



Revista
Olímpica
Alagoana de
Matemática

N.3

Revista Olímpica Alagoana de Matemática #3

Universidade Federal de Alagoas.

Instituto de Matemática.

BR-104, Km 97 - Cidade Universitária, Maceió - AL, 57072-970

Coordenador e Editor Responsável:

Alan Anderson da Silva Pereira

Capa:

Francisco Alan Lima da Silva

Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva

Redatores:

Francisco Alan Lima da Silva

Henrique Caldas de Carvalho Trajano

Kayque Matheus da Conceição Bispo

Lucas Hiroshi dos Santos Nakagawa

Nícolas Lima Lopes de Araújo

Revisão:

Alan Anderson da Silva Pereira

Diogo Carlos dos Santos

Hegel Marinho Viana Filho

Jairon Henrique Noia Batista

Conteúdo

1	Palavras do Editor	5
1.1	Boas Notícias: Alagoas entre os melhores do mundo	5
1.2	A ROAM volume 3	6
2	Enunciados da OAM 2023	7
2.1	Nível 1	7
2.2	Nível 2	8
2.3	Nível 3	9
2.4	Nível U	10
3	Enunciados da OAM 2024	11
3.1	Nível 1	11
3.2	Nível 2	12
3.3	Nível 3	13
3.4	Nível U	14
4	Enunciados da OAM 2025	15
4.1	Nível 1	15
4.2	Nível 2	16
4.3	Nível 3	17
4.4	Nível U	18
5	Jogos	
	por Lucas Nakagawa e Henrique Trajano	19
5.1	Definições	19
5.2	Exemplos	19
5.3	Problemas propostos	26
5.4	Dicas dos problemas propostos	28
6	Os Traçados Auxiliares	
	por Kayque Bispo e Henrique Trajano	30
6.1	Critérios de Construção	30
6.2	Dicas Gerais	33
6.3	Exemplos Resolvidos	33
6.4	Problemas Propostos	45
6.5	Dicas ou soluções dos problemas propostos	52
7	Descida de Fermat	
	por Henrique Trajano e Nicolás Lima	55
7.1	Descida de Fermat: O Princípio da Boa Ordenação	55
7.2	Subida de Fermat: infinitas soluções	57

7.3	Pulo de Vieta: trabalhando restrições	60
7.4	Problemas propostos	62
7.5	Dicas ou soluções dos problemas propostos	65
8	Identidades Binomiais e Somas Telescópicas	
	por Francisco Alan Lima da Silva	71
8.1	Somas Telescópicas	71
8.2	Identidades Binomiais	75
8.3	Somas com fatoriais	78
8.4	Problemas propostos	83
8.5	Dicas dos problemas propostos	85

Palavras do Editor

1.1 Boas Notícias: Alagoas entre os melhores do mundo

No ano de 2025 Alagoas escreveu mais um capítulo histórico na matemática olímpica: um estudante do estado conquistou medalha na IMO, a Olimpíada Internacional de Matemática e o palco mais prestigiado do mundo para estudantes dessa área.

A IMO (International Mathematical Olympiad) é a maior e mais importante competição de matemática em nível estudantil. Criada em 1959, ela reúne, todos os anos, os melhores jovens matemáticos do planeta, selecionados após processos extremamente rigorosos em seus países. Cada delegação representa uma nação inteira, e as provas exigem criatividade, profundidade teórica, rigor lógico e maturidade matemática muito acima do currículo escolar tradicional. Medalhar na IMO significa estar entre os melhores jovens cérebros matemáticos do planeta.

E foi exatamente isso que aconteceu com **João Victor Silva dos Santos**, que conquistou a medalha de bronze na IMO, levando o nome de Alagoas ao cenário internacional estudantil. Um feito raríssimo, que coloca o estado no mapa mundial da matemática de base e inspira toda uma nova geração de estudantes.

Esse resultado se soma a uma trajetória que Alagoas já vem construindo no cenário internacional, especialmente no nível universitário, com nomes que se destacaram em grandes instituições na IMC (International Mathematics Competition):

- Jairon Henrique Noia Batista — Medalha de ouro em 2022 (FGV)
- Samuel Figueiredo — Menção Honrosa em 2022 (UFAL)
- Jeann Rocha — Menção Honrosa em 2022 (UFAL)
- Cícero Calheiro — Menção Honrosa em 2020 (UFAL)
- Jônatas Marinho Santos Júnior — Menção Honrosa em 2020 (UFAL)
- Kevyn Djhonatha Dias De Lacerda — Menção Honrosa em 2020 (Unicamp)
- Murilo Vasconcelos de Andrade — Medalha de prata em 2009 (École Polytechnique)

Esses nomes mostram que o talento matemático alagoano não é exceção: é tradição em construção. Do ensino básico à universidade, Alagoas prova que, com oportunidade, formação e dedicação, é possível competir e vencer nos mais altos níveis da matemática mundial.

1.2 A ROAM volume 3

A ROAM está de volta, meus amigos!

Esta edição celebra um feito particularmente significativo: a publicação do primeiro artigo escrito em coautoria com um estudante do Ensino Médio, o aluno do Instituto Federal de Alagoas, Nicolás Lima Lopes de Araújo. Trata-se de um marco expressivo para a proposta de Extensão da revista, ao concretizar o diálogo entre a universidade e a educação básica e reafirmar o compromisso com a formação científica desde os níveis iniciais de ensino.

Gostaria de agradecer ao estudante e ao professor Henrique Trajano, que contribuíram de forma grandiosa, com entusiasmo acadêmico, dedicação e participação em diversas seções desta edição.

E meu muito obrigado também a todos os artistas, redatores e corretores, cuja colaboração foi fundamental para a construção e a qualidade desta revista.

Alan Pereira,
Editor-Chefe.

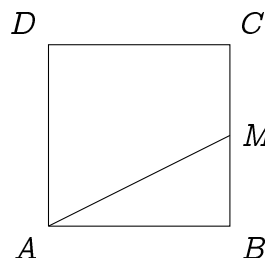
Enunciados da OAM 2023

2.1 Nível 1

PARTE A

Problema 1. Quantos são os números de três algarismos distintos cuja soma de seus algarismos é 7?

Problema 2. Suponha que o quadrado $ABCD$ ao lado tem 400 cm^2 de área. Se M é o ponto médio do segmento de reta BC , quanto vale a área do triângulo ABM , em centímetros quadrados?



Problema 3. O número 2023 é um número ímpar e a soma dos seus algarismos é um número primo. Quantos são os números de dois algarismos que têm essas duas propriedades? Obs: Um número natural é primo se ele é maior do que 1 e tem somente dois divisores positivos.

Problema 4. Francisco criou uma calculadora com um botão especial $\#$. Quando ele digita um número na calculadora e então aperta na tecla $\#$, a calculadora soma os dígitos do número e em seguida eleva o número resultante ao quadrado. Por exemplo, se ele digita 15 e $\#$ o resultado será 36, pois $1 + 5 = 6$ e $6^2 = 36$. Um número é dito ser Repetilson se ele aparece na tela mais de uma vez ao digitarmos 2023 e em seguida apertarmos $\#$ sucessivas vezes. Determine a soma dos números Repetilson.

PARTE B

Problema 5. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo ainda dormiam quando sua mãe, Marnalda, saiu e deixou uma vasilha com mangas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Arnaldo acordou primeiro, pegou $\frac{1}{4}$ das mangas e saiu. Bernaldo acordou depois, mas pensou que era o primeiro a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{4}$ das mangas restantes e também saiu. Os outros dois irmãos acordaram juntos, perceberam que Arnaldo e Bernaldo já haviam saído e dividiram as mangas restantes igualmente entre eles.

- Quem ficou com menos mangas?
- Quem ficou com mais mangas?
- Sabendo-se que ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 17 mangas. Quantas mangas havia na vasilha?

Problema 6. A soma de 11 inteiros positivos distintos é igual 100. Qual a quantidade mínima de números ímpares que deverá ter esta soma?

2.2 Nível 2

PARTE A

Problema 1. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo ainda dormiam quando sua mãe, Marnalda, saiu e deixou uma vasilha com mangas e a instrução para que fossem divididas igualmente entre eles. Arnaldo acordou primeiro, pegou $\frac{1}{4}$ das mangas e saiu. Bernaldo acordou depois, mas pensou que era o primeiro a acordar e, por este motivo, pegou $\frac{1}{4}$ das mangas restantes e também saiu. Os outros dois irmãos acordaram juntos, perceberam que Arnaldo e Bernaldo já haviam saído e dividiram as mangas restantes igualmente entre eles. Sabendo-se que ao final da divisão, nenhum dos irmãos ficou com mais do que 17 mangas. Quantas mangas havia na vasilha?

Problema 2. Quantos são os pares de números primos (p, q) tal que $p^2 + q^2$ é um primo menor do que 2023? Lembre-se: um número natural é primo se ele tem exatamente dois divisores positivos.

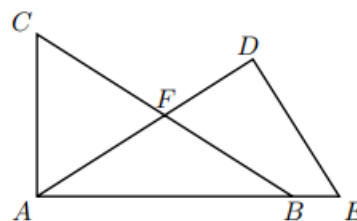
Problema 3. A soma de 11 inteiros positivos distintos é igual 100. Qual a quantidade mínima de números ímpares que deverá ter esta soma?

Problema 4. Sejam x e y números reais tais que $x + y = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$. Qual é o valor de $2(x^3 + y^3)$?

PARTE B

Problema 5. A calculadora do Diogovi está com defeito. O botão com o algarismo zero não funciona, e então ele não o utiliza. Além disso, a calculadora nunca exibe o número zero no visor. Diogovi multiplicou um número de um algarismo por um número de dois algarismos e no visor apareceu o número 27. Indique todas as possibilidades para os dois números multiplicados pelo Diogovi.

Problema 6. Na figura ao lado, os triângulos ABC e DAE são congruentes e os pontos A , B e E são colineares e $\angle BAC = 90^\circ$. Se $AE = 30$, qual o valor de FB ?



2.3 Nível 3

PARTE A

Problema 1. Quantos são os pares de números primos p e q tal que $p^2 + q^2$ é um primo menor que 2023? Lembre-se: um número natural é primo se ele é maior do que 1 e tem exatamente dois divisores positivos.

Problema 2. A soma de 11 inteiros positivos distintos é igual 100. Qual a quantidade mínima de números ímpares que deverá ter esta soma?

Problema 3. Sejam x , y e a números reais tais que $x + \frac{1}{y} = a$ e $\frac{1}{x} + y = \frac{4}{a}$. Determine o valor do produto $x \cdot y$.

Problema 4. Sejam C_1 e C_2 circunferências de raio 5 e 12, respectivamente cujos centros distam 13. Sendo ℓ o tamanho da corda comum a C_1 e C_2 determine o valor de 13ℓ .

Observação: Uma corda em uma circunferência é qualquer segmento ligando dois pontos distintos da mesma.

PARTE B

Problema 5. Considere a função $f(x) = -x^2 + bx + c$ onde b e c são números inteiros. Suponha que o máximo dessa função é 25 e suas raízes x_1 e x_2 satisfazem $x_1^3 + x_2^3 = 19$. Qual é o valor de $b + c$?

Problema 6. Sejam A_1, \dots, A_k subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, 92\}$, cada A_i contendo três elementos, e $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todo i, j . Encontre o valor máximo de k .

2.4 Nível U

PARTE A

Problema 1. A reta $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$ é tangente à elipse $x^2 + \frac{y^2}{c^2} = 1$. Qual é o valor de c^2 ?

Problema 2. Quantos são os subconjuntos de três elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, 11\}$ que não têm elementos consecutivos?

Problema 3. Sejam a e b dois números reais positivos menores do que 2023 e que

$$\int_a^b (296t - 2023 - t^2) \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{2023}\right) dt$$

é máximo. Encontre $b - a$.

Problema 4. Qual é o menor inteiro positivo a tal que 3 é o algarismo das dezenas e 2 é o algarismo das unidades de a^{2023} ?

PARTE B

Problema 5. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ tal que $A + B = I_n$ e para algum k natural temos $A^{2k+1} = A^{2k}$. Prove que $I_n + A^k B$ é invertível e ache sua inversa.

Problema 6. Dada $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que $g(g(x)) = x$. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x)^2 \cdot f(g(x)) = 2023x.$$

- Mostre que se x_0 é tal que $g(x_0) = 0$ então $x_0 = 0$ e $f(0) = 0$
- Encontre f em função de g .
- Mostre que a função $F(x) = f(x)^3$ é derivável em $x = 0$ e determine $F'(0)$.

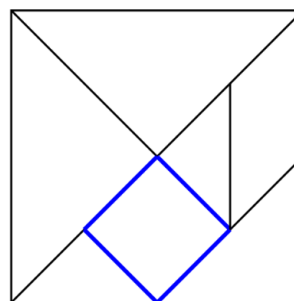
Enunciados da OAM 2024

3.1 Nível 1

PARTE A

Problema 1. O ano 2024 é especial, pois 2024 é igual ao produto de dois números pares consecutivos, ou seja, $2024 = 44 \cdot 46$. Qual o último ano do milênio em que estamos (ou seja, menor que 3000), que tem essa propriedade?

Problema 2. Na figura ao lado encontra-se o tangram. Suponha que o quadrado maior tem lados que medem 100 cm. Dentro dele encontra-se, dois triângulos grandes, um médio e dois pequenos. Encontra-se também, um losango e um quadrado pequeno. Quanto vale a área do quadrado pequeno?



Problema 3. Quantos números inteiros e positivos menores que 100 possuem algum divisor cuja soma dos dígitos seja 4?

Problema 4. Representamos por $n!$ o produto de todos os inteiros positivos de 1 a n . Por exemplo, $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ e $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Qual o algarismo das unidades do resultado da soma,

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 2024!?$$

PARTE B

Problema 5. Considere o número $N = 2024202420242024$ que tem 16 dígitos. João brinca de apagar 5 dígitos desse número para formar outro número. Por exemplo, certa vez ele apagou todos os zeros e o último quatro, obtendo o número 22422422422. Com essa brincadeira, qual o maior número que João pode obter?

Problema 6. Quantos são os pares de números primos (p, q) de modo que $p < q$,

$$2p + q, \quad p + 2q \quad \text{e} \quad p + q - 8$$

também sejam números primos.

3.2 Nível 2

PARTE A

Problema 1 Quantos são os pares de números primos (p, q) de modo que $p < q$,

$$2p + q, p + 2q \text{ e } p + q - 8$$

também sejam números primos.

Problema 2 Denote por A , a área de um triângulo equilátero onde as distâncias dos lados para um certo ponto em seu interior são 14, 10 e 6. Quanto vale $\sqrt{3} \times A$?

Problema 3 Sejam $\phi > 0$ e x_1, x_2 dois números reais que satisfazem a seguinte equação em η :

$$\eta = 1 + \frac{\phi}{1 + \frac{\phi}{1 + \frac{\phi}{1 + \dots}}}$$

Qual é o valor de $9(x_1 + x_2)$?

Problema 4 Sejam o, a e m números inteiros positivos tais que

$$\begin{aligned}o \times a \times m &= 30, \\o \times (a + m) &= 16, \\(o + a) \times m &= 25.\end{aligned}$$

Quanto vale $o + a + m$?

PARTE B

Problema 5 Considere um triângulo isósceles ABC tal que $AB = AC > BC$. Sejam I o ponto de encontro das bissetrizes e H o ponto de encontro das alturas. Sabendo-se que os ângulos IBH e HBC são iguais, qual a medida do ângulo ABC ?

Problema 6 Em um armário há 6 pares distintos de sapatos. De quantos modos podemos retirar 6 pés de tal forma que existam exatamente 2 pares de sapatos?

