcule\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\ ;$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}.\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}.\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\ ;$$

$*\ Obs: se\ x\to 1, então\ x\neq 1. Logo, (x-1)\neq 0.$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x}+\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}+\lim\limits_{x\to 1}1}=$$
$$\frac{\sqrt{1}+1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}.$$

$- -$

$DETALHAMENTO\ DA\ QUESTÃO\ 1\ ITEM$ b

$$\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right|$$

$Há\ 3\ formas\ de\ resolver\ esse\ limite\ cuja\ função\ é\ modular. A\ primeira\ delas\ é\ analisando\ |x^2-x-2|\ e\ |x+1|\ separadamente\ e, obrigatoriamente, calcular\ os\ limites\ laterais\ em\ x=-1; A\ segunda, simplificar\ a\ expressão\ racional\ e, ainda\ assim, calcular\ os\ limites\ laterais, uma\ vez\ que:$

$$|x+1|=\begin{cases}x+1, & x\geq -1\\ -(x+1), & x<-1\end{cases}, porém, temos\ \left|\frac{x+1}{x+1}\right|=1, x\neq -1.$$

$A\ terceira\ forma\ foi\ apresentanda\ no\ início\ da\ resolução\ considerando\ o\ fator\ |x+1|\ não\ nulo, pois\ |x+1|\to 0, logo\ |x+1|\neq 0.$

1º)

$$\lim_{x\to -1}\left|\frac{x^2-x-2}{x+1}\right|=\lim_{x\to -1}\frac{|x^2-x-2|}{|x+1|}\ ;$$

$$*\ |x^2-x-2|=\begin{cases}x^2-x-2, & x\leq -1\ ou\ x\geq 2\\ -(x^2-x-2), & -1<x<2\end{cases};$$

$$*\ |x+1|=\begin{cases}x+1, & x\geq -1\\ -(x+1), & x<-1\end{cases}$$

$* \, Se \ x \to -1^+, então \ x > -1. Logo, |x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2) \ e \ |x+1| = (x+1).$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x^2 - x - 2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x^2 - x - 2)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} -(x-2)$$
$$= -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$* \, Se \ x \to -1^-, então \ x < -1. Logo, |x^2 - x - 2| = (x^2 - x - 2) \ e \ |x+1| = -(x+1).$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x^2 - x - 2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x^2 - x - 2}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} -(x-2)$$
$$= -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$$Como \ \lim_{x\to -1^+} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1^-} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| \ então \ \lim_{x\to -1} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = 3.$$

$$2^{\underline{o}}) \ \lim_{x\to -1} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1} \frac{|x+1||x-2|}{|x+1|};$$

$$* \, |x+1| = \begin{cases} x+1, & x \geq -1 \\ -(x+1), & x < -1 \end{cases};$$
$$* \, |x-2| = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ -(x-2), & x < 2 \end{cases};$$

$* \, Se \ x \to -1^+, então \ x > -1. Logo, |x+1| = (x+1) \ e \ |x-2| = -(x-2);$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{|x+1||x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x+1)[-(x-2)]}{(x+1)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)(x-2)}{(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1^+} -(x-2) = -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$* \, Se \ x \to -1^-, então \ x < -1. Logo, |x+1| = -(x+1) \ e \ |x-2| = -(x-2);$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{|x+1||x-2|}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^-} \frac{[-(x+1)][-(x-2)]}{-(x+1)} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{-(x+1)} =$$
$$\lim_{x\to -1^-} -(x-2) = -(-1-2) = -(-3) = 3.$$

$$Como \ \lim_{x\to -1^+} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = \lim_{x\to -1^-} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| \ então \ \lim_{x\to -1} \left|\frac{x^2 - x - 2}{x+1}\right| = 3.$$

2.3 2ª Prova – 11 de Março de 2016

Questão 1

a) Para quais valores da constante m *a função* $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x), x \leq 0 \\ mx, \quad x > 0 \end{cases}$ é *derivável?*

b) Onde a reta normal à *elipse* $x^2 - xy + y^2 = 3$, *no ponto* $(-1,1)$ *intercepta a elipse uma segunda vez?*

Questão 2

a) $y(t)$ *satisfaz a equação* $y^2 + ky = 0$, *onde* k é *constante. Mostre que toda reta tangente ao gráfico* é *uma reta horizontal.*

b) A reta normal ao gráfico da função $f(x) = x^{e^{-x^2}}$, *no ponto em que* $x = 1$ *intercepta o eixo das abscissas. Dê a equação da reta paralela ao eixo das ordenadas e que passa por essa intersecção.*

Questão 3

a) Se $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$, *encontre os pontos sobre o gráfico de* f *nos quais a reta tangente* é *horizontal.*

b) Sendo $f(x) = \arccos(\sec(\ln x))$ *determine onde* f é *derivável.*

Questão 4

a) Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{5}}$;

b) Determine uma equação para a reta normal ao gráfico da função $f(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}}$, *no ponto onde a reta tangente* é *horizontal.*

Questão 5

a) Use derivação logarítmica para calcular a derivada da função

$$f(x) = \frac{2^x (\text{cotg}\, x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5}.$$

b) Calcule $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\text{arcsec}(2 + h) - \text{arcsec}(2)}{h}$.

Questão 1

$a)$ *Para quais valores da constante* m *a função* $f(x) = \begin{cases} \text{sen}(2x), & x \leq 0 \\ mx, & x > 0 \end{cases}$ é *derivável?*

A priori, f *é uma função sentencial formada por função trigonométrica composta com polinomial e também formada por uma função polinomial linear, como essas funções são contínuas e diferenciáveis em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua e diferenciável em* $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Para que f *seja derivável em* $x = 0$, *primeiro verificamos se* f *é contínua em* $x = 0$. *Logo,*

$f(0) = \text{sen}(2 \times 0) = \text{sen}(0) = 0.$
$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} mx = m \lim_{x \to 0^+} x = m \times 0 = 0.$
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \text{sen}(2x) = \text{sen}(0) = 0$
$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 0$, *e ainda,* $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$. *Logo,* f *é contínua em* $x = 0$.

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(2x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{x} . \frac{2}{2} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2\,\text{sen}(2x)}{2x};$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{2\,\text{sen}(2x)}{2x} = \lim_{x \to 0^-} 2 \times \lim_{x \to 0^-} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} = 2 \times 1 = 2.$$

$*$ *Obs: Limite fundamental trigonométrico* $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(kx)}{kx} = 1$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{mx - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{mx}{x} = m.$$

Para que f *seja derivável em* $x = 0$, $f'_-(0) = f'_+(0)$. *Portanto,* $m = 2$.
Com isso, concluimos que para $m = 2$ f *é diferenciável em todos os reais.*

$b)$ *Onde a reta normal à elipse* $x^2 - xy + y^2 = 3$, *no ponto* $(-1,1)$ *intercepta a elipse uma segunda vez?* *Ponto* $P = (-1,1)$ *pertence à curva!*

Derivando implicitamente à expressão da elipse, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(3)$$
$$2x - y - xy' + 2yy' = 0$$
$$y'(2y - x) = -(2x - y)$$
$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}$$

No ponto $(-1,1)$, $y'_{(-1,1)} = -\frac{(-2) - 1}{2 - (-1)} = -\frac{(-3)}{3} = 1$. *Esse é o coeficiente angular* m_1 *da reta tangente em* P. *Como as retas tangente e normal são perpendiculares*

$então\ m_1.m_2 = -1.\ Logo, o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ é\ m = -1.$

$Equação\ da\ reta\ normal:$

$$y - 1 = -1(x + 1)$$
$$y = -x$$

$Substituindo\ a\ equação\ da\ reta\ na\ expressão\ da\ elipse, obtemos:$

$$x^2 - x(-x) + (-x)^2 = 3$$
$$x^2 + x^2 + x^2 = 3$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \pm 1$$

$Pontos\ de\ intersecção: P = (-1,1)\ e\ A = (1,-1).$

$Logo, a\ reta\ normal\ em\ (-1,1)\ intercepta\ a\ elipse\ uma\ segunda\ vez\ no\ ponto$ $A = (1,-1).$

Questão 2

$a)\ y(t)\ satisfaz\ a\ equação\ y^2 + ky = 0, onde\ k\ é\ constante. Mostre\ que\ toda$ $reta\ tangente\ ao\ gráfico\ é\ uma\ reta\ horizontal.$

$Mostrar\ que\ toda\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ da\ função\ y(t)\ é\ uma\ reta$ $horizontal, é\ provar\ que\ y'(t) = 0\ para\ todo\ t \in D(y)\ (domínio\ da\ função\ y).$

$Derivando\ implicitamente\ a\ expressão\ dada\ acima, temos:$

$$\frac{d}{dt}(y^2) + \frac{d}{dt}(ky) = \frac{d}{dt}(0)$$

$$2y(t).y'(t) + k.y'(t) = 0$$

$$y'(t)[2y(t) + k] = 0$$
$$y'(t) = 0\ ou\ y(t) = -\frac{k}{2}$$

$Se\ y(t) = -\frac{k}{2}, onde\ k\ é\ uma\ constante, então\ y'(t) = 0, confirmando\ a\ primeira$ $solução\ acima. Portanto, y'(t) = 0, \forall t \in D(y). Com\ isso, concluimos\ que\ toda$ $reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ y(t)\ é\ uma\ reta\ horizontal.$

$b)\ A\ reta\ normal\ ao\ gráfico\ da\ função\ f(x) = x^{e^{-x^2}}, no\ ponto\ em\ que\ x = 1$ $intercepta\ o\ eixo\ das\ abscissas. Dê\ a\ equação\ da\ reta\ paralela\ ao\ eixo\ das$ $ordenadas\ e\ que\ passa\ por\ essa\ intersecção.$ $\quad f(1) = 1 \curvearrowright P = (1,1)$

$$f(x) = x^{e^{-x^2}}$$
$$\ln f(x) = \ln x^{e^{-x^2}}$$
$$\ln f(x) = e^{-x^2}.\ln x$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (-2x)e^{-x^2}.\ln x + e^{-x^2}.\frac{1}{x}$$
$$f'(x) = f(x)\left[-2x.e^{-x^2}.\ln x + \frac{e^{-x^2}}{x}\right]$$
$$f'(1) = f(1)\left[-2.e^{-1}.\ln 1 + \frac{e^{-1}}{1}\right]$$
$$f'(1) = \frac{1}{e}\ (\textit{coeficiente angular da reta tangente } m_1 \textit{ em } x = 1)$$

Coeficiente angular da reta normal $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -e.$

Equação da reta normal:

$$y - 1 = -e(x - 1)$$
$$y = -ex + e + 1$$

Intersecção com o eixo das abscissas $(y = 0)$:

$$0 = -ex + e + 1$$
$$x = \frac{e+1}{e}\ ;\textit{ponto}\ \left(\frac{e+1}{e}, 0\right)$$

Reta paralela ao eixo das ordenadas que passa por esse ponto é a reta $x = \frac{e+1}{e}$.

Questão 3

a) Se $f(x) = 2\cos x + \cos^2 x$, *encontre os pontos sobre o gráfico de* f *nos quais a reta tangente é horizontal.*

A reta tangente é horizontal onde $f'(x) = 0$. *Portanto,*

$$f'(x) = -2\,\text{sen}\,x - 2\,\text{sen}\,x\cos x$$
$$f'(x) = -2\,\text{sen}\,x\,(1 + \cos x)$$
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\,x = 0 \\ \quad ou \\ \cos x = -1 \end{cases} \therefore\ x_1 = k\pi\ \ e\ x_2 = \pi + 2k\pi, com\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Observe que $x_2 \subset x_1$. *Logo, a solução geral é* $x_1 = k\pi$, *com* $k \in \mathbb{Z}$.
$f(x_1) = -1 \Longrightarrow$ *Pontos* $(k\pi, -1)$ *com* $k = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}$ (k *é ímpar*)
$f(x_1) = 3 \Longrightarrow$ *Pontos* $(k\pi, 3)$ *com* $k = 2n, n \in \mathbb{Z}$ (k *é par*)

Esses são os pontos do gráfico de $f(x)$ *onde a reta tangente é horizontal.*

b) Sendo $f(x) = \arccos(\sec(\ln x))$ *determine onde* f *é derivável.*

Primeiramente analisamos o domínio da função f *e observe com atenção!!!*

$1^{\underline{o}}) \ln x$ *está definido para* $x > 0$;
$2^{\underline{o}})\ |\sec x| \geq 1$, *ou seja*, $\sec x \geq 1$ *ou* $\sec x \leq -1$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
$3^{\underline{o}}) D(\arccos x) = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x \leq 1\}$

Compondo as 3 *informações acima, observe que primeiramente o domínio de* f *é restrito à função* $\ln x$, *ou seja*, $x > 0$. *Porém, a função* $\sec x$ *possui imagem* $Im(\sec x) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ *e, portanto, a função* $\arccos(\sec(\ln x))$ *só possui valor definido para* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $\sec(\ln x) = \pm 1$.

Essa análise permite concluir que f *não é diferenciável para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

$*$ *Obs: A função* f *é representada por pontos dispersos, ou seja, não possui qualquer continuidade em algum intervalo aberto. Logo, não há necessidade em derivar a função* f *uma vez que* f *é descontínua em todos os reais.*

Para deixar mais clara essa explicação ...

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - \sec^2(\ln x)}} . \sec(\ln x) . \operatorname{tg}(\ln x) . \frac{1}{x}$$

Lembremos que $\sec^2(\ln x) \geq 1$, *desde que esteja definida, ou seja, para* $x > 0$.
E com isso, observe que a derivada $f'(x)$ *não existe! Portanto,* f *não é derivável para qualquer* $x \in D(f)$.

***Questão* 4**

a) Calcule $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{5}}$;

$*$ *Façamos a substituição* $x = \frac{2}{3}n$. *Se* $x \to \infty$, *então* $n \to \infty$. *Ajustando o limite ...*

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{\frac{4x}{5}} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{8}{15}n} = \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{8}{15}} = \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{8}{15}} =$$
$$\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{8}{15}} = e^{\frac{8}{15}}.$$

$*$ *Obs: Limite fundamental exponencial* $\lim_{n \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$.

b) Determine uma equação para a reta normal ao gráfico da função $f(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}}$, *no ponto onde a reta tangente é horizontal.* $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

Derivando a função composta pela Regra da Cadeia, temos:

$$f'(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}} . \ln 3 . \frac{d}{dx}\left[\frac{\ln x}{x}\right]$$

$$f'(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}} . \ln 3 . \left[\frac{\frac{1}{x} . x - \ln x . 1}{x^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} . 3^{\frac{\ln x}{x}} . \ln 3$$

Onde a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ *é horizontal* $(f'(x) = 0)$ *a reta normal é vertical, cuja equação é* $x = x_0$*, onde* $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \therefore x = e$$

Equação da reta normal é a reta vertical $x = e$.

Questão 5

a) *Use derivação logarítmica para calcular a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5}$.

$$\ln f(x) = \ln \left[\frac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5} \right]$$
$$\ln f(x) = \ln 2^x + \ln(\operatorname{cotg} x)^3 + \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln(x^3 - 1)^5$$
$$\ln f(x) = x . \ln 2 + 3 . \ln(\operatorname{cotg} x) + \frac{1}{2} \ln x - 5 . \ln(x^3 - 1)$$

Por derivação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln 2 - 3 \frac{\operatorname{cossec}^2 x}{\operatorname{cotg} x} + \frac{1}{2x} - 5 \frac{3x^2}{x^3 - 1}$$
$$f'(x) = f(x) \left[\ln 2 - \frac{3}{\operatorname{sen} x . \cos x} + \frac{1}{2x} - \frac{15x^2}{x^3 - 1} \right]$$
$$f'(x) = \frac{2^x (\operatorname{cotg} x)^3 \sqrt{x}}{(x^3 - 1)^5} . \left[\ln 2 - \frac{3}{\operatorname{sen} x . \cos x} + \frac{1}{2x} - \frac{15x^2}{x^3 - 1} \right]$$

b) *Calcule* $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{arcsec}(2 + h) - \operatorname{arcsec}(2)}{h}$.

Esse limite é, em outras palavras, $f'(2)$ *onde* $f(x) = \operatorname{arcsec} x$.

Seja $y = \sec x$ *, façamos a troca entre as variáveis. Então,*

$$x = \sec y \quad , \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Derivando implicitamente, sendo $y = f(x)$*, temos*:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx} \sec(y)$$
$$1 = \sec y . \operatorname{tg} y . y'$$
$$y' = \frac{1}{\sec y . \operatorname{tg} y} \quad ; \operatorname{tg} y > 0 \textit{ no intervalo definido}$$
$$y' = \frac{1}{\sec y . \sqrt{\sec^2 y - 1}}; \quad \sec y = x$$

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$y' = f'(x) = \dfrac{d}{dx}[\mathrm{arcsec}\, x]$

$f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{4-1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

Logo,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mathrm{arcsec}(2+h) - \mathrm{arcsec}(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2) = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

2.4 2ª Prova – 12 de Março de 2016

Questão 1

$a)$ *Use a definição de derivada para mostrar que a curva* $y = \sqrt{x}$ *apresenta reta tangente na origem.*

$b)$ *Tome* $y = \operatorname{arcsec} x$ *, com* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *ou* $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$ *e estabeleça uma fórmula para calcular* $\frac{dy}{dx}$.

Questão 2

$a)$ *Dada a função* $f(x) = \log_2[\operatorname{arcsen}(x^2)] . \frac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12}$*, determine o valor de* k*, de modo que* $f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^k$.

$b)$ *A função* $f(x) = \begin{cases} x, -1 \leq x < 0 \\ \operatorname{tg} x \,, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$ *é diferenciável em* $x = 0$?

Questão 3

$a)$ *Use derivação logarítmica para determinar o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de* $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$*, no ponto em que* $x = 1$.

$b)$ *Suponha que* f *seja uma função injetiva, derivável e que sua função inversa* f^{-1}*, seja também derivável. Se* $f(2) = 10$ *e* $f'(2) = \frac{3}{5}$*, encontre* $[f^{-1}]'(10)$.

Questão 4

$a)$ *Encontre equações para as duas retas que passam pela origem e são tangentes à curva* $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$.

$b)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{10}{x}\right)^x$.

Questão 5

$a)$ *Há uma reta que tangencia o gráfico de* $f(x) = 2^{\log_3 x} . \ln 3$*, no ponto de abscissa* $x = 1$*. Tal reta intercepta o eixo-y num ponto cuja ordenada é dada por* $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$*. Determine essa ordenada.*

$b)$ *Sendo* $f(x) = x^{e^{x^e}}$*, calcule* $f'(x)$.

Questão 1

a) Use a definição de derivada para mostrar que a curva $y = \sqrt{x}$ *apresenta reta tangente na origem.*

$$y = f(x) = \sqrt{x} \ ; \quad D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$

Como a função f *está definida para* $x \geq 0$*, temos as seguintes considerações:*

1) $f(0) = 0$ *e* $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$
2) $f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$. *Logo,* f *é contínua à direita de zero!*

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

A derivada de uma função no ponto $x = a$ *é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de* $f(x)$ *em* $x = a$. *Matematicamente, esse coeficiente angular* $m = f'(a) = \operatorname{tg} \alpha$ *, onde* α *é o ângulo formado entre a reta e a direção positiva do eixo das abscissas.*

Logo, $m = f'_+(0) \to +\infty$*, então* $\operatorname{tg} \alpha \to \infty$ *e, portanto,* $\alpha \to 90°$ *ou* $\frac{\pi}{2}$.
Como a função f *é contínua à direita de zero e* $\lim_{x \to 0^+} |f'(x)| = \infty$*, então* f *admite reta tangente vertical em* $x = 0$ *e essa reta é dada pela equação* $x = 0$.

b) Tome $y = \operatorname{arcsec} x$ *, com* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *ou* $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$ *e estabeleça uma fórmula para calcular* $\frac{dy}{dx}$.

$$y = \operatorname{arcsec} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

Derivando implicitamente a expressão em relação à x*, temos:*

$$\frac{d}{dx}[\sec y] = \frac{d}{dx}(x)$$
$$\sec y \,.\, \operatorname{tg} y \,.\, \frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \,.\, \operatorname{tg} y}$$

$*$ *Como* $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ *ou* $\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{2}$, *1º e 3º quadrante, respectivamente, logo* $\operatorname{tg} y > 0$.

$$\operatorname{tg}^2 y + 1 = \sec^2 y \Rightarrow \operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$*$ $\sec y = x$ *e, portanto,*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Questão 2

$a)$ *Dada a função* $f(x) = \log_2[\text{arcsen}(x^2)].\dfrac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12}$, *determine o valor de* k, *de modo que* $f'\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^k$.

$*$ *Seja* $u = x^2; v = \text{arcsen}\, u$ *e* $f(v) = \dfrac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12}.\log_2 v$. *Pela Regra da Cadeia,*

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln 2)\pi\sqrt{3}}{12}.\frac{1}{v.\ln 2}.\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.(2x)$$

$$f'(x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.\frac{1}{\text{arcsen}(x^2)}.\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}(2x)$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.\frac{1}{\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)}.\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}.(\sqrt{2})$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}.\frac{6}{\pi}.\frac{2}{\sqrt{3}}.\sqrt{2}$$

$$f'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} = 2^k \therefore k = \frac{1}{2}$$

$b)$ *A função* $f(x) = \begin{cases} x, -1 \leq x < 0 \\ \text{tg}\, x, 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ *é diferenciável em* $x = 0$?

$*$ *Primeiro verificamos se* f *é contínua em* $x = 0$ *pois, só então poderemos analisar a diferenciabilidade de* f *em* $x = 0$.

1) $f(0)$ *está definido;* $f(0) = 0$

2) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \text{tg}\, x = \text{tg}\, 0 = 0$.

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *existe* ; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

3) $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *e, portanto,* f *é contínua em* $x = 0$.

Analisando a diferenciabilidade de f *em* $x = 0$, *temos:*

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^-} 1 = 1.$$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{tg}\, x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\text{sen}\, x}{x}.\frac{1}{\cos x}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}\, x}{x} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Logo, como f é contínua em $x = 0$ e as derivadas laterais existem e são iguais, $f'_-(0) = f'_+(0)$, então f é diferenciável em $x = 0$ e $f'(0) = 1$.

Questão 3

a) *Use derivação logarítmica para determinar o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$, no ponto em que $x = 1$.*

$\ln f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
$\ln f(x) = \ln x \,.\, \ln(\operatorname{sen} x)$
Por derivação logarítmica, temos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) + \ln x \,.\, \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) + \ln x \,.\, \operatorname{cotg} x\right]$$

$$f'(x) = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln(\operatorname{sen} x) + \ln x \,.\, \operatorname{cotg} x\right]$$

$$f'(1) = (\operatorname{sen} 1)^{\ln 1}\left[\frac{1}{1}\ln(\operatorname{sen} 1) + \ln 1 \,.\, \operatorname{cotg} 1\right] \;\; ; \ln 1 = 0 \;\; e \; (\operatorname{sen} 1)^0 = 1$$

$$f'(1) = \ln(\operatorname{sen} 1)$$

Portanto, o coeficiente angular da reta normal em $x = 1$ é $m_N = -\frac{1}{f'(1)}$. Logo,

$$m_N = -\frac{1}{\ln(\operatorname{sen} 1)}.$$

b) *Suponha que f seja uma função injetiva, derivável e que sua função inversa f^{-1}, seja também derivável. Se $f(2) = 10$ e $f'(2) = \frac{3}{5}$, encontre $[f^{-1}]'(10)$.*

Se f admite função inversa, então $f^{-1}(f(x)) = x$. Pelo teorema da derivada da função inversa, temos:

$$[f^{-1}]'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$[f^{-1}]'(f(x)) = [f^{-1}]'(10) \Leftrightarrow f(x) = 10$. *Logo, para $x = 2$, temos $f(2) = 10$.*
Consequentemente, obtemos ...

$$[f^{-1}]'(f(2)) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$[f^{-1}]'(10) = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$[f^{-1}]'(10) = \frac{5}{3}$$

Questão 4

a) *Encontre equações para as duas retas que passam pela origem e são tangentes à curva* $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$.

Precisamos determinar os pontos onde essa reta tangencia a curva dada acima.

Equação da reta que passa pela origem $(0,0)$:

$$y - 0 = m(x - 0)$$
$$y = mx$$

Onde m é o coeficiente angular da reta e é dado pelo valor da derivada no ponto em que essa reta tangencia a curva. Logo, derivando implicitamente a expressão da curva, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(4x) + \frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(3) = \frac{d}{dx}(0)$$
$$2x - 4 + 2y.y' + 0 = 0$$
$$y' = \frac{2 - x}{y}$$

$\rightarrow$ *Substituindo* $m = y'$ *na equação da reta ...*

$$y = \frac{(2 - x)}{y}x$$
$$y^2 = 2x - x^2$$
$$y^2 + x^2 = 2x$$

$*$ *Pela expressão da curva* $y^2 + x^2 = 4x - 3$.

$$4x - 3 = 2x$$
$$2x = 3$$
$$x = \frac{3}{2}$$

$y^2 = 2x - x^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \therefore y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pontos de tangencia: $A = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *e* $B = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Pela equação da reta que passa pela origem, temos $m = \frac{y}{x}$. *Nos pontos A e B,* *temos* $m_A = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *e* $m_B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Equação das retas tangentes:

$$y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x \quad e \quad y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$b)$ *Calcule* $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x.$

$*$ *Seja* $x = 10n$. *Se* $x \to +\infty$, *então* $n \to +\infty$. *Ajustando o limite, temos*:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{10}{10n}\right)^{10n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{10};$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{10} = \left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{10} = e^{10}.$$

$*$ *Obs: Limite Fundamental Exponencial* $\lim_{n\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

***Questão* 5**

$a)$ *Há uma reta que tangencia o gráfico de* $f(x) = 2^{\log_3 x}.\ln 3$, *no ponto de abscissa* $x = 1$. *Tal reta intercepta o eixo-y num ponto cuja ordenada é dada por* $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$. *Determine essa ordenada.*

$f(1) = 2^{\log_3 1}.\ln 3 = 2^0.\ln 3 = \ln 3$. *Ponto* $P = (1, \ln 3)$

$f'(x) = 2^{\log_3 x}.\dfrac{1}{x.\ln 3}.\ln 2.\ln 3$

$f'(x) = 2^{\log_3 x}.\dfrac{\ln 2}{x}$; $\quad f'(1) = \ln 2$

Equação da reta tangente em $P = (1, \ln 3)$:

$y - \ln 3 = \ln 2\,(x - 1)$

$y = \ln 3 + x.\ln 2 - \ln 2$

Em $x = 0$ (*interseção com o eixo y*), *temos* $y = \ln 3 - \ln 2 = \ln\left(\frac{3}{2}\right).$

$b)$ *Sendo* $f(x) = x^{e^{x^e}}$, *calcule* $f'(x)$.