3.3 Nível 3

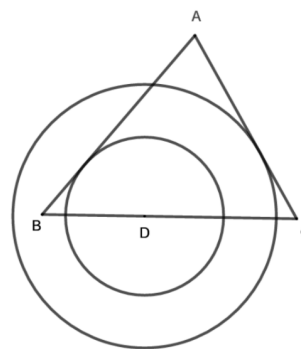
PARTE A

Problema 1. Sejam o, a e m números inteiros positivos tais que

$$\begin{aligned} o \times a \times m &= 30, \\ o \times (a + m) &= 16, \\ (o + a) \times m &= 25. \end{aligned}$$

Quanto vale $o + a + m$?

Problema 2. Na figura ao lado as circunferências possuem centro D e raios de comprimentos 6 e 10. O segmento AB é tangente à circunferência menor e o segmento AC é tangente à maior. Sabe-se que $AB = 20$ e $AC = 8$. Qual o valor de $2024 \cdot (DB/DC)$?



Problema 3. Em um armário há 6 pares distintos de sapatos. De quantos modos podemos retirar 6 pés de tal forma que existam exatamente 2 pares de sapatos?

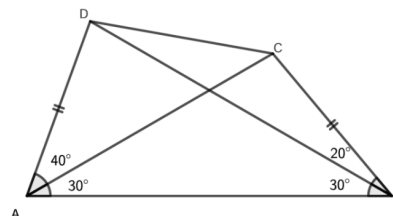
Problema 4. Seja m a quantidade de pares de inteiros positivos (k, n) de modo que n^{5+4k} e n não tenham o mesmo algarismo das unidades. Qual o valor de 5^m ?

PARTE B

Problema 5. Sabendo que x e y são números reais satisfazendo $xy = 1$ qual é o menor valor para a expressão

$$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2 + 2}?$$

Problema 6. Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD = BC$, $\angle DAC = 40^\circ$, $\angle CAB = \angle ABD = 30^\circ$ e $\angle CBD = 20^\circ$. Qual o valor do ângulo $\angle DCA$?



3.4 Nível U

PARTE A

Problema 1. Em um determinado resort, uma agência de viagens distribui os turistas entre 5 hotéis ali existentes (numerados de 1 a 5), tratando-os como pessoas indistinguíveis (os hóspedes não têm nomes). Supondo que cada hotel tenha infinitas vagas, de quantos modos é possível distribuir 13 hóspedes entre esses hotéis distintos, de forma que nenhum hotel fique vazio?

Problema 2. Seja $a_1 = 2024^{2023^{2024}}$ e $a_{n+1} = S(a_n)$ onde $S(k)$ é a soma dos dígitos de k . Determine $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Problema 3. Os tamanhos dos lados de um triângulo ABC são l_1, l_2 e l_3 . É sabido que tais tamanhos estão em progressão aritmética de razão 1 e que o maior ângulo excede o menor ângulo em 90° . Qual é o valor de $(l_1 + l_2 + l_3)^2$.

Problema 4. Estudantes deixaram os números inteiros de -5 a 5 escritos no quadro negro do hall do IM novo. Cícero ao vê-los decidiu escrever todos os números complexos obtidos com os inteiros escritos no quadro. Depois, curioso, decidiu projetá-los no círculo unitário, i.e. ao formar o número z marcou o número $\frac{z}{|z|}$ no círculo unitário centrado na origem. Quantos pontos Cícero marcou?

PARTE B

Problema 5. Suponha que $A : V \rightarrow V$ é um operador linear autoadjunto definido em um espaço vetorial real de dimensão n , e que satisfaz

$$\langle Av, v \rangle \geq 0$$

para todo $v \in V$. Seja B um operador que satisfaz $AB + BA = 0$. Prove que $AB = BA = 0$.

Observação: A é autoadjunto se $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$ para quaisquer pares de vetores v e w em V .

Problema 6. Considere o seguinte conjunto de funções:

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é derivável, } f' \text{ é contínua e } f'(x) > f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Qual é o maior número natural N tal que $f(8) > Nf(0)$ para toda $f \in \mathcal{F}$?

Enunciados da OAM 2025

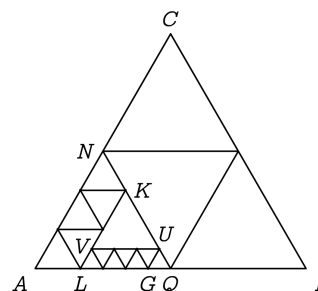
4.1 Nível 1

PARTE A

Problema 1. A professora Joyce escreveu no quadro todos os divisores positivos do número 2025. Sabendo que ela levou exatamente 3 segundos para escrever cada divisor, quanto tempo, em segundos, ela gastou para escrever apenas os divisores de 2025 que são múltiplos de 3?

Problema 2. Na figura ao lado, o triângulo ABC é equilátero. Ele foi dividido em 4 triângulos equiláteros. O quadrilátero $ALKN$ foi dividido em 5 triângulos equiláteros e o quadrilátero $LQUV$ foi dividido em 7 triângulos equiláteros.

Assumindo que o perímetro do triângulo ABC é 108 cm, qual é o perímetro do triângulo GQU ?



Problema 3. Um número é *adoisado* quando ele pode ser obtido pela soma de duas potências de 2. Por exemplo, 12 é adoisado porque $12 = 2^3 + 2^2$. Quantos números adoisados menores do que 1000 existem?

Problema 4. Um número natural m é *sobrinho* de 35 se satisfaz estas três condições:

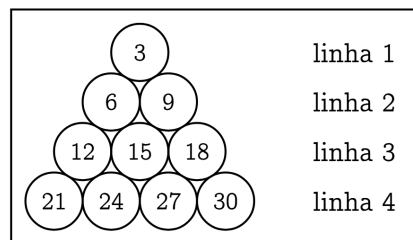
$$(I) m < 35, \quad (II) \text{mdc}(35, m) > 1 \quad \text{e} \quad (III) \text{mdc}\left(35, \frac{m}{\text{mdc}(35, m)}\right) = 1$$

Por exemplo, 28 é sobrinho de 35, pois $28 < 35$, $\text{mdc}(35, 28) = 7$ e $\text{mdc}\left(35, \frac{28}{7}\right) = \text{mdc}(35, 4) = 1$. Quantos números naturais são sobrinhos de 35?

PARTE B

Problema 5. O perímetro de certo retângulo mede o quádruplo de sua área. Quais as medidas dos lados desse retângulo, sabendo-se que elas são inteiras?

Problema 6. Os múltiplos de 3 foram escritos seguindo o padrão da figura ao lado. Sabe-se que Clarisse continuou escrevendo até a décima linha e depois somou o primeiro com o último número que aparecem nessa linha. Qual o valor encontrado por Clarisse?



4.2 Nível 2

PARTE A

Problema 1. O fatorial de um número natural n (representado por $n!$) é o produto de todos os números naturais positivos menores ou iguais a n . Por exemplo, $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2 \times 1 = 2$ e $3! = 3 \times 2 \times 1$. Por sua vez, o carimbo de um número é o algarismo das unidades da soma dos fatoriais de seus algarismos. Por exemplo, o carimbo de 2025 é o algarismo das unidades de $2! + 0! + 2! + 5! = 125$. Quantos são os números de dois algarismos cujo carimbo é 1?

Problema 2. Qual é a menor quantidade de elementos que um conjunto de inteiros positivos distintos menores que 2026 deve ter para garantir que esse conjunto possua dois números cuja soma é 2025?

Problema 3. Sejam x, y, z números reais não nulos tais que $x + y + z = 0$. Quanto vale

$$\frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}?$$

Problema 4. No triângulo ABC , marcam-se os pontos D em AB e E em AC tais que $\overline{AD} = \frac{1}{4}\overline{AB}$ e $\overline{AE} = \frac{1}{3}\overline{AC}$. Se as retas BE e CD se intersectam em P , e a área do triângulo PBC é igual a 12, determine a área do triângulo ABC .

PARTE B

Problema 5. Quais são todos os números naturais de quatro algarismos da forma $ABAC$ que são quadrados perfeitos e deixam resto igual a 25 na divisão por 100?

Problema 6. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC . Seja M o ponto médio de BC e D um ponto sobre o segmento BC tal que $\angle BAD = \frac{1}{4}\angle BAC$. Seja E o pé da perpendicular traçada de C até a reta AD , de tal modo que $DE = DM$. Determine os ângulos do triângulo ABC .

4.3 Nível 3

PARTE A

Problema 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função crescente tal que $f(n \cdot x) = [f(x)]^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{R}$. Suponha que $f(1)$ é a raiz da equação $x^\pi - 2025 = 0$. Quanto vale $f(\pi)$?

Problema 2. Qual é a menor quantidade de elementos que um conjunto de inteiros positivos distintos menores que 2026 deve ter para garantir que esse conjunto possua dois números cuja soma é 2025?

Problema 3. Quantas são as soluções inteiras e positivas x e y da equação

$$2025x + 2024y = 20242025$$

que satisfazem $x \leq 10000$ e $y \leq 10000$?

Problema 4. Seja ABC um triângulo e D um ponto sob o lado AB de modo que $\angle DAC = 36^\circ$, $\angle ACD = 18^\circ$ e $\overline{BD} = \overline{BC}$. Sabendo-se que $\overline{AC}^2 + \overline{DC}^2 = 16$, qual o comprimento do lado BC ?

PARTE B

Problema 5. Encontre todos os valores de $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$ e $b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ que satisfazem a igualdade

$$\overline{abac} = (\overline{ab} + \overline{ac})^2.$$

Na equação acima, \overline{ab} denota o número que tem a como algarismo das dezenas e b como algarismo das unidades. Por exemplo,

$$2025 = (20 + 25)^2.$$

Problema 6. Sejam x, y, z reais positivos tais que $x + y + z = 9$. Qual o menor valor que a expressão

$$\frac{x^2 + y + z}{yz} + \frac{x + y^2 + z}{xz} + \frac{x + y + z^2}{yx}$$

pode assumir?

4.4 Nível U

PARTE A

Problema 1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Denotando $X = AB$, calcule

$$2025 \cdot \text{tr}(X^{2025}) - 2024 \cdot \text{tr}(X^{2024}).$$

Observação: O traço (tr) de uma matriz é a soma das entradas de sua diagonal.

Problema 2. Quando $f : X \rightarrow X$ é uma função escrevemos $f^{(1)} = f$ e $f^{(n)} = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$, a composição de f consigo n -vezes. Encontre o inteiro mais próximo do valor de

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^{(2025)} x + 2025) dx.$$

Problema 3. Quantos números de 7 dígitos são maiores que 6000000 e têm a soma de seus dígitos igual a 42?

Problema 4. Qual é o número de ternas (x, y, w) de inteiros não-negativos que satisfazem a equação $2^x - y^2 = 2025^w$?

PARTE B

Problema 5. Denote por $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x - 2025)^2 + (y - 2025)^2 = 1\}$. Tangente à Γ no ponto $(2025 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2025 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ temos uma reta r e escrevemos s a reta que intersecta r em $x = 2026$ e é tangente à Γ . Se t é a reta tangente à Γ passando pelo ponto $(2025 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2025 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ ($t \neq r$). Encontre a área entre as retas r, s e t exterior ao círculo determinado por Γ .

Problema 6. Sejam $(a_n)_{n \geq 1}$ e $(p_n)_{n \geq 1}$ sequência de números reais positivos de modo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right) > 0.$$

Prove que $\sum a_n$ é uma série convergente.

Jogos

por Lucas Nakagawa e Henrique Trajano

Desde crianças somos introduzidos a brincadeiras e jogos para entretenimento e aprendizado. Neste capítulo, é apresentado um assunto recorrente em provas olímpicas que une a interação que os jogos proporcionam com o pensamento matemático. Esse é um dos assuntos que os alunos mais acham divertidos. É uma boa forma de despertar o interesse matemático nas crianças.

Aqui abordaremos através de exemplos algumas técnicas muito legais e conhecidas que são utilizadas em problemas envolvendo jogos, tais como simetria, regressão e invariância. A ideia de simetria consiste em fazer, em certo sentido, uma jogada espelhada ao movimento do seu adversário. A invariância consiste basicamente em observar algo que não muda de uma operação para outra. E a regressão consiste em observar como o jogo se comporta em sua fase final para se obter uma estratégia vencedora.

Se você for professor, chame dois alunos para jogar no quadro. Geralmente eles vão brigar para jogar, e a ideia é essa mesmo: sem perceber, eles estarão brigando para estudar. Se você for aluno, busque alguém para jogar com você. Contamine mais um coleguinha e faça ele gostar de matemática através dos jogos. Só não vale jogar sem explicar a estratégia vencedora, combinado? Encontre sua dupla de estudo e divirtam-se.

5.1 Definições

Definição 1 (Posição vencedora). São posições do jogo em que sempre existe uma estratégia que leva o jogador a vitória independente do movimento do adversário.

Definição 2 (Posição perdedora). Não importa o movimento escolhido, o adversário irá entrar em uma posição vencedora.

As definições são sob a perspectiva de quem vai jogar. Por exemplo, digamos que os dois jogadores joguem da melhor forma possível. Se for a vez do primeiro jogador e ele estiver em uma posição perdedora, então ele perderá. Sendo assim, para obter uma estratégia vencedora, basta garantir que você sempre conseguirá colocar seu adversário em uma posição perdedora. Para exemplificar como essas definições nos ajudam, resolveremos o problema a seguir.

5.2 Exemplos

Exemplo 5.1 (Círculos Matemáticos - Experiência Russa (Adaptada)). O número 2025 está escrito em um quadro negro, dois jogadores revezam subtraindo do número no quadro qualquer de seus divisores positivos e substituindo o número original com o resultado desta subtração. Perde o jogador que escrever o número zero.

Qual jogador possui uma estratégia vencedora? Ou seja, qual dos jogadores pode garantir a vitória independente do que o outro jogador faça, o primeiro jogador ou o segundo jogador?



Raciocínio: Primeiro, analisamos como o jogo funciona para casos menores. Vamos analisar o que ocorre se o número 1 estiver escrito no quadro.

- Se o número 1 está no quadro, então o jogador perderá. Isso ocorre porque o único divisor positivo do 1 é ele mesmo. Ou seja, a operação $1 - 1 = 0$ será feita e ele chegará no zero, portanto, perderá.

Apesar de não sabermos uma estratégia vencedora para vencer o jogo iniciando de 2025, podemos observar que o 1 é uma posição perdedora, ou seja, se colocarmos o nosso adversário no número 1, então ele perderá.

- Se o número 2 está no quadro, então facilmente poderemos colocar nosso adversário no 1, basta subtrair 1, ou seja, será feita a operação $2 - 1 = 1$. Dessa forma, nosso adversário estará com o número 1 no quadro e, portanto, perderá.

Neste caso, podemos chamar o 2 de posição vencedora, pois podemos deixar nosso adversário em uma posição perdedora. Isso nos leva a pensar em como forçar nosso adversário a nos colocar no 2, pois assim venceríamos. Vamos ver o que acontece com o número 3:

- Se o número 3 está no quadro, então ou subtrai 1, ou subtrai 3. Pois os únicos divisores positivos do 3 são 1 e 3. Ora, subtraindo 1 colocaremos nosso adversário no 2, e ele ganhará. Subtraindo 3 chegaremos no zero e perderemos. Então, qualquer que seja a escolha perderemos.

Concluimos que 3 é uma posição perdedora. Então podemos pensar em como vamos tentar colocar nosso adversário no 3. Continuando a análise, agora com o 4:

- Se o número 4 estiver no quadro, então basta subtrair 1 que colocaremos nosso adversário no 3, que é uma posição perdedora.