$\ln f(x) = \ln(x)^{e^{x^e}}$

$\ln f(x) = e^{x^e}\ln x$

Pela diferenciação logarítmica, encontramos a seguinte expressão:

$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = e^{x^e}(ex^{e-1}).\ln x + e^{x^e}.\dfrac{1}{x}$

$f'(x) = f(x).e^{x^e}\left[ex^{e-1}\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$

$f'(x) = x^{e^{x^e}}e^{x^e}\left[ex^{e-1}.\ln x + \dfrac{1}{x}\right]$, *ou ainda*, $f'(x) = x^{e^{x^e}-1}.e^{x^e} + e^{x^e+1}x^{e^{x^e}+e-1}\ln x$

2.5 3ª Prova – 08 de Abril de 2016

Questão 1

a) *Um triângulo* é *definido pelos vértices* $V_1(0,0), V_2(50,0)$ *e* $V_3(0,30)$. *O vértice* V_2 *se move para a esquerda a uma taxa de* $2\,m/h$ *e o vértice* V_3 *se move para cima a uma taxa de* $3\,m/h$.

i. Determine a que taxa a área cresce após $5h$.
ii. Em que momento a área para de crescer?

b) *Um incêndio em um campo aberto se alastra em forma de círculo. O raio do círculo aumenta à razão de* $1\,m/min$. *Determine a taxa à qual a área incendiada está aumentando, quand o raio é de* 20 *metros*.

Questão 2.

a) *Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de tinta de* $0{,}01cm$ *a uma semi-esfera com diâmetro de* 100 *metros*.

b) *Use aproximação linear para estimar* $\sqrt{99{,}8}$.

Questão 3.

a) *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x}$;

b) *Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de* $y = e^x \operatorname{sech} x$, *no ponto onde* $x = 0$.

Questão 4.

a) *Determine os números críticos da função* $f(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x$ *que estão no intervalo* $[0,2\pi]$ *e, em seguida, determine os valores de máximo e mínimo absolutos da função nesse intervalo*.

b) *Se* $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2$, *ache os valores máximo e mínimo absolutos de* f *no intervalo* $[0,9]$.

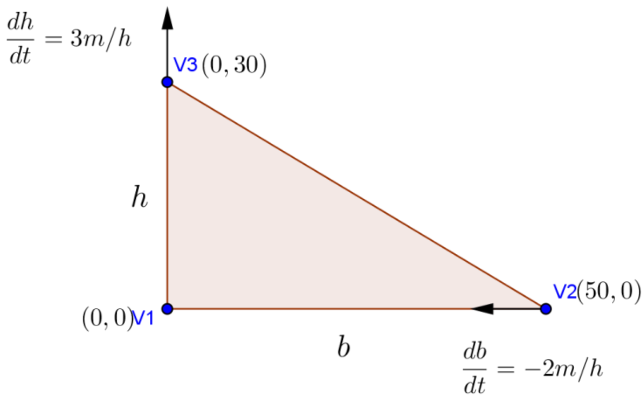
Questão 5.

a) *Demonstre a identidade* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

b) *Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função* $f(x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$ *não possui mais que duas raízes reais*.

Questão 1

a) Um triângulo é definido pelos vértices $V_1(0{,}0), V_2(50{,}0)$ *e* $V_3(0{,}30)$. *O vértice* V_2 *se move para a esquerda a uma taxa de* $2\,m/h$ *e o vértice* V_3 *se move para cima a uma taxa de* $3\,m/h$.



i. Determine a que taxa a área cresce após $5h$.

$$A = \frac{1}{2} b \times h$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{db}{dt}.h + b.\frac{dh}{dt}\right]$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}[-2h + 3b]$$

$*$ *Após* $5h, b = 50 - 2 \times 5 = 40m$ *e* $h = 30 + 3 \times 5 = 45m$. *Logo,*

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\substack{b=60m \\ h=45m}} = \frac{1}{2}[-2 \times 45 + 40 \times 3] = \frac{1}{2}[-90 + 120] = \frac{1}{2}[30] = 15\,m^2/h$$

$*$ *A área do triângulo cresce à taxa de* $15m^2/h$ *após* $5h$.

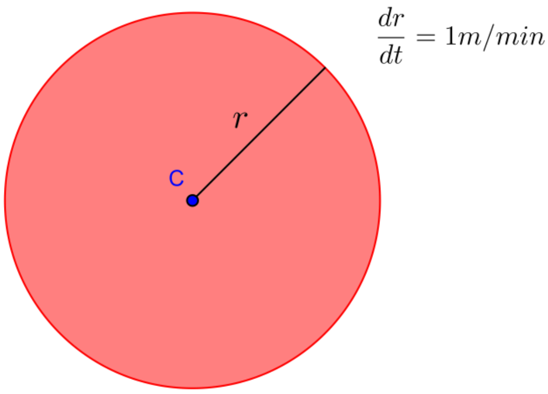
ii. Em que momento a área para de crescer?

A área para de crescer quando $\frac{dA}{dt} = 0$. *Pela expressão inicial, obtemos:*

$$\frac{db}{dt}.h = -b.\frac{dh}{dt}$$
$$-2h = -3b$$
$$h = \frac{3}{2}b$$
$$h(t) = 30 + 3t\ ;\ \ b(t) = 50 - 2t$$
$$30 + 3t = \frac{3}{2}(50 - 2t)$$
$$30 + 3t = 75 - 3t$$
$$6t = 45$$

$$t = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7{,}5h \ ou \ 7h30min$$

$b)$ *Um incêndio em um campo aberto se alastra em forma de círculo. O raio do círculo aumenta à razão de 1 m/min. Determine a taxa à qual a área incendiada está aumentando, quand o raio é de 20 metros.*



$$A = \pi r^2$$
$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r . 1$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r$$
$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=20m} = 40\pi \, m^2/min$$

$*$ *A área incendiada está aumentando à taxa de* $40\pi m^2/min$ *quando o raio é de* 20 *metros*.

***Questão* 2.**

$a)$ *Use diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de tinta de* 0,01*cm a uma semi − esfera com diâmetro de* 100 *metros*.

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3$$
$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$$
$$dV = 2\pi r^2 dr = 2\pi(50m)^2.(10^{-4}m) = 2\pi.(0{,}25) = \frac{\pi}{2}m^3$$

Para pequenas variações temos $\Delta V \approx dV$. *Logo, serão necessários* $\frac{\pi}{2}m^3$ *de tinta para aplicar uma camada de* 0,01*cm a uma semi − esfera com diametro de* 100*m*

$b)$ *Use aproximação linear para estimar* $\sqrt{99{,}8}$.

A aproximação linear ou linearização de $f(x) = \sqrt{x}$ *em* $a = 100$ *é dada pela expressão:*

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

$Onde\ f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.Então\ f'(a) = f'(100) = \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20}.$

$$L(x) = \sqrt{100} + f'(100)(x - 100)$$
$$L(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$$

$Queremos\ estimar\ pela\ linearização, o\ valor\ de\ \sqrt{99{,}8}, ou\ seja,$

$$L(99{,}8) = 10 + \frac{1}{20}(99{,}8 - 100) = 10 - \frac{0{,}2}{20} = 10 - 0{,}01 = 9{,}99$$

$Logo, \sqrt{99{,}8} \approx L(99{,}8) = 9{,}99.$

Questão 3.

$a)\ Calcule\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{senh} x}{e^x};$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{senh} x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x} - 1}{2e^{2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}(2)};$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right)}{e^{2x}(2)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to+\infty} 1 - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{2x}}\right] = \frac{1}{2}[1 - 0] = \frac{1}{2}.$$

$b)\ Encontre\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ y = e^x \operatorname{sech} x, no\ ponto\ onde\ x = 0.$

$Quando\ x = 0, temos\ o\ ponto\ P = (0{,}1)\ no\ gráfico\ de\ y = e^x \operatorname{sech} x.$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \operatorname{sech} x + e^x(-\operatorname{sech} x \,.\, \operatorname{tgh} x)$$
$$\frac{dy}{dx} = e^x \operatorname{sech} x\,(1 - \operatorname{tgh} x)\ ;\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = e^0 \operatorname{sech} 0\,(1 - \operatorname{tgh} 0) = 1$$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ em\ P(0{,}1):$

$$y - 1 = 1(x - 0)$$
$$y = x + 1$$

Questão 4.

$a)\ Determine\ os\ números\ críticos\ da\ função\ f(x) = 2\cos x - 2\operatorname{sen} 2x\ que\ estão\ no\ intervalo\ [0{,}2\pi]\ e, em\ seguida, determine\ os\ valores\ de\ máximo\ e\ mínimo\ absolutos\ da\ função\ nesse\ intervalo.$

$A\ função\ f$ é $uma\ composição\ de\ funções\ trigonométricas\ contínuas\ e\ deriváveis\ em\ \mathbb{R}\ e, portanto, f$ é $contínua\ em\ \mathbb{R}. Logo, f$ é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [0,2\pi]. Podemos\ então\ utilizar\ o\ método\ do\ intervalo\ fechado\ para\ determinar\ os\ valores\ extremos\ absolutos\ da\ função\ f\ neste\ intervalo\ incluindo\ os\ números\ críticos\ da\ função.$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1. Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo:$

$f(0) = 2\cos 0 - 2\,\mathrm{sen}\, 0 = 2 - 0 = 2$
$f(2\pi) = 2\cos 2\pi - 2\,\mathrm{sen}\, 4\pi = 2 - 0 = 2$

$2. Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ de\ f\ em\ (0,2\pi):$

"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou\ f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$"

$Como\ a\ função\ f\ em\ questão$ é $diferenciável\ em\ \mathbb{R}, se\ f\ possui\ algum\ número\ crítico\ c\ em\ (0,2\pi)\ então\ f'(c)\ existe\ e\ f'(c) = 0.$

$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}\, x - 4\cos 2x$
$f'(x) = -2\,\mathrm{sen}\, x - 4(1 - 2\,\mathrm{sen}^2 x)$
$f'(x) = -2(-4\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x + 2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -4\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x + 2 = 0$

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{-8} = \frac{1 \mp \sqrt{33}}{8}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)\ \ e\ \ x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

$*\ Obs: considerando\ o\ intervalo\ (0,2\pi)\ a\ função\ seno\ admite\ 2\ arcos\ com\ a\ mesma\ imagem, ou\ seja, há\ 4\ números\ críticos\ no\ intervalo\ (0,2\pi). São\ eles:$

$$x_1 = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right) \qquad x_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{33}}{8}\right)$$

$$x_3 = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)\ e\ x_4 = 2\pi + \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{33}}{8}\right)$$

$*\ Obs2: Lembre-se\ do\ conjunto\ imagem\ da\ função\ \arcsin x\ \ para\ interpretar\ como\ apareceram\ \pi\ e\ 2\pi\ na\ composição\ das\ respostas!$

$$\cos x_1 = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{8}\ ;\ \cos x_2 = -\frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{8}$$
$$\cos x_3 = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}\ ;\cos x_4 = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}$$

$f(x) = 2\cos x - 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x$
$f(x) = 2\cos x\,(1 - 2\,\mathrm{sen}\,x)$

$$f(x_1) = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right) = \frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 - \sqrt{33}\right) \quad * f(x_1) < 0$$

$$f(x_2) = -\frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 + \sqrt{33}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{30 - 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 - \sqrt{33}\right) \quad * f(x_2) > 0$$

$$f(x_3) = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 + \sqrt{33}\right) \quad * f(x_3) < 0$$

$$f(x_4) = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{4}\left(1 - \frac{1 - \sqrt{33}}{4}\right) = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 + \sqrt{33}\right) \quad * f(x_4) > 0$$

Pelos valores obtidos acima, podemos concluir que $f(x_3) < f(x_1) < 0$. *E, com* $f(0) = f(2\pi) = 2$, *concluimos que* $f(x_3)$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

Dos valores positivos, temos $f(x_2)$ *e* $f(x_4)$, *onde* $f(x_4) > f(x_2)$. *Resta saber se* $f(x_4) > 2$. *Logo,*

$$\frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{16}\left(3 + \sqrt{33}\right);\ \ 8 < \left(3 + \sqrt{33}\right) < 9\ ;\ 6 < \sqrt{30 + 2\sqrt{33}} < 7$$

Logo,

$$48 < \sqrt{30 + 2\sqrt{33}}\,\left(3 + \sqrt{33}\right) < 63$$

$$3 < \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}\,\left(3 + \sqrt{33}\right)}{16} < \frac{63}{16}$$

Portanto, $f(x_4) > 2$ *e, por isso,* $f(x_4)$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

b) Se $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 2$, *ache os valores máximo e mínimo absolutos de* f *no intervalo* $[0,9]$.

A função f *é uma composição das funções racional e constante, contínuas no intervalo fechado* $[0,9]$ *e, portanto,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,9]$. *Logo, podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de* f.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo.*

$f(0) = \sqrt[3]{1} + 2 = 3$
$f(9) = \sqrt[3]{64} + 2 = 6$

2. *Os valores de f nos números críticos de f no intervalo* $(0,9)$.

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

Note que $f'(x) = 0$ não possui solução para $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, $f'(x)\nexists$ para $x = 1$ e, como $1 \in (0,9)$ então 1 é um número crítico de f.

$f(1) = \sqrt[3]{0} + 2 = 2$

Comparando os resultados obtidos, concluimos que $f(9) = 6$ é o valor máximo absoluto e $f(1) = 2$ é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[0,9]$.

***Questão* 5.**

a) Demonstre a identidade $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{x-1}{x+1}\right] - 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\sqrt{x}\right]$$

$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2-(x-1)^2}}\left[\frac{2}{(x+1)^2}\right] - \frac{2}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} - \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$$

Teorema: Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a,b), então f é constante em (a,b). Ou seja, $f(x) = C$ em (a,b), onde C é uma constante.

Nesse caso, temos que $f'(x) = 0$ para todo x no intervalo $(0,+\infty)$, então f é constante em $(0,+\infty)$. Calculando o valor de f para $x = 0$, por exemplo, obtemos o valor C, tal que:

$$f(0) = \operatorname{arcsen}(-1) - 2\operatorname{arctg} 0 = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2} = C$$

$$\textit{Portanto, } f(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} = -\frac{\pi}{2}$$

$b)$ *Use o Teorema de Rolle para mostrar que a função* $f(x) = \operatorname{senh}^2 x + \cosh^2 x$ *não possui mais que duas raízes reais.*

Em outras palavras, "Mostre que $f(x)$ *possui no máximo 2 raízes reais"*

$*$ *Suponhamos que* f *possui 3 raízes reais,* a, b *e* c *tais que* $f(a) = f(b) = f(c) = 0$; *Com* $a \neq b, a \neq c$ *e* $b \neq c$.

Como f é *uma função contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e* $f(a) = f(b)$ *e* $f(b) = f(c)$, *então existe algum* d $\in (a,b)$ *e* e $\in (b,c)$ *tal que* $f'(\mathrm{d}) = 0$ *e* $f'(\mathrm{e}) = 0$, *com* $d \neq e$. *Ou seja,* $f'(x)$, *por essa hipótese, possui 2 raízes reais.*

$f'(x) = 2 \operatorname{senh} x \,.\, \cosh x + 2 \cosh x \,.\, \operatorname{senh} x$
$f'(x) = 4 \operatorname{senh} x \cosh x \quad ; * \cosh x \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{senh} x = 0 \therefore x = 0.$

Logo, $f'(x)$ *só possui 1 raíz real* $(x = 0)$ *e, por contradição,* f *possui no máximo 2 raízes reais.*

2.6 3ª Prova – 09 de Abril de 2016

Questão 1

$a)$ *Um triângulo isósceles tem os lados iguais, com* $15cm$ *cada um. Se o ângulo entre* θ *entre eles varia* $2°$ *por minuto, determine a taxa de variação da área do triângulo, quando* $\theta = 30°$.

$b)$ *Um velocista corre em uma pista circular de raio* 100 *metros, a uma velocidade angular constante de* $1°$ *por segundo. Seu amigo está em pé a uma distância de* $200m$ *do centro da pista. Quão rápido está variando a distância entre os amigos, quando* $\theta = 90°$?

Questão 2

$a)$ *O raio de um cilindro circular reto de altura igual a* 2 *metros, mede* $50cm$, *com um erro de medida, de no máximo,* $1cm$. *Encontre o erro máximo que este desvio pode causar no volume do cilindro.*

$b)$ *Estime o valor de* $\operatorname{senh}(0{,}1) + \cosh(0{,}1)$.

Questão 3

$a)$ *Mostre que* $\cosh(x+y) = \cosh x \,.\, \cosh y + \operatorname{senh} x \,.\, \operatorname{senh} y$.

$b)$ *Encontre a equação da reta normal ao gráfico de* $y = e^{\cosh(3x)}$, *no ponto onde* $x = 0$.

Questão 4

$a)$ *Se* $a > 0$ *e* $b > 0$, *ache o valor máximo absoluto de* $f(x) = x^a(1-x)^b$, *com* $x \in [0{,}1]$.

$b)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$, *no intervalo* $[0{,}2\pi]$.

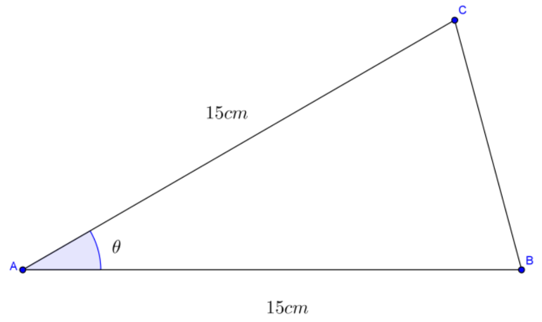
Questão 5

$a)$ *Suponha que uma função* f *seja duas vezes diferenciável em* $\mathbb{R}$ *e que tenha três raízes reais distintas. Mostre que* f'' *tem pelo menos uma raíz real. Em seguida, comprove que este fato ocorre, dando um exemplo.*

$b)$ *Mostre que* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Questão 1

a) Um triângulo isósceles tem os lados iguais, com $15cm$ *cada um. Se o ângulo entre* θ *entre eles varia* $2°$ *por minuto, determine a taxa de variação da área do triângulo, quando* $\theta = 30°$.



$*$ *Área de um triângulo dado dois lados e o ângulo adjacente entre eles:*

$$A = \frac{1}{2}a.b.\operatorname{sen}\theta \quad ; onde\ a = b = 15cm \ \ e \ \ \frac{d\theta}{dt} = 2\,°/min = \frac{\pi}{90}rad/min$$

$$A = \frac{225}{2}\operatorname{sen}\theta$$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt}$$

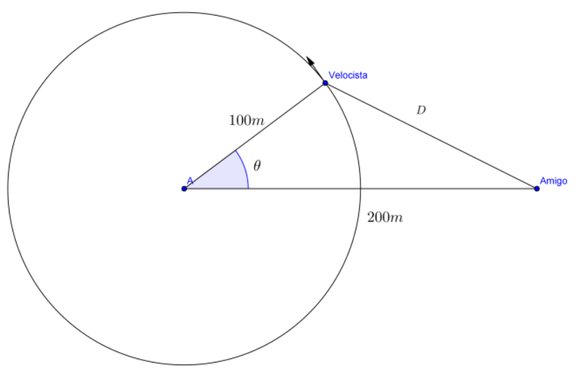
$$\frac{dA}{dt} = \frac{225}{2}\cos\theta.\frac{\pi}{90}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{5\pi}{4}\cos\theta$$

$$\left.\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}rad} = \frac{5\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{8}m^2/min$$

Logo, a área do triângulo isósceles, em questão, está crescendo à taxa de $\frac{5\pi\sqrt{3}}{8}m^2/min$ *quando* $\theta = 30°$.

b) Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 *metros, a uma velocidade angular constante de* $1°$ *por segundo. Seu amigo está em pé a uma distância de* $200m$ *do centro da pista. Quão rápido está variando a distância entre os amigos, quando* $\theta = 90°$?



Pela Lei dos Cossenos, temos:

$$D^2 = 100^2 + 200^2 - 2 \times 100 \times 200 \times \cos\theta$$
$$D^2 = 50000 - 40000\cos\theta$$
$$\frac{d}{dt}(D^2) = \frac{d}{dt}(50000) - \frac{d}{dt}(40000\cos\theta)$$
$$2.D.\frac{dD}{dt} = 40000\,\mathrm{sen}\,\theta\,.\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{dD}{dt} = \frac{20000\,\mathrm{sen}\,\theta}{D}.\frac{d\theta}{dt}$$

Quando $\theta = 90°$ *ou* $\frac{\pi}{2}rad$, *obtemos* $D = \sqrt{50000} = 100\sqrt{5}m$. *Sabendo que a velocidade angular, ou ainda,* $\frac{d\theta}{dt} = 1°/s = \frac{\pi}{180}rad/s$ *, então ...*

$$\left.\frac{dD}{dt}\right|_{\substack{D=100\sqrt{5}m \\ \theta=90°}} = \frac{20000\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}}{100\sqrt{5}}.\frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{9\sqrt{5}} = \frac{2\pi\sqrt{5}}{9}m/s$$

Logo, a distância entre os amigos está aumentado à taxa de $\frac{2\pi\sqrt{5}}{9}m/s$ *quando* $\theta = 90°$.

Questão 2

a) O raio de um cilindro circular reto de altura igual a 2 metros, mede 50cm, com um erro de medida, de no máximo, 1cm. Encontre o erro máximo que este desvio pode causar no volume do cilindro.

Comparando o erro de medida com a medida do raio inicial do cilindro, concluimos que $1cm \ll 50cm$, *ou seja, a variação do raio foi muito pequena comparada as dimensões do cilindro. Logo, para pequenas variações teremos* $\Delta V \approx dV$.

$$V = \pi r^2 h = 2\pi r^2$$
$$dV = 4\pi r.dr$$
$$dV = 4\pi.\frac{50}{100}.\frac{1}{100} = \frac{\pi}{50}m^3$$
$$\Delta V \approx dV = \frac{\pi}{50}m^3$$

O erro máximo que o desvio de 1cm pode causar no volume do cilindro em questão é de $\pi/50\,m^3$.

b) Estime o valor de $\mathrm{senh}(0,1) + \cosh(0,1)$.

Seja $f(x) = \mathrm{senh}\,x + \cosh x$; $f(0) = 1$ *e* $f'(x) = f(x) \Rightarrow f'(0) = f(0) = 1$.

Por aproximação linear ou linearização da função f em $x = 0$, *temos:*

$$L(x) - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$L(x) = x + 1$$

Usando o fato de que a estimativa por aproximação linear é válida para pequenas variações em torno de $x = 0$ *(neste caso), então podemos dizer que*

$$f(0{,}1) \approx L(0{,}1) = 1{,}1$$

Logo, $\operatorname{senh}(0{,}1) + \cosh(0{,}1) \approx 1{,}1.$

Questão 3

$a)$ *Mostre que* $\cosh(x + y) = \cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y.$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}$$
$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}$$
$$\cosh(x + y) = \frac{e^{2x+2y} + 1}{2e^{x+y}}$$

$*$ *Provando a identidade acima desenvolvendo o segundo membro:*

$$\cosh x \,.\cosh y = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x+2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1)}{e^x e^y}$$
$$\operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)}{e^x e^y} = \frac{1}{4}.\frac{(e^{2x+2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1)}{e^x e^y}$$
$$\cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y = \frac{1}{4}.\frac{2(e^{2x+2y} + 1)}{e^x e^y} = \frac{e^{2x+2y} + 1}{2e^x e^y} = \cosh(x + y)$$

$*$ *Provando a igualdade desenvolvendo o primeiro membro:*

$$\begin{aligned}
\cosh(x + y) &= \frac{e^{2x}e^{2y} + 1}{e^x e^y} \\
&= \frac{2e^{2x}e^{2y} + 2}{4e^x e^y} \\
&= \frac{2e^{2x}e^{2y} + 2 + e^{2x} - e^{2x} + e^{2y} - e^{2y}}{4e^x e^y} \\
&= \frac{(e^{2x}e^{2y} + e^{2x} + e^{2y} + 1) + (e^{2x}e^{2y} - e^{2x} - e^{2y} + 1)}{4e^x e^y} \\
&= \frac{(e^{2x} + 1)(e^{2y} + 1)}{4e^x e^y} + \frac{(e^{2x} - 1)(e^{2y} - 1)}{4e^x e^y} \\
&= \frac{e^{2x} + 1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y} + 1}{2e^y} + \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}\cdot\frac{e^{2y} - 1}{2e^y} \\
&= \cosh x \,.\cosh y + \operatorname{senh} x \,.\operatorname{senh} y
\end{aligned}$$

$*$ *Obs: esse segundo método foi mostrado apenas por razões didáticas.*

$b)$ *Encontre a equação da reta normal ao gráfico de* $y = e^{\cosh(3x)}$, *no ponto onde* $x = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\mathrm{senh}(3x).\,e^{\cosh(3x)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 3\,\mathrm{senh}(0).\,e^{\cosh(0)} = 0$$

Logo, a reta tangente em $x = 0$ *é uma reta horizontal e, portanto, a reta normal ao gráfico de* $y = e^{\cosh(3x)}$ *no ponto* $(0, e)$ *é uma reta vertical de equação* $x = 0$.