Ou seja, o 4 é uma posição vencedora, pois é possível colocar nosso adversário em uma posição perdedora. Agora, vamos analisar até o número 10:

- Se o número 5 estiver no quadro, somente podemos subtrair 1 ou subtrair 5. Por um lado, escolhendo subtrair 1, deixamos nosso adversário em uma posição vencedora. Por outro lado, escolhendo subtrair 5 iremos perder pois o resultado dará 0.
- Se o número 6 estiver no quadro, então basta subtrair 1 colocando o adversário no 5 que é uma posição perdedora.
- Se o número 7 estiver no quadro, somente poderemos subtrair 1 e 7, pois são seus únicos divisores positivos. Subtraindo 1, colocaremos nosso adversário numa posição vencedora. Por outro lado, se subtrairmos 7, iremos perder, pois o resultado será 0.
- Se o número 8 estiver no quadro, então basta subtrair 1 colocando nosso adversário no 7 que é uma posição vencedora.
- Se o número 9 estiver no quadro, então poderemos subtrair por 1, 3 ou 9. Se escolhermos subtrair por 1, então colocaremos nosso adversário no 8 que é uma posição vencedora, e perderemos. Se a escolha for subtrair 3, então colocaremos nosso adversário no 6, que é uma posição vencedora, portanto, perderemos. Se subtrair 9, então iremos para o zero e perderemos. Ou seja, 9 é uma posição perdedora.
- Se o número 10 estiver no quadro, então basta subtrair 1 que nosso adversário será colocado no 9 que é uma posição perdedora. Segue que, 10 é uma posição vencedora.

Com a análise desses 10 números faremos uma tabela associando a cada número o símbolo P ou V , onde P é uma posição perdedora e V é uma posição vencedora:

1	P
2	V
3	P
4	V
5	P
6	V
7	P
8	V
9	P
10	V

Veja que interessante, de acordo com nossa análise de casos, os números ímpares são posições vencedoras.

Apesar do problema não estar resolvido, a partir da observação dos casos particulares, é razoável investir nessa ideia, pois 2025 é ímpar.

Sugerimos que faça um teste no conforto de sua residência até o número 30 para verificar se o mesmo comportamento se mantém.

Perceba que quando um número ímpar está no quadro, então o próximo número que aparecerá será par. Isto ocorre, pois todos os divisores de um número ímpar é ímpar, e

quando fazemos a subtração de um número ímpar por algum outro número ímpar o resultado será obrigatoriamente um número par, portanto, após um ímpar sempre surgirá um número par. Então é importante que o adversário sempre fique em posição ímpar para poder nos colocar em posição par e repetirmos o processo até escrevermos o número 1 no quadro, o deixando numa posição ímpar e por fim nosso adversário obrigatoriamente escrevendo 0.

Com tudo o que descobrimos até agora iremos escrever uma solução completa para o problema:

Solução:

Se o número que está escrito no quadro for ímpar, então o próximo número escrito será par. De fato, como todos os divisores de um número ímpar é ímpar, então após fazer a operação de algum ímpar menos outro ímpar, então, o resultado será um número par. Portanto, o segundo jogador basta usar a seguinte estratégia:

- *Após a jogada do primeiro jogador basta o segundo jogador subtrair 1.*

Mantendo essa estratégia desde o início o primeiro jogador sempre jogará quando um número ímpar estiver no quadro e o segundo jogador sempre jogará quando um número par estiver no quadro, e após subtrair 1 irá transformá-lo de novo em um ímpar. Como o jogo é finito, e o único que transforma um número em um número par é o primeiro jogador, então, em algum momento ele jogará no zero, perdendo o jogo. Portanto, com essa estratégia, o segundo jogador sairá vitorioso.

A ideia para construir uma solução para problemas como esse é olhar para casos menores, entender como funciona e a partir disso desenvolver uma resposta para um caso maior. (Essa ideia funciona para diversos outros problemas de outras áreas.)

Exemplo 5.2 (Círculos Matemáticos - A Experiência russa). Sete copos estão em uma mesa, todos de cabeça para baixo. É permitido virar quaisquer quatro deles em um movimento. É possível chegar a uma situação onde todos os copos estão virados para cima?



Sugerimos que pegue 7 copos de plástico (se tiver) e brinque um pouco tentando, isso ajuda a entender a solução do problema. Esse é um ótimo problema para abordarmos uma técnica chamada invariância em uma questão de matemática da vida real. Se você acabou de tentar isso, e conseguiu, então você está mentindo! Caso você não tenha conseguido,

deve ter se incomodado porque parece que é impossível que todos os copos sejam virados para cima seguindo essas regras.

Solução:

Existem essencialmente 5 jogadas possíveis, que são:

1. Virar exatamente 4 copos para cima.
2. Virar exatamente 4 copos para baixo.
3. Virar exatamente 3 copos para baixo e 1 para cima.
4. Virar exatamente 3 copos para cima e 1 para baixo.
5. Virar exatamente 2 copos para baixo e 2 para cima.

Observe que a relação de paridade do número de copos virados para cima é invariante (é sempre a mesma). A quantidade de copos virados para cima é sempre par, portanto, é impossível deixar 7 copos virados para cima, pois 7 é ímpar. Essa afirmação deve ser demonstrada. É isso que faremos a seguir. Imagine a seguinte tabela:

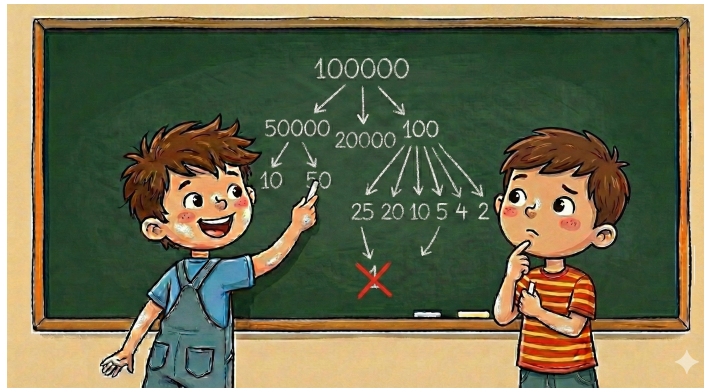
Ação (escolher 4 dos 7 copos)	Varição (C_{cima})	Paridade
4 para cima \rightarrow 4 para baixo	-4	Inalterada
4 para baixo \rightarrow 4 para cima	+4	Inalterada
3 p/ baixo e 1 p/ cima \rightarrow inverso	+3 - 1 = +2	Inalterada
3 p/ cima e 1 p/ baixo \rightarrow inverso	-3 + 1 = -2	Inalterada
2 p/ baixo e 2 p/ cima \rightarrow inverso	-2 + 2 = 0	Inalterada

O resultado da variação diz a quantidade que aumentou ou reduziu dos copos que estavam para cima previamente. Por exemplo, o -4 na tabela representa que a quantidade de copos virados para cima diminuiu em 4 unidades. E a equação $+3 - 1 = +2$ representa que aumentamos +3 copos para cima e diminuímos uma unidade resultando em +2 copos para cima. Lembre que começamos com uma quantidade par de copos virados para cima, que é 0. E todas as operações feitas não alteram a paridade do número de copos voltados para cima porque somar ou subtrair um número par de um número inteiro não altera a paridade. Portanto, como a paridade da quantidade de copos virados para cima inicialmente é par, então sempre será par. Assim garantimos que nunca chegaremos em 7 copos virados para cima, pois 7 é ímpar.

Para solucionarmos a questão, é importante testarmos o jogo para percebermos padrões. Neste caso, buscamos invariantes. Vem a seguinte questão: A paridade de copos virados para cima é sempre a mesma, ou seja, é sempre par? Sim, de fato é sempre par. Isso é concluído após listar sistematicamente os casos essenciais que existem quando viramos 4 copos. Logo após, analisamos cada caso para observar se a paridade permanece invariante.

Exemplo 5.3 (Chomp - Adaptada). Em um jogo, dois jogadores Arnaldo e Bernaldo, dizem alternadamente divisores positivos do número 100000. Os números ditos não podem ser

múltiplos de nenhum dos números escolhidos anteriormente. Perde quem escolher o número
 1. Se Arnaldo começa o jogo, então, quem possui uma estratégia vencedora?



Solução: A ideia chave desse problema é olhar para simetria e faremos isso da seguinte forma, vamos listar os divisores positivos do número 100000. Veja que, $100000 = (2^5 \times 5^5)$, dessa forma construímos a seguinte tabela:

1	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5
2^1					
2^2					
2^3					
2^4					
2^5					

Que é equivalente a:

1	5	25	125	625	3125
2					
4					
8					
16					
32					

Fazendo as devidas multiplicações:

1	5	25	125	625	3125
2	10	50	250	1250	6250
4	20	100	500	2500	12500
8	40	200	1000	5000	25000
16	80	400	2000	10000	50000
32	160	800	4000	20000	100000

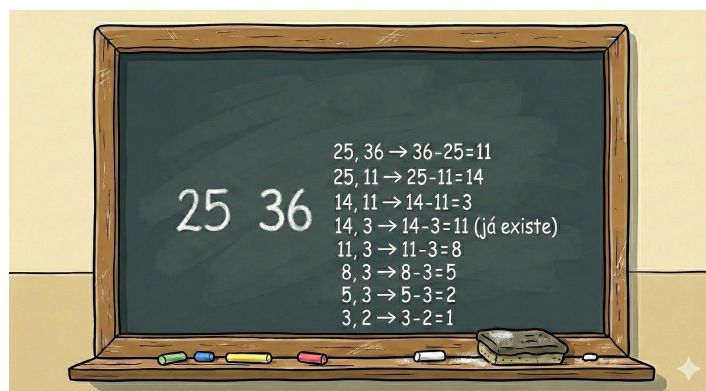
Olhando para a última tabela, fica claro que se Arnaldo escolher o número 10 na primeira jogada, então, todos os números em vermelho na tabela não poderão ser escolhidos, pois são todos múltiplos de 10.

Portanto, a partir daqui só poderão ser escolhidas potências de 2 ou de 5. Agora, para Arnaldo garantir a vitória basta seguir a seguinte estratégia

Escolha/Bernaldo	Resposta/Arnaldo	Exemplo Prático
5^i (com $i \neq 0$)	2^i	Bernaldo: $125 = 5^3 \rightarrow$ Arnaldo: $8 = 2^3$
2^i (com $i \neq 0$)	5^i	Bernaldo: $16 = 2^4 \rightarrow$ Arnaldo: $625 = 5^4$

Dessa forma, pela simetria da tabela, Arnaldo sempre terá uma jogada em um número diferente do 1. Portanto, como o jogo é finito, em algum momento, inevitavelmente, Bernaldo terá que escolher o número 1, e perderá.

Exemplo 5.4 (Círculos Matemáticos Experiência russa). Os números 25 e 36 estão escritos em um quadro negro. Em cada jogada o jogador da vez escreve no quadro negro a diferença (positiva) entre dois números já escritos no quadro, se este ainda não estiver escrito no quadro. Perde o jogador que não puder mais escrever um número. Quem possui uma estratégia vencedora?



Solução: Observe que a primeira subtração e única possível a ser feita é $36 - 25 = 11$. Após este passo, note que só é permitido fazer a subtração $25 - 11 = 14$, pois a subtração $36 - 11$ resulta em 25 e por sua vez já está escrito no quadro. Até então, os números escritos no quadro são 36, 25, 11 e 14. Veja que ao fazer $14 - 11$ teremos como resultado 3 e $25 - 3 \times 8 = 1$. Ou seja, o número 1 em algum momento será obtido. Pode ser que ele seja obtido através da expressão $25 - 3 \times 8$, e se essa operação não puder ser feita, significa que o número 1 já está escrito. Como 1 estará escrito no quadro em algum momento e 36 já está, então todos os números de 1 a 36 estarão escritos no quadro.

Sabendo disso, o problema se transforma em um problema de paridade. Basta olhar para o problema como uma competição de quem escolhe o último número possível dentre os 34 restantes. Neste caso, o segundo jogador vencerá independente do modo como seja jogado.

5.3 Problemas propostos

Problema 5.1. Em turnos, dois jogadores escolhem divisores positivos de 48. O próximo número a ser escolhido não pode ser divisor de nenhum número escolhido anteriormente. Perde o jogo quem é obrigado a escolher o número 48. Quem possui uma estratégia vencedora, o primeiro ou o segundo jogador?

Problema 5.2 (OBM). Em um jogo para dois participantes, Arnaldo e Bernaldo alternadamente escolhem um número inteiro positivo. A cada jogada, deve-se escolher um número maior que o último número escolhido e menor que o dobro do último número escolhido. Nesse jogo, vence o jogador que conseguir escolher o número 2004. Arnaldo joga primeiro e inicia com o número 2. Qual dos dois tem estratégia vencedora, ou seja, consegue escolher o número 2004 independentemente das jogadas do adversário?

Problema 5.3. Na sala de jogos do Hotel de Hilbert existe um jogo de trilha com 2019 casas numeradas de 0 a 2018. No início do jogo, um peão está na casa de número 0. Dois hóspedes jogam alternadamente e em cada jogada o peão pode ser deslocado exatamente 55 casas para frente ou ele pode ser deslocado exatamente 4 casas para trás. Ou seja, se o peão está na casa n , então ele pode pular para a casa $n + 55$ ou ele pode pular para a casa $n - 4$, desde que essas sejam casas do tabuleiro. Vence o jogador que posicionar o peão na casa numerada com 2018.

- (a) Qual dos jogadores (o que inicia o jogo ou o que movimenta o peão pela segunda vez) possui uma estratégia vencedora? Como ele deve jogar para vencer?
- (b) Mostre que seguindo as regras do jogo o peão pode ser posicionado em qualquer uma das 2019 casas do tabuleiro.

Problema 5.4. Dois jogadores se revezavam colocando torres em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se capturar mutuamente. Perde o jogador que não consegue colocar uma torre. Quem vai vencer?

Problema 5.5. Este jogo começa com o número 0. Em cada jogada, um jogador pode somar o número atual a qualquer número natural de 1 a 9. Vence o jogador que chegar ao número 100. Quem possui uma estratégia vencedora, o primeiro ou o segundo jogador?

Quem possui estratégia vencedora? (Questão 6 - 22)

Problema 5.6. Estão escritos em um quadro negro dez algarismos iguais a 1 e dez algarismos iguais a 2. Em cada jogada, o jogador da vez pode apagar dois algarismos quaisquer. Se os dois algarismos apagados forem iguais, eles serão substituídos por um 2. Se forem diferentes, serão substituídos por um 1. Se, no final, sobrar um 1, vence o primeiro jogador; se sobrar um 2, vence o segundo jogador.

Problema 5.7. É dado um tabuleiro como o de xadrez, mas com dimensões (a) 9×10 ; (b) 10×12 ; (c) 9×11 . Em cada jogada, o jogador da vez pode eliminar uma linha ou uma coluna, desde que, no início da jogada, esta linha ou coluna tenha pelo menos um quadrado remanescente. O jogador que não puder jogar na sua vez perde.

Problema 5.8. Dois jogadores se revezam colocando moedas de um centavo em uma mesa redonda, sem empilhar uma moeda em cima da outra. O jogador que não puder colocar uma moeda perde.

Problema 5.9. Dois jogadores se revezam colocando bispos em um tabuleiro de xadrez, de modo que não possam se capturar mutuamente (os bispos podem ser colocados em quadrados de qualquer cor). Perde o jogador que não puder fazer sua jogada.

Problema 5.10. Temos duas pilhas, cada uma delas com 7 pedras. Em cada jogada, o jogador da vez pode retirar quantas pedras quiser, mas só de uma das pilhas. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Problema 5.11. Dois jogadores se revezam colocando cavalos em um tabuleiro de xadrez de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Problema 5.12. Dois jogadores se revezam colocando reis em um tabuleiro 9×9 de modo que não possam se atacar mutuamente. Perde o jogador que não conseguir fazer sua jogada.

Problema 5.13. Dado um tabuleiro 10×10 com cores alternadas, dois jogadores se revezam cobrindo pares de quadrados com dominós. Cada dominó consiste em um retângulo com 1 quadrado de largura e 2 quadrados de comprimento (que podem ser colocados na posição horizontal ou vertical). Um dominó não pode ser colocado com um quadrado em cima de outro dominó. Perde o jogador que não conseguir colocar seu dominó.

Problema 5.14. Coloca-se uma peça em cada quadrado de um tabuleiro de damas 11×11 . Os jogadores se revezam retirando um número arbitrário de peças vizinhas ao longo de uma linha ou de uma coluna. Vence o jogador que retirar a última peça.

Problema 5.15. Temos dois montes de pedras. Um tem 30 pedras e o outro tem 20. Os jogadores se revezam removendo quantas pedras quiserem, mas só de um dos montes. Vence o jogador que remover a última pedra.

Problema 5.16. São colocados 20 pontos em um círculo. Os jogadores se revezam unindo dois dos pontos com um segmento de reta que não cruza outro segmento já desenhado. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

Problema 5.17. Uma margarida tem (a) 12 pétalas; (b) 11 pétalas. Os jogadores se revezam retirando uma única pétala ou duas que estejam uma do lado da outra. Perde o jogador que não puder jogar na sua vez.

Problema 5.18. Em um tabuleiro de xadrez, uma torre está na posição $a1$. Dois jogadores se revezam movendo a torre de quantos quadrados quiserem, horizontalmente para a direita ou verticalmente para cima. Vence o jogador que colocar a torre na posição $h8$.

Problema 5.19. Coloca-se um rei na posição $a1$ de um tabuleiro de xadrez. Dois jogadores se revezam movendo o rei para cima, para a direita ou ao longo de uma diagonal indo para cima e para direita. Vence o jogador que colocar o rei em $h8$.

Problema 5.20. (Olimpíada de Maio N2 P3 2020) Existe uma caixa com 2020 pedras. Ana e Beto brincam de retirar pedras da caixa alternadamente e começando com Ana. Cada jogador na sua vez deve remover um número positivo de pedras que seja capicua. Quem conseguir deixar a caixa vazia vence. Determine qual dos dois tem uma estratégia vencedora e explique qual é essa estratégia.

Nota. Um número inteiro positivo é capicua se ele pode ser lido de modo igual da direita para a esquerda e da esquerda para a direita. Por exemplo, 3, 22, 484 e 2002 são capicuas.

Problema 5.21. Este jogo começa com o número 1000. Em cada jogada, um jogador pode subtrair do número atual qualquer número natural menor do que ele que seja uma potência de 2 (note que $1 = 2^0$). Vence o jogador que chegar ao número 0.

Problema 5.22. Comece com $n = 2$. Dois jogadores, A e B , movem-se alternadamente adicionando um divisor próprio de n ao n atual. O objetivo é um número ≥ 1990 . Quem vence?

Problema 5.23. Comece com duas pilhas de 2025 e 2026 fichas, respectivamente. Os jogadores A e B jogam alternadamente. Uma jogada consiste em remover qualquer uma das pilhas e dividir a outra pilha em duas. O perdedor é aquele que não puder mais fazer um movimento. Quem vence?

Problema 5.24. A e B pintam alternadamente casas de um tabuleiro de xadrez 4×4 . O perdedor é aquele que primeiro completar um subquadrado 2×2 colorido. Quem pode forçar a vitória?

Problema 5.25. Comece com os números de 1 a 20. A e B retiram alternadamente um inteiro, até que restem apenas dois inteiros a e b . O jogador A vence se $\text{mdc}(a, b) = 1$, e o jogador B vence se $\text{mdc}(a, b) > 1$. Quem vence?

5.4 Dicas dos problemas propostos

Problema 5.1. Liste todos os divisores positivos de 48. Analise a posição vencedora e perdedora em cada um dos divisores positivos.

Problema 5.2. Analise as posições perdedoras e vencedoras do número 2004, depois do número 2003, depois do número 2002, ..., e assim por diante.

Problema 5.3.

(a) O segundo jogador.

(b) $55 \cdot 3 - 4 \cdot 41 = 1$.

Problema 5.4. Jogue simetricamente.

Problema 5.5. Analise as posições vencedoras e perdedoras.

Problema 5.6. Analise a simetria.

Problema 5.7. Analise a paridade. Tente manter as dimensões $\text{PAR} \times \text{PAR}$.

Problema 5.8. Ponha uma moeda no centro. Analise a simetria.

Problema 5.9. Analise a simetria.

Problema 5.10. Analise a simetria.

- Problema 5.11.** Analise a simetria.
- Problema 5.12.** Ponha o rei no centro do tabuleiro na primeira jogada. Analise a simetria.
- Problema 5.13.** Analise a simetria.
- Problema 5.14.** Analise a simetria.
- Problema 5.15.** Retire 10 pedras do monte de 30 pedras. Analise a simetria.
- Problema 5.16.** Analise a simetria.
- Problema 5.17.** Analise a simetria.
- Problema 5.18.** Analise o jogo de trás para frente (Regressão) e ponha em cada casinha P (posição perdedora) ou V (posição vencedora).
- Problema 5.19.** O mesmo que o problema anterior.
- Problema 5.20.** Analise o jogo de trás para frente. Mostre que as posições perdedoras são aquelas em que o número é múltiplo de 10.
- Problema 5.21.** O mesmo que o problema anterior.
- Problema 5.22.** Perceba que A consegue forçar ficar com paridade par. Assim, podendo adicionar sempre no máximo a metade do número atual ou soma 1 para devolver um número ímpar para B , enquanto B que recebe o número em paridade ímpar e só pode adicionar outro número ímpar. Assim devolvendo um número par a A .
- Problema 5.23.** Note que duas pilhas com um bloco cada é uma posição perdedora.
- Problema 5.24.** Observe que a máxima quantidade de quadrados que podem ser pintados sem formar um quadrado 2×2 é 9.
- Problema 5.25.** O jogador B pode eliminar sistematicamente os primos maiores do que 10 e o 1.

Referências

- [1] Arthur Engel, *Problem-Solving Strategies*, Nova Iorque: Springer-Verlag New York Inc., 1998.
- [2] Fomin, D. *Círculos Matemáticos A Experiência Russa*, SBM, IMPA, 2014.
- [3] Bruno Holanda, *Jogos*, Fortaleza: Polos Olímpicos de Treinamento, 2012.
- [4] Henrique Trajano, *Como resolver problemas de MATEMÁTICA: Jogos e contagem*, 2024.

Os Traçados Auxiliares

por Kayque Bispo e Henrique Trajano

Muitos problemas difíceis de geometria parecem nos empurrar para um único caminho: o “*bash*” com trigonometria, números complexos ou geometria analítica, que muitas vezes pode ser longo e cansativo.

Um bom estudante de olimpíadas não deve negligenciar esses métodos, pelo contrário! Seus olhos devem brilhar ao enxergar um caminho que lhe garanta a solução em um tempo razoável dentro da prova. Este texto, no entanto, surge com o propósito de apresentar o outro lado da moeda.

Já viu alguma resolução em que, “do nada”, surge um segmento ou um ponto que não estava na figura original e que, “magicamente”, ajuda a resolver o problema? Essa é a beleza e a força das construções auxiliares.

Aqui, você vai perceber que não existe mágica ou sorte. Vamos descobrir que, na verdade, existem vários critérios e ideias que sistematizam a busca por esses belíssimos (e eficientes) traçados auxiliares.

Para conseguir entender os métodos e soluções, é de suma importância que você conheça os **casos de congruência de triângulos** e tenha alguma familiaridade com os **pontos notáveis de um triângulo** (de modo especial, o circuncentro é muito utilizado). Aos leitores que não possuem esse conhecimento prévio, recomendamos consultar [1].

6.1 Critérios de Construção

Nesta seção, exploraremos as principais configurações que sugerem um traçado auxiliar. Como regra geral, buscamos sempre “transportar” informações de um lugar para outro da figura.

Critério 1 – Ângulos 2 : 1

Quando um triângulo tiver ângulos na razão 2 : 1, é útil fazer alguma das seguintes construções.

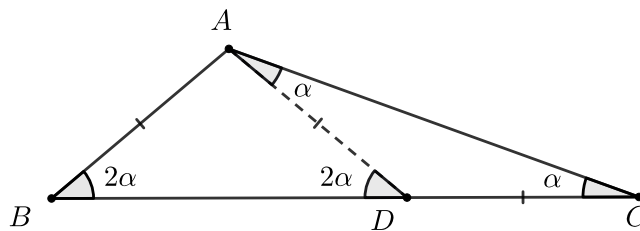


Figura 1

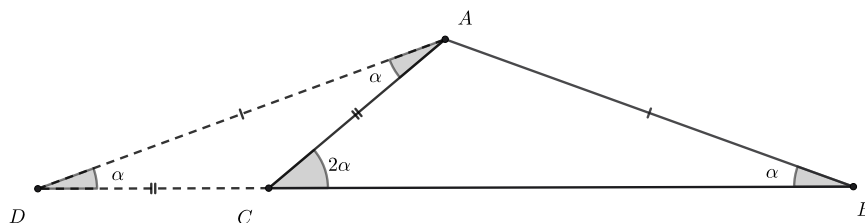


Figura 2

Perceba que elas fazem segmentos e ângulos conhecidos aparecerem em novos lugares de forma estratégica (esse é o truque geral das soluções por traçados auxiliares).

Critério 2 – Bissetriz traz triângulo isósceles

Quando temos uma bissetriz de um ângulo num triângulo, é útil forçar a aparição de um triângulo isósceles.

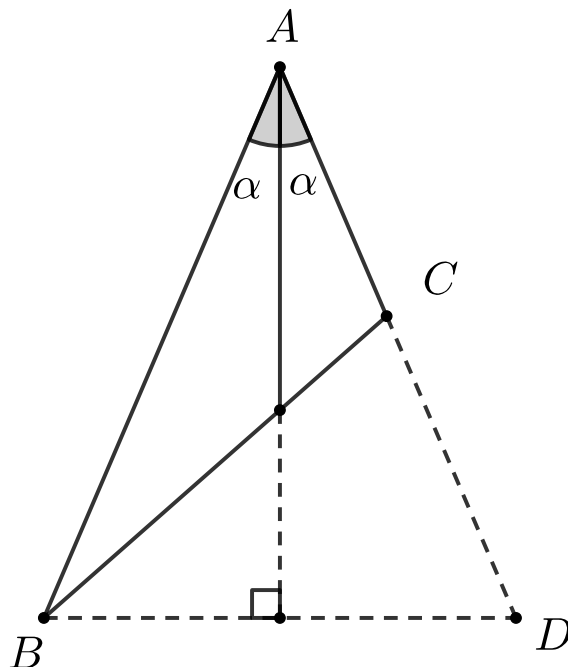


Figura 3

Critério 3 – O ângulo de 30° e o circuncentro

Quando num triângulo houver um ângulo de 30° ou dois ângulos que somam 30°, é útil traçar o circuncentro.

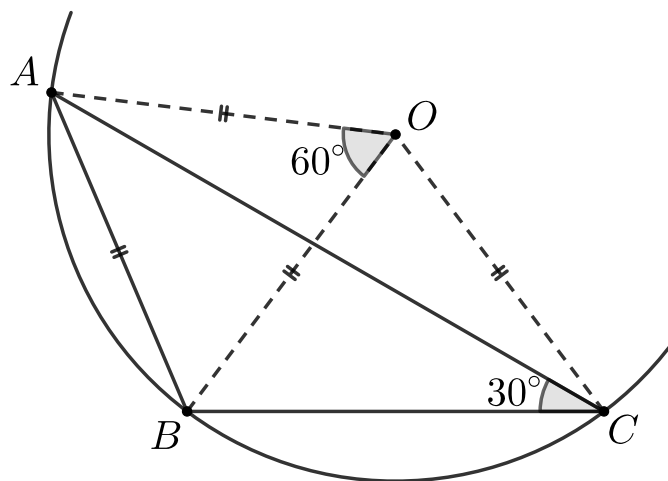


Figura 4

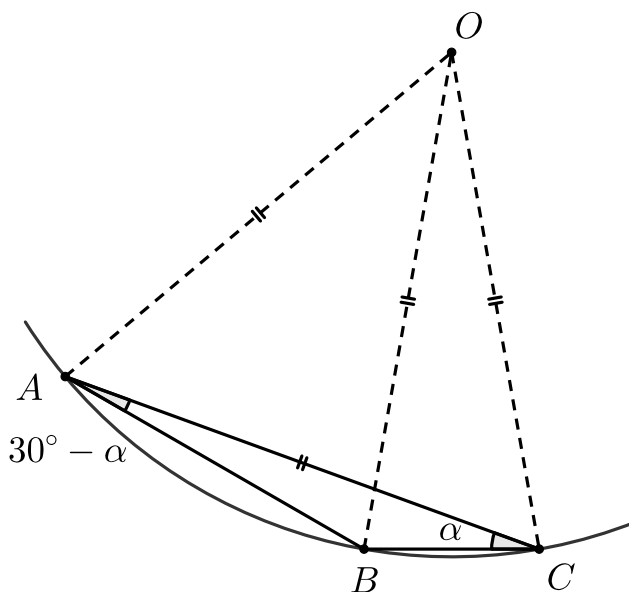


Figura 5

Perceba que forçamos a aparição de triângulos equiláteros (para entender esse traçado, lembre da relação entre ângulo inscrito e central numa circunferência).

Critério 4 – Reflexões

Reflita triângulos para obter simetrias e ligar com os outros critérios (em particular, ao refletir em torno de um ângulo de 30° obtemos um triângulo equilátero).

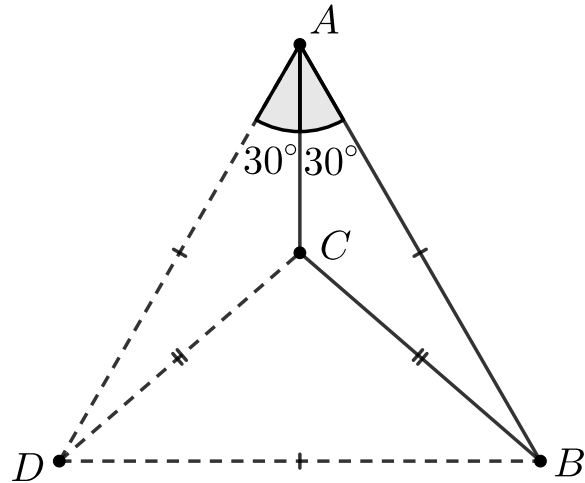


Figura 6

Critério 5 – Congruência forçada

Podemos aproveitar segmentos ou ângulos congruentes para forçar a aparição de um triângulo congruente a outro já existente na figura. Por exemplo traçando um ângulo e um segmento de tamanho específico que induza o caso LAL - Lado Ângulo Lado - de congruência. Isso ajuda a transportar ângulos e segmentos e cria simetrias. Para entender melhor, cheque os exemplos 6.1 e 6.2.

6.2 Dicas Gerais

Preste atenção nas somas dos ângulos das figuras. Em particular, quando dois ângulos somam 30° , 60° ou 180° , existe uma oportunidade de forçar triângulos equiláteros ou quadriláteros cíclicos (inscritíveis).

Lembre-se sempre dos pontos notáveis; de modo particular o circuncentro, o incentro e o exincentro são muito úteis e nos dão várias informações. Tenha um olhar atento para quando eles aparecerem.