Questão 4

$a)$ *Se* $a > 0$ *e* $b > 0$, *ache o valor máximo absoluto de* $f(x) = x^a(1-x)^b$, *com* $x \in [0,1]$. $* D(f) = \mathbb{R}$

f *é uma função polinomial e, portanto, contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,1]$. *Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de* f *no intervalo fechado* $[0,1]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo:*

$f(0) = 0$ *e* $f(1) = 0$.

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,1)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

Como f *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$, *se* f *possui algum número crítico* c *em* $(0,1)$ *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$f'(x) = ax^{a-1}(1-x)^b - bx^a(1-x)^{b-1}$
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow ax^{a-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^{b-1}$

$ax^a.x^{-1}(1-x)^b = bx^a(1-x)^b(1-x)^{-1}$

$\frac{a}{x} = \frac{b}{1-x} \Rightarrow x(a+b) = a \therefore x = \frac{a}{a+b}$; *com* $a > 0$ *e* $b > 0$, $\frac{a}{a+b} \in (0,1)$.

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \left(\frac{a}{a+b}\right)^a\left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^b$$

$$f\left(\frac{a}{a+b}\right) = \frac{a^a}{(a+b)^a}.\frac{b^b}{(a+b)^b} = \frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\frac{a^a b^b}{(a+b)^{a+b}}$ *é o valor máximo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,1]$.

$b)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$, *no intervalo* $[0,2\pi]$. $\quad * D(f) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x\,(2 + \operatorname{sen} x) - \cos x \,.\cos x}{(2 + \operatorname{sen} x)^2} = \frac{-(2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(2\operatorname{sen} x + 1)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}\ ;\ \ D(f') = \mathbb{R}$$

f *é uma função racional contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,2\pi]$. *Podemos então utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado, temos:

1. *Os valores de* f *nos extremos do intervalo:*
$f(0) = \dfrac{\cos 0}{2 + \operatorname{sen} 0} = \dfrac{1}{2}\ ;\ \ f(2\pi) = \dfrac{\cos 2\pi}{2 + \operatorname{sen} 2\pi} = \dfrac{1}{2}$.

2. *Os valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(0,2\pi)$:

"*Um número crítico de uma função* f *é um númer* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*".

Como f *é uma função diferenciável em* $\mathbb{R}$, *então diferenciável em* $(0,2\pi)$, *se* f *possui algum número crítico* c *em* $(0,2\pi)$ *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \frac{-(2\operatorname{sen} x + 1)}{(2 + \operatorname{sen} x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{sen} x + 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\frac{1}{2} \therefore x = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)}{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{6}\right)} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2 + \operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *é o valor máximo absoluto e* $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[0,2\pi]$.

***Questão* 5**

$a)$ *Suponha que uma função f seja duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e que tenha três raízes reais distintas. Mostre que f'' tem pelo menos uma raíz real. Em seguida, comprove que este fato ocorre, dando um exemplo.*

Se f é uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e possui 3 raízes reais distintas x_1, x_2 e x_3, tais que $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, então f é contínua em $\mathbb{R}$.

Suponhamos que $x_1 < x_2 < x_3$. Como f é contínua e diferenciável $\mathbb{R}$, então f é contínua nos intervalos fechados $[x_1, x_2]$ e $[x_2, x_3]$ e diferenciável nos intervalos abertos (x_1, x_2) e (x_2, x_3), e ainda, $f(x_1) = f(x_2)$ e $f(x_2) = f(x_3)$. Então, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x_4 \in (x_1, x_2)$ e $x_5 \in (x_2, x_3)$ tais que $f'(x_4) = 0$ e $f'(x_5) = 0$.

Como f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, então f' é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, f' é contínua no intervalo fechado $[x_4, x_5]$ e contínua no intervalo aberto (x_4, x_5). E como $f'(x_4) = f'(x_5)$, pelo Teorema de Rolle, existe algum $x_6 \in (x_4, x_5)$ tal que $f''(x_6) = 0$. Ou seja, $f''(x)$ tem pelo menos uma raíz real.

Exemplo: Seja $f(x) = (x-1)(x+1)(x+2) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$
$$f''(x) = 6x - 4$$

Note que f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ uma vez que $D(f') = \mathbb{R}$ e $D(f'') = \mathbb{R}$. Aplicando o Teorema de Rolle entre duas raízes consecutivas de f, provamos que existe $x_4 \in (-1,1)$ e $x_5 \in (1,2)$ tais que $f'(x_4) = 0$ e $f'(x_5) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 1 = 0\ ; \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{6} \Longrightarrow x_4 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{6} \text{ e } x_5 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{6}$$

Ainda considerando que f é duas vezes diferenciável, mostramos que existe algum $x_6 \in (x_4, x_5)$ tal que $f''(x_6) = 0$. Logo,

$$f''(x_6) = 0 \Longrightarrow 6x_6 - 4 = 0 \therefore x_6 = \frac{4}{6}$$

Onde, $\dfrac{4 - 2\sqrt{7}}{6} < \dfrac{4}{6} < \dfrac{4 + 2\sqrt{7}}{6}$. *Comprovando que f'' tem pelo menos 1 raíz.*

$b)$ *Mostre que* $\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - \dfrac{\pi}{4}$.

Sejam f e g funções tais que $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ *e* $g(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ *onde $D(f) = \mathbb{R}$ e $D(g) = \mathbb{R} - \{1\}$. Então,*

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}} \cdot \left[\frac{\sqrt{1+x^2} - x.\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}(2x)}{1+x^2}\right]$$

$$f'(x) = \sqrt{1+x^2}.\left[\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1+x}{1-x}\right]$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \left[\frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right]$$

$$g'(x) = \frac{(1-x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Logo, $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

"Se $f'(x) = g'(x)$ *para todo* x *em um intervalo* (a, b) *então* $f - g$ *é constante em* (a, b)*; isto é,* $f(x) = g(x) + C$*, em que* C *é uma constante"*

No caso em questão $f'(x) = g'(x)$ *para todo* $x \in (-\infty, +\infty)$ *então* $f - g$ *é constante em* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$*. Logo,* $f(x) = g(x) + C$*, onde* C *é uma constante a ser determinada. Note, que devido ao domínio da função* g *podemos ter valores distintos para* C *caso* $x \in (-\infty, 1)$ *ou caso* $x \in (1, +\infty)$*.*

Calculando a expressão para $x = 0$*, obtemos o valor de* C *caso* $x \in (-\infty, 1)$*.*

$$f(0) = g(0) + C$$
$$\operatorname{arcsen} 0 = \operatorname{arctg} 1 + C$$
$$0 = \frac{\pi}{4} + C \ \therefore C = -\frac{\pi}{4}$$

Logo, $f(x) = g(x) - \frac{\pi}{4}$ *e, portanto,*

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{\pi}{4}, \forall x \in (-\infty, 1)$$

Caso $x \in (1, +\infty)$*, calculando o valor da identidade para* $x = \sqrt{3}$*, temos:*

$$f(\sqrt{3}) = g(\sqrt{3}) + C$$
$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + C$$

$$\frac{\pi}{3} = \operatorname{arctg}\left(\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}\right) + C$$
$$C = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg}\left(-2-\sqrt{3}\right)$$

$* \, Como \;\, a \;\, função \operatorname{arctg} x \;\; é \; uma \; função \; ímpar, então:$

$$C = \frac{\pi}{3} + \operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$\operatorname{tg}\theta = 2+\sqrt{3};\;\; \operatorname{tg}^2\theta + 1 = \sec^2\theta \;\therefore\; \sec^2\theta = 8+4\sqrt{3}$

$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{8+4\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad e \quad \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

$Calculando \;\, a \;\, expressão \operatorname{sen} 2\theta \;\; temos:$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = 2.\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{1}{2} \;\therefore\; 2\theta = \dfrac{\pi}{6} \;\; ou \; 2\theta = \dfrac{5\pi}{6}$

$Como \operatorname{sen}\theta > \dfrac{1}{2} \;\, então \;\; \theta > \dfrac{\pi}{6}. Logo,$

$$2\theta = \frac{5\pi}{6} \;\therefore\; \theta = \frac{5\pi}{12}$$

$Portanto, C = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{9\pi}{12} = \dfrac{3\pi}{4}$

$Então, para \; x \in (1,+\infty), temos:$

$$f(x) = g(x) + \frac{3\pi}{4}$$

$$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{3\pi}{4} \;, \forall x \in (1,+\infty)$$

$* \, Poderíamos \; obter \; os \; mesmos \; resultados \; calculando \; o \; limite \; da \; expressão$
$f - g \; quando \; x \to 1^+ \; e \; quando \; x \to 1^-. Demonstrando:$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim\limits_{x\to 1^-}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
$= \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{4}.$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 1^+}\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \lim\limits_{x\to 1^+}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$
$= \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}.$

$* \, Portanto, a \; identidade \; exposta \; é \; válida \; somente \; para \; x \in (-\infty, 1).$

2.7 4ª Prova – 06 de Maio de 2016

Questão 1.

a) Encontre a função em cujo gráfico a reta tangente possua coeficiente angular dado pela expressão $x^3 - 2x^{-2} + 2$, *em cada valor de* x, *e de sorte que o citado gráfico passa pelo ponto* $(1,3)$.

b) Sabe-se que $f'(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$ *e que* $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. *Encontre* $f(x)$.

Questão 2.

a) Uma lata cilíndrica deve conter 27 *litros de líquido. O custo do material usado para o fundo e a tampa da lata é de* 3 *centavos por centímetro quadrado e o custo do material usado para a lateral lata é de* 2 *centavos por centímetro quadrado. Quais os valores do raio e da altura do cilindro para que o custo da matéria prima utilizada na lata seja o menor possível?*

b) Um triângulo isósceles tem um dos seus vértices na origem e sua base é paralela ao eixo-x, estando os vértices da base acima do eixo e sobre a curva $y = 27 - x^2$. *Determine a maior área que o triângulo pode assumir.*

Questão 3.

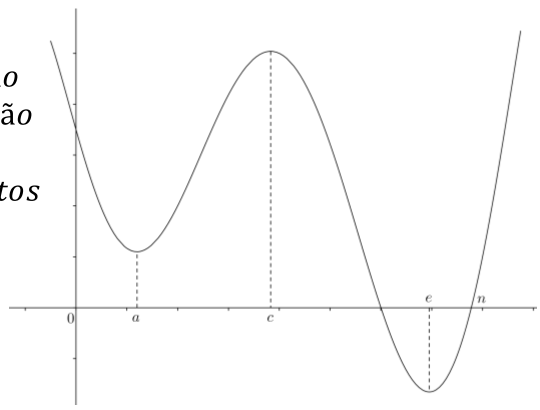
a) Calcule $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2\left(e^{\cos\theta} + \frac{\theta}{2} - 1\right) - \frac{\pi}{2}}{\ln[\operatorname{sen}(-3\theta)]}$.

b) Use a Regra de L'Hôspital para calcular $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Questão 4.

a) Para quais valores dos números a *e* b *a função* $f(x) = axe^{bx^2}$ *tem valor máximo* $f(2) = 1$?

b) Sendo dado este gráfico da função f, *esboce um gráfico possível para a função derivada de* f, *justificando sua construção e apontando seus pontos de inflexão, justificando sua resposta com argumentos matemáticos e não apenas apontando no gráfico.*



Questão 5. *Considere a função* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ *e suas primeiras derivadas*:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Determine, então,

(i) *Seus pontos de máximos e mínimos relativos, se existirem*;
(ii) *Seus intervalos de crescimento e decrescimento*;
(iii) *Suas assíntotas, se existirem*;
(iv) *Seus pontos de inflexão, se existirem*;
(v) *Os intervalos onde a concavidade é para cima e onde é para baixo*.
(vi) *Onde ficam os pontos de inflexão*.

***Questão* 1**

$a)$ *Encontre a função em cujo gráfico a reta tangente possua coeficiente angular dado pela expressão* $x^3 - 2x^{-2} + 2$, *em cada valor de* x, *e de sorte que o citado gráfico passa pelo ponto* $(1,3)$.

Pelo enunciado da questão, temos as seguintes informações:

$$f'(x) = x^3 - 2x^{-2} + 2 \quad e \quad f(1) = 3$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^{-1} + 2x + C$$

Utilizado a condição $f(1) = 3$, *temos:*

$$3 = \frac{1}{4} + 2 + 2 + C$$
$$C = 3 - \frac{1}{4} - 4$$
$$C = -\frac{5}{4}$$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + 2x^{-1} + 2x - \frac{5}{4}$.

$b)$ *Sabe-se que* $f'(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$ *e que* $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$. *Encontre* $f(x)$.

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{1 + x^2}$$

A antiderivada mais geral de $f'(x)$ é:

$$f(x) = x + \operatorname{arctg} x + C$$

Utilizando a condição $f(1) = \dfrac{\pi}{2}$, *temos:*

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \operatorname{arctg} 1 + C$$

$$C = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$C = \frac{\pi}{4} - 1$$

Portanto, $f(x) = x + \operatorname{arctg} x + \dfrac{\pi}{4} - 1$

***Questão* 2**

$a)$ *Uma lata cilíndrica deve conter 27 litros de líquido. O custo do material usado para o fundo e a tampa da lata é de 3 centavos por centímetro quadrado e o custo do material usado para a lateral lata é de 2 centavos por centímetro quadrado. Quais os valores do raio e da altura do cilindro para que o custo da matéria prima utilizada na lata seja o menor possível?*

Dados da questão: $V = 27l = 27.000cm^3$; $P_1 = 0{,}03\ R\$/cm^2$ *e* $P_2 = 0{,}02\ R\$/cm^2$

$$27.000 = \pi r^2 h \qquad (Eq.1)$$

$$C(r,h) = P_1 \times \left(A_{fundo} + A_{tampa}\right) + P_2 \times A_{lateral}$$
$$C(r,h) = 0{,}03(\pi r^2 + \pi r^2) + 0{,}02(2\pi rh)$$
$$C(r,h) = 0{,}06\pi r^2 + 0{,}04\pi rh$$

Onde $C(r,h)$ *é o custo total que depende do raio* r *e da altura* h.

Pela Equação 1, *tiramos* h *em função do* r, *sendo* $h(r) = \dfrac{27.000}{\pi r^2}$.
Substituindo na expressão do custo total, temos:

$$C(r) = 0{,}06\pi r^2 + 0{,}04\pi r.\frac{27000}{\pi r^2}$$
$$C(r) = 0{,}06\pi r^2 + 0{,}04.\frac{27.000}{r}$$
$$C(r) = \frac{0{,}06\pi r^3 + 0{,}04 \times 27000}{r} \quad ; \quad D(C) = \{r \in \mathbb{R}; r > 0\}$$

$*$ *O domínio da função* $C(r)$ *definida acima leva em consideração que* r *é uma variável com unidade de comprimento!*

Para encontrar os valores de r *que maximizam ou minimizam a função* C, *procuramos os números críticos dessa função.*

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$C'(r) = \frac{0{,}18\pi r^3 - 0{,}06\pi r^3 - 0{,}04 \times 27.000}{r^2}$$
$$C'(r) = \frac{0{,}12\pi r^3 - 0{,}04 \times 27.000}{r^2}$$

$C'(r)$ *não existe para* $r = 0$, *porém*, $0 \notin D(C)$. *Logo*, $r = 0$ *não é número crítico!*

$C'(r) = 0 \Rightarrow 0{,}12\pi r^3 - 0{,}04 \times 27.000 = 0$

$$r^3 = \frac{0{,}04 \times 27.000}{0{,}12\pi} = \frac{27.000}{3\pi} = \frac{9.000}{\pi}$$

$$\therefore r = 10\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}cm = \frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}cm$$

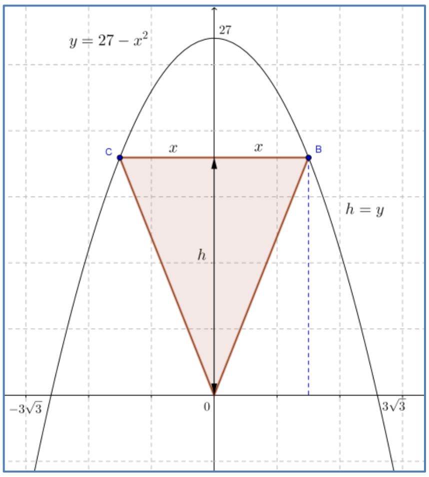
Analisando o sinal de $C'(r)$*, temos:*

$$(0) - - - - - \left(\frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}\right) + + + + + + + \quad C'(r)\ ;\ \textit{Teste da Primeira Derivada}$$

Com esse estudo, concluimos que $r = \frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}cm$ *é um número crítico que está associado a um ponto de mínimo local e, considerando o intervalo acima esse valor é o mínimo absoluto da função do custo total. Logo, para este valor de r o custo será o menor possível.*

Para $r = \frac{10}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}$*, temos* $h = \frac{27.000}{\pi.\frac{100}{\pi^2}\sqrt[3]{81\pi^4}} = \frac{27.000}{100\sqrt[3]{81\pi}} = \frac{2.700}{3\sqrt[3]{3\pi}} = \frac{300}{\pi}\sqrt[3]{9\pi^2}cm$

b) Um triângulo isósceles tem um dos seus vértices na origem e sua base é paralela ao eixo-x, estando os vértices da base acima do eixo e sobre a curva $y = 27 - x^2$*. Determine a maior área que o triângulo pode assumir.*



$$A = \frac{2x.y}{2} = x.y = x(27 - x^2) = 27x - x^3$$
$$A(x) = 27x - x^3 \quad ; \quad D(A) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 3\sqrt{3}\}$$
$$A'(x) = 27 - 3x^2 = 3(9 - x^2)$$

Analisando o comportamento da função $A(x)$ *pela derivada, temos:*

$$(0) + + + + (3) - - - - - (3\sqrt{3}) \qquad A'(x)\ ;\ \textit{Teste da Primeira Derivada}$$

Com isso, note que $x = 3$ *é um número crítico de* $A(x)$ *associado a um ponto de máximo local e, considerando o intervalo* $(0, 3\sqrt{3})$*, esse ponto, além de máximo local, é o máximo absoluto de* $A(x)$*.*
Logo, $A(3) = 81 - 27 = 54$ *u.A é a maior área que o triângulo pode assumir.*

Questão 3

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \dfrac{2\left(e^{\cos\theta}+\frac{\theta}{2}-1\right)-\frac{\pi}{2}}{\ln[\operatorname{sen}(-3\theta)]}$; *Indeterminação do tipo* "$\dfrac{0}{0}$"

$*$ *Utilizando a Regra de L'Hôpital, obtemos:*

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{2\left(e^{\cos\theta}+\frac{\theta}{2}-1\right)-\frac{\pi}{2}}{\ln[\operatorname{sen}(-3\theta)]} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}{-\dfrac{3\cos(-3\theta)}{\operatorname{sen}(-3\theta)}} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}{-3\operatorname{cotg}(-3\theta)};$$

$*$ *Obs: Se* $\theta\to\dfrac{\pi^+}{2}$ *, então* $\theta>\dfrac{\pi}{2}$ *e, portanto,* $-3\theta<-\dfrac{3\pi}{2}$.

$*$ Obs_2: $\operatorname{cotg}(-3\theta)=-\operatorname{cotg}(3\theta)$. *Se* $-3\theta\to-\dfrac{3\pi^-}{2}$ *então* $\operatorname{cotg}(3\theta)\to 0^-$.

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}{-3\operatorname{cotg}(-3\theta)} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\overbrace{2\left(-\operatorname{sen}\theta\, e^{\cos\theta}+\frac{1}{2}\right)}^{\substack{-1\\ \uparrow}}}{\underbrace{3\operatorname{cotg}(3\theta)}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = +\infty$$

$b)$ *Use a Regra de L'Hôspital para calcular* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\ ; \textit{Indeterminação do tipo } "\frac{0}{0}"$$

Utilizando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}.\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\dfrac{1}{x^2+x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1};$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{2} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^1 = e.$$

Questão 4

$a)$ *Para quais valores dos números* a *e* b *a função* $f(x) = axe^{bx^2}$ *tem valor máximo* $f(2) = 1$?

Como f é uma função definida pelo produto de funções contínuas e diferenciáveis em $\mathbb{R}$, então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Logo, se f tem valor máximo 1 em $x = 2$, então 2 é um número crítico de f e, como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, $f'(2)$ existe e $f'(2) = 0$. (Teorema de Fermat)

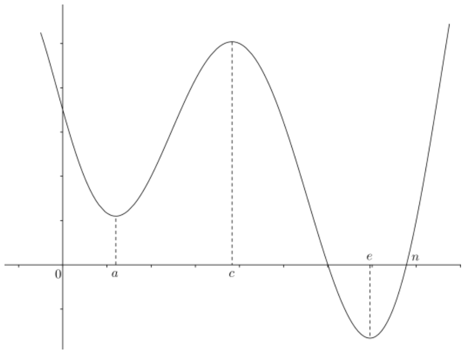
$$f'(x) = ae^{bx^2}(1 + 2bx^2)$$

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow ae^{4b}(1 + 8b) = 0 \Longrightarrow 1 + 8b = 0 \therefore b = -\frac{1}{8}.$$

Como $f(2) = 1$, *temos*:

$$f(2) = 2ae^{-\frac{1}{8}(4)} = 2ae^{-\frac{1}{2}} = 1 \therefore a = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

$b)$ *Sendo dado este gráfico da função f, esboce um gráfico possível para a função derivada de f, justificando sua construção e apontando seus pontos de inflexão, justificando sua resposta com argumentos matemáticos e não apenas apontando no gráfico.*



Analisando o comportamento da função f pelo gráfico, temos as seguintes informações:

(i) *Intervalos de crescimento e decrescimento*:

f é crescente em $(a, c) \cup (\mathrm{e}, n)$
f é decrescente em $(b, a) \cup (c, \mathrm{e})$

(ii) *Concavidade*:

f possui concavidade voltada para cima em $(b, d) \cup (g, n)$
f possui concavidade voltada para baixo em (d, g)
Onde $d \in (a, c)$ *e* $g \in (c, e)$

Com essas informações, podemos representar intuitivamente as derivadas primeira e segunda da função f, de tal modo que:

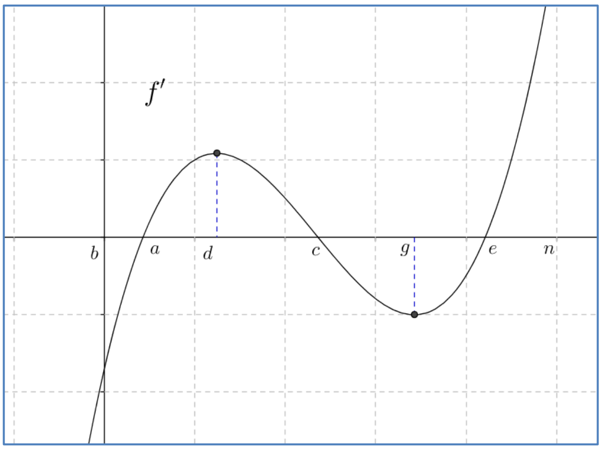
$(b) - - - (a) + + + + + (c) - - - - - - (\mathrm{e}) + + + + (n) \quad f'$
$(b) + + + + + + (d) - - - - - (g) + + + + + + + + \ (n) \quad f''$

Com isso, os pontos $(d, f(d))$ e $(g, f(g))$ são pontos de inflexão, visto que ocorre a mudança na direção da concavidade da função f em $x = d$ e em $x = g$.
Como f'' nos dá a informação dos intervalos de crescimento e decrescimento de f', então, concluimos que:

f' é crescente em $(b, d) \cup (g, n)$ e decrescente em (d, g).

Onde $x = d$ é um número crítico de f' associado a um ponto de máximo local e $x = g$ é um número crítico de f' associado a um ponto de mínimo local.

Esboçando uma representação intuitiva do gráfico de f', temos:



Questão 5. *Considere a função* $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ *e suas primeiras derivadas:*

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}.$$

Determine, então,

(i) Seus pontos de máximos e mínimos relativos, se existirem;
(ii) Seus intervalos de crescimento e decrescimento;
(iii) Suas assíntotas, se existirem;
(iv) Seus pontos de inflexão, se existirem;
(v) Os intervalos onde a concavidade é para cima e onde é para baixo.
(vi) Onde ficam os pontos de inflexão.

$*$ *Domínio da função f:* $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 1\}$
$*$ *Interseção com os eixos coordenados:* $A = (0, -5)$

(i) Seus pontos de máximos e mínimos relativos, se existirem;

Se f possui pontos de máximos ou mínimos relativos, estes ocorrem nos números críticos de f.

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe".