Os critérios são apenas ideias que são úteis e aparecem frequentemente em muitos problemas, não desanime ao aplicar um deles e não conseguir uma solução. A maioria dos problemas podem ser resolvidos de várias maneiras. Seja perseverante e não tenha medo de testar coisas novas. Quanto mais problemas você tentar resolver, mais ideias e armas diferentes você terá para atacar outros problemas.

6.3 Exemplos Resolvidos

Exemplo 6.1. Na figura seguinte, $AB = AC$. Qual o valor do ângulo x ?

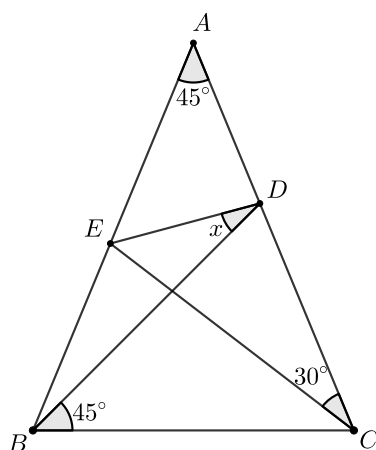


Figura 7

Solução 1: Aqui nossa estratégia vai ser forçar aparecer um triângulo congruente ao $\triangle EBD$, pois ele tem o ângulo que queremos descobrir e os lados dele são fáceis de transportar pela figura.

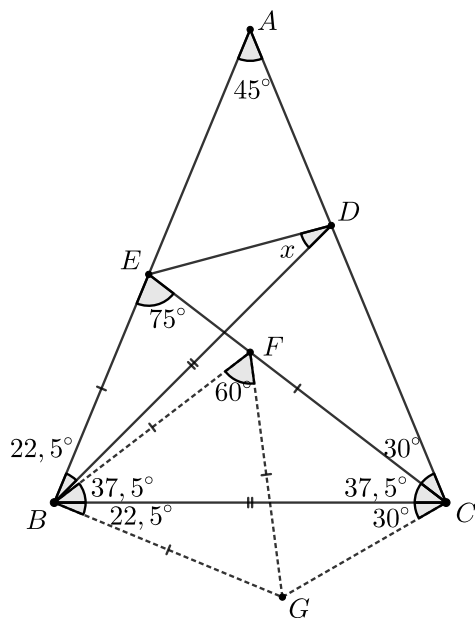


Figura 8

1. Completando os ângulos triviais (soma dos ângulos internos no triângulo). Note que o $\triangle BDC$ é isósceles. Daí $BD = BC$.
2. Seja F sobre EC tal que $\angle BFE = 75^\circ$ (Critério 2:1). Temos $BE = BF = FC$.

3. Seja G tal que $\angle FBG = 60^\circ$ e $BF = BG$. (Aproveitando que $22,5 + 37,5 = 60$, forçamos aparecer um novo ângulo de $22,5^\circ$ e um segmento de mesmo tamanho que BE ao lado do segmento BC para fazer nossa congruência forçada ao mesmo tempo que trazemos um triângulo equilátero).
4. $\triangle GBC \equiv \triangle EBD$ (LAL - Lado Ângulo Lado).
5. Da congruência, $x = \angle GCB = 30^\circ$ (para descobrir o valor de $\angle GCB$, basta completar os ângulos no isósceles $\triangle GFC$). \square

Solução 2:

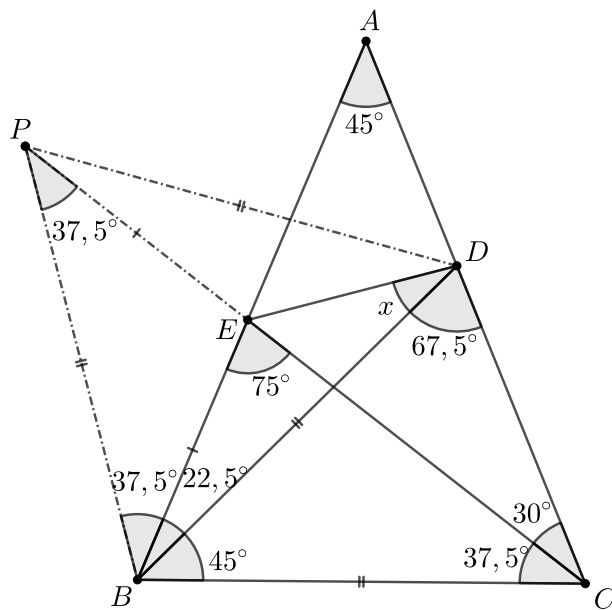


Figura 9

1. Complete os ângulos e note que $BD = BC$.
2. Como $\angle BEC = 2 \cdot \angle BCE$, então, usando o critério de ângulos na razão $2 : 1$ no triângulo BCE vamos formar o triângulo BPC .
3. Complete os ângulos. Como $\angle BPC = \angle BCP$ e $\angle PBD = 60^\circ$, então $\triangle PBD$ é equilátero.
4. Como E equidista de P e B , então E pertence a mediatriz de PB . Logo, a semi-reta \overrightarrow{DE} é bissetriz do ângulo $\angle PDB$, o que implica $x = \angle EDB = 60^\circ / 2 = 30^\circ$. \square

Exemplo 6.2. Considere o triângulo retângulo ABC , com o ângulo reto em A . Sejam BD e CE duas cevianas tais que $\angle ABD = \angle DBC = 10^\circ$ e $\angle ACE = 40^\circ$. Qual o valor do ângulo $\angle AED$?

Solução: Aqui não temos um caminho claro de início. Vamos aproveitar a bissetriz, usar os critérios e tentar ter as ideias ao longo da solução.

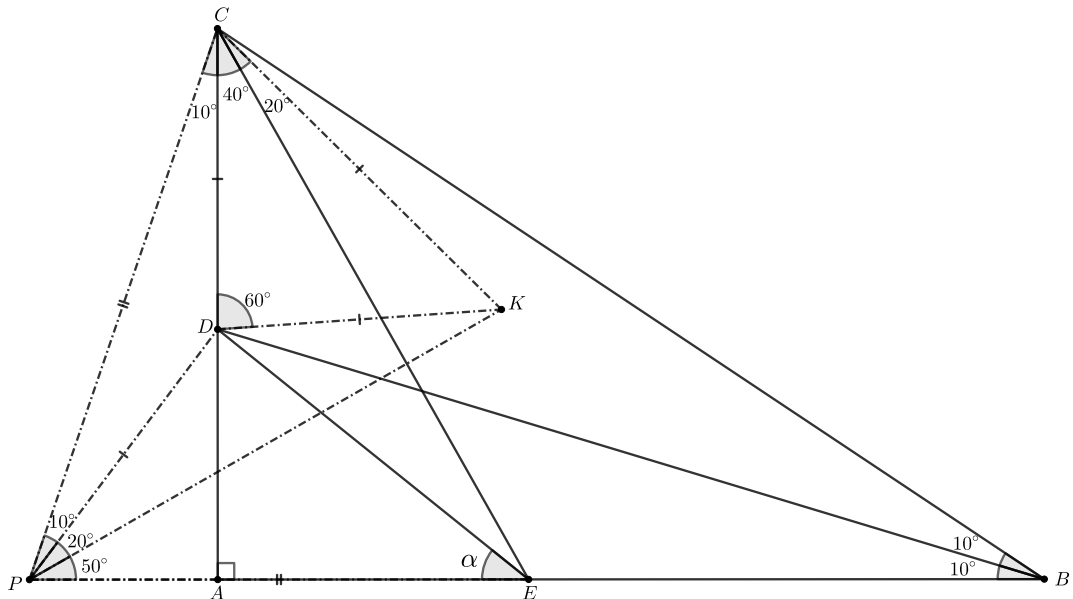


Figura 10

1. Seja P sobre o prolongamento de BA tal que $PB = CB$ (Bissetriz traz triângulo isósceles).
2. Como a bissetriz também é mediatriz em um triângulo isósceles, $PD = CD$.
3. Completando os ângulos, o $\triangle PCE$ é isósceles e portanto $PC = PE$. (Note que agora temos algo interessante. Podemos aproveitar os lados congruentes para forçar um triângulo congruente ao $\triangle DPE$, que tem o ângulo que queremos).
4. Seja K tal que $\angle PCK = 70^\circ$ e $CK = PD$ (Forçando a congruência). Temos $\triangle PCK \equiv \triangle EPD$ (LAL).
5. $CD = PD = KC$ e $\angle DCK = 60^\circ \implies \triangle DCK$ é equilátero.
6. $DP = DC = DK \implies D$ é o circuncentro do $\triangle PCK$.
7. Como o ângulo inscrito mede metade do ângulo central, $\angle CPK = \frac{\angle CDK}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$.
8. Da congruência entre os triângulos $\triangle PCK$ e $\triangle EPD$, temos $\angle AED = \angle PED = \angle CPK = 30^\circ$. □

Exemplo 6.3 (O Triângulo Russo). Dado o triângulo ABC , com $AB = AC$ e $\angle BAC = 20^\circ$. Considere as cevianas BN e CM tais que $\angle NBC = 60^\circ$ e $\angle MCB = 50^\circ$. Calcule o valor de $\angle BNM = \alpha$.

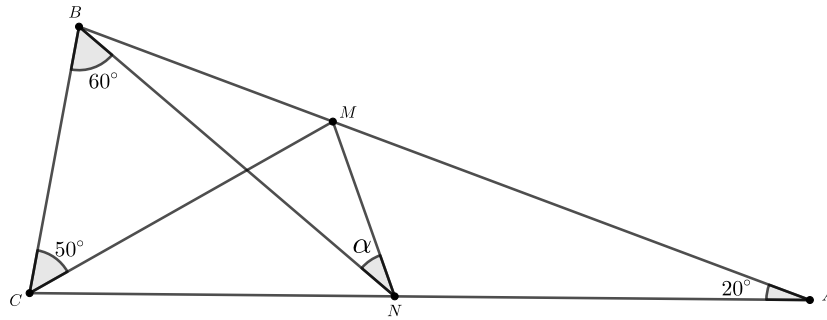


Figura 11

Solução: Esse é um problema muito famoso e que derruba quem não está muito bem preparado. Felizmente, os critérios de construções auxiliares nos entregam uma solução bem simples.

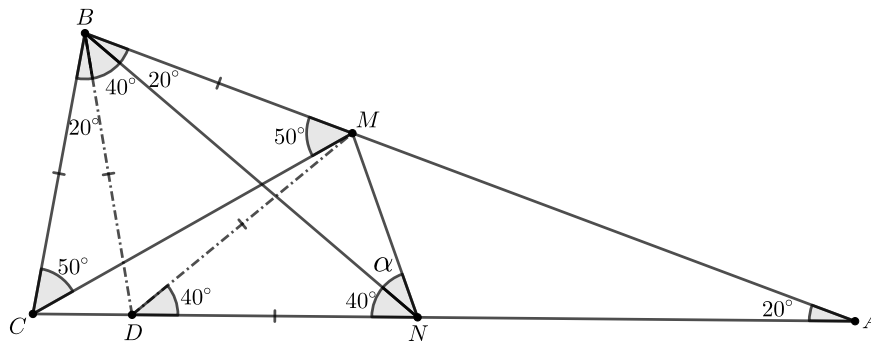


Figura 12

1. Completando os ângulos, temos $\angle BMC = 50^\circ \implies \triangle BMC$ é isósceles, isso é, $BM = BC$.
2. Seja D pertencente a NC tal que $\angle NBD = 40^\circ$ (Aqui basta completar os ângulos e enxergar que $\angle BNC = 40^\circ = \angle BCN/2$, usando o critério 2:1). Temos $DB = DN = BC$.
3. Como $DB = BC = BM$ e $\angle MBD = 20^\circ + 40^\circ = 60^\circ$, temos $\triangle BMD$ equilátero, ou seja, $MD = MB$ e $\angle MDB = 60^\circ$.
4. $DM = DN \implies \triangle DMN$ é isósceles.
5. $\angle MDN = 180^\circ - \angle MDC = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ \implies \angle MND = 90^\circ - \frac{\angle MDN}{2} = 90^\circ - \frac{40^\circ}{2} = 70^\circ$. Mas $\angle MND = \angle MNB + \angle BND = \alpha + 40^\circ$ resulta que $\alpha + 40^\circ = 70^\circ$ e portanto $\alpha = 30^\circ$. \square

Exemplo 6.4. Prove que $c = a + b$.

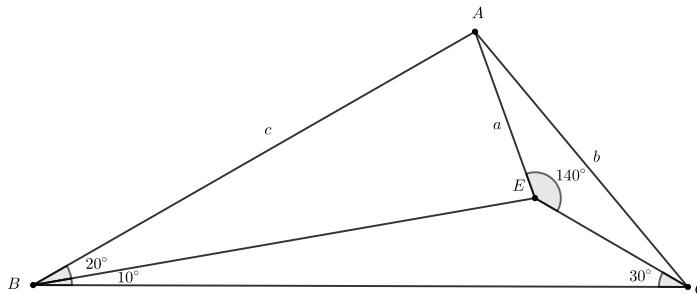


Figura 13

Solução: Imagine a figura a seguir:

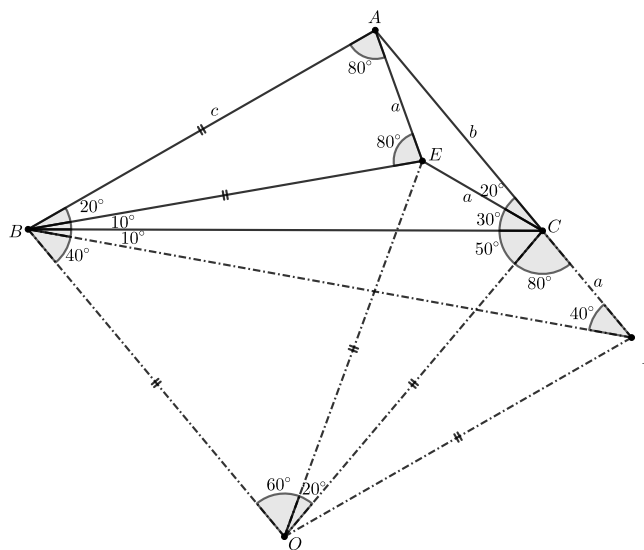


Figura 14

Aqui vamos usar nossos critérios mas também um pouco de criatividade. Se queremos provar $c = a + b$ usando construções auxiliares, isso significa que poderemos construir um triângulo de lados que medem c e $a + b$ e provar que esse triângulo é isósceles.

1. Completando os ângulos temos $BE = BA = c$.
2. Seja O o circuncentro do triângulo BEC (como $\angle ECB = 30^\circ$, usamos o critério do circuncentro). $OB = OE = OC = BE = c$ e $\angle EOC = 2\angle EBC = 2 \times 10^\circ = 20^\circ$.
3. $\triangle EOC \cong \triangle ABE$ (LAL) $\implies EC = AE = a$. E portanto o triângulo AEC é isósceles com $\angle EAC = \angle ECA = 20^\circ$.

4. Seja P sobre a extensão de AC tal que $CP = a$ (lembre que nosso objetivo é um triângulo de lado $a + b$, por isso prolongamos AC para esse tamanho aparecer). Agora basta mostrar que o triângulo ABP é isósceles.
5. Como $\angle OCP = 80^\circ$ ($180^\circ - 20^\circ - 30^\circ - 50^\circ$), temos que $\triangle OCP \equiv \triangle BAE$ (LAL)
 $\implies OP = c$.
6. $OB = OC = OP \implies O$ é o circuncentro de $\triangle BCP$. Segue que $\angle APB = \angle CPB = \angle BOC/2 = (60^\circ + 20^\circ)/2 = 40^\circ$.
7. Temos por fim que $\angle ABP = 180^\circ - \angle BAP - \angle APB = 180^\circ - 100^\circ - 40^\circ = 40^\circ$.
 Segue que $\angle ABP = \angle APB \implies \triangle ABP$ é isósceles e portanto $c = a + b$. \square

Exemplo 6.5. Qual o valor de x na figura a seguir?