$Como\ f'(x)\ não\ existe\ em\ x = 1\ e\ 1 \notin D(f)\ então, 1\ não\ é\ número\ crítico\ de\ f.$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0\ ;\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 . x_2 = -3 \end{cases} \therefore x_1 = 3\ e\ x_2 = -1$$

$\{3, -1\} \in D(f)\ e\ f'(3) = f'(-1) = 0. Logo, 3\ e - 1\ são\ números\ críticos\ de\ f.$

$Pelo\ Teste\ da\ Segunda\ Derivada, temos:$

$f''(3) = \dfrac{8}{8} = 1\ ; f''(3) > 0. Logo, f(3)\ é\ um\ valor\ mínimo\ local.$

$f(3) = \dfrac{3^2 - 2 \times 3 + 5}{3 - 1} = \dfrac{9 - 6 + 5}{2} = \dfrac{8}{2} = 4.\quad Ponto\ A = (3,4)$

$f''(-1) = \dfrac{8}{-8} = -1; f''(-1) < 0. Logo, f(-1)\ é\ um\ valor\ de\ máximo\ local.$

$f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 2(-1) + 5}{-1 - 1} = \dfrac{1 + 2 + 5}{-2} = \dfrac{8}{-2} = -4.\quad Ponto\ B = (-1, -4)$

$(ii)\ Seus\ intervalos\ de\ crescimento\ e\ decrescimento;$

$Estudando\ o\ sinal\ da\ primeira\ derivada, temos:$

$$\begin{array}{ll} + + + + + (-1) - - - - - - - - - (3) + + + + + + + & x^2 - 2x - 3 \\ - - - - - - - - - - - - - (1) + + + + + + + + + + + & x - 1 \\ - - - - - - (-1) + + + + (1) - - - (3) + + + + + + & f'(x) \end{array}$$

$Dizemos\ que\ f\ é\ crescente\ onde\ f' > 0\ e\ decrescente\ onde\ f' < 0. Logo,$

$f\ é\ crescente\ em\ (-1,1) \cup (3, +\infty)\ e$
$f\ é\ decrescente\ em\ (-\infty) \cup (1,3)$

$(iii)\ Suas\ assíntotas, se\ existirem;$

$*\ Vertical: dizemos\ que\ a\ reta\ x = a\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ se\ \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ $ou\ \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty.$

$Pela\ definição\ de\ continuidade\ de\ uma\ função\ em\ um\ ponto\ x = a, conclui - se$ $que\ as\ assíntotas\ verticais\ ocorrem\ nos\ pontos\ de\ descontinuidade\ da\ função.$ $Logo, verificamos\ se\ a\ reta\ x = 1\ é\ a\ assíntota\ vertical\ de\ f.$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 5}^{\overset{4}{\uparrow}}}{\underbrace{x - 1}_{\underset{0^+}{\downarrow}}} = +\infty \quad e \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\overbrace{x^2 - 2x + 5}^{\overset{4}{\uparrow}}}{\underbrace{x - 1}_{\underset{0^-}{\downarrow}}} = -\infty$$

$Portanto, a\ reta\ x = 1\ é\ uma\ assíntota\ vertical\ ao\ gráfico\ da\ função\ f.$

$* \, Horizontal$: $Dizemos \; que \; a \; reta \; y = L$ é $uma \; assíntota \; horizontal \; se$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \; ou \; \lim_{x \to -\infty} f(x) = L.$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 2}{1} = \lim_{x \to +\infty} (2x - 2) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x - 2}{1} = \lim_{x \to -\infty} (2x - 2) = -\infty$$

$Logo$, $a \; função \; f$ não $possui \; assíntota \; horizontal.$

$* \, Oblíqua$: $Dizemos \; que \; a \; reta \; y = ax + b$ é $uma \; assíntota \; oblíqua \; se,$ $somente \; se,$ $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} = (x - 1) + \frac{4}{x - 1}$$
$$f(x) - (x - 1) = \frac{4}{x - 1}$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x - 1} = 0$$

$Logo$, $a \; reta \; y = x - 1$ é $a \; assíntota \; oblíqua \; do \; gráfico \; da \; função \; f.$

(iv) $Seus \; pontos \; de \; inflexão, se \; existirem;$

$Os \; pontos \; de \; inflexão \; ocorrem \; nos \; números \; do \; domínio \; de \; f \; onde \; ocorre \; a$ $mudança \; na \; direção \; da \; concavidade.$ $Analisando \; a \; segunda \; derivada \; de \; f, temos:$

$$f''(x) = \frac{8}{(x - 1)^3}$$

$$- - - - - - - (1) + + + + + + \quad f''(x)$$

$Notamos \; que \; em \; x = 1 \; ocorre \; a \; mudança \; na \; direção \; de \; concavidade.$ $Entretanto,$ $1 \notin D(f)$ $e, portanto,$ $não \; há \; pontos \; de \; inflexão \; na \; função \; f.$

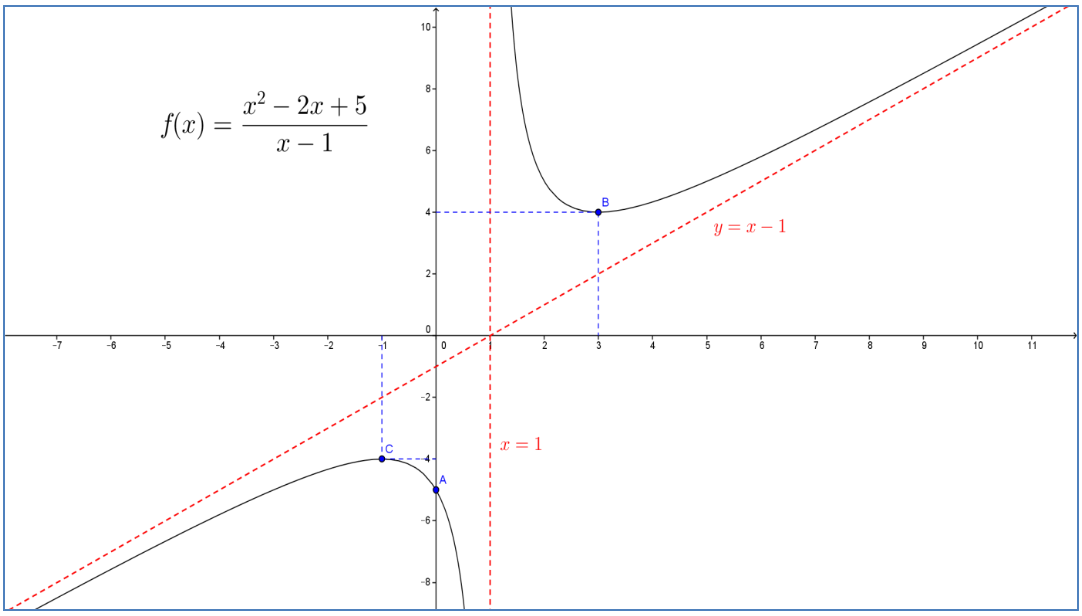
(v) $Os \; intervalos \; onde \; a \; concavidade$ é $para \; cima \; e \; onde$ é $para \; baixo.$

$Baseado \; na \; análise \; da \; segunda \; derivada \; feita \; no \; item \; anterior, temos:$

$Onde \; f'' > 0, f \; possui \; concavidade \; voltada \; para \; cima \; e \; onde \; f'' < 0, f \; possui$ $concavidade \; voltada \; para \; baixo.$ $Com \; isso \ldots$

$f \; possui \; C.V.C \; (Concavidade \; Voltada \; para \; Cima) \; em \; (1, +\infty) \; e$
$f \; possui \; C.V.B \; (Concavidade \; Voltada \; para \; Baixo) \; em \; (-\infty, 1).$

Esboço Gráfico:



2.8 4ª Prova – 07 de Maio de 2016

Questão 1

$a)$ *Encontre o ponto sobre a curva* $y = \sqrt{x}$ *que está mais próximo do ponto* $(3,0)$.

$b)$ *Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito no triângulo retângulo de lados* $3, 4$ *e* 5.

Questão 2. *Calcule*:

$a)$ $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$;

$b)$ $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Questão 3

$a)$ *Dado que o gráfico de* f *passa pelo ponto* $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ *e que a inclinação de sua reta tangente em* $(x, f(x))$ *é* $\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, *encontre a função* f.

$b)$ *Os gráficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *têm a mesma reta tangente no ponto* $(1,1)$. *Sabendo que* $g(x) = x^3$ *e* $f''(x) = x + x^2$, *determine* $f(x)$.

Questão 4

$a)$ *Ache os números críticos da função* $f(x) = 4\operatorname{sen}^3 x + 3\sqrt{2}\cos^2 x$, *no intervalo* $(-\pi, \pi)$.

$b)$ *O que o Teste da* 2ª *Derivada nos diz sobre o comportamento da função* $f(x) = x^4(x-1)^3$, *nos seus pontos críticos*?

Questão 5. *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{-2x^2+x+2}{2x+1}$, *tendo*

$$f'(x) = \frac{-4x^2-4x-3}{(2x+1)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

apontando:

(a) *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*
(b) *Os intervalos onde* f *é crescente e onde* f *é decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
(c) *Os intervalos onde o gráfico de* f *é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

Questão 1

a) Encontre o ponto sobre a curva $y = \sqrt{x}$ *que está mais próximo do ponto* (3,0).

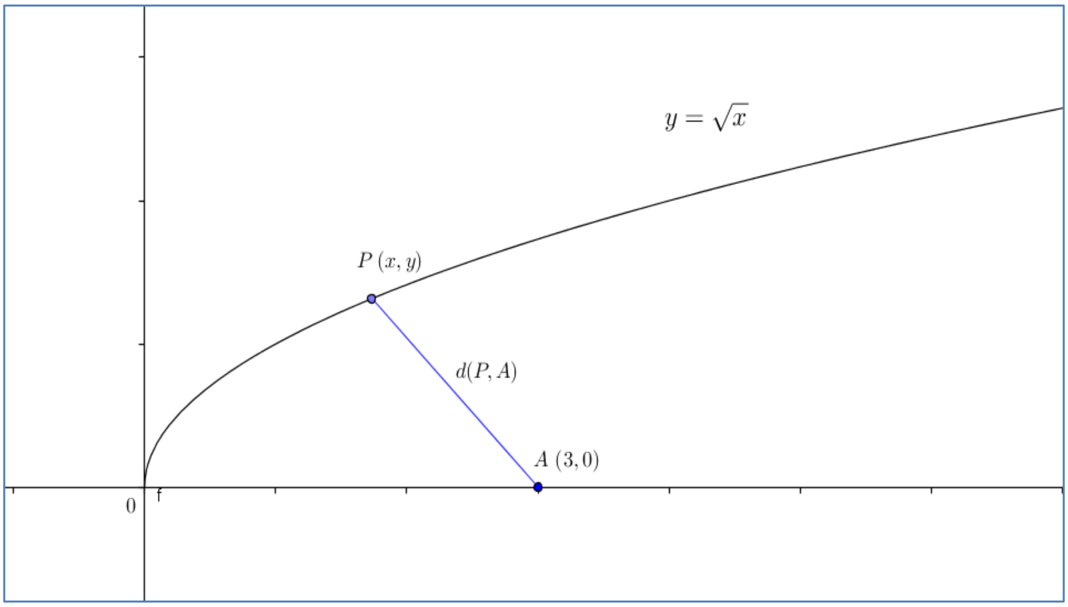


Ilustração do problema!

A distância entre os pontos $P(x,y)$ *e* $A(3,0)$ *sabendo − se que P é um ponto da curva* $y = \sqrt{x}$ *, então* $P(x, \sqrt{x})$*, é dada por:*

$$d(P, A) = d = \sqrt{(x-3)^2 + \left(\sqrt{x} - 0\right)^2}$$
$$d(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + x}$$
$$d(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 9} \qquad D(d) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$
$$d'(x) = \frac{2x - 5}{2\sqrt{x^2 - 5x + 9}} \qquad D(d') = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$$

Como d é diferenciável $\forall x \in D(d)$*, se* $d(x)$ *possui algum valor máximo ou mínimo local em c, então* $d'(c)$ *existe e* $d'(c) = 0$*. (Teorema de Fermat)*

$$d'(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 5 = 0 \therefore x = \frac{5}{2}$$

Fazendo o estudo do sinal de $d'(x)$*, temos:*

$(0) - - - - - - (5/2) + + + + + + + \qquad d'(x)$

Com isso, concluimos que $5/2$ *é um número crítico associado a um ponto de mínimo local, que representa o ponto cuja distância em relação ao ponto* (3,0) *é a menor. O ponto em questão é* $\left(5/2, \sqrt{5/2}\right)$ *ou* $\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

$b)$ *Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito no triângulo retângulo de lados* $3,4$ *e* 5.

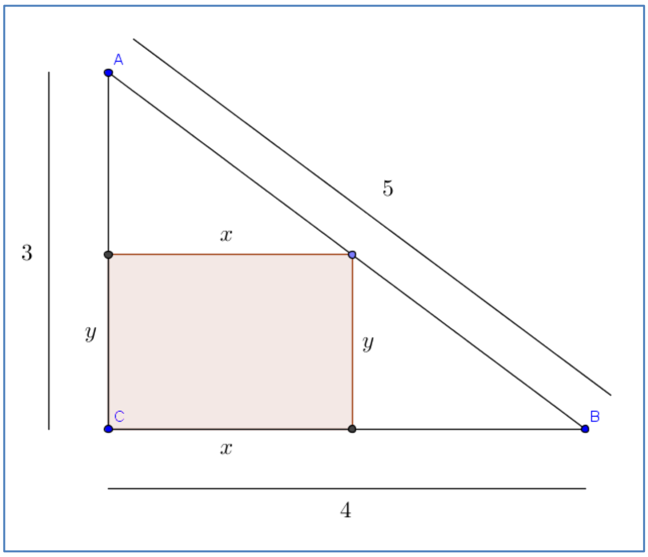


Ilustração do problema!

A área do retângulo inscrito no triângulo é dada pela expressão:

$$A(x,y) = x.y \quad ; \quad 0 < x < 4 \quad e \quad 0 < y < 3$$

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{3}{4} = \frac{y}{4-x} \therefore y = \frac{3}{4}(4-x)$$

$$A(x) = x.\frac{3}{4}(4-x) \qquad D(A) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 4\}$$
$$A(x) = \frac{3}{4}(4x - x^2)$$
$$A'(x) = \frac{3}{4}(4-2x)$$

Como a função $A(x)$ *é diferenciável em* $(0,4)$ *se* A *possui valor máximo ou mínimo local em algum* $c \in (0,4)$ *então* $A'(c)$ *existe e* $A'(c) = 0$.

$$A'(x) = 0 \Longrightarrow 4 - 2x = 0 \therefore x = 2 \; ; \quad 2 \in (0,4)$$

Analisando o sinal de $A'(x)$, *temos:*

$$(0) + + + + + + + (2) - - - - - - - - (4) \qquad A'(x)$$

Logo, 2 *é um número crítico associado a um ponto de máximo local e absoluto, uma vez que consideramos o intervalo* $(0,4)$ *como referência e* 2 *representa o valor de* x *para o qual a área do retângulo inscrito no triângulo retângulo de dimensões* $3, 4$ *e* 5 *é a maior possível. Dimensões do retângulo:* $2 \times (3/2)$

Obs: Pelo Método do Intervalo Fechado também chegaríamos a mesma conclusão, porém, note que para $x = 0$ ou $x = 4$ não existe retângulo, apenas um segmento de reta e, por esta razão, $x \in (0,4)$.

Questão 2. *Calcule:*

$a)$ $\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$;

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{sen} x . \ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln x};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \,.\, \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cossec} x} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cossec} x \,.\, \operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x.\cos x} \overset{L'H}{\Longrightarrow}$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x.\operatorname{sen} x} = \frac{\lim_{x\to 0^+}(-2\operatorname{sen} x \cos x)}{\lim_{x\to 0^+}(\cos x - x.\operatorname{sen} x)} = \frac{-2\operatorname{sen} 0 \cos 0}{\cos 0 - 0.\operatorname{sen} 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x . \ln x} = e^0 = 1$$

$b)$ $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x.\ln x + (x-1)}{x}};$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x.\ln x + (x-1)}{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x.\ln x + x - 1} \overset{L'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\ln x + 1 + 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-1}{\ln x + 2} =$$
$$\frac{\lim_{x\to 1^+} -1}{\lim_{x\to 1^+}(\ln x + 2)} = \frac{-1}{\ln 1 + 2} = \frac{-1}{0+2} = -\frac{1}{2}.$$

Questão 3

$a)$ *Dado que o gráfico de f passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e que a inclinação de sua reta tangente em $(x, f(x))$ é $\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, encontre a função f.*

Do enunciado temos que $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$, ou ainda, $f'(x) = 4.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Dessa forma, a antiderivada mais geral de $f'(x)$ é dada por:

$$f(x) = 4 \arcsen x + C$$

Como o ponto $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ pertence ao gráfico da função f, então $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\,\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) + C = 1$$
$$4.\frac{\pi}{6} + C = 1$$
$$C = 1 - \frac{2\pi}{3}$$

Portanto,

$$f(x) = 4\,\text{arcsen}\,x + 1 - \frac{2\pi}{3}$$

$b)$ *Os gráficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *têm a mesma reta tangente no ponto* $(1,1)$. *Sabendo que* $g(x) = x^3$ *e* $f''(x) = x + x^2$, *determine* $f(x)$.

Do enunciado temos as seguintes informações, $f(1) = 1$ *e, uma vez que* f *e* g *possuem a mesma reta tangente no ponto* $(1,1)$ *então* $f'(1) = g'(1)$.
$*$ *Obs*: $g'(x) = 3x^2$ *e* $g'(1) = 3$.

A antiderivada mais geral de $f''(x)$ *é dada por*:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + C_1$$

Utilizando a condição $f'(1) = g'(1) = 3$, *obtemos*:

$$3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + C_1$$

$$C_1 = 3 - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{6}$$

A aniderivada mais geral de $f'(x)$ *é dada por*:

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{6}x + C_2$$

Utilizando a condição $f(1) = 1$, *obtemos*:

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{13}{6} + C_2$$

$$C_2 = 1 - \frac{29}{12} = -\frac{17}{12}$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{13}{6}x - \frac{17}{12}$$

Questão 4

a) Ache os números críticos da função $f(x) = 4\,\text{sen}^3 x + 3\sqrt{2}\cos^2 x$*, no intervalo* $(-\pi, \pi)$.

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$f'(x) = 12\cos x\,\text{sen}^2 x - 6\sqrt{2}\cos x\,\text{sen}\,x \qquad D(f') = \mathbb{R}$$
$$f'(x) = 6\cos x\,\text{sen}\,x\left(2\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}\right)$$
$$f'(x) = 3\,\text{sen}\,2x\left(2\,\text{sen}\,x - \sqrt{2}\right)$$

Como f *é diferenciável em* $\mathbb{R}$*, se* f *possui algum número crítico* c *então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\,2x = 0 \\ \quad ou \\ \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

A solução desse sistema considerando o intervalo $(-\pi, \pi)$ *é* $x = \left\{0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}$.

$*$ *Obs: Embora* $x = -\pi$ *e* $x = \pi$ *satisfazem a equação* $\text{sen}\,2x = 0$*, estamos considerando o intervalo aberto* $(-\pi, \pi)$ *e, portanto, estes valores não são números críticos nessa situação!*

b) O que o Teste da 2ª Derivada nos diz sobre o comportamento da função $f(x) = x^4(x-1)^3$*, nos seus pontos críticos?*

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$f'(x) = 4x^3(x-1)^3 + 3x^4(x-1)^2$$
$$f'(x) = x^3(x-1)^2[4(x-1) + 3x]$$
$$f'(x) = x^3(x-1)^2(7x-4)$$

Como f *é diferenciável em* $\mathbb{R}$*, então os números críticos ocorrem onde* $f'(x) = 0$.

Números críticos: $0, \dfrac{4}{7}$ *e* 1.

$$f''(x) = 12x^2(x-1)^3 + 12x^3(x-1)^2 + 12x^3(x-1)^2 + 6x^4(x-1)$$
$$f''(x) = 12x^2(x-1)^3 + 24x^3(x-1)^2 + 6x^4(x-1)$$
$$f''(x) = 6x^2(x-1)[2(x-1)^2 + 4x(x-1) + x^2]$$
$$f''(x) = 6x^2(x-1)[7x^2 - 8x + 2]$$

Notamos que $f''(0) = 0$ *e* $f''(1) = 0$*, portanto, o Teste da 2ª Derivada é inconclusivo nesse caso, em outras palavras, esses pontos podem ser de máximo ou mínimo local ou nenhum dos dois casos.*

$Por\ outro\ lado, f''\left(\frac{4}{7}\right) = 6\left(\frac{16}{49}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left[7\left(\frac{16}{49}\right) - \frac{32}{7} + 2\right] = \frac{96}{49}\left[-\frac{48}{49} + \frac{96}{49} - \frac{6}{7}\right] > 0$

$Logo, pelo\ Teste\ da\ 2ª\ Derivada, f\left(\frac{4}{7}\right)$ é $um\ valor\ mínimo\ local\ de\ f.$

Com relação aos números críticos 0 *e* 1 *precisamos do Teste da Primeira Derivada para tirarmos as devidas conclusões. Logo,*

$$f'(x) = x^3(x-1)^2(7x-4)$$

$- - - - (0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + \quad x^3$
$+ + + + + + + + + + + + + + + + (1) + + + + + + + \quad (x-1)^2$
$- - - - - - - - - - (4/7) + + + + + + + + + + + + \quad (7x-4)$
$+ + + + (0) - - - (4/7) + + + + + (1) + + + + + + \quad f'(x)$

Pelo Teste da 1ª Derivada, concluímos que $f(0)$ é *um valor máximo local e* $f(1)$ *não* é *um valor extremo relativo da função.*

***Questão* 5.** *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{2x+1}$*, tendo*

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 4x - 3}{(2x+1)^2} \quad e \quad f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

apontando:

(a) *As assíntotas horizontais, verticais e oblíquas, se existirem.*
(b) *Os intervalos onde* f é *crescente e onde* f é *decrescente, bem como os pontos de máximo e mínimo relativos, caso existam.*
(c) *Os intervalos onde o gráfico de* f é *côncavo para cima e onde* é *côncavo para baixo, bem como os pontos de inflexão, caso existam.*

Primeiramente, definamos o domínio da função f:

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\ x \neq -\frac{1}{2}\right\}$$

Interseções com os eixos coordenados:

$f(0) = 2\ ;\quad Ponto\ A = (0,2)$

$f(x) = 0 \Longrightarrow -2x^2 + x + 2 = 0\ ; \Delta = 17$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4} \therefore x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \quad e\ x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$$

$$Pontos\ B = \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}, 0\right) \quad e\ C = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}, 0\right)$$

(a) *Assíntotas*:

$*$ *Vertical*: *dizemos que a reta* $x = a$ é *uma assíntota vertical se* $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ *ou* $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.

Pela definição de continuidade de uma função em um ponto $x = a$, *conclui − se que as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função.* *Logo, verificamos se a reta* $x = -1/2$ é *a assíntota vertical de* f.

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{-2x^2+x+2}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x+1}_{\substack{\downarrow\\ 0^+}}} = +\infty \quad e \quad \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} \frac{\overbrace{-2x^2+x+2}^{\substack{1\\ \uparrow}}}{\underbrace{2x+1}_{\substack{\downarrow\\ 0^-}}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = -1/2$ é *uma assíntota vertical ao gráfico de* $f(x)$.

$*$ *Horizontal*: *Dizemos que a reta* $y = L$ é *uma assíntota horizontal se* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = L$ *ou* $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{-2x^2+x+2}{2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-4x+1}{2} = \lim_{x\to +\infty} \left(-2x+\frac{1}{2}\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^2+x+2}{2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-4x+1}{2} = \lim_{x\to -\infty} \left(-2x+\frac{1}{2}\right) = +\infty$$

Logo, não há assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.
$*$ *Oblíqua*: *Dizemos que a reta* $y = ax + b$ é *uma assíntota oblíqua se, somente se,* $\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$

$$f(x) = \frac{-2x^2+x+2}{2x+1} = (-x+1) + \frac{1}{2x+1}$$

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1}{2x+1}$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2x+1} = 0$$

Logo, a reta $y = -x + 1$ é *uma assíntota oblíqua ao gráfico de* $f(x)$.

(b) *Crescimento e Decrescimento*; *pontos extremos relativos.*

$$f'(x) = \frac{-4x^2-4x-3}{(2x+1)^2}$$

$- -$ $(-4x^2 - 4x - 3)$
$+ + + + + + + + + + (-1/2) + + + + + +$ $(2x+1)^2$
$- - - - - - - - - - (-1/2) - - - - - -$ $f'(x)$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, concluimos\ que\ f$ é $sempre\ decrescente, sendo$ $o\ intervalo\ de\ decrescimento\ dado\ por\ (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, +\infty)$
$E\ por\ essa\ análise, f\ não\ possui\ pontos\ de\ máximo\ ou\ mínimo\ locais(ou\ relativos)$ $porque\ f\ não\ possui\ números\ críticos.$

$(c)\ Concavidade\ e\ Pontos\ de\ Inflexão:$

$$f''(x) = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

$+ \quad 8$
$- - - - - - - - - - (-1/2) + + + + + + + + + \quad (2x+1)^3$
$- - - - - - - - - - (-1/2) + + + + + + + + + \quad f''(x)$

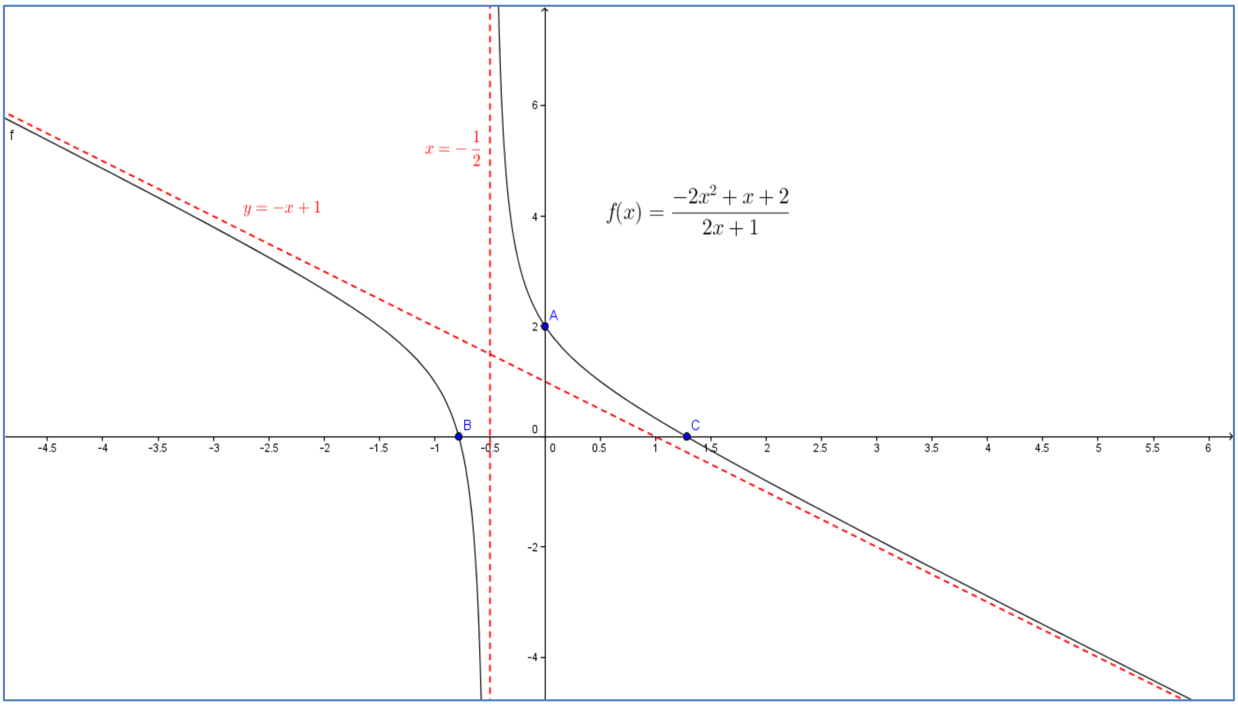
$Pela\ análise\ da\ segunda\ derivada, temos:$

$Onde\ f'' > 0, f\ possui\ concavidade\ voltada\ para\ cima\ e\ onde\ f'' < 0, f\ possui$ $concavidade\ voltada\ para\ baixo.\ Logo,$

$f\ possui\ C.V.C\ (Concavidade\ Voltada\ para\ Cima)\ em\ (-1/2, +\infty)\ e$
$f\ possui\ C.V.B\ (Concavidade\ Voltada\ para\ Baixo)\ em\ (-\infty, -1/2).$

$A\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ ocorre\ em\ x = -1/2, porém, -1/2\ não$ $pertence\ ao\ domínio\ da\ função\ f\ e, portanto, não\ é\ ponto\ de\ inflexão\ da\ função.$ $Com\ isso, f\ não\ possui\ pontos\ de\ inflexão.$

$Esboço\ Gráfico:$



2.9 Prova de Reavaliação da AB1 – 20 de Maio de 2016

Questão 1

a) *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 7, & x = 0. \end{cases}$$

Determine se existe um número $c \in (2,4)$, *tal que* $f(c) = 1$.

b) *Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função* $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x^4+9}}{-2x^2+1}$.

Questão 2

a) *Calcule* $\lim\limits_{x \to 0} x.e^{\operatorname{sen}\frac{\pi}{x}}$.

b) *Assuma que* $h(x) = [f(x)]^3$, *onde* f *é uma função diferenciável. Se* $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ *e* $f'(0) = \dfrac{8}{3}$, *determine uma equação da reta tangente ao gráfico de* h *em* $x = 0$.

Questão 3

a) *A reta tangente à curva* $y = \ln(x^2+e) - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$ *em* $x = 0$ *forma com os eixos coordenados um triângulo. Qual é a área desse triângulo?*

b) *Determine o conjunto de pontos em* f *é contínua*:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ \dfrac{2(x^3-x)}{x^2-4x+3}, & x < 1. \end{cases}$$

Questão 4

a) *Verifique se a função*

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

é derivável em $x = 0$.

b) *Determine a derivada da função* $f(x) = x^2.e^{\operatorname{tg}(-2x)}$ *em* $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

$Questão\ 5$

$a)\ Mostre\ que\ a\ função\ f(x) = |x^3 + 1|\ possui\ um\ ponto\ onde\ a\ derivada$ é $zero\ e\ um\ ponto\ onde\ a\ derivada\ não\ existe.$

$b)\ Considere\ a\ curva\ (x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36.\ Calcule\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ tangente\ a\ essa\ curva\ no\ ponto\ P\left(2, \sqrt{2}\right).$

Questão 1

$a)$ *Seja*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{7-(16)^{\frac{1}{x}}}{1+(16)^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 7, & x=0.\end{cases}$$

Determine se existe um número $c\in(2,4)$, *tal que* $f(c)=1$.

f *é uma função sentencial definida por uma composição das funções racional, polinomial e exponencial na primeira sentença, e por uma função constante. Logo, a continuidade da função* f *é expressa pela continuidade das funções que a compõe. Portanto, a primeira sentença, dada por* $\left[7-16^{1/x}\right]/\left[1+16^{1/x}\right]$ *tem como domínio, enquanto função,* $D=\{x\in\mathbb{R};\,x\neq 0\}$ *e, por estar definida como sentença de* $f(x)$ *para* $x\neq 0$, *então* f *é contínua em* $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Calculando $f(2)$ *e* $f(4)$ *obtemos, respectivamente:*

$$f(2)=\frac{7-\sqrt{16}}{1+\sqrt{16}}=\frac{7-4}{1+4}=\frac{3}{5}\qquad e\qquad f(4)=\frac{7-\sqrt[4]{16}}{1+\sqrt[4]{16}}=\frac{7-2}{1+2}=\frac{5}{3}$$

Como f *é contínua em* $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, *então* f *é contínua no intervalo fechado* $[2,4]$.

Se f *é contínua no intervalo fechado* $[2,4]$ *e* 1 *é um número entre* $f(2)$ *e* $f(4)$, *então existe algum* $c\in(2,4)$ *tal que* $f(c)=1$. *(Teorema do Valor Intermediário)*

Informação à parte, *podíamos determinar o valor de* c *da seguinte forma:*

$$f(c)=1\Rightarrow\frac{7-(16)^{\frac{1}{c}}}{1+(16)^{\frac{1}{c}}}=1\Rightarrow 7-(16)^{\frac{1}{c}}=1+(16)^{\frac{1}{c}}\Rightarrow 6=2(16)^{\frac{1}{c}}$$

$$(16)^{\frac{1}{c}}=3\Rightarrow\frac{1}{c}=\frac{\ln 3}{\ln 16}\therefore c=\frac{\ln 16}{\ln 3}=\log_3 16\quad onde\ 2<\log_3 16<4$$

$b)$ *Determine as assíntotas horizontais e verticais do gráfico da função* $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x^4+9}}{-2x^2+1}$.

Domínio da função f: $D(f)=\{x\in\mathbb{R};\,-2x^2+1\neq 0\ e\ 2x^4+9\geq 0\}$
Das condições temos,

$$-2x^2+1\neq 0\Rightarrow 2x^2\neq 1\therefore x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x^4+9\geq 0\ ;como\ x^4\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}, então\ 2x^4+9\geq 9,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Logo, $D(f)=\left\{x\in\mathbb{R};\,x\neq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ e\ x\neq-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

Dizemos que a reta $x=a$ *é uma assíntota vertical se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad ou \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

Pela definição de continuidade concluimos que as assíntotas verticais ocorrem nos pontos de descontinuidade da função. Logo, verificamos se as retas $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *são assíntotas verticais.*

$$\lim_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{2x^4+9}}^{\sqrt{19/2}}}{\underbrace{-2x^2+1}_{0^-}} = -\infty$$

Logo, a reta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *é uma assíntota vertical do gráfico de* $f(x)$.

$$\lim_{x\to -\frac{\sqrt{2}}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\sqrt{2}}{2}^+} \frac{\overbrace{\sqrt{2x^4+9}}^{\sqrt{19/2}}}{\underbrace{-2x^2+1}_{0^+}} = +\infty$$

Logo, a reta $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ *é uma assíntota vertical do gráfico de* $f(x)$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2x^4+9}}{-2x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4\left(2+\frac{9}{x^4}\right)}}{-2x^2+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{|x^2|\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)};$$

$*$ *Obs*: $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. *Portanto*, $|x^2| = x^2$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{|x^2|\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{x^2\left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{-2+\frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{\lim_{x\to +\infty} \left(-2+\frac{1}{x^2}\right)};$$

$$\frac{\lim_{x\to +\infty} \sqrt{2+\frac{9}{x^4}}}{\lim_{x\to +\infty} \left(-2+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{\sqrt{\lim_{x\to +\infty} 2 + \lim_{x\to +\infty} \frac{9}{x^4}}}{\lim_{x\to +\infty} -2 + \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2}} = \frac{\sqrt{2+0}}{-2+0} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$*$ *Obs*: $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, *porque para* $x \to \pm\infty$, $|x^2| = x^2$, *não havendo qualquer alteração no cálculo do limite acima.*

$Logo, a\ reta\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é a única assíntota horizontal do gráfico de $f(x)$.

Questão 2

a) Calcule $\lim_{x \to 0} x.e^{\text{sen}\frac{\pi}{x}}$.

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$-1 \leq \text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1$$
$$e^{-1} \leq e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq e^{1}$$
$$\frac{1}{e} \leq e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq e$$

$*$ Para $x > 0$, temos:

$$\frac{x}{e} \leq x.e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq x.e$$

Se $\frac{x}{e} \leq x.e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq xe$ quando x está próximo a 0 pela direta de 0 (exceto possivelmente em 0) e

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{e} = \lim_{x \to 0^+} xe = 0$$

então $\lim_{x \to 0^+} xe^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$. (Teorema do Confronto)

$*$ Para $x < 0$, temos:

$$\frac{x}{e} \geq x.e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \geq x.e$$
$$xe \leq x.e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \frac{x}{e}$$

Se $xe \leq x.e^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \frac{x}{e}$ quando x está próximo a 0 pela esquerda de 0 (exceto possivelmente em 0) e

$$\lim_{x \to 0^-} xe = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{e} = 0$$

então $\lim_{x \to 0^-} xe^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$. (Teorema do Confronto)

Como $\lim_{x \to 0^+} xe^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = \lim_{x \to 0^-} xe^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$, então $\lim_{x \to 0} xe^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}$ existe e $\lim_{x \to 0} xe^{\text{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$.

b) Assuma que $h(x) = [f(x)]^3$, onde f é uma função diferenciável. Se $f(0) = -\frac{1}{2}$ e $f'(0) = \frac{8}{3}$, determine uma equação da reta tangente ao gráfico de h em $x = 0$.

$h(0) = [f(0)]^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$. Ponto $P\left(0, -\frac{1}{8}\right)$.

Pela Regra da Cadeia,

$$h'(x) = 3[f(x)]^2.f'(x)$$

$O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ h\ em\ x = 0\ é\ h'(0). Logo,$

$m = h'(0) = 3[f(0)]^2 . f'(0) = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 . \left(\frac{8}{3}\right) = 3.\frac{1}{4}.\frac{8}{3} = 2.$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ h\ em\ x = 0, no\ ponto\ P\left(0, -\frac{1}{8}\right):$

$$y - \left(-\frac{1}{8}\right) = m(x - 0)$$
$$y + \frac{1}{8} = 2x$$
$$y = 2x - \frac{1}{8}$$

Questão 3

$a)\ A\ reta\ tangente\ à\ curva\ y = \ln(x^2 + e) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\ em\ x = 0\ forma\ com\ os\ eixos\ coordenados\ um\ triângulo. Qual\ é\ a\ área\ desse\ triângulo?$

$y = f(x) = \ln(x^2 + e) - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right); f(0) = \ln e - \operatorname{arctg} 0 = 1 - 0 = 1. Ponto\ P(0,1)$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e} - \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} . \left(\frac{1}{2}\right)\ ;\ f'(0) = \frac{0}{e} - \frac{1}{1 + 0} . \left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ à\ curva\ y = f(x)\ no\ ponto\ P(0,1):$

$$y - 1 = f'(0)(x - 0)$$
$$y - 1 = -\frac{1}{2}x$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$Interseções\ com\ os\ eixos\ coordenados:\ P(0,1)\ e\ A(2,0).$

$A\ área\ do\ triângulo\ delimitado\ pela\ reta\ e\ os\ eixos\ coordenados\ é:$

$$A_{\Delta AOP} = \frac{1}{2}(2).(1) = 1u.A$$

$b)\ Determine\ o\ conjunto\ de\ pontos\ em\ f\ é\ contínua:$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ \dfrac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3}, & x < 1. \end{cases}$$

$f\ é\ uma\ função\ sentencial\ formada\ por\ uma\ função\ raíz\ e\ uma\ função\ racional\ polinomial\ e, portanto, será\ contínua\ onde\ essas\ funções\ forem\ contínuas\ considerando\ o\ intervalo\ de\ validade\ de\ cada\ uma\ delas\ de\ acordo\ com\ f(x).$

$A\ função\ g(x) = \sqrt{x}\ está\ definida\ para\ x \geq 0\ e, como\ esta\ função\ é\ válida\ para\ x \geq 1\ em\ f(x), então\ f\ é\ contínua\ em\ (1, +\infty).$

$A\ função\ racional\ polinomial\ h(x) = \dfrac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3}\ está\ definida\ para\ a\ condição\ x^2 - 4x + 3 \neq 0\ e, portanto, x \neq 1\ e\ x \neq 3. Como\ esta\ função\ é\ válida\ para\ x < 1\ em\ f(x), então\ f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 1). Contudo, podemos\ reescrever\ esta\ função\ racional, uma\ vez\ que\ x \neq 1\ e\ x < 1\ para\ esta\ sentença.$

$$\frac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3} = \frac{2x(x^2 - 1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{2x(x+1)}{x-3}$$

$Logo,$
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ \dfrac{2x(x+1)}{x-3}, & x < 1 \end{cases}$$

$Verificando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ x = 1, temos:$

$$1)\ f(1)\ deve\ existir\ ;\ \ 2)\ \lim_{x \to 1} f(x)\ \ deve\ existir\ \ \ e\ \ \ 3)\ \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

$f(1) = \sqrt{1} = 1.$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x} = \sqrt{\lim_{x \to 1^+} x} = \sqrt{1} = 1.$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{2x(x+1)}{x-3} = \frac{\lim_{x \to 1^-} [2x(x+1)]}{\lim_{x \to 1^-} (x-3)} = \frac{2(1+1)}{(1-3)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$Como\ \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)\ dizemos\ que\ \lim_{x \to 1} f(x)\ \nexists\ e, portanto, f\ não\ é\ contínua\ em\ x = 1.$

$Portanto, f\ é\ contínua\ em\ (-\infty, 1) \cup (1, +\infty), ou\ ainda, \mathbb{R} - \{1\}.$

$\boldsymbol{Questão\ 4.}$

$a)\ Verifique\ se\ a\ função$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x > 0 \\ \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

$é\ derivável\ em\ x = 0.$

$Primeiramente, devemos\ verificar\ se\ f\ é\ contínua\ em\ x = 0. Logo,$

$$f(0) = \frac{1}{2}0^2 + 3.0 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1 \therefore f(0) = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x-1)^3 = \left[\lim_{x\to 0^+}(x-1)\right]^3 = [-1]^3 = -1.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x^2+3x-1\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} x^2 + 3\lim_{x\to 0^-} x - \lim_{x\to 0^-} 1 = \frac{1}{2}0^2+3.0-1 = -1.$$

Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$ *dizemos que* $\lim_{x\to 0} f(x)\ \exists$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x) = -1.$ *E ainda,* $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$ *e, portanto,* f *é contínua em* $x = 0.$
Analisando a diferenciavbilidade em $x = 0$*, temos:*

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^3-(-1)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^3+1}{x};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(x-1)^3+1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-3x^2+3x-1+1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-3x^2+3x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-3x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(x^2-3x+3) = \lim_{x\to 0^+} x^2 - \lim_{x\to 0^+} 3x + \lim_{x\to 0^+} 3 = 0-0+3 = 3.$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2+3x-1-(-1)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2+3x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}x^2+3x}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{2}x+3\right) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} 3 = \frac{1}{2}0+3 = 0+3 = 3.$$

Como f *é contínua em* $x = 0$ $\left(f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)\right)$ *e a derivadas laterais em* 0 *são iguais* $\left(f'_+(0) = f'_-(0)\right)$*, então* f *é diferenciável ou derivável em* $x = 0.$

$b)$ *Determine a derivada da função* $f(x) = x^2.e^{\operatorname{tg}(-2x)}$ *em* $x = -\frac{\pi}{6}.$

Domínio de f*:* $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\, x \neq \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \text{com } k \in \mathbb{Z}\right\};$

$$\ln f(x) = \ln x^2.e^{\operatorname{tg}(-2x)}$$
$$\ln f(x) = \ln x^2 + \ln e^{\operatorname{tg}(-2x)}$$
$$\ln f(x) = \ln x^2 + \operatorname{tg}(-2x)$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2x}{x^2} - 2\sec^2(-2x)$$

$$f'(x) = 2f(x)\left[\frac{1}{x} - \sec^2(-2x)\right];$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2f\left(-\frac{\pi}{6}\right)\left[-\frac{6}{\pi} - \sec^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\pi}{6}\right)^2 e^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)}\left[-\frac{6}{\pi} - \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}\right]$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} e^{\sqrt{3}} \left[-\frac{6}{\pi} - \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)} \right]$$

$$f'\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi^2}{18} e^{\sqrt{3}} \left[-\frac{6}{\pi} - 4 \right] = -\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{18} [4\pi + 6] = -\frac{\pi e^{\sqrt{3}}}{9} [2\pi + 3]$$

***Questão* 5**

a) Mostre que a função $f(x) = |x^3 + 1|$ *possui um ponto onde a derivada é zero e um ponto onde a derivada não existe.*

Analisando a função modular $|x^3 + 1|$, *temos*:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & x \geq -1 \\ -(x^3 + 1), & x < -1 \end{cases}$$

Seja $x + \Delta x > -1$, *então*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Seja $x + \Delta x < -1$, *então*:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[(x + \Delta x)^3 + 1] - [-(x^3 + 1)]}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 + 1] + x^3 + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3)}{\Delta x} =$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-3x^2 - 3x\Delta x - \Delta x^2) = -3x^2.$$

Uma expressão para $f'(x)$ *pode ser dada por*:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > -1 \\ -3x^2, & x < -1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 0 \therefore x = 0.$ *Porém,* $x = 0$ *não pertence à esta sentença!*
$f'(x) = 0 \Longrightarrow -3x^2 = 0 \therefore x = 0$ *e* $0 \in (-\infty, -1)$.

Logo, $f'(x) = 0$ *em* $x = 0$.

Como f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e diferenciável em* $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, *nos resta saber se* f *é diferenciável em* $x = -1$. *Portanto,*

$$f'_+(-1) = 3(-1)^2 = 3 \quad e \quad f'_-(-1) = -3(-1)^2 = -3$$

Como f *é contínua em* $x = -1$ *e as derivadas laterais existem, porém, são diferentes, então* f *não é derivável em* $x = -1$.

$b)$ *Considere a curva* $(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36.$ *Calcule uma equação para a reta tangente a essa curva no ponto* $P(2,\sqrt{2})$.

Verificar se o ponto P pertence à curva da implicitamente pela expressão

$$(x^2+y^2+4)^2-16x^2=36$$
$$\left(2^2+\left(\sqrt{2}\right)^2+4\right)^2-16\times 2^2=36$$
$$(4+2+4)^2-16\times 4=36$$
$$(10)^2-64=36$$
$$100-64=36$$
$$36=36$$

Logo, P pertence à curva. Derivando implicitamente a expressão, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2+y^2+4)^2-16.\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(36)$$
$$2(x^2+y^2+4).\frac{d}{dx}(x^2+y^2+4)-16.\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(36)$$
$$2(x^2+y^2+4)\left[\frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(y^2)+\frac{d}{dx}(4)\right]-16.\frac{d}{dx}(x^2)=\frac{d}{dx}(36)$$
$$2(x^2+y^2+4)(2x+2y.y')-32x=0$$
$$4yy'(x^2+y^2+4)=32x-4x(x^2+y^2+4)$$
$$y'=\frac{-4x(x^2+y^2-4)}{4y(x^2+y^2+4)}=-\frac{x(x^2+y^2-4)}{y(x^2+y^2+4)}$$

No ponto P, temos:

$$y'=-\frac{2(4+2-4)}{\sqrt{2}(4+2+4)}=-\frac{4}{10\sqrt{2}}=-\frac{4\sqrt{2}}{20}=-\frac{\sqrt{2}}{5}$$

Equação da reta tangente à curva no ponto $P(2,\sqrt{2})$:

$$y-\sqrt{2}=-\frac{\sqrt{2}}{5}(x-2)$$
$$y=-\frac{\sqrt{2}}{5}x+\frac{2\sqrt{2}}{5}+\sqrt{2}$$
$$y=-\frac{\sqrt{2}}{5}x+\frac{7\sqrt{2}}{5}$$

2.10 Prova de Reavaliação da AB1 – 21 de Maio de 2016

Questão 1

a) Uma das assíntotas da função $f(x) = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ *(a que fica abaixo do eixo x) intercepta o gráfico de* $g(x) = -\dfrac{1}{2} + \operatorname{sen} x$ *em dois pontos, no intervalo* $[0,2\pi]$. *Estes dois pontos, juntamente com a origem do sistema cartesiano determinam um triângulo. Qual é sua área?*

b) Dada a função $y = (a+e)^x$, *sabemos que* $a = \lim_{w \to 4^-} ([\![w^2]\!] - 4)$ *e também que* $y = \lim_{w \to 2} \dfrac{2\operatorname{sen}(3w-6)}{\operatorname{sen}(2w-4)}$. *Descubra o valor de x.*

Questão 2

a) O coeficiente angular da reta normal à curva $2xy + \pi.\operatorname{sen} y = 2\pi$ *em um ponto* (x_0, y_0) *é* $\dfrac{x_0}{y_0}$. *Encontre* x_0 *e* y_0, *sabendo que* y_0 *pertence ao intervalo* $(0,\pi)$.

b) Se $f(x) = x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}$, *encontre* $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Questão 3

a) A função $f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^{10}\operatorname{sen}\left(\dfrac{100}{x-\pi}\right), & x \neq \pi \\ 0, \quad x = \pi \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$? *Justifique sua resposta.*

b) Determine a derivada da função $f(x) = \ln\sqrt{(3x^2+2).\sqrt{6x-7}}$.