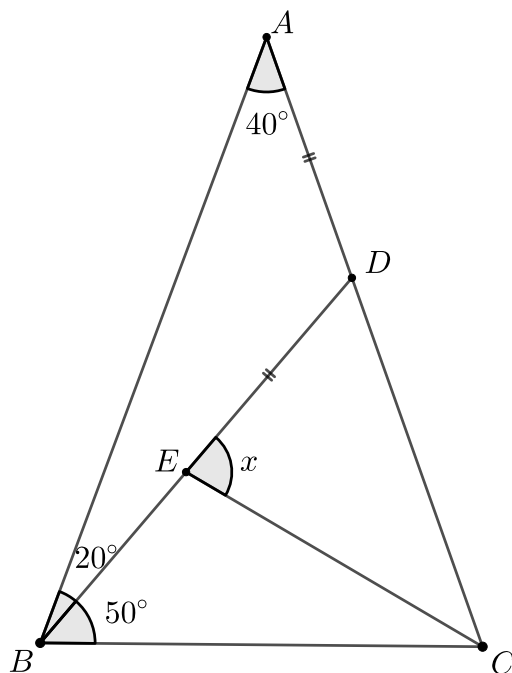


Figura 15

Solução:

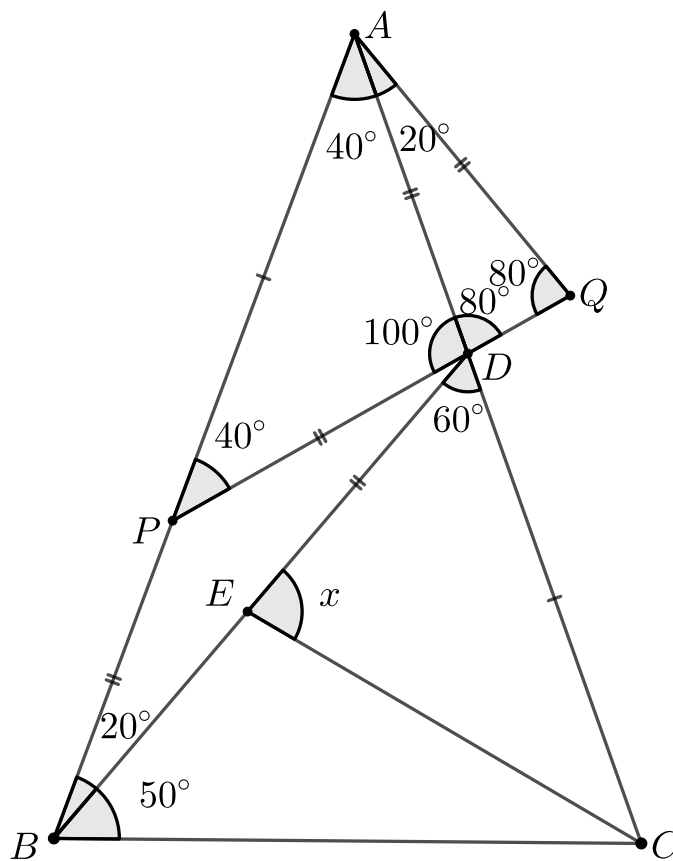


Figura 16

1. Trace DP tal que $P \in AB$ e $DP = DA$ (critério de ângulos na razão 2 : 1 no $\triangle ADB$, sendo $\angle DAB = 2 \cdot \angle DBA$).
2. Complete os ângulos. Como $\angle ABC = \angle ACB$, então $AP = DC$.
3. Construa o $\triangle ADQ$ tal que $\angle DAQ = 20^\circ$ e $AD = AQ$. Logo, $\angle ADQ = 80^\circ$. (A ideia de construir o $\triangle ADQ$ foi para forçar a congruência $\triangle APQ \equiv \triangle DCE$).
4. Como $\angle PDA + \angle ADQ = 180^\circ$, então P, D e Q são colineares.
5. Note que $\triangle APQ \equiv \triangle DCE$ (LAL). O que implica em $\angle DEC = \angle AQP$. Portanto, $x = \angle DEC = 80^\circ$. □

Exemplo 6.6 (OAM - 2024). Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AD = BC$, $\angle DAC = 40^\circ$, $\angle CAB = \angle ABD = 30^\circ$ e $\angle CBD = 20^\circ$. Qual o valor do ângulo $\angle DCA$?

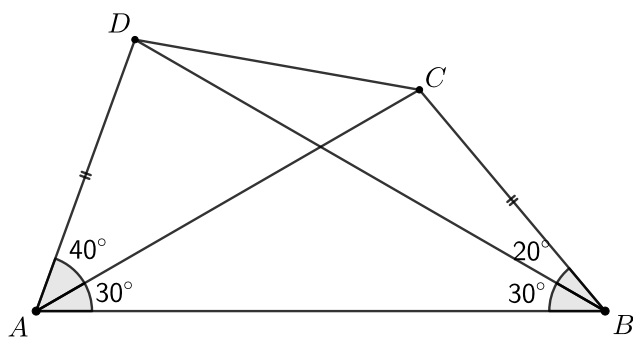


Figura 17

Solução: Esse foi o problema 6 do nível 3 da OAM 2024; na época ele derrubou vários competidores (incluindo um dos autores do texto que você está lendo!). Aqui você verá que usando alguns critérios de construção auxiliar podemos achar várias soluções diferentes e bem simples.

Solução 1:

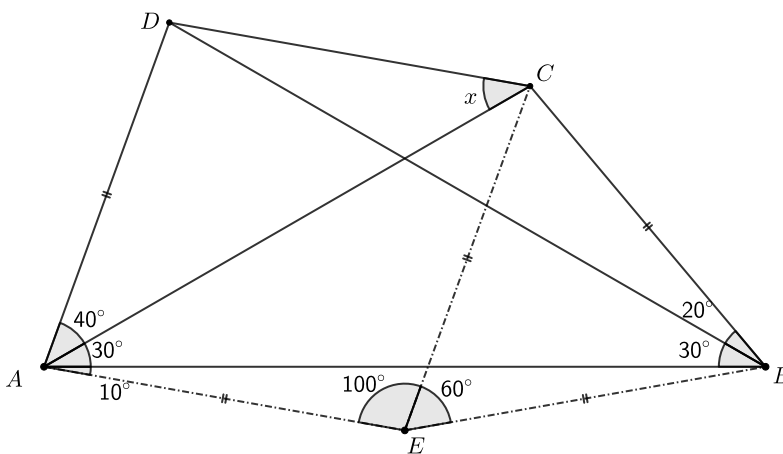


Figura 18

1. Seja E o circuncentro do triângulo ABC (aproveitamos o ângulo de 30° para aplicar o critério do circuncentro). Temos $EA = EC = EB = CB = AD$.
2. $\triangle DAC \equiv \triangle EAC$ (LAL) $\implies \angle DCA = \angle ECA = 40^\circ$. □

Solução 2:

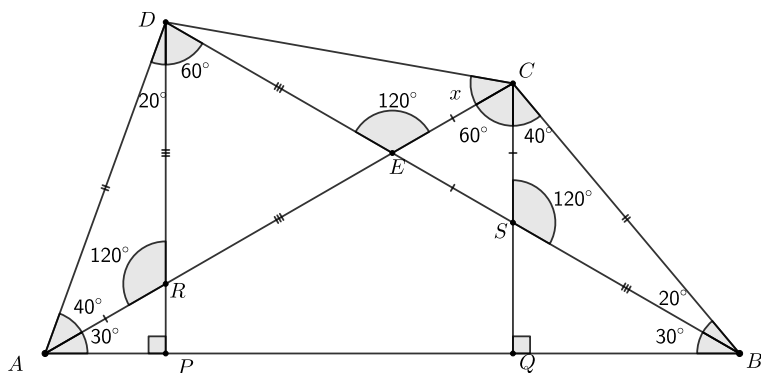


Figura 19

1. Complete os ângulos triviais e denote por E a intersecção $AC \cap BD$. Sejam P e Q os pés das alturas traçadas de D e C , respectivamente. Sejam ainda $R = DP \cap AC$ e $S = CQ \cap BD$.
2. Temos que os triângulos $\triangle DRE$ e $\triangle CSE$ são equiláteros (basta completar os ângulos para ver isso). Isso implica $DE = DR$ e $CE = CS$.
3. $\triangle DAR \equiv \triangle BCS$ (LAL) $\implies BS = DR = DE$.
4. $\triangle DEC \equiv \triangle BSC$ (LAL) $\implies \angle DCE = \angle BCS = 40^\circ$. □

Solução 3:

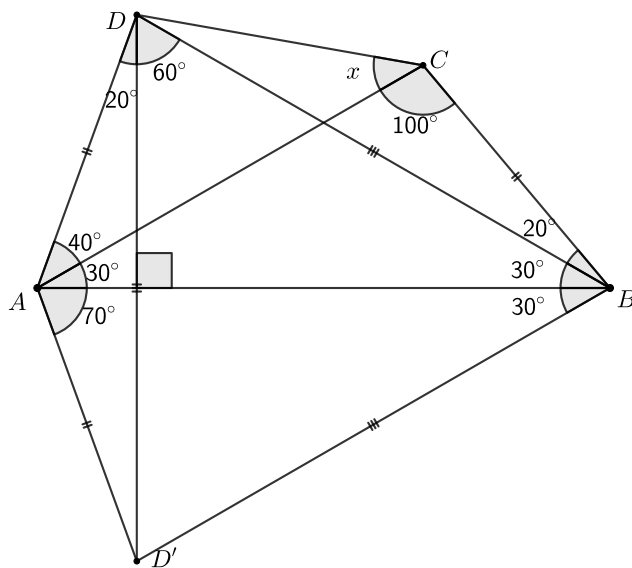


Figura 20

1. Seja D' a reflexão de D sobre AB (aqui aproveitamos o ângulo de 30° para usar o critério da reflexão e ganhar um triângulo equilátero). Temos $D'A = DA$ e $D'B = DB$.
2. Completando os ângulos temos que o triângulo $\triangle DD'B$ é equilátero. Donde $DD' = DB$.
3. $\triangle ADD' \equiv \triangle CBD$ (LAL) $\implies \angle DCB = \angle D'AD = 140^\circ$. Segue que $140^\circ = \angle DCB = \angle DCA + \angle ACB = \angle DCA + 100^\circ \implies \angle DCA = 40^\circ$. \square

Exemplo 6.7. Considere um triângulo ABC e um ponto interior D tal que os ângulos $D\hat{B}A$, $D\hat{C}B$, $D\hat{B}C$ e $D\hat{C}A$ valem, respectivamente, 30° , 20° , 10° e 10° . Nessas condições, prove que o ângulo $D\hat{A}C$ vale 10° e que $AC = BD$.

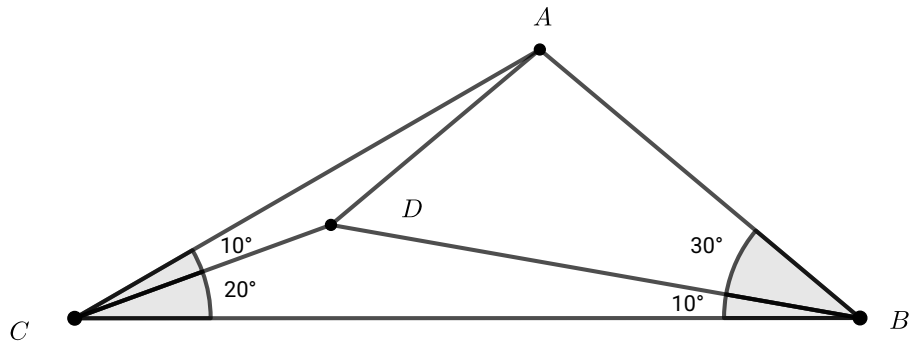


Figura 21

Solução: Assuma que $\angle DAC = 10^\circ$ (provaremos isso mais adiante). Agora mostraremos que $AC = BD$.

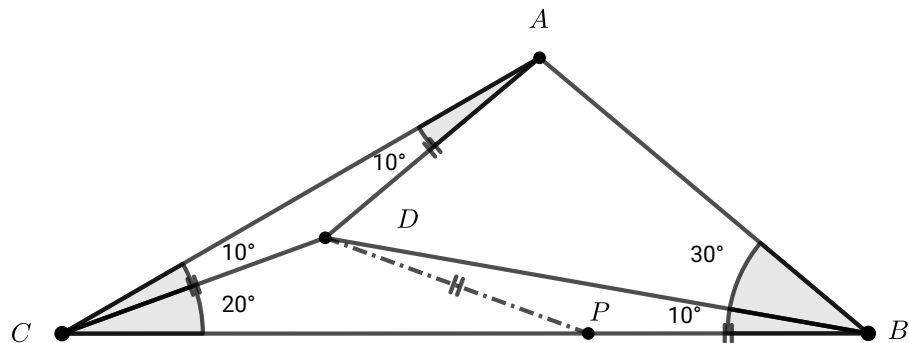


Figura 22

1. $DC = DA$ ($\triangle ACD$ é isósceles de base AC).

4. Complete os ângulos. O $\triangle ADP$ é isósceles de base AP . Assim, o quadrilátero $ADPB$ é simétrico. Ou seja, $\triangle ADB \equiv \triangle PDB$.

5. Como $\angle ABP = 60^\circ$ e $\angle ABD = \angle DBP$, então $\angle ABD = 30^\circ = \alpha$.

Dessa forma, podemos utilizar o triângulo a seguir:

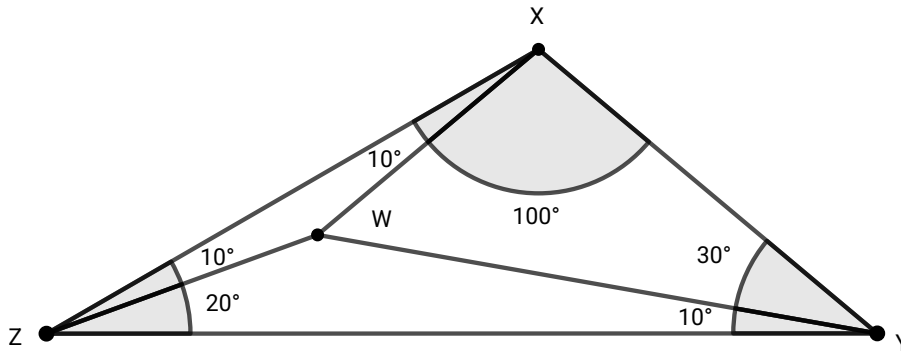


Figura 25

Podemos assumir que $ZY = CB$ (Basta escolher o $\triangle X'Y'Z'$ semelhante ao $\triangle XYZ$ de modo que $Z'Y' = CB$). Vejamos as congruências da Figura 21 e da Figura 25:

1. $\triangle ZWY \equiv \triangle CDB$ (ALA) $\implies ZW = CD$.
2. $\triangle ZXY \equiv \triangle CAB$ (ALA) $\implies ZX = CA$.
3. $\triangle XZW \equiv \triangle ACD$ (LAL) $\implies \angle ZXW = \angle CAD \implies \angle CAD = 10^\circ$.

O que conclui a demonstração. □

6.4 Problemas Propostos

Nos exercícios que seguem, lembre-se que resolver problemas desafiadores não é uma tarefa imediata. Não se deixe frustrar por não conseguir fazer alguns e não desista rápido. Quando tentamos resolver os problemas que mais nos desafiam aprendemos demais. Alguns problemas difíceis ficam dias, até semanas na mente até surgir uma ideia boa, seja forte!

Ao fim do texto, haverá uma lista de sugestões para cada problema. Tente resolver os problemas identificando os critérios que podem ser úteis e usando sua criatividade para testar coisas novas. Dê uma boa chance ao problema antes de ler a dica e, mesmo após consultá-la, não se prenda a ideia dela. Esses problemas podem ser resolvidos por vários caminhos e é de grande aprendizado buscar quais caminhos tortuosos podem nos levar a uma solução (e principalmente, entender o porquê desse caminho ter funcionado ou não).

Aos leitores que possuem um arsenal matemático mais robusto, tente também resolver os problemas seguintes usando trigonometria, alguns deles são bastante desafiadores e outros

mais simples. É bom saber diversificar nossos métodos e identificar quando um pode ser mais apropriado que outro.

Aquele que quiser se divertir e aprender mais sobre o mundo dos traçados deve dar uma olhada nas referências.

Problema 6.1. Qual o valor de x ?

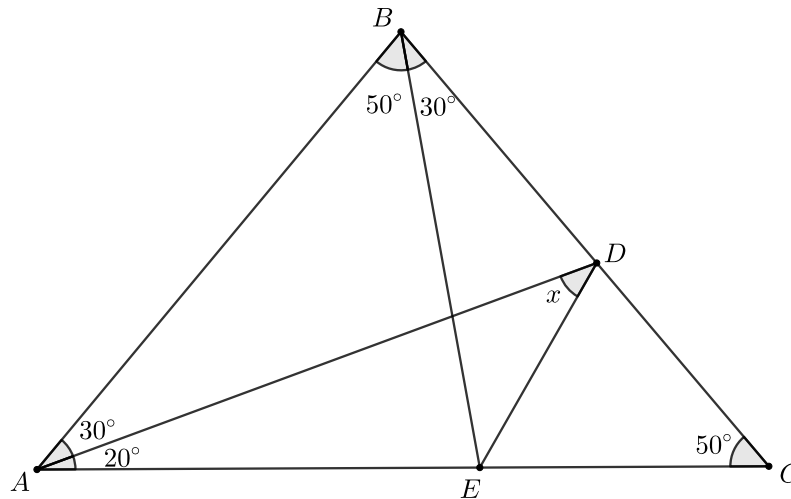


Figura 26

Problema 6.2. Qual o valor de x ?

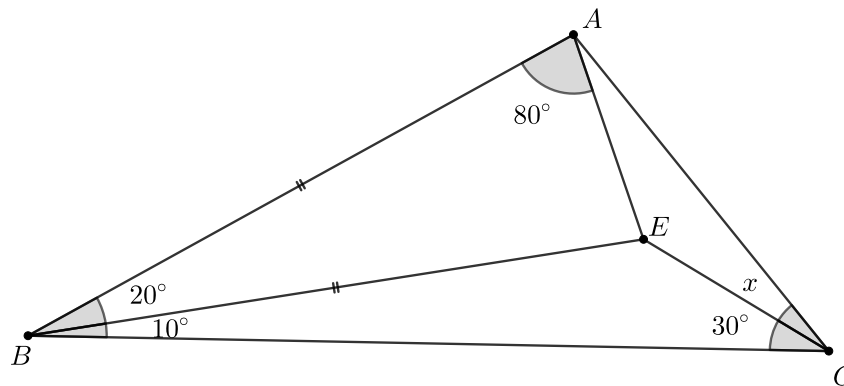


Figura 27

Problema 6.3. Seja ABC tal que $\angle BAC = 75^\circ$ e $\angle BCA = 10^\circ$. Seja D um ponto interior ao triângulo tal que $\angle DAC = 25^\circ$ e $\angle DCA = 5^\circ$. Qual a medida de $\angle ABD$?

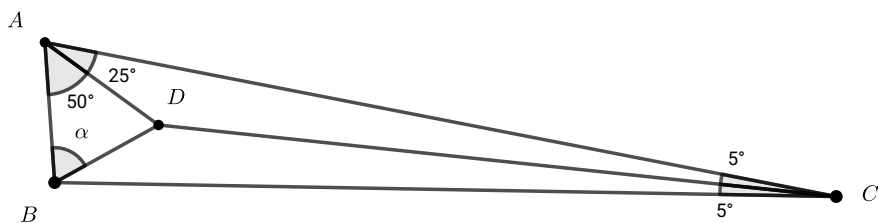


Figura 28

Problema 6.4. Qual a medida de x ?

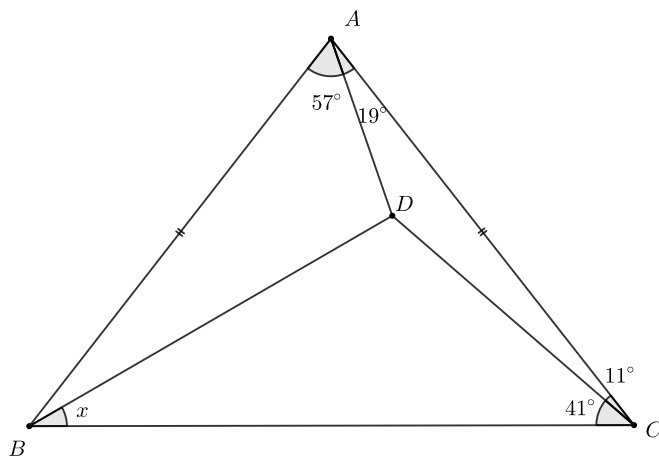


Figura 29

Problema 6.5. Considere um triângulo ABC e D um ponto interior ao triângulo. Sabendo que $\angle DAC = 20^\circ$, $\angle DCA = 10^\circ$, $\angle DAB = 10^\circ$ e $CD = AB$, qual a medida de $\angle DCB$?

Problema 6.6. O valor de x é:

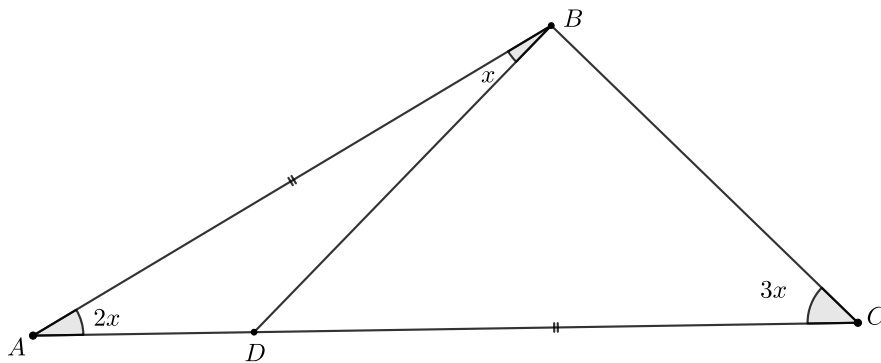


Figura 30

- a) 20° b) 30° c) 10° d) 40° e) 15°

Problema 6.7. (Titu Andreescu) Seja ABC um triângulo tal que $B\hat{A}C = 40^\circ$ e $A\hat{B}C = 60^\circ$. Sejam D e E pontos dos lados AC e AB , respectivamente, tais que $C\hat{B}D = 40^\circ$ e $B\hat{C}E = 70^\circ$. Os segmentos BD e CE concorrem em F . Prove que AF e BC são perpendiculares.

Problema 6.8. Seja ABC um triângulo isósceles de base BC tal que $\hat{A} = 80^\circ$. Se M é um ponto do seu interior tal que $M\hat{B}C = 30^\circ$ e $M\hat{C}B = 10^\circ$, a medida do ângulo $A\hat{M}C$ é igual a:

- a) 45° b) 50° c) 55° d) 60° e) 70°

Problema 6.9. Em um triângulo ABC , trace a ceviana BD de forma que $AD = BC$. Se $A\hat{B}C = 120^\circ$ e $B\hat{D}A = 30^\circ$. O valor de $B\hat{A}C$ é:

- a) 20° b) 30° c) 40° d) 36° e) 45°

Problema 6.10. (Quadrilátero Pseudossimétrico) Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $AB > AD$, $BC = CD$ e $B\hat{A}C = C\hat{A}D$. Mostre que $ABCD$ é cíclico.

Problema 6.11. Seja ABC um triângulo e D um ponto interior ao triângulo. Sabendo que $B\hat{A}D = 30^\circ$, $D\hat{A}C = 36^\circ$, $D\hat{C}A = 18^\circ$ e $D\hat{C}B = 12^\circ$, qual a medida do ângulo $A\hat{B}D$?

Problema 6.12. Considere um triângulo ABC e um ponto interior D tal que os ângulos $D\hat{B}A$, $D\hat{C}B$, $D\hat{B}C$ e $D\hat{C}A$ valem, respectivamente, 30° , 20° , 10° e 10° . Nessas condições, prove que o ângulo $D\hat{A}C$ vale 10° e que $AC = BD$.

Problema 6.13. Considere um triângulo equilátero ABC e um ponto P interior ao triângulo. Se $AP = 7$, $BP = 5$ e $CP = 8$, o valor de AB é:

- a) $\sqrt{113}$ b) $\sqrt{129}$ c) $\sqrt{119}$ d) $\sqrt{127}$ e) $\sqrt{111}$

Problema 6.14. Considere um triângulo isósceles ABC e I sendo um ponto interior ao triângulo. Sabendo que $AB = AC$, $B\hat{A}C = 80^\circ$, $I\hat{B}C = 10^\circ$ e $I\hat{C}B = 30^\circ$. O valor de $A\hat{I}B$ é:

- a) 70° b) 65° c) 55° d) 75° e) 45°

Problema 6.15. Considere um triângulo ABC e D um ponto interior ao triângulo. Sabendo que $D\hat{A}C = 20^\circ$, $D\hat{C}A = 10^\circ$, $D\hat{A}B = 10^\circ$ e $CD = AB$, o valor de $D\hat{C}B$ é:

- a) 30° b) 40° c) 10° d) 20° e) 70°

Problema 6.16. Qual o valor de α ?

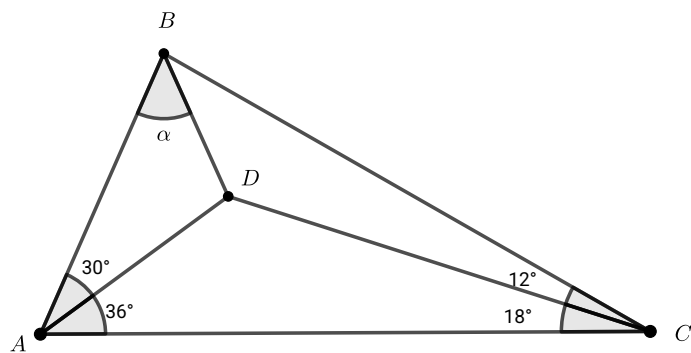


Figura 31

Problema 6.17. Qual o valor de α ?

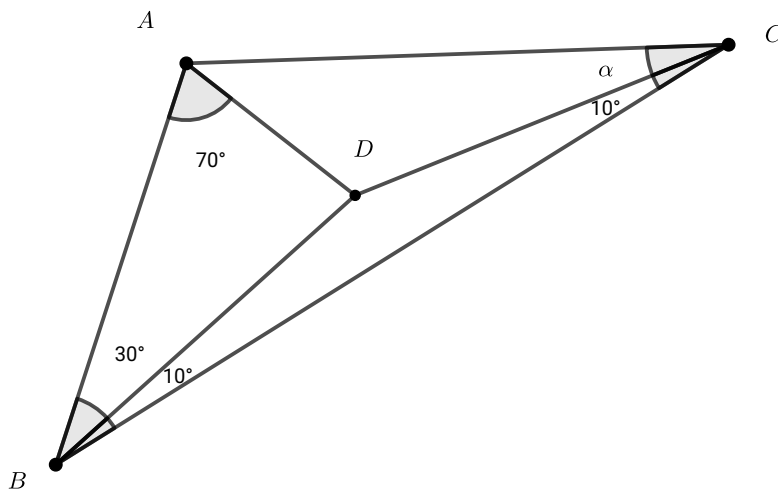


Figura 32

Problema 6.18. Qual o valor de x ?

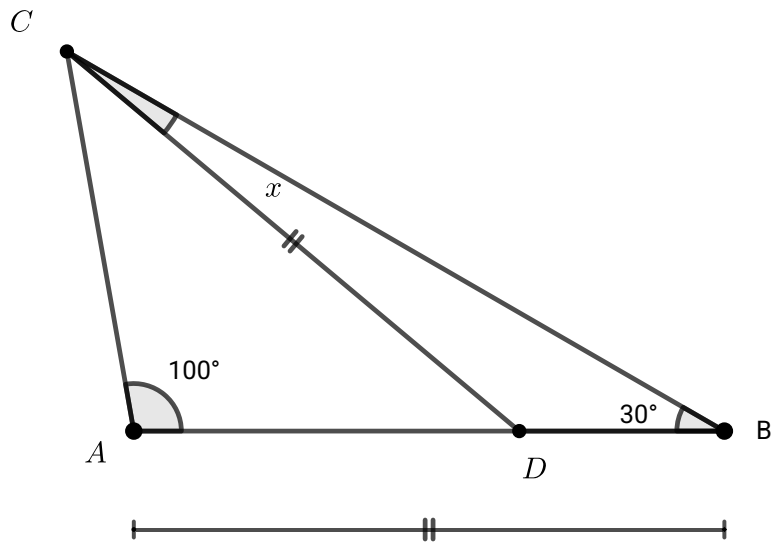


Figura 33

Problema 6.19. Qual o valor de α ?

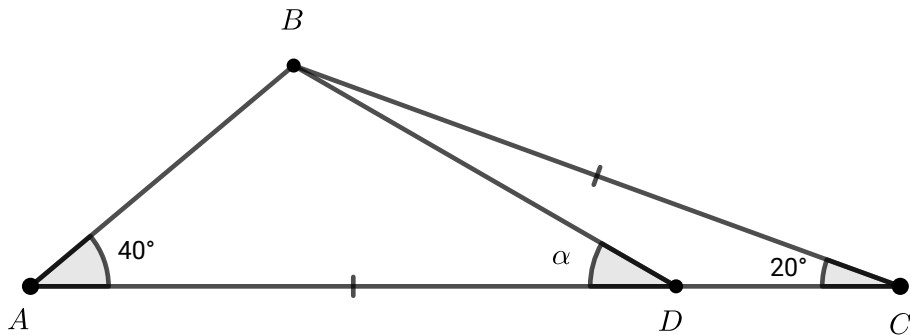


Figura 34

Problema 6.20. Seja $\triangle ABC$ um triângulo isósceles de base BC , com $\angle ABC = 80^\circ$. Seja $D \in AB$ tal que $AD = BC$. Mostre que $\angle BDC = 30^\circ$.

Problema 6.21. Qual o valor de α ?

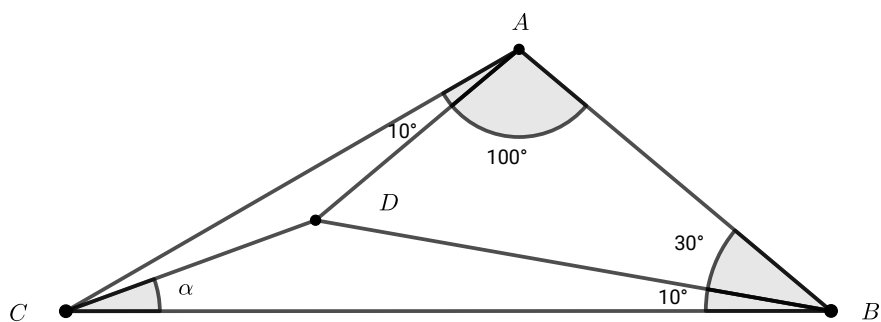


Figura 35

Problema 6.22. Mostre como recortar um papel retangular em pedaços (usando apenas régua não graduada e compasso) e em seguida juntar os pedaços para formar um quadrado de mesma área.