Questão 4

a) Mostre que a equação $x.2^x = 1$ *tem solução real.*

b) Determine a abscissa de cada um dos pontos do gráfico de $f(x) = 4^x x^4$ *onde a reta tangente é horizontal.*

Questão 5

a) Analise a diferenciabilidade da função $f(x) = |x^2 - 9|$ *em* $x = 3$.

b) Determine uma equação para a reta tangente ao gráfico de $f(x) = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{arctg} x}$, *em* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Questão 1

$a)$ *Uma das assíntotas da função* $f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}$ *(a que fica abaixo do eixo x) intercepta o gráfico de* $g(x)=-\dfrac{1}{2}+\operatorname{sen}x$ *em dois pontos, no intervalo* $[0,2\pi]$. *Estes dois pontos, juntamente com a origem do sistema cartesiano determinam um triângulo. Qual é sua área?* $*\,D(f)=\mathbb{R}$

Assíntota que fica abaixo do eixo x é uma assíntota horizontal. Logo,

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=L;\ L<0 \text{ é a assíntota em questão.}$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^{2x}\left(1-\frac{1}{3^{2x}}\right)}{3^{2x}\left(1+\frac{1}{3^{2x}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{3^{2x}}}{1+\frac{1}{3^{2x}}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}1-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3^{2x}}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3^{2x}}}=\frac{1-0}{1+0}=\frac{1}{1}=1.\ \text{Assíntota Horizontal } y=1.$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x-\frac{1}{3^x}}{3^x+\frac{1}{3^x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{3^x}(3^{2x}-1)}{\frac{1}{3^x}(3^{2x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}3^{2x}-\lim\limits_{x\to-\infty}1}{\lim\limits_{x\to-\infty}3^{2x}+\lim\limits_{x\to-\infty}1}=\frac{0-1}{0+1}=\frac{-1}{1}=-1.\text{Assíntota Horizontal } y=-1.$$

$*$ *A assíntota que intercepta o gráfico de* $g(x)$ *é a assíntota horizontal* $y=-1$.

$$-1=-\frac{1}{2}+\operatorname{sen}x\Longrightarrow\operatorname{sen}x=-\frac{1}{2}\therefore x_1=\frac{7\pi}{6}\ e\ x_2=\frac{11\pi}{6}$$

Os pontos $A\left(\frac{7\pi}{6},-1\right), B\left(\frac{11\pi}{6},-1\right)$ *e* $O(0,0)$ *delimitam um triângulo* ΔAOB *tal que:*

$$A_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}|-1|.\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{4\pi}{12}=\frac{\pi}{3}\ u.A$$

$b)$ *Dada a função* $y=(a+e)^x$, *sabemos que* $a=\lim\limits_{w\to4^-}([\![w^2]\!]-4)$ *e também que* $y=\lim\limits_{w\to2}\dfrac{2\operatorname{sen}(3w-6)}{\operatorname{sen}(2w-4)}$. *Descubra o valor de x.*

$*$ *Se* $w\to4^-$, *então* $w<4$ *e, portanto,* $w^2<16$. *Dessa forma,* $[\![w^2]\!]=15$.

$$a=\lim_{w\to4^-}([\![w^2]\!]-4)=\lim_{w\to4^-}[\![w^2]\!]-\lim_{w\to4^-}4=15-4=11.$$

$$y = \lim_{w \to 2} \frac{2\,\mathrm{sen}(3w-6)}{\mathrm{sen}(2w-4)} = \lim_{w \to 2} \frac{2\,\mathrm{sen}\big(3(w-2)\big)}{\mathrm{sen}\big(2(w-2)\big)}\ ;$$

$Seja\ \theta = w - 2. Se\ w \to 2, então\ \theta \to 0. Ajustando\ o\ limite, temos:$

$$y = \lim_{w \to 2} \frac{2\,\mathrm{sen}\big(3(w-2)\big)}{\mathrm{sen}\big(2(w-2)\big)} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}(3\theta)}{\mathrm{sen}(2\theta)} = \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{2\,\mathrm{sen}(3\theta)}{\mathrm{sen}(2\theta)} \cdot \frac{3\theta}{3\theta} \cdot \frac{2\theta}{2\theta}\right] =$$

$$2 \times \lim_{\theta \to 0} \left[\frac{\mathrm{sen}(3\theta)}{3\theta} \cdot \frac{2\theta}{\mathrm{sen}(2\theta)} \cdot \frac{3\theta}{2\theta}\right] = 2 \times \left[\lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{sen}(3\theta)}{3\theta} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\mathrm{sen}(2\theta)} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{3\theta}{2\theta}\right] =$$

$$*\ Obs\text{: } \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}(kx)}{kx} = 1\ (Limite\ Fundamental\ Trigonométrico)$$

$$2 \times \left[\lim_{\theta \to 0} \frac{\mathrm{sen}(3\theta)}{3\theta} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{2\theta}{\mathrm{sen}(2\theta)} \times \lim_{\theta \to 0} \frac{3\theta}{2\theta}\right] = 2 \times \left[1 \times 1 \times \frac{3}{2}\right] = 3\ \therefore\ y = 3.$$

$y = (a+e)^x\ ; com\ a = 11\ e\ y = 3, temos:$

$$3 = (11+e)^x\ \therefore\ x = \frac{\ln 3}{\ln(11+e)}$$

Questão 2

$a)\ O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ à $curva\ 2xy + \pi.\mathrm{sen}\,y = 2\pi\ em\ um\ ponto\ (x_0, y_0)$ é $\frac{x_0}{y_0}. Encontre\ x_0\ e\ y_0, sabendo\ que\ y_0\ pertence\ ao\ intervalo\ (0, \pi).$

$Derivando\ a\ expressão\ da\ curva\ implicitamente, obtemos:$

$$\frac{d}{dx}(2xy) + \pi \frac{d}{dx}(\mathrm{sen}\,y) = \frac{d}{dx}(2\pi)$$
$$2(y + xy') + \pi \cos y \,.\, y' = 0$$
$$y'(2x + \pi \cos y) = -2y$$
$$y' = -\frac{2y}{2x + \pi \cos y}$$

$O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal$ é $m_N = -\frac{1}{y'}. Logo,$

$$m_N = \frac{2x + \pi \cos y}{2y}$$

$No\ ponto\ (x_0, y_0)\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ normal\ dito\ no\ enunciado$ é $\frac{x_0}{y_0}.$

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{2x_0 + \pi \cos y_0}{2y_0}$$
$$2x_0 = 2x_0 + \pi \cos y_0$$
$$\pi \cos y_0 = 0$$
$$\cos y_0 = 0\ \therefore\ y_0 = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi).$$

$Com\ o\ valor\ de\ y_0, voltamos\ à\ expressão\ da\ curva$:

$$2x_0y_0 + \pi \operatorname{sen} y_0 = 2\pi$$
$$2x_0.\frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 2\pi$$
$$x_0\pi + \pi = 2\pi$$
$$x_0\pi = \pi \therefore x_o = 1.$$

$O\ ponto\ em\ questão\ é\ \left(1,\frac{\pi}{2}\right).$

$b)\ Se\ f(x) = x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}, encontre\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right).$

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < \pi(2k+1), com\ k \in \mathbb{N}\}$$

$\ln f(x) = \ln[x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}]$
$\ln f(x) = \ln x^{\cos x} + \ln(\operatorname{sen} x)^{x+1}$
$\ln f(x) = \cos x . \ln x + (x+1)\ln(\operatorname{sen} x)$

$Por\ diferenciação\ logarítmica, obtemos$:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\operatorname{sen} x . \ln x + \frac{\cos x}{x} + \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1)\operatorname{cotg} x$$
$$f'(x) = f(x)\left[-\operatorname{sen} x . \ln x + \frac{\cos x}{x} + \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1)\operatorname{cotg} x\right]$$
$$f'(x) = x^{\cos x}.(\operatorname{sen} x)^{x+1}\left[-\operatorname{sen} x . \ln x + \frac{\cos x}{x} + \ln(\operatorname{sen} x) + (x+1)\operatorname{cotg} x\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\cos\frac{\pi}{2}}.\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\pi}{2}+1}\left[-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}.\ln\frac{\pi}{2} + \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + \ln\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^0}{2}.(1)^{\frac{\pi+2}{2}}\left[-1.\ln\frac{\pi}{2} + \frac{0}{\frac{\pi}{2}} + \ln 1 + \left(\frac{\pi+2}{2}\right).0\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln\frac{\pi}{2} = \ln\frac{2}{\pi}.$$

Questão 3

$a)\ A\ função\ f(x) = \begin{cases}(x-\pi)^{10}\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right), & x \neq \pi \\ 0, \quad x = \pi\end{cases}$ $é\ contínua\ em\ \mathbb{R}?$
$Justifique\ sua\ resposta.$

$f\ é\ uma\ função\ sentencial\ e, portanto, será\ contínua\ onde\ as\ funções\ que\ a\ compõe\ são\ contínuas, considerando\ os\ intervalos\ de\ validade\ da\ cada\ uma\ de\ acordo\ com\ a\ função\ f.$

$*\ (x-\pi)^{10}\ é\ uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ em\ \mathbb{R}.$

$* \operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right)$ *é uma composição de função trigonométrica e racional polinomial. Logo, esta função é contínua onde seu argumento estiver definido, ou seja, para* $x \neq \pi$.
Como $(x-\pi)^{10}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$, *e então,* $(x-\pi)$ *é contínua em qualquer intervalo definido em* $\mathbb{R}$. *Logo, o produto das duas funções* $(x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right)$ *é contínua em* $(-\infty,\pi) \cup (\pi,+\infty)$.
Analisando a continuidade de f *em* $x=\pi$, *temos:*

1) $f(\pi)=0$

2) $\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{x\to\pi}(x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right);$

Pela desigualdade trigonométrica, temos:

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) \leq 1$$

Como $(x-\pi)^{10} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, *temos:*

$$-(x-\pi)^{10} \leq (x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) \leq (x-\pi)^{10}$$

Se $-(x-\pi)^{10} \leq (x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) \leq (x-\pi)^{10}$ *quando* x *está próximo a* π *(exceto possivelmente em* π*) e* $\lim_{x\to\pi} -(x-\pi)^{10} = \lim_{x\to\pi}(x-\pi)^{10} = 0$, *então*

$$\lim_{x\to\pi}(x-\pi)^{10}.\operatorname{sen}\left(\frac{100}{x-\pi}\right) = 0 \quad (\textit{Teorema do Confronto})$$

3) *Como* $\lim_{x\to\pi} f(x) = f(\pi)$, *então* f *é contínua em* $x=\pi$ *e, juntamente com o intervalo de continuidade determinado anteriormente, concluimos que* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

b) Determine a derivada da função $f(x) = \ln\sqrt{(3x^2+2).\sqrt{6x-7}}$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 7/6\}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left[(3x^2+2)\sqrt{6x-7}\right]$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(3x^2+2) + \ln\sqrt{6x-7}\right]$$
$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\ln(3x^2+2) + \frac{1}{2}\ln(6x-7)\right]$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{6x}{3x^2+2} + \frac{1}{2}.\frac{6}{6x-7}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{6x}{3x^2+2} + \frac{3}{6x-7}\right]$$
$$f'(x) = \frac{3x}{3x^2+2} + \frac{3}{12x-14}$$

Questão 4

a) *Mostre que a equação* $x.2^x = 1$ *tem solução real.*

Seja $f(x) = x.2^x$. f *é uma função formada pelo produto de duas funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$. *Sabemos que* $f(0) = 0$ *e* $f(1) = 2$. *Como* f *é contínua em* $\mathbb{R}$, *então* f *é contínua no intervalo fechado* $[0,1]$ *e* 1 *é um número entre* $f(0)$ *e* $f(1)$. *Então existe algum* $c \in (0,1)$ *tal que* $f(c) = 1$.
(*Teorema do Valor Intermediário*)

Onde $f(c) = 1$ *é a solução da equação* $x.2^x = 1$. *Com isso, mostramos que a equação possui solução real no intervalo para algum* $x \in (0,1)$.

b) *Determine a abscissa de cada um dos pontos do gráfico de* $f(x) = 4^x x^4$ *onde a reta tangente é horizontal.*

Em outras palavras, determinar os valores de x *tal que* $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 4^x \ln 4\, x^4 + 4^{x+1}.x^3$$
$$f'(x) = 4^x x^3 [x.\ln 4 + 4]$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow x^3 = 0 \quad ou \quad x.\ln 4 + 4 = 0$$

Portanto, $x = 0$ *e* $x = -\dfrac{4}{\ln 4}$ *são as abscissas onde a reta tangente ao gráfico de* $f(x)$ *é horizontal.*

Questão 5

a) *Analise a diferenciabilidade da função* $f(x) = |x^2 - 9|$ *em* $x = 3$.

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} x^2 - 9, & x \le -3 \quad ou \quad x \ge 3 \\ -(x^2 - 9), & -3 < x < 3 \end{cases}$$

Primeiramente verificamos se f *é contínua em* $x = 3$.

$$f(3) = |3^2 - 9| = |9 - 9| = |0| = 0.$$

$$\lim_{x\to 3} f(x);$$
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x^2 - 9) = \lim_{x\to 3^+} x^2 - \lim_{x\to 3^+} 9 = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0.$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (-x^2 + 9) = \lim_{x\to 3^-} -x^2 + \lim_{x\to 3^-} 9 = -3^2 + 9 = -9 + 9 = 0.$$
$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 0.$$

Como $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$, *então* f *é contínua em* $x = 3$.

$Analisando\ a\ diferenciabilidade\ de\ f\ em\ x = 3, temos:$

$$f'_+(3) = \lim_{x\to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x^2 - 9) - 0}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)};$$
$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3^+} (x+3) = \lim_{x\to 3^+} x + \lim_{x\to 3^+} 3 = 3 + 3 = 6.$$

$$f'_-(3) = \lim_{x\to 3^-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x^2 - 9) - 0}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-x^2 + 9}{x - 3};$$
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{-x^2 + 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3^-} (-x - 3) = \lim_{x\to 3^-} (-x) - \lim_{x\to 3^-} 3 = -6.$$

$Como\ as\ derivadas\ laterais\ existem, mas\ são\ diferentes, então\ f\ não\ é\ derivável$ $em\ x = 3.$

$b)\ Determine\ uma\ equação\ para\ a\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de$
$f(x) = [\operatorname{tg} x]^{\operatorname{arctg} x}, em\ x = \frac{\pi}{4}.$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; 2k\pi < x < \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)\ ou\ \pi(2k+1) < x < \pi\left(\frac{3}{2} + 2k\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$Ponto\ de\ abscissa\ x = \frac{\pi}{4} : P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right).$

$$\ln f(x) = \operatorname{arctg} x \,.\, \ln(\operatorname{tg} x)$$

$Por\ diferenciação\ logarítmica, obtemos:$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{1 + x^2} . \ln(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arctg} x \,.\, \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1 + x^2} . \ln(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arctg} x \,.\, \frac{\sec^2 x}{\operatorname{tg} x}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[\frac{1}{1 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2} \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \frac{\sec^2 \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\left[\frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}} . \ln(1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{1}\right]$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}$$

$Equação\ da\ reta\ tangente\ ao\ gráfico\ de\ f(x)\ em\ x = \frac{\pi}{4}:$

$$y - 1 = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) . \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$y = 2x . \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 1$$

2.11 Prova de Reavaliação da AB2 – 20 de Maio de 2016

Questão 1

a) *Um triângulo retângulo isósceles tem catetos com medidas* $\sqrt{2}cm$. *Determine, usando diferenciais, a variação em sua área, se um de seus ângulos agudos aumenta* $1°$.

b) *Determine, sem o uso de funções trigonométricas inversas, as abscissas dos pontos nos quais a equação* $4\cosh^2 x = 7\,\mathrm{senh}\, x + 1$ é *satisfeita*.

Questão 2

a) *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$ *no intervalo* $[-4,3]$.

b) *Prove que para qualquer valor de m, a função* $f(x) = x^3 - 3x + m$ *não pode ter duas raízes reais no intervalo* $[0,1]$.

Questão 3

a) *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{1}{x^2} - 2\,\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}$.

b) *Ache, analiticamente, os pontos de inflexão do gráfico da função* $f(x) = \mathrm{tg}\, x$, *no intervalo* $(-2\pi, 2\pi)$. *Ache também as equações das retas tangentes ao gráfico de f nos pontos de inflexão.*

Questão 4

a) *O raio de um cilindro circular reto está crescendo a* $4\,cm/s$, *mas sua área total permanece constante e medindo* $600\pi\ cm^2$. *A que taxa a altura varia quando o raio tem* $10cm$?

b) *Um cilindro circular reto* é *gerado pela rotação de um retângulo de perímetro P, em torno de um de seus lados. Que dimensões deve ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo*?

Questão 5

a) *O volume de água num tanque* é $V\ m^3$, *quando a profundidade* é *h metros*. *Se a taxa de variação do volume em relação* à *altura for* $\dfrac{dV}{dh} = \pi[4h^2 + 12h + 9]$, *ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de* $3m$.

b) *Se* $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, *então* $f'(x) = \dfrac{2}{(x^2+1)^{3/2}}$ *e* $f''(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^{5/2}}$.

Com base nisto, determine os extremos relativos de f*, as assíntotas do gráfico, os intervalos onde a função cresce e onde ela decresce, os pontos de inflexão e os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo. Depois destas análises, faça o gráfico de* f.

***Questão* 1**

$a)$ *Um triângulo retângulo isósceles tem catetos com medidas* $\sqrt{2}cm$. *Determine, usando diferenciais, a variação em sua área, se um de seus ângulos agudos aumenta* $1°$.

A hipotenusa desse triângulo é $a = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2cm.$

Dado dois lados de um triângulo e o ângulo adjacente entre eles, a área deste triângulo é expressa por

$$A = \frac{1}{2}ab.\operatorname{sen}\theta$$

$$A(\theta) = \frac{1}{2}(2)\left(\sqrt{2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$A(\theta) = \sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$$

Para pequenas variações no ângulo θ, *temos*:

$$\Delta A \approx dA$$

$$\Delta A \approx A'(\theta)d\theta = \sqrt{2}\cos\theta\,.\frac{\pi}{180}$$

Onde $\theta = 45° = \frac{\pi}{4}$. *Então* ...

$$\Delta A \approx \sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{180}cm^2$$

$b)$ *Determine, sem o uso de funções trigonométricas inversas, as abscissas dos pontos nos quais a equação* $4\cosh^2 x = 7\operatorname{senh} x + 1$ *é satisfeita*.

$*$ *Identidade trigonométrica hiperbólica*: $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$$4(1 + \operatorname{senh}^2 x) = 7\operatorname{senh} x + 1$$

$$4\operatorname{senh}^2 x - 7\operatorname{senh} x + 3 = 0$$

$$\operatorname{senh} x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(4)(3)}}{2(4)} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}$$

$$\operatorname{senh} x_1 = 1 \quad e \quad \operatorname{senh} x_2 = \frac{3}{4}$$

Cálculo de x_1:

$$\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = 1$$

$$e^{x_1} - e^{-x_1} = 2$$

$$e^{2x_1} - 1 = 2e^{x_1}$$

$$(e^{x_1})^2 - 2(e^{x_1}) - 1 = 0$$

$$y_1^2 - 2y_1 - 1 = 0 \quad ; y_1 = e^{x_1} > 0$$

$$y_1 = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$y_1 = 1 + \sqrt{2}.$$

$$y_1 = e^{x_1} \therefore x_1 = \ln y_1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

e

Cálculo de x_2:

$$\frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$e^{x_2} - e^{-x_2} = \frac{3}{2}$$

$$2e^{2x_2} - 2 = 3e^{x_2}$$

$$2(e^{x_2})^2 - 3(e^{x_2}) - 2 = 0$$

$$2y_2^2 - 3y_2 - 2 = 0 \quad ; y_2 = e^{x_2} > 0$$

$$y_2 = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$y_2 = 2.$$

$$y_2 = e^{x_2} \therefore x_2 = \ln y_2 = \ln 2$$

As abscissas dos pontos que satisfaz a equação são $x_1 = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right)$ *e* $x_2 = \ln 2$.

Questão 2

$a)$ *Encontre os valores máximos e mínimos absolutos da função* $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 4)$ *no intervalo* $[-4,3]$.

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x + 4 > 0\}$$

$\Delta = 2^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12.$

Logo, o logaritmando é uma função ou estritamente positiva ou estritamente negativa. Observando o termo independente $+4$*, concluimos que* $x^2 + 2x + 4 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Como* f *é contínua onde está definida, então* f *é contínua em* $\mathbb{R}$*. Portanto,* f *é contínua no intervalo fechado* $[-4,3]$ *e podemos utilizar o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores máximos e mínimos absolutos do intervalo.*

1) *Valores de* f *nos extremos do intervalo:*
$f(-4) - \ln((-4)^2 + 2(-4) + 4) = \ln(16 - 8 + 4) = \ln 12$
$f(3) = \ln(3^2 + 2(3) + 4) = \ln(9 + 6 + 4) = \ln 19$

2) *Valores de* f *nos números críticos em* $(-4,3)$.

"*Um número crítico de uma função* f *é um número* c *no domínio de* f *onde ou* $f'(c) = 0$ *ou onde* $f'(c)$ *não existe*"

$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 4} \; ; \; D(f') = \mathbb{R}$$

Como f *é diferenciável em* $\mathbb{R}$*, se* f *admite algum número critico* c*, então* $f'(c)$ *existe e* $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2(x+1)}{x^2 + 2x + 4} = 0 \Longrightarrow 2(x+1) = 0 \therefore x = -1; \; -1 \in (-4,3)$$
Logo, -1 *é um número crítico no intervalo* $(-4,3)$.

$f(-1) = \ln((-1)^2 + 2(-1) + 4) = \ln(1 - 2 + 4) = \ln 3$

Comparando os valores obtidos, concluimos que $\ln 19$ *é o valor máximo absoluto e* $\ln 3$ *é o valor mínimo absoluto de* f *no intervalo fechado* $[-4,3]$.

$b)$ *Prove que para qualquer valor de* m*, a função* $f(x) = x^3 - 3x + m$ *não pode ter duas raízes reais no intervalo* $[0,1]$.

Suponhamos que f *possui duas raízes reais* a *e* b *, tais que* $0 < a < b < 1$ *e* $f(a) = f(b) = 0$*. Como* f *é uma função polinomial e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[a,b]$*, diferenciável em* (a,b) *e* $f(a) = f(b)$*, pelo Teorema de Rolle, existe algum* $c \in (a,b)$ *tal que* $f'(c) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 3 \; ; \; f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1.$

Como $x = -1$ *e* $x = 1$ *não pertence ao intervalo* (a,b)*, uma vez que,* $(a,b) \subset [0,1]$*, por contradição,* f *não pode ter duas raízes reais no intervalo* $[0,1]$.

Questão 3

a) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - 2\,\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. *Indeterminação do tipo* "$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 2\,\text{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{\Longrightarrow} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{2}{x^3} - \frac{2}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x} - \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}}\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} - \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 2}{\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}} = 0 - \frac{2}{1+0} = 0 - 2 = -2.$$

b) Ache, analiticamente, os pontos de inflexão do gráfico da função $f(x) = \text{tg}\,x$*, no intervalo* $(-2\pi, 2\pi)$*. Ache também as equações das retas tangentes ao gráfico de* f *nos pontos de inflexão.*

Considerado o intervalo $(-2\pi, 2\pi)$ *a função* $f(x) = \text{tg}\,x$ *está definida para* $x \neq \left\{-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

$f'(x) = \sec^2 x$
$f''(x) = 2\sec^2 x\,\text{tg}\,x$; $\sec^2 x \geq 1$

Analisando o sinal de $f''(x)$*, temos:*

$$(0) +++ \left(\frac{\pi}{2}\right) --- (\pi) +++ \left(\frac{3\pi}{2}\right) --- (2\pi)$$

Como f *é uma função ímpar, isto é,* $f(-x) = -f(x)$*, analogamente ao estudo anterior, temos:*

$$(-2\pi) +++ \left(-\frac{3\pi}{2}\right) --- (-\pi) +++ \left(-\frac{\pi}{2}\right) --- (0)$$

Os pontos em destaque não são pontos de inflexão embora haja mudança na direção da concavidade da função, estes números não pertencem ao domínio de f*. Por outro lado, ocorre a mudança na direção da concavidade nos números* $x = \{-\pi, 0, \pi\}$ *que pertencem ao domínio de* f *e ao intervalo* $(-2\pi, 2\pi)$*. Logo, temos pontos de inflexão em* $-\pi, 0$ *e* π.

$f(-\pi) = \text{tg}(-\pi) = 0$	$PI_1 = (-\pi, 0)$	$f'(-\pi) = \sec^2(-\pi) = (-1)^2 = 1$
$f(0) = \text{tg}\,0 = 0$	$PI_2 = (0,0)$	$f'(0) = \sec^2 0 = 1^2 = 1$
$f(\pi) = \text{tg}\,\pi = 0$	$PI_3 = (\pi, 0)$	$f'(\pi) = \sec^2\pi = (-1)^2 = 1$

Equação das retas tangentes nos pontos de inflexão PI_1, PI_2 *e* PI_3*:*

$y - 0 = f'(-\pi)(x+\pi)$;	$y - 0 = f'(0)(x-0)$;	$y - 0 = f'(\pi)(x-\pi)$
$y = x + \pi$	$y = x$	$y = x - \pi$

Questão 4

a) O raio de um cilindro circular reto está crescendo a $4\,cm/s$, mas sua área total permanece constante e medindo $600\pi\ cm^2$. A que taxa a altura varia quando o raio tem $10cm$?

$A_T = 2\pi r(r+h) = 600\pi \therefore r(r+h) = 300 \implies h = \dfrac{300}{r} - r$

Pela Regra da Cadeia, temos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{dr}.\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \left(-\frac{300}{r^2} - 1\right).4$$
$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{r=10cm} = \left(-\frac{300}{100} - 1\right)4 = -16\,cm/s$$

Portanto, a altura está decrescendo à taxa de $16cm/s$.

b) Um cilindro circular reto é gerado pela rotação de um retângulo de perímetro P, em torno de um de seus lados. Que dimensões deve ter o retângulo para gerar o cilindro de volume máximo?

$$P = 2(b+l) \implies l = \frac{P}{2} - b$$

Girando em torno do lado de medida l, temos:

$V(b,l) = \pi b^2.l$

$V(b) = \pi b^2.\left(\dfrac{P}{2} - b\right)$

$V(b) = \pi\left(\dfrac{Pb^2}{2} - b^3\right)$

$V'(b) = \pi(Pb - 3b^2)$

Analisando o sinal de $V'(b)$, temos:

$$-----(0)++++\left(\frac{P}{3}\right)------\quad V'(b)$$

Pelo Teste da Primeira Derivada, $b = \dfrac{P}{3}$ é um número crítico associado a um ponto de máximo local e absoluto de $V(b)$, uma vez que, $V(b) \le V\left(\dfrac{P}{3}\right)$ para $b > 0$. Logo, para as dimensões $b = \dfrac{P}{3}$ e $l = \dfrac{P}{6}$ teremos o cilindro de volume máximo.

***Questão* 5**

$a)$ *O volume de água num tanque é* $V\ m^3$, *quando a profundidade é* h *metros.* *Se a taxa de variação do volume em relação à altura for* $\frac{dV}{dh} = \pi[4h^2 + 12h + 9]$, *ache o volume de água no tanque quando a profundidade for de* $3m$.

$$\frac{dV}{dh} = V'(h) = \pi[4h^2 + 12h + 9]$$

A antiderivada ou primitiva mais geral de $V'(h)$ *é:*

$$V(h) = \pi\left[\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h\right] + C$$

Se a profundidade da coluna de água no tanque é 0, *então nao há volume de água no tanque, ou seja,* $V(0) = 0$. *Portanto,* $C = 0$. *Logo,*

$$V(h) = \pi\left[\frac{4}{3}h^3 + 6h^2 + 9h\right]$$

Quando a profundidadefor de $3m$, *teremos:*

$$V(3) = \pi\left[\frac{4}{3}3^3 + 6(3)^2 + 9(3)\right] = \pi[36 + 54 + 27] = 117\pi\ m^3 \textit{ de água.}$$

$b)$ *Se* $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$, *então* $f'(x) = \frac{2}{(x^2+1)^{3/2}}$ *e* $f''(x) = \frac{-6x}{(x^2+1)^{5/2}}$.
Com base nisto, determine os extremos relativos de f, *as assíntotas do gráfico, os intervalos onde a função cresce e onde ela decresce, os pontos de inflexão e os intervalos onde a concavidade é voltada para cima ou para baixo. Depois destas análises, faça o gráfico de* f.

1) *Domínio da função* f: $D(f) = \mathbb{R}$.

2) *Interseções com os eixos coordenados:* $O(0,0)$.

3) *Assíntotas:*

$*$ *Não há assíntotas verticais em* f *porque a função* f *é contínua em* $\mathbb{R}$ *e, portanto,* $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. *E pela definição de assíntota vertical* $\left(\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty\right)$ *estas ocorrem em pontos de descontinuidade, porém,* f *é contínua em* $\mathbb{R}$.