Problema 6.23. Qual o valor de α ?

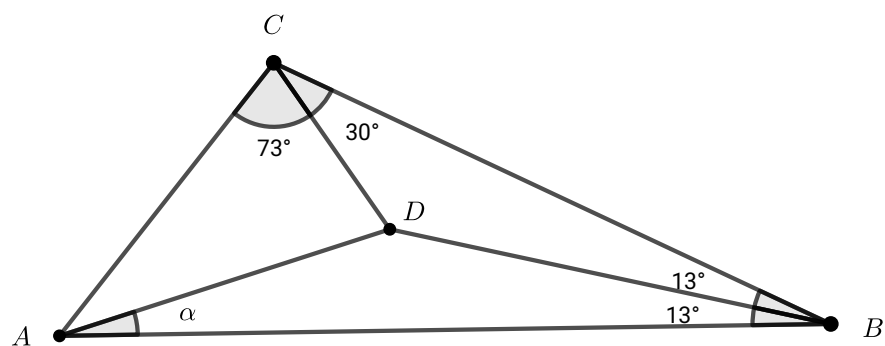


Figura 36

Problema 6.24 (OAM 2025 N3). Seja $\triangle ADC$ um triângulo com $\angle DAC = 36^\circ$ e $\angle ACD = 18^\circ$. Seja B um ponto sobre o prolongamento de AD (com D entre A e B) tal que $BD = BC$. Sabendo que $AC^2 + DC^2 = 16$, determine o comprimento de BC .

Problema 6.25. Qual o valor de x ?

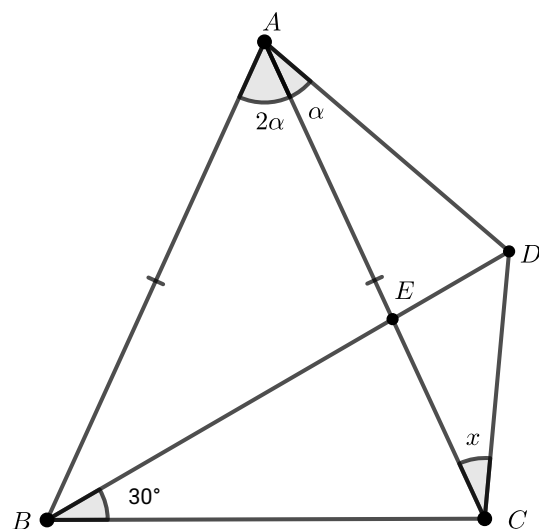


Figura 37

6.5 Dicas ou soluções dos problemas propostos

Problema 6.1. Trace o circuncentro de um dos triângulos.

Problema 6.2. Circuncentro.

Problema 6.3. Aproveite o critério da bissetriz. Além disso, se um triângulo retângulo tem um ângulo de 30° , a hipotenusa desse triângulo mede o dobro do cateto oposto ao ângulo de 30° .

Problema 6.4. Use o critério da reflexão.

Problema 6.5. Critério 2:1.

Problema 6.6. Seja E tal que $\triangle ABE \cong \triangle CDB$ por LAL e BE passa pelo interior do $\triangle ABC$.

Problema 6.7. Critério de ângulos na razão 2:1. Em seguida busque forçar alguma congruência.

Problema 6.8. Use o circuncentro do triângulo BMC . Em seguida encontre dois triângulos congruentes pelo caso ALA.

Problema 6.9. Use o circuncentro do triângulo BCD .

Problema 6.10. Use o critério da bissetriz.

Problema 6.11. Use o circuncentro de algum triângulo e utiliza o resultado do problema anterior.

Problema 6.12. Resolva de uma forma diferente do exemplo 7.

Problema 6.13. Use alguma congruência forçada.

Problema 6.14. Resposta: Item (a). Use alguma congruência forçada (mais especificamente no quadrilátero côncavo $ABIC$).

Problema 6.15. Utilize o exemplo 7.

Problema 6.16. Como $\angle BCA = 30^\circ$, podemos usar o critério do circuncentro. Em seguida use o problema 10.

Problema 6.17. Construa o triângulo equilátero BDQ . Sendo Q um ponto que não pertence ao semiplano relativo à reta \overleftrightarrow{AB} que possui o ponto C . Complete os ângulos. Note que, $P \in AD$ e P pertence à mediatriz de QD , então $P = A$. Logo, Q, A e C são colineares $\implies \alpha = 20^\circ$.

Problema 6.18. Como $\angle CBA = 30^\circ$, podemos usar o critério do circuncentro.

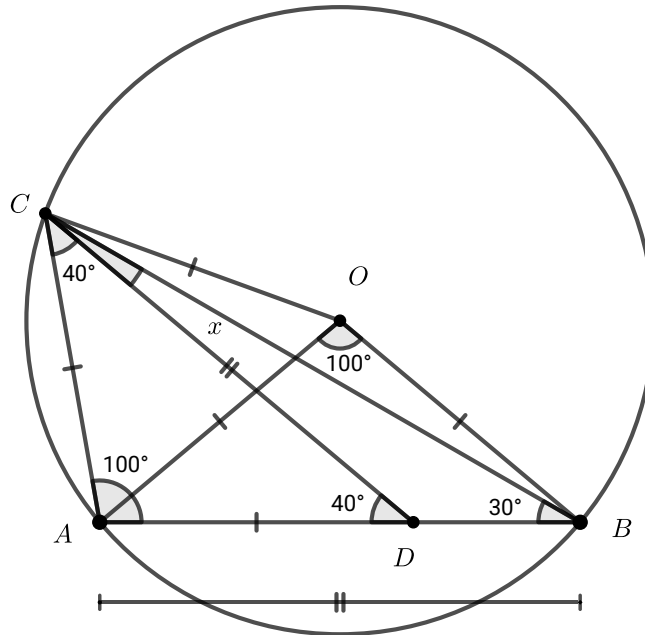


Figura 38

Problema 6.19. Seja $P \in AC$ tal que $CB = CP$. Trace BP . Veja que, $PA = PB = DC$. Use congruência forçada e construa o $\triangle DCQ$ de modo que $\triangle DCQ \cong \triangle BPC$, sendo $\angle BCQ = 60^\circ$. Trace QB . Assim, completando os ângulos, podemos concluir que Q é circuncentro do $\triangle BDC$. Segue que $\angle CBD = \frac{1}{2} \cdot \angle DQC = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ$. Logo, completando os ângulos, $\alpha = 30^\circ$.

Problema 6.20. Revolvemos esse problema no Problema 19 acima.

Problema 6.21. Use o exemplo 7.

Problema 6.22. Se as dimensões do retângulo for a u.c. e b u.c. então sua área será ab u.a. O lado do quadrado deverá ser \sqrt{ab} u.c.

Problema 6.23. Seja $P \in AB$ tal que $DC = DP$. O quadrilátero $CDPB$ é pseudosimétrico (prove isso). Logo, é cíclico.

Problema 6.24. Seja E um ponto no prolongamento de AB (com B entre A e E) tal que $BE = BD$. Como $BD = BC$, temos que B é o centro de uma circunferência que passa por D, C, E . O segmento DE é um diâmetro dessa circunferência e, portanto, o ângulo inscrito $\angle DCE$ é reto, ou seja, o $\triangle EDC$ é retângulo em C . Como vimos na análise dos ângulos, $\triangle ABC$ é isósceles com $AB = AC$. A construção de um ponto E tal que

$BE = BC$ implica que o $\triangle AEC$ é isósceles com $AC = EC$. No $\triangle EDC$ retângulo, pelo Teorema de Pitágoras:

$$DE^2 = DC^2 + EC^2.$$

Como $DE = DB + BE = 2BD = 2BC$ e $EC = AC$, podemos substituir:

$$(2BC)^2 = DC^2 + AC^2.$$

O problema nos informa que $AC^2 + DC^2 = 16$. Portanto:

$$(2BC)^2 = 16 \implies 4BC^2 = 16 \implies BC^2 = 4.$$

Donde, $BC = 2$.

Problema 6.25. Seja O o circuncentro do $\triangle BCD$ (critério do circuncentro: $\angle CBD = 30^\circ$). Complete os ângulos. Se $AO \neq AD$, então o quadrilátero $A OCD$ é pseudossimétrico e, logo, cíclico. Daí, $\angle COD = \angle CAD = \alpha \implies \alpha = 60^\circ \implies \angle BAD = 2\alpha + \alpha = 3\alpha = 3 \cdot 60^\circ = 180^\circ$. O que não pode, porque ABD é um triângulo. Logo, $AO = AD$. Assim, o quadrilátero $A OCD$ é simétrico. Ou seja, $\triangle COA \equiv \triangle CDA$. Como $\angle OCD = 60^\circ$, então $x = 60^\circ / 2 = 30^\circ$.

Agradecimentos. Os autores agradecem ao Nícolas Lima pela colaboração na elaboração de diversas figuras deste capítulo.

Referências

- [1] Antonio Caminha Muniz Neto. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana*. Coleção do Professor de Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2 edition, 2013.
- [2] Amilton Júnior. *O Livro Negro dos Traçados Auxiliares*. Editora Azimute, Rio de Janeiro, 2023.
- [3] Cristiano Marcell. Geometria Plana Plus, 2026. YouTube. Playlist no canal Matemática com Cristiano Marcell. URL: <https://youtube.com/playlist?list=PL0EcfPMLuM2Q0ZsEM3XQY0xv4CI1xnpKu>.
- [4] Canal Matematicamentexyz. Geometria e Trigonometria - Matematicamente ao Vivo #105, 2021. YouTube. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=0VehC1Rph1Q>.
- [5] André Martins. Curso de Construções Geométricas, 2020. YouTube. Playlist no canal Matemática Robusta. URL: <https://youtube.com/playlist?list=PLD7LUP9tqa1HQnskuIRP3PjJYwWwEU9DnA>.

Descida de Fermat

por Henrique Trajano e Nicolás Lima

Imagine que você possui, por exemplo, uma equação diofantina. Uma pergunta importante é a seguinte: Será que é possível, a partir de uma solução, encontrar outra solução? Vamos exemplificar com uma equação bem conhecida.

Sejam a, b e c inteiros positivos tais que $a^2 + b^2 = c^2$. A partir da solução $(a, b, c) = (3, 4, 5)$ conseguimos obter infinitas outras soluções. De fato, para cada inteiro positivo k a 3-lista $(3k, 4k, 5k)$ é solução. Em certo sentido conseguimos encontrar outras soluções cada vez maiores. Também podemos mudar de perspectiva e pensar assim: A partir da solução $(6, 8, 10)$ podemos perceber que $(3, 4, 5)$ também é solução. Então, em certo sentido, encontramos uma solução menor.

Muitos problemas são resolvidos assumindo, por absurdo, que existe pelo menos uma solução e em seguida mostramos que para cada solução sempre existe uma solução menor. Chegando assim em um absurdo e concluindo a demonstração.

7.1 Descida de Fermat: O Princípio da Boa Ordenação

Não é possível que para cada solução sempre exista uma solução menor. Caso contrário, teríamos uma sequência infinita decrescente de inteiros positivos. O que não pode, porque pelo Princípio da Boa Ordenação todo subconjunto não vazio dos inteiros positivos admite um elemento mínimo. Em seguida enunciaremos o Princípio da Boa Ordenação, também chamado de P.B.O., e resolveremos vários problemas para exemplificar a ideia da Descida de Fermat.

Teorema 7.1 (Princípio da Boa Ordenação). *Dado qualquer subconjunto não vazio dos inteiros positivos sempre existe um elemento mínimo.*

Exemplo 7.1. Mostre que não existe inteiro positivo entre zero e um.

Demonstração. Suponha, por redução ao absurdo, que exista pelo menos um inteiro positivo entre zero e um. Digamos que esse inteiro seja k . Logo,

$$0 < k < 1 \implies 0 < k^2 < k \implies 0 < k^2 < k < 1 \implies 0 < k^2 < 1.$$

Assim, o número k^2 também é solução e é menor. Ou seja, para cada solução conseguimos obter uma solução menor. O que é um absurdo. \square

Também é comum resolver o problema definindo um conjunto solução sendo um subconjunto dos inteiros positivos, assumindo que é diferente do vazio. Pelo P.B.O. existe um elemento mínimo. Em seguida mostramos que existe um elemento menor do que o mínimo que pertence ao conjunto, gerando assim uma contradição. Para exemplificar resolveremos mais uma vez o exemplo anterior.

Demonstração. Defina o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 0 < n < 1\}$. Suponha, por redução ao absurdo, que $A \neq \emptyset$. Como $A \subset \mathbb{N}^*$ e $A \neq \emptyset$, então, pelo P.B.O. o conjunto A possui um elemento mínimo. Digamos que k seja esse elemento. Daí, tem-se:

$$0 < k < 1 \implies 0 < k^2 < k \implies 0 < k^2 < k < 1 \implies 0 < k^2 < 1.$$

Logo, $k^2 \in A$ e $k^2 < k$. Ou seja, k^2 é elemento do conjunto A e é menor do que o mínimo. O que é um absurdo. □

A primeira solução desse exemplo é mais natural e ajuda a intuir a resolução de vários problemas. Nem sempre precisamos supor que existe uma solução minimal e encontrar uma solução menor do que a mínima. Muitas vezes queremos apenas obter uma solução menor e a partir da solução menor obter propriedades que ajudam na solução original. Basicamente, pensando de modo geral, é mais importante pensar no que ocorre em apenas uma *descida* (troca de uma solução para outra *menor*) e analisar as propriedades que podemos utilizar nessa nova solução. A seguir apresentamos mais um exemplo utilizando um pouco de congruência modular.

Exemplo 7.2. Demonstre que não existem inteiros positivos a, b, c e d tais que

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

Demonstração. Suponha, por redução ao absurdo, que existam a, b, c e d inteiros positivos tais que

$$a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2).$$

O conjunto $X = \{x + y + z + w \mid x, y, z, w \in \mathbb{N}^* \text{ e } x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)\}$ é diferente do vazio. A ideia de definir tal conjunto é que pelo P.B.O. existe um elemento mínimo de X e, em seguida, mostraremos que existe um elemento menor do que o mínimo. Gerando assim uma contradição. De fato, como $X \subset \mathbb{N}$ e $X \neq \emptyset$, então pelo P.B.O. existe um elemento mínimo de X . Digamos que $\min X = x_0 + y_0 + z_0 + w_0$, seja um elemento de X que possui a propriedade

$$x_0^2 + y_0^2 = 3(z_0^2 + w_0^2).$$

Se $3 \mid x_0^2 + y_0^2$, então $3 \mid x_0$ e $3 \mid y_0$. De fato, caso o número três não divida simultaneamente x_0 e y_0 , e usando que $x_0^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$ e $y_0^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$, então $x_0^2 + y_0^2 \equiv 1, 2 \pmod{3}$. O que não pode, porque $x_0^2 + y_0^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Segue que, existem inteiros positivos \tilde{x}_0 e \tilde{y}_0 tais que $x_0 = 3\tilde{x}_0$ e $y_0 = 3\tilde{y}_0$. Daí, tem-se:

$$(3\tilde{x}_0)^2 + (3\tilde{y}_0)^2 = 3(z_0^2 + w_0^2) \iff z_0^2 + w_0^2 = 3(\tilde{x}_0^2 + \tilde{y}_0^2).$$

Dessa forma, $