Dizemos que a reta $y = L$ *é uma assíntota horizontal se ocorrer um dos casos a seguir:*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \qquad ou \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}};$$

Obs: se $x \to +\infty$, *então* $|x| = x$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to+\infty}2}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$
$$\frac{\lim_{x\to+\infty}2}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}}=\frac{2}{1}=2.$$

$Portanto, a\ reta\ y=2$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}};$$

$*\ Obs: se\ x\to-\infty, então\ |x|=-x.$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\lim_{x\to-\infty}-2}{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=$$
$$\frac{\lim_{x\to-\infty}-2}{\sqrt{\lim_{x\to-\infty}1+\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}}=\frac{-2}{\sqrt{1+0}}=\frac{-2}{1}=-2.$$

$Portanto, a\ reta\ y=-2$ é $uma\ assíntota\ horizontal\ ao\ gráfico\ de\ f(x).$

$*\ Oblíqua: Dizemos\ que\ a\ reta\ y=ax+b$ é $uma\ assíntota\ oblíqua\ do\ gráfico$ $de\ uma\ função\ f\ se, somente\ se, \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0.$

$Onde\ a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\ ; a\neq 0\ \ e\ \ b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax]\,;$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{\underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{\downarrow\atop +\infty}}=0$$

$Portanto, f\ não\ possui\ assíntota\ oblíqua.$

3) $Crescimento, decrescimento\ e\ pontos\ extremos\ relativos:$

$$f'(x)=\frac{2}{(x^2+1)^{3/2}}>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

$*\ Como\ f'(x)>0, \forall x\in D(f), então\ f$ é $sempre\ crescente.$
$*\ Na\ ausência\ de\ números\ críticos\ de\ f, sendo\ f\ contínua\ e\ diferenciável\ em\ \mathbb{R},$ $então\ f\ não\ possui\ pontos\ extremos\ relativos.$

4) $Concavidade\ e\ pontos\ de\ inflexão:$

$$f''(x)=-\frac{6x}{(x^2+1)^{5/2}}$$

Estudo da concavidade da função f *pelo sinal de* $f''(x)$:

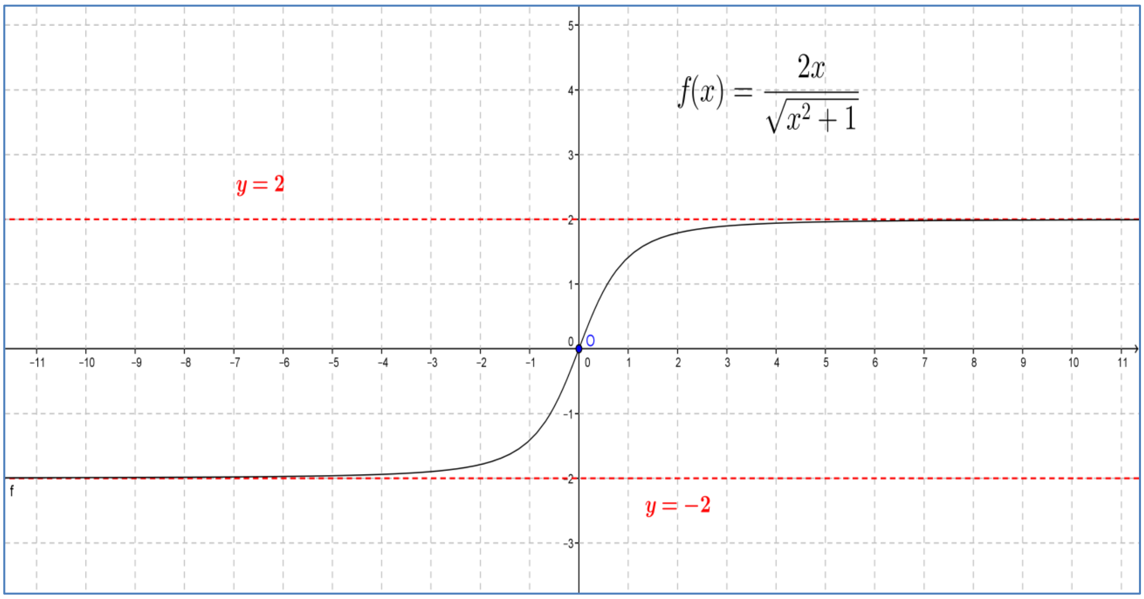
$$+ + + + + + + + (0) - - - - - - - - \quad f''(x)$$

Pelo estudo do sinal da segunda derivada de f, *concluimos que*:

f *possui concavidade voltada para cima em* $(-\infty, 0)$ *e*
f *possui concavidade voltada para baixo em* $(0, +\infty)$

E como ocorre mudannça na direção da concavidade em $x = 0$ *e* $0 \in D(f)$ *então, o ponto* $(0, f(0))$ *é um ponto de inflexão de* f. *Ponto* $O(0,0)$

Esboço Gráfico:



2.12 Prova de Reavaliação da AB2 – 21 de Maio de 2016

Questão 1

a) *Use aproximação linear para estimar o raio do cilindro de altura* $100m$ *e volume* $401\pi m^3$.

b) *Seja* C *a curva dada pela equação* $y = \cosh x - 3\,\mathrm{senh}\,x$. *Determine o coeficiete angular da reta tangente à curva* C *no ponto em que* $y = 1$.

Questão 2

a) *Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 4 - x^2, & x > 1, \end{cases}$$

no intervalo $[-1,2]$.

b) *Seja* $f(x) = \mathrm{sen}^2\,x + \cos^2 x + \mathrm{senh}^2\,x - \cosh^2 x$. *Use consequência do Teorema do Valor Médio para mostrar que* $f(x) = 0$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}$.

Questão 3

a) *Calcule o seguinte limite*: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{\mathrm{tg}\frac{2}{x}}$.

b) *Se* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *determine* a, b, c *e* d, *de forma que* f *tenha um extremo relativo no ponto* $(0,3)$ *e que o gráfico de* f *tenha uma inflexão no ponto* $(1,-1)$. *Obs*: *Como* f *é polinomial, se* f *tem um ponto de inflexão quando* $x = n$, *então* $f''(n) = 0$.

Questão 4

a) *Para construir uma taça em forma de cone circular reto, remove-se um setor de uma folha circular de cartolina de raio* $\sqrt{3}$, *e unem-se as duas margens retilíneas do corte. Determine o volume da maior taça que pode ser construída.*

b) *Areia é derramada em uma superfície, formando uma pilha cônica cujo diâmetro da base é igual a sua altura. Determine quão rápido a altura da pilha cresce quando sua altura é* $3m$.

Questão 5

a) *Encontre* f, *sabendo que* $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3.e^x + x^2 + x^3.\cosh x}{x^3}$ *e que* $f(1) = -e$.

$b)\ Dados\ f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}\ e\ f''(x) = \dfrac{6x^3 - 18x}{(x^2+1)^3}, encontre\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva.$

***Questão* 1**

$a)$ *Use aproximação linear para estimar o raio do cilindro de altura* $100m$ *e volume* $401\pi m^3$.

$$V(r) = \pi r^2 . h = 100\pi r^2$$
$$r(V) = \sqrt{\frac{V}{100\pi}} = \frac{1}{10\pi}\sqrt{\pi . V}$$
$$r'(V) = \frac{1}{20\sqrt{\pi . V}} \ ; \ r'(400\pi) = \frac{1}{400\pi}$$

Supondo que o volume inicial era $400\pi m^3$, *então*:

$$r = \frac{1}{10\pi}\sqrt{400\pi^2}$$
$$r = \frac{1}{10\pi} . 20\pi = 2m$$

Por aproximação linear ou linearização da função $r(V)$ *em* $V = 400\pi$, *temos*:

$$L(V) = r(400\pi) + r'(400\pi).(V - 400\pi)$$
$$L(V) = 2 + \frac{1}{400\pi}(V - 400\pi)$$

Quando $V = 401\pi m^3$, *temos*:

$$L(401\pi) = 2 + \frac{1}{400\pi}(401\pi - 400\pi)$$
$$L(401\pi) = \left(2 + \frac{1}{400}\right)m$$

Pela aproximação linear, o raio r do cilindro é $r = L(401\pi)$.

$$r = \left(2 + \frac{1}{400}\right)m = 2{,}0025m$$
$$r = \left(200 + \frac{1}{4}\right)cm = 200{,}25cm$$

$b)$ *Seja* C *a curva dada pela equação* $y = \cosh x - 3\,\mathrm{senh}\, x$. *Determine o coeficiete angular da reta tangente à curva* C *no ponto em que* $y = 1$.

$$\cosh x - 3\,\mathrm{senh}\, x = 1$$
$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{3e^x - 3e^{-x}}{2} = 1$$
$$e^x + e^{-x} - 3e^x + 3e^{-x} = 2$$
$$-2e^x + 4e^{-x} = 2$$
$$-2e^{2x} + 4 = 2e^x$$
$$2e^{2x} + 2e^x - 4 = 0$$
$$e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$(e^x)^2 + (e^x) - 2 = 0$$

Seja $y = e^x$; $y > 0$. *Então,*

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm 3}{2} \therefore \quad \boldsymbol{y_1 = 1} \quad ou \quad y_2 = -2 \ (não\ satisfaz\ a\ condição)$$

$$y_1 = e^{x_1} \therefore x_1 = \ln y_1 = \ln 1 = 0.$$

Determinando o coeficiente angular da reta tangente em $x = 0$, *temos*:

$$y = f(x) = \cosh x - 3 \operatorname{senh} x$$
$$f'(x) = \operatorname{senh} x - 3 \cosh x$$
$$f'(0) = \operatorname{senh} 0 - 3 \cosh 0$$
$$f'(0) = 0 - 3(1)$$
$$f'(0) = -3$$

O coeficiente angular da reta tangente em $x = 0$ *é* -3.

Questão 2.

a) *Determine os pontos de máximo e mínimo absolutos de*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x \leq 1 \\ 4 - x^2, & x > 1, \end{cases}$$

no intervalo $[-1,2]$.

Para utilizamos o Método do Intervalo Fechado para determinar os valores extremos absolutos de f *no intervalo* $[-1,2]$ f *deve ser contínua em* $[-1,2]$.

Como f *é sentencial e formada por funções polinomiais, então* f *é contínua em* $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. *Como* $1 \in [-1,2]$, *devemos verificar a continuidade de* f *em* 1. *Logo,*

$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3.$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4 - x^2) = \lim_{x \to 1^+} 4 - \lim_{x \to 1^+} x^2 = 4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + \lim_{x \to 1^-} 2 = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$
$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, *então* f *é contínua em* $x = 1$ *e, portanto, contínua no intervalo fechado* $[-1,2]$.

Pelo Método do Intervalo Fechado:

1) *Valores de* f *nos extremos do intervalo*:

$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3 \quad e \quad f(2) = 4 - 2^2 = 4 - 4 = 0.$

2) *Valores de* f *nos números críticos de* f *em* $(-1,2)$.

"Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f onde ou $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe"

Uma expressão para a função derivada de f é:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ -2x, & x > 1 \end{cases}$$

$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x = 0\,; x < 1 \quad ou \quad -2x = 0; x > 1$

Das duas equações tiramos $x = 0$, porém, 0 satisfaz apenas a primeira equação cuja condição é $x < 1$. Logo, 0 é um número crítico de f no intervao $(-1,2)$.

Analisando a diferenciabilidade em $x = 1$, temos:

$$f'_{+}(1) = -2 \quad e \quad f'_{-}(1) = 2$$

Como as derivadas laterais existem, porém são diferentes, então f não é derivável em $x = 1$ e, portanto, 1 é um número crítico de f no intervalo $(-1,2)$.

$$f(0) = 0^2 + 2 = 2 \qquad e \qquad f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

Comparando os valores obtidos temos:

3 é o valor máximo absoluto de f no intervalo fechado $[-1,2]$ e corresponde aos pontos $(-1,3)$ e $(1,3)$.

0 é o valor mínimo absoluto de f no intervalo fechado $[-1,2]$ e corresponde ao ponto $(2,0)$.

Pontos de máximo absoluto: $(-1,3)$ e $(1,3)$
Ponto de mínimo absoluto: $(2,0)$

b) Seja $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 x - \cosh^2 x$. Use consequência do Teorema do Valor Médio para mostrar que $f(x) = 0$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Domínio da função f: $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x - 2\operatorname{sen} x \cos x + 2\operatorname{senh} x \cosh x - 2\operatorname{senh} x \cosh x$
$f'(x) = 0$

Como consequência do Teorema do Valor Médio, se $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então f é constante em $\mathbb{R}$. Ou seja, $f(x) = C$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, onde C é uma constante. Para determinar o valor de C temos:

$f(0) = \operatorname{sen}^2 0 + \cos^2 0 + \operatorname{senh}^2 0 - \cosh^2 0$
$f(0) = 0 + 1 + 0 - 1 \ \Longrightarrow f(0) = 0 \ \therefore C = 0.$

Portanto, $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

***Questão* 3**

$a)$ *Calcule o seguinte limite*: $\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}}$.

Quando $x \to \infty$, *temos* $\frac{1}{x} \to 0$ *e* $\operatorname{tg}\frac{2}{x} \to 0$, *assim, o limite é indeterminado.*
Usando a Regra de L'Hôspital temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\operatorname{tg}\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{2}{x^2}\sec^2\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\sec^2\frac{2}{x}} = \frac{1}{2\sec^2 0} = \frac{1}{2}$$

$b)$*Se* $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, *determine* a, b, c *e* d, *de forma que* f *tenha um extremo relativo no ponto* $(0,3)$ *e que o gráfico de* f *tenha uma inflexão no ponto* $(1,-1)$. *Obs: Como* f *é polinomial, se* f *tem um ponto de inflexão quando* $x = n$, *então* $f''(n) = 0$.

Como o ponto $(0,3)$ *pertence ao gráfico da função* $f(x)$, *então* $f(0) = 3$. *Logo,* $f(0) = d$. *Portanto,* $d = 3$.

Como f *possui um extremo relativo em* $x = 0$, *então* 0 *é um número crítico da função* f *e, por* f *ser contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}$, $f'(0)$ *existe e* $f'(0) = 0$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f'(0) = c \therefore c = 0.$$

Como f *é polinomial, se* f *tem um ponto de inflexão quando* $x = 1$, *então* $f''(1)$ *existe e* $f''(1) = 0$.

$$f''(x) = 6ax + 2b$$
$$f''(1) = 6a + 2b$$
$$6a + 2b = 0$$
$$3a + b = 0 \quad (Eq.1)$$

Como o ponto $(1,-1)$ *pertence ao gráfico da função* $f(x)$, *então* $f(1) = -1$. *Logo,*

$$f(1) = a + b + 3$$
$$a + b + 3 = -1$$
$$a + b = -4 \quad (Eq.2)$$

Resolvendo o sistema de equações: $\begin{cases} 3a + b = 0 \\ a + b = -4 \end{cases}$, *temos* $a = 2$ *e* $b = -6$.
Portanto, $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$.

***Questão* 4**

$a)$ *Para construir uma taça em forma de cone circular reto, remove-se um setor de uma folha circular de cartolina de raio* $\sqrt{3}$, *e unem-se as duas margens retilíneas do corte. Determine o volume da maior taça que pode ser construída.*

$O\ raio\ do\ setor\ circular\ é\ a\ geratriz\ g\ do\ cone\ circular\ reto. Sendo\ r\ o\ raio\ da\ base\ do\ cone\ e\ h\ a\ altura, temos:$

$$g^2 = h^2 + r^2 \therefore r^2 = g^2 - h^2$$

$Onde\ \ 0 < h < g, ou\ seja, 0 < h < \sqrt{3}.$

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(g^2 - h^2)h$$

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi(g^2 h - h^3)$$

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(g^2 - 3h^2)$$

$Estudo\ do\ sinal\ da\ derivada\ da\ função\ V(h), temos:$

$$(0) +++ + \left(\frac{g\sqrt{3}}{3}\right) ------ (\sqrt{3})\ \ V'(h)$$

$Pelo\ Teste\ da\ Primeira\ Derivada, h = \dfrac{g\sqrt{3}}{3}\ é\ o\ número\ crítico\ associado\ ao\ valor\ máximo\ local\ e, considerando\ o\ intervalo\ (0, \sqrt{3}), máximo\ absoluto\ da\ função. Portanto, para\ h = \dfrac{g\sqrt{3}}{3}\ teremos\ a\ taça\ de\ maior\ volume.$

$Como\ g = \sqrt{3}, temos\ h = 1. Logo,$

$$V(1) = V_{máx} = \frac{1}{3}\pi(3-1) = \frac{2}{3}\pi\ u.V$$

$b)\ Areia\ é\ derramada\ em\ uma\ superfície, formando\ uma\ pilha\ cônica\ cujo\ diâmetro\ da\ base\ é\ igual\ a\ sua\ altura. Determine\ quão\ rápido\ a\ altura\ da\ pilha\ cresce\ quando\ sua\ altura\ é\ 3m.$ (***ANULADA!***)

$Método\ de\ resolução\ para\ este\ item:$

$Taxa\ com\ a\ qual\ a\ areia\ é\ derramada\ é\ constante\ \dfrac{dV}{dt} = k(m^3/unidade\ de\ tempo)$

$Volume\ da\ pilha\ de\ areia:$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 . h$$

$Informação\ da\ questão: 2r = h \therefore r = \dfrac{h}{2}.$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 . h$$

$$V(h) = \frac{\pi h^3}{12}$$

$Pela\ Regra\ da\ Cadeia,$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$$k = \frac{\pi h^2}{4} . \frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{4k}{\pi h^2}$$

Quando $h = 3m$, *temos*:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4k}{9\pi} \ m/(unidade\ de\ tempo)$$

Questão 5

a) *Encontre* f, *sabendo que* $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^3 . e^x + x^2 + x^3 . \cosh x}{x^3}$ *e que* $f(1) = -e$.

$$f'(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^3} - e^x + \frac{1}{x} + \cosh x$$
$$f'(x) = x^{-\frac{5}{2}} - e^x + \frac{1}{x} + \cosh x$$

A antiderivada ou primitiva mais geral de $f'(x)$ é

$$f(x) = \frac{1}{-\frac{5}{2} + 1} x^{-\frac{5}{2}+1} - e^x + \ln x + \operatorname{senh} x + C$$
$$f(x) = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln x + \operatorname{senh} x + C$$

Utilizando a condição $f(1) = -e$, *obtemos*:

$$-e = -\frac{2}{3} - e + \ln 1 + \operatorname{senh} 1 + C$$
$$C = \frac{2}{3} - \operatorname{senh} 1 \quad , ou\ ainda, C = \frac{2}{3} - \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = \frac{2}{3} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$$

Portanto, $f(x) = -\dfrac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln x + \operatorname{senh} x + \dfrac{2}{3} - \operatorname{senh}(1)$.

b) *Dados* $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$ *e* $f''(x) = \dfrac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$, *encontre as abscissas dos pontos de inflexão da curva*.

Domínio da função f: $D(f) = \mathbb{R}$.

$$f''(x) = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$Estudo\ da\ concavidade\ da\ função\ f$:

$$
\begin{array}{ll}
- - - - - - - - - -(0) + + + + + + + + + + & 6x \\
+ + +(-\sqrt{3}) - - - - - - - - -(\sqrt{3}) + + + + & (x^2 - 3) \\
+ & (x^2 + 1)^3 \\
- - -(-\sqrt{3}) + + + (0) - - - (\sqrt{3}) + + + + & f''(x)
\end{array}
$$

$Como\ ocorre\ a\ mudança\ na\ direção\ da\ concavidade\ da\ função\ f\ nas\ abscissas$ $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0\ e\ x_3 = \sqrt{3}\ e\ estes\ números\ pertencem\ ao\ domínio\ da\ função\ f,$ $então\ x_1, x_2\ e\ x_3\ são\ as\ abscissas\ dos\ pontos\ de\ inflexão\ da\ curva.$

$$
PI_1\left(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4}\right); \quad PI_2(0,0) \quad e \quad PI_3\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)
$$

2.13 Prova Final – 27 de Maio de 2016

Questão 1

a) *Seja* $f(x) = x^2$. *Mostre que para qualquer intervalo* $[a, b]$, *o ponto* c *referido no Teorema do Valor Médio é sempre igual a* $\frac{a+b}{2}$.

b) *Mostre que a reta normal ao círculo* $x^2 + y^2 = R^2$, *em qualquer ponto, passa pela origem. Dê especial atenção aos casos em que uma das coordenadas é nula.*

Questão 2

a) *Estime, usando aproximações lineares, o valor de* $\operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9}$.

b) *Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{\left[\sqrt[3]{\ln^2 x}\right]x^3}{\cos^2 x}$.

Questão 3

a) *Determine uma equação para a reta que passa pelo ponto* $(2{,}3)$ *e delimita com os eixos coordenados o triângulo de menor área.*

b) *Ache as assíntotas horizontais da função* $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x - 2}$.

Questão 4

a) *Sendo* $4\left(x - \sqrt{2}\right)^6 \geq |f(x) - e^2|$, *calcule* $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} f(x)$.

b) *Sendo* $f(x) = \operatorname{arcsen}(\log_2 x)$, *determine* $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Questão 5

a) *Uma partícula está se movendo ao longo da curva* $y = \sqrt{x}$. *Quando a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$ *sua coordenada* x *cresce a uma taxa de* $3\ cm/s$. *Se* θ *é o ângulo formado pelo eixo* x *e o segmento de reta que une a partícula à origem, determine a que taxa está variando* θ, *no instante em que a partícula passa pelo ponto* $(4{,}2)$.

b) *Sabendo que* $f'(x) = \sec x \,.\, \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + e^{2x}$, *e que* $f(0) = \dfrac{3}{2}$, *determine* $f(x)$.

Questão 6

$a)$ *Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à curva* $y = \operatorname{sen}^7[e^x . x]^{10} + \dfrac{2^x}{\ln 2}$*, no ponto em que* $x = 0$.

$b)$ *Se for possível, determine* a *e* b $\in \mathbb{R}$*, de modo que a função*
$f(x) = \begin{cases} ax + b, & se\ |x| \leq 2 \\ |x - 1|, & se\ |x| > 2 \end{cases}$ *seja contínua em todos os reais.*

Questão 7

$a)$ *Determine o coeficiente angular da reta que contém os pontos de máximo e mínimo absolutos da função* $f(x) = \ln x - x$*, com* $e \leq x \leq e^2$.

$b)$ *Use a definição de derivada para calcular o coeficiente anngular da reta tangente ao gráfico da função* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$*, no ponto em que* $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

Questão 8

$a)$ *Calcule* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{\ln 2}{1 + \ln x}}$.

$b)$ *Analise a concavidade do gráfico da função* $f(x) = \log_2 x + x^2$.

Questão 9

$a)$ *Determine o valor de c sabendo que o coeficiente angular da reta tangente* à *curva dada por* $y = \dfrac{\pi}{2} . (\ln x)^2 + e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2(2x)$ *no ponto em que* $x = \pi$ é $-1 + c$.

$b)$ *Sabemos que g* é *a inversa da função f e que o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f no ponto* $(2{,}3)$ é $-\dfrac{1}{3}$*, determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g em* $x = 3$.

Questão 10

$a)$ *Mostre que a equação* $\ln x - e^{-x} = 0$ *possui uma raiz no intervalo* $(1/2\,, 3)$.

$b)$ *Mostre que existem números* α *e* β *tais que* $2 . e^x - 5 . e^{-x} = \alpha \operatorname{senh}(x + \beta)$.

$\boldsymbol{Questão\ 1}$

(a) $Seja\ f(x) = x^2. Mostre\ que\ para\ qualquer\ intervalo\ [a,b], o\ ponto\ c\ referido\ no\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ é\ sempre\ igual\ a\ \frac{a+b}{2}.$

f é $uma\ função\ polinomial\ e, portanto, contínua\ e\ diferenciável\ em\ \mathbb{R}. Logo,$ f é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [a,b]\ e\ f$ é $diferenciável\ no\ intervalo\ aberto$ $(a,b), então\ existe\ algum\ c \in (a,b)\ tal\ que$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\ , \qquad a \neq b$$

$Temos, portanto, f(b) = b^2\ e\ f(a) = a^2\ e\ f'(x) = 2x, então\ f'(c) = 2c.\ Logo,$

$$2c = \frac{b^2 - a^2}{b - a}$$

$$2c = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a}\ , a \neq b \Longrightarrow b - a \neq 0$$

$$2c = b + a$$

$$c = \frac{b+a}{2}$$

$$c = \frac{a+b}{2}$$

$Logo, pelo\ Teorema\ do\ Valor\ Médio\ a\ abscissa\ do\ ponto\ onde\ a\ reta\ tangente$ é $paralela\ a\ reta\ secante\ que\ passa\ pelos\ pontos\ \big(a, f(a)\big)\ e\ \big(b, f(b)\big)$ é $c = \frac{a+b}{2}.$

$\boldsymbol{Questão\ 1}$

(b) *Mostre que a reta normal ao círculo* $x^2 + y^2 = R^2$, *em qualquer ponto, passa pela origem. Dê especial atenção aos casos em que uma das coordenadas é nula.*

Derivando implicitamente a expressão da curva, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(R^2)$$
$$2x + 2yy' = 0$$
$$y' = -\frac{x}{y}$$

Dado um ponto pertencente ao círculo (x_0, y_0) *tal que* $x_0 \neq 0$ *e* $y_0 \neq 0$, *temos que o coeficiente angular da reta tangente nesse ponto é* $m = -\,x_0/y_0$. *Logo, o coeficiente angular da reta normal é* $m_n = y_0/x_0$.

Equação da reta normal em (x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$
$$y = \frac{y_0}{x_0}x$$

Para $x = 0$, *temos* $y = 0$ *e, portanto, a reta normal em qualquer ponto* (x_0, y_0) *tal que* $x_0 \neq 0$ *e* $y_0 \neq 0$ *passa pela origem* $(0,0)$.

1º *caso: quando a abscissa é nula. Pontos* $(0, R)$ *e* $(0, -R)$.

Quando $x_0 = 0$, *o coeficiente angular da reta tangente é nulo, isto é,* $m = 0$ *e, portanto, a reta tangente nos pontos* $(0, R)$ *e* $(0, -R)$ *é horizontal. Logo, a reta normal nestes pontos, é uma reta normal vertical cuja equação é* $x = x_0 = 0$.

2º *caso: quando a ordenada é nula. Pontos* $(R, 0)$ *e* $(-R, 0)$.

Quando $y = 0$ *o coeficiente angular da reta normal dado é nulo, isto é,* $m_n = 0$ *e, portanto, a reta normal nos pontos* $(R, 0)$ *e* $(-R, 0)$ *é horizontal, cuja equação é* $y = y_0 = 0$.

Em ambos os casos 1 e 2, a reta normal $x = 0$ *e a reta* $y = 0$ *passam pela origem do sistema cartesiano e, portanto, para todo ponto* (x, y) *tal que* $x^2 + y^2 = R^2$ *a reta normal passa pela origem.*

***Questão* 2**

(a) *Estime, usando aproximações lineares, o valor de* $\operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9}$.

Seja $f(x) = \operatorname{arctg} x + e^{1-x}$, *tal que* $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - e^{1-x}$. *Sabendo-se que* $f(0) = e$ *e* $f'(0) = 1 - e$. *Por aproximação linear ou linearização da função* f *em* $x = 0$, *temos*:

$$L(x) = f(0) + f'(0)(x - 0)$$
$$L(x) = e + (1 - e)x$$

Quando x *estiver próximo a* 0, *temos*:

$$f(x) \approx L(x)$$
$$f(x) \approx e + (1 - e)x$$

Em particular, temos

$$f(0{,}1) \approx e + (1 - e).0{,}1 = 0{,}9e + 0{,}1 = \frac{9e + 1}{10}.$$

$* f(0{,}1) = \operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9}$.

Logo,

$$\operatorname{arctg}(0{,}1) + e^{0{,}9} \approx \frac{9e + 1}{10}$$

$$\boldsymbol{Questão\ 2}$$

(b) *Use derivação logarítmica para encontrar a derivada da função*
$f(x) = \dfrac{\left[\sqrt[3]{\ln^2 x}\right]x^3}{\cos^2 x}.$

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R}; x > 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{N}\right\} \quad e \quad Im(f) = \{y \in \mathbb{R}; y \geq 0\}$$

$$f(x) = \frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}.x^3}{(\cos x)^2}$$

$$\ln f(x) = \ln\left[\frac{(\ln x)^{\frac{2}{3}}.x^3}{(\cos x)^2}\right]$$

$$\ln f(x) = \ln(\ln x)^{\frac{2}{3}} + \ln x^3 - \ln(\cos x)^2$$

$$\ln f(x) = \frac{2}{3}\ln(\ln x) + 3\ln x - 2\ln(\cos x)$$

Por diferenciação logarítmica, obtemos:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\ln x}.\frac{1}{x} + 3.\frac{1}{x} + 2.\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2}{3x.\ln x} + \frac{3}{x} + 2\operatorname{tg} x$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{2}{3x.\ln x} + \frac{3}{x} + 2\operatorname{tg} x\right]$$

$$f'(x) = \frac{\left[\sqrt[3]{\ln^2 x}\right]x^3}{\cos^2 x}\left[\frac{2}{3x.\ln x} + \frac{3}{x} + 2\operatorname{tg} x\right]$$

Questão 3

(a) *Determine uma equação para a reta que passa pelo ponto* $(2,3)$ *e delimita com os eixos coordenados o triângulo de menor área.*

Equação de uma reta que passa pelo ponto $(2,3)$:

$$y - 3 = m(x - 2)$$

Para delimitar um triângulo no primeiro quadrante devemos ter $m < 0$ *e* $-2m + 3 > 0$.

As dimensões desse triângulo são x_0 *e* y_0 *que são os valores da abscissa e ordenada respectivamente, onde a reta intercepta os eixos coordenados.*

Para $x = 0$, *temos* $y = y_0 = -2m + 3$
Para $y = 0$, *temos* $x = x_0 = 2 - \dfrac{3}{m}$

Área do triângulo delimitado pela reta e os eixos coordenados:

$$A = \frac{x_0 . y_0}{2} = \frac{\left(2 - \frac{3}{m}\right)(-2m + 3)}{2} = \frac{(2m - 3)(-2m + 3)}{2m} = -\frac{(2m - 3)^2}{2m}$$

$$A(m) = -\frac{4m^2 - 12m + 9}{2m} \ ; \quad D(A) = \{m \in \mathbb{R}; m < 0\}$$

$$A'(m) = -\frac{(8m - 12)(2m) - (4m^2 - 12m + 9)(2)}{(2m)^2}$$

$$A'(m) = -\frac{16m^2 - 24m - 8m^2 + 24m - 18}{4m^2} = -\frac{8m^2 - 18}{4m^2} = \frac{18 - 8m^2}{4m^2}$$

Estudo da função derivada $A'(m)$:

$- - - - -(-3/2) + +(0) + + + (3/2) - - - - -$	$18 - 8m^2$
$+ + + + + + + + + + (0) + + + + + + + + + + +$	$4m^2$
$- - - - -(-3/2) + +(0) + + + (3/2) - - - - -$	$A'(m)$

$*$ *A parte em destaque não faz parte do intervalo de análise do domínio da função.*

$*$ *Notamos que* $m = -3/2$ *é um número crítico da função* $A(m)$ *associado à um ponto de mínimo local e, considerando o domínio da função, pelo Teste da Primeira Derivada, temos que* $A(m) \geq A(-3/2)$ *e, portanto,* $A(-3/2)$ *é o valor mínimo absoluto da funçao A. Logo, para* $m = -3/2$ *temos o triângulo de menor área e a equação da reta em questão é*:

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$$
$$y = -\frac{3}{2}x + 6$$

$\boldsymbol{Questão\ 3}$

(b) *Ache as assíntotas horizontais da função* $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}$.

Dizemos que a reta $y=L$ *é uma assíntota horizontal se* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ *ou* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3-(x^2+4x-2)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6x+5}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-6+\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{-6+0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}}=\frac{-6}{2}=-3$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}{\left(\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}\right)}\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+3-(x^2+4x-2)}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-2x+3}+\sqrt{x^2+4x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}-x\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6-\frac{5}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{6-0}{\sqrt{1-0+0}+\sqrt{1+0-0}}=\frac{6}{2}=3$$

Logo, as retas $y=-3$ *e* $y=3$ *são as assíntotas horizontais da função* $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2+4x-2}$.

$\boldsymbol{Questão\ 4}$

$(a)\ Sendo\ 4\left(x-\sqrt{2}\right)^6 \geq |f(x)-e^2|, calcule\ \lim_{x\to\sqrt{2}} f(x).$

$Pela\ desigualdade\ modular\ \ |f(x)-e^2| \leq 4\left(x-\sqrt{2}\right)^6, temos:$

$$-4\left(x-\sqrt{2}\right)^6 \leq f(x)-e^2 \leq 4\left(x-\sqrt{2}\right)^6$$
$$e^2-4\left(x-\sqrt{2}\right)^6 \leq f(x) \leq e^2+4\left(x-\sqrt{2}\right)^6$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^2-4\left(x-\sqrt{2}\right)^6\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}} e^2 - 4\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right)^6 = e^2-4(0)^6 = e^2$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^2+4\left(x-\sqrt{2}\right)^6\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}} e^2 + 4\lim_{x\to\sqrt{2}}\left(x-\sqrt{2}\right)^6 = e^2+4(0)^6 = e^2$$

$Se\ \ e^2-4\left(x-\sqrt{2}\right)^6 \leq f(x) \leq e^2+4\left(x-\sqrt{2}\right)^6\ quando\ x\ está\ próximo\ a\ \sqrt{2}$
$\left(exceto\ possivelmente\ em\ \sqrt{2}\right)\ e\ \lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^2-4\left(x-\sqrt{2}\right)^6\right) = \lim_{x\to\sqrt{2}}\left(e^2+4\left(x-\sqrt{2}\right)^6\right) = e^2$
$então, pelo\ Teorema\ do\ Confronto,\ \lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = e^2.$

***Questão* 4**

(b) *Sendo* $f(x) = \text{arcsen}(\log_2 x)$ *, determine* $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$*.* Correção posterior* $f'(1)$.

Domínio da função f: $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq 2\right\}$

Como f *é uma função composta, esta será contínua onde estiver definida, isto é, em seu domínio. Logo,* f *é contínua em* $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

Obs: Uma função ser contínua num intervalo fechado $[a, b]$ *implica dizer que* f *é contínua em* (a, b) *e que* $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ *e* $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$.
Note que, embora $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *esteja definido e* $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x)$ *existe, por outro lado,*

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) \nexists$ *e, portanto,* $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \nexists$*. Logo,* f *não é contínua em* $\dfrac{1}{2}$ *e, consequentemente, não é derivável em* $\dfrac{1}{2}$*. Por esta razão,* $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ *não existe!*

... ***após a correção. Determine*** $\boldsymbol{f'(1)}$.

Pelo estudo da continuidade de f*, temos que* f *é contínua em* 1*. Analisando a diferenciabilidade em* $x = 1$*, temos:*

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\log_2 x)^2}}$$
$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\log_2 1)^2}}$$
$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 0^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$$

Questão 5

(a) *Uma partícula está se movendo ao longo da curva* $y=\sqrt{x}$. *Quando a partícula passa pelo ponto* $(4,2)$ *sua coordenada* x *cresce a uma taxa de* $3\ cm/s$. *Se* θ *é o ângulo formado pelo eixo* x *e o segmento de reta que une a partícula à origem, determine a que taxa está variando* θ, *no instante em que a partícula passa pelo ponto* $(4,2)$.

Do segmento de reta tiramos a relação entre θ *e a coordenada* x *dada pela expressão*:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$$
$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{x}}{x}$$
$$\operatorname{tg}\theta=x^{-\frac{1}{2}}$$

Derivando implicitamente toda a expressão em relação ao tempo, temos:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg}\theta)=\frac{d}{dt}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$
$$\sec^2\theta\,.\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.\frac{dx}{dt}$$

Quando a partícula passa pelo ponto $(4,2)$ *temos* $\frac{dx}{dt}=3\ cm/s$ *e* $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$. *Logo,* $\sec^2\theta=\operatorname{tg}^2\theta+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$. *Com isso,*

$$\frac{5}{4}.\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}(4)^{-\frac{3}{2}}.3$$
$$\frac{5}{4}.\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{2}.\frac{1}{8}.3$$
$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{3}{20}rad/s$$

Portanto, o ângulo θ *está decrescendo a taxa de* $\frac{3}{20}rad/s$ *quando a partícula passa pelo ponto* $(4,2)$.

Questão 5

(b) *Sabendo que* $f'(x) = \sec x \,.\, \text{tg}\, x + \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^{2x}$, *e que* $f(0) = \dfrac{3}{2}$, *determine* $f(x)$.

A antiderivada ou primitiva mais geral de $f'(x)$ é

$$f(x) = \sec x + \text{arcsen}\, x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

Utilizando a condição $f(0) = \dfrac{3}{2}$, *obtemos*:

$$\frac{3}{2} = \sec 0 + \text{arcsen}\, 0 + \frac{1}{2}e^{0} + C$$
$$\frac{3}{2} = 1 + 0 + \frac{1}{2} + C$$
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} + C$$
$$C = 0$$

Logo, $f(x) = \sec x + \text{arcsen}\, x + \dfrac{1}{2}e^{2x}$.

$\boldsymbol{Questão\ 6}$

(a) *Calcule a área do triângulo formado pelos eixos coordenados e pela reta tangente à curva* $y = \operatorname{sen}^7[e^x . x]^{10} + \dfrac{2^x}{\ln 2}$, *no ponto em que* $x = 0$.

Ponto $P\left(0, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$.

$$y' = 7\operatorname{sen}^6[e^x . x]^{10} . \cos[e^x . x]^{10} . 10[e^x . x]^9 . (e^x + xe^x) + \frac{1}{\ln 2} . 2^x . \ln 2$$
$$y' = 70[e^x . x]^9 (e^x + xe^x) . \cos[e^x . x]^{10} . \operatorname{sen}[e^x . x]^{10} + 2^x$$

No ponto em que $x = 0$, *temos* $y' = 1$.

Equação da reta tangente a curva no ponto $P\left(0, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$:

$$y - \frac{1}{\ln 2} = 1(x - 0)$$
$$y = x + \frac{1}{\ln 2}$$

Interseções com os eixos coordenados:

Interseção com o eixo x: $A\left(-\dfrac{1}{\ln 2}, 0\right)$

Interseção com o eixo y: $B\left(0, \dfrac{1}{\ln 2}\right)$

Área do triângulo delimitado pela reta tangente e os eixos coordenados:

$$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right) \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{2(\ln 2)^2}\ u.A$$

$\boldsymbol{Questão\ 6}$

(b) $Se\ for\ possível, determine$ a e b $\in \mathbb{R}, de\ modo\ que\ a\ função$
$f(x) = \begin{cases} ax+b, & se\ |x| \leq 2 \\ |x-1|, & se\ |x| > 2 \end{cases}$ $seja\ contínua\ em\ todos\ os\ reais.$

$$f(x) = \begin{cases} ax+b, & se -2 \leq x \leq 2 \\ |x-1|, & se\ x < -2\ ou\ x > 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1), & se\ x < -2 \\ ax+b, & se -2 \leq x \leq 2 \\ x-1, & se\ x > 2 \end{cases}$$

$Como\ f$ é $uma\ função\ sentencial\ formada\ por\ funções\ polinomiais\ e, portanto,$ $contínuas\ em\ \mathbb{R}, considerando\ o\ intervalo\ onde\ esta\ funções\ estão\ definidas$ $em\ f(x), sobre\ a\ continuidade\ da\ função\ f\ podemos\ afirmar\ que\ f$ é $contínua$ $em\ (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,+\infty).$

$Se\ f\ for\ contínua\ em -2\ e\ 2\ chegamos$ à $conclusão\ de\ que\ f$ é $contínua\ em\ todos$ $os\ reais. Analisando\ a\ continuidade\ em -2\ e\ 2, temos:$

$f(-2) = -2a + b$
$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} (ax+b) = -2a + b$
$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} -(x-1) = -(-2-1) = -(-3) = 3.$

$Para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = -2, devemos\ ter$

$$f(-2) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^-} f(x)$$
$$-2a + b = 3$$

$Analisando\ a\ continuidade\ de\ f\ em\ 2, temos:$

$f(2) = 2a + b$
$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax+b) = 2a + b$
$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x-1) = 2 - 1 = 1.$

$Para\ que\ f\ seja\ contínua\ em\ x = 2, devemos\ ter$

$$f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$
$$2a + b = 1$$

$\begin{cases} -2a + b = 3 \\ 2a + b = 1 \end{cases} \therefore b = 2\ e\ a = -\dfrac{1}{2}$ é $a\ solução\ do\ sistema\ de\ equações\ e, portanto,$
$para\ esses\ valores\ de\ a\ e\ b, f$ é $contínua\ em$
$-2\ e\ 2. Juntamente\ com\ o\ intervalo$
$de\ continuidade\ definido\ anteriormente, f$ é $contínua\ em\ todos\ os\ reais.$

$\boldsymbol{Questão\ 7}$

(a) $Determine\ o\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ que\ contém\ os\ pontos\ de\ máximo\ e\ mínimo\ absolutos\ da\ função\ f(x) = \ln x - x, com\ e \leq x \leq e^2.$

$Domínio\ da\ função\ f\!:\ D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$

f é $contínua\ onde\ está\ definida\ e, portanto, f$ é $contínua\ em\ (0, +\infty). Logo,$
f é $contínua\ no\ intervalo\ fechado\ [e, e^2].$

$Pelo\ Método\ do\ Intervalo\ Fechado, temos:$

$1) Os\ valores\ de\ f\ nos\ extremos\ do\ intervalo;$

$f(e) = \ln e - e = 1 - e$ e $f(e^2) = \ln e^2 - e^2 = 2 - e^2$

$2)\ Os\ valores\ de\ f\ nos\ números\ críticos\ de\ f\ em\ (e, e^2);$

"$Um\ número\ crítico\ de\ uma\ função\ f$ é $um\ número\ c\ no\ domínio\ de\ f\ onde\ ou\ f'(c) = 0\ ou\ onde\ f'(c)\ não\ existe$"

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$f'(x) \nexists \Longrightarrow\ x = 0\ e\ f'(x) = 0 \Longrightarrow x = 1, entretanto, 0\ não\ pertence\ ao\ domínio\ de\ f\ e\ 1\ não\ pertence\ ao\ intervalo\ (e, e^2)\ e, portanto, f\ não\ possui\ números\ críticos\ em\ (e, e^2).$

$Comparando\ os\ valores\ obtidos, temos\ (2 - e^2)$ é $o\ valor\ mínimo\ absoluto\ e$
$(1 - e)$ é $o\ valor\ máximo\ absoluto\ de\ f\ no\ intervalo\ fechado\ [e, e^2].$

$O\ coeficiente\ angular\ da\ reta\ que\ passa\ pelos\ pontos\ (e, 1 - e)\ e\ (e^2, 2 - e^2):$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2 - e^2) - (1 - e)}{e^2 - e} = \frac{1 - e^2 + e}{e^2 - e} = -1 + \frac{1}{e^2 - e}$$

Questão 7

(b) Use a definição de derivada para calcular o coeficiente anngular da reta tangente ao gráfico da função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$*, no ponto em que* $f(x)=\dfrac{1}{2}$.

$$f(x)=\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{1}{2}\Longrightarrow\sqrt[3]{x+1}=2\Longrightarrow x+1=8\therefore x=7.$$

Pela definição de derivada, o coeficiente angular m da reta tangente no ponto de abscissa $x=7$ *é dado pela expresão:*

$$m=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(7+\Delta x)-f(7)}{\Delta x}$$

Sendo $\Delta x=x-7$*, se* $\Delta x\to 0$*, então* $x\to 7$*. Logo,*

$$m=\lim_{x\to 7}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}$$

$$\begin{aligned}
m&=\lim_{x\to 7}\frac{f(x)-f(7)}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+1}}-\dfrac{1}{2}}{x-7}=\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 7}\left[\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}}\frac{\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}\right]\\
&=\lim_{x\to 7}\frac{8-(x+1)}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 7}\frac{7-x}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 7}\frac{-(x-7)}{2(x-7)\sqrt[3]{x+1}\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}\\
&=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{2\sqrt[3]{x+1}\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}\\
&=\frac{\lim_{x\to 7}(-1)}{\lim_{x\to 7}\left[2\sqrt[3]{x+1}\left(4+2\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}\right)\right]}\\
&=\frac{-1}{2\sqrt[3]{8}\left(4+2\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{64}\right)}\\
&=\frac{-1}{4(4+4+4)}\\
&=-\frac{1}{48}
\end{aligned}$$

Portanto, o coeficiente angular m da reta tangente no ponto $\left(7,\dfrac{1}{2}\right)$ *é* $-\dfrac{1}{48}$.

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

(a) *Calcule* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$; *indeterminação do tipo* "∞^0"

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln x^{\left(\frac{\ln 2}{1+\ln x}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\left(\frac{\ln 2}{1+\ln x}\right).\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}};$$

Calculando o limite do expoente, temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2\,.\ln x}{1+\ln x}; \quad \textit{indeterminação do tipo} \ "\frac{\infty}{\infty}"$$

Aplicando a Regra de L'Hôspital, obtemos:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2\,.\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2\,.\frac{1}{x}}{0+\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 2\,.\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\ln 2 = \ln 2.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln 2.\ln x}{1+\ln x}} = e^{\ln 2} = 2.$$

$\boldsymbol{Questão\ 8}$

(b) *Analise a concavidade do gráfico da função* $f(x) = \log_2 x + x^2$.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln 2} + 2x$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2.\ln 2} + 2 = \frac{2x^2.\ln 2 - 1}{x^2.\ln 2}$$

Estudando o sinal da segunda derivada de f, *temos*:

$(0) - - - - - \left(1/\sqrt{\ln 4}\right) + + + + + + + + + + \qquad (2x^2.\ln 2 - 1)$

$(0) + + + + + + + + + + + + + + + + + + + \qquad x^2.\ln 2$

$(0) - - - - - \left(1/\sqrt{\ln 4}\right) + + + + + + + + + + \qquad f''(x)$

Com a análise da segunda derivada de f, *concluimos que*

f *possui concavidade voltada para cima em* $\left(\frac{1}{\sqrt{\ln 4}}, +\infty\right)$ *e*

f *possui concavidade voltada para baixo em* $\left(0, \frac{1}{\sqrt{\ln 4}}\right)$.

$\boldsymbol{Questão\ 9}$

(a) *Determine o valor de* c *sabendo que o coeficiente angular da reta tangente* à *curva dada por* $y = \frac{\pi}{2}.(\ln x)^2 + e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2(2x)$ *no ponto em que* $x = \pi$ é $-1 + c$.

$$y' = \frac{\pi}{2}.2.\ln x.\frac{1}{x} + \cos x.e^{\operatorname{sen} x} + 2.\cos(2x).[-\operatorname{sen}(2x)]$$
$$y' = \frac{\pi.\ln x}{x} + \cos x.e^{\operatorname{sen} x} - 2\operatorname{sen}(2x)\cos(2x)$$
$$y' = \frac{\pi.\ln x}{x} + \cos x.e^{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen}(4x)$$

No ponto em que $x = \pi$, *temos*:

$$y' = \frac{\pi.\ln \pi}{\pi} + \cos \pi.e^{\operatorname{sen} \pi} - \operatorname{sen}(4\pi)$$
$$y' = \ln \pi - 1 - 0$$
$$y' = \ln \pi - 1$$

Como o coeficiente angular da reta tangente à *curva no ponto em que* $x = \pi$ é $-1 + c$, *então* $y' = -1 + c$ *em* $x = \pi$. *Portanto*,

$$\ln \pi - 1 = -1 + c$$

$$c = \ln \pi$$

Questão 9

(b) *Sabemos que g é a inversa da função f e que o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f no ponto $(2,3)$ é $-\frac{1}{3}$, determine o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g em $x = 3$.*

Como g é a inversa da função f, então $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x$.

Como o coeficiente angular da reta normal ao gráfico de f no ponto $(2,3)$ é $-\frac{1}{3}$ então o coeficiente angular da reta tangente neste ponto é 3. Logo, $f'(2) = 3$.

$$g\big(f(x)\big) = x$$

Derivando implicitamente e usando a Regra da Cadeia, temos:

$$g'\big(f(x)\big).f'(x) = 1$$
$$g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)}$$

$g'\big(f(x)\big) = g'(3) \Longrightarrow f(x) = 3 \therefore x = 2$. *Logo,*

$$g'\big(f(2)\big) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$g'(3) = \frac{1}{3}$$

Onde, $g'(3)$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g em $x = 3$.

Questão 10

(a) *Mostre que a equação* $\ln x - e^{-x} = 0$ *possui uma raiz no intervalo* $(1/2, 3)$.

Seja $f(x) = \ln x - e^{-x}$.

Domínio da função f: $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$.

Como f *é uma função definida pela subtração de duas funções contínuas em* $(0, +\infty)$ *então* f *é contínua em* $(0, +\infty)$. *Logo,* f *é contínua no intervalo fechado* $[1/2, 3]$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} = -\ln 2 - \frac{1}{\sqrt{e}} < 0$$

$$f(3) = \ln 3 - e^{-3} = \ln 3 - \frac{1}{e^3} > 0$$

Como f *é contínua no intervalo fechado* $[1/2, 3]$ *e* 0 *é um número entre* $f(1/2)$ *e* $f(3)$, *pelo Teorema do Valor Intermediário, existe algum* $c \in (1/2, 3)$ *tal que* $f(c) = 0$.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \ln x - e^{-x} = 0$$

Desse modo provamos pelo Teorema do Valor Intermediário que a equação acima possui uma raíz real no intervalo $(1/2, 3)$.

Questão 10

(b) *Mostre que existem números* α *e* β *tais que* $2.e^{x} - 5.e^{-x} = \alpha\,\text{senh}(x+\beta)$.

$$2.e^{x} - 5.e^{-x} = \alpha.\frac{e^{x+\beta} - e^{-(x+\beta)}}{2}$$
$$2.e^{x} - 5.e^{-x} = \frac{\alpha}{2}e^{\beta}.e^{x} - \frac{\alpha}{2}e^{-\beta}.e^{-x}$$

Igualando os coeficiente de mesma complexidade exponencial, temos:

$$\frac{\alpha}{2}e^{\beta} = 2 \Longrightarrow \alpha e^{\beta} = 4 \quad (I)$$

$$\frac{\alpha}{2}e^{-\beta} = 5 \Longrightarrow \alpha e^{-\beta} = 10 \Longrightarrow \alpha = 10e^{\beta} \quad (II)$$

Substituindo a expressão (II) $\alpha = 10e^{\beta}$ *na expressão* (I) $\alpha e^{\beta} = 4$, *obtemos:*

$$\alpha.e^{\beta} = 4$$
$$10e^{\beta}.e^{\beta} = 4$$
$$10e^{2\beta} = 4$$
$$e^{2\beta} = \frac{2}{5}$$
$$2\beta = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$
$$\beta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}\right) = \ln\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Com o valor de β, *substituimos na expressão* (I):

$$\alpha = 10e^{\beta}$$
$$\alpha = 10e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{5}\right)}$$
$$\alpha = 10\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\alpha = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{10}$$

Com isso mostramos que existem α *e* β *que satisfaz a equação*

$$2e^{x} - 5e^{-x} = \alpha\,\text{senh}(x+\beta)$$
$$2e^{x} - 5e^{-x} = 2\sqrt{10}.\text{senh}\left(x + \ln\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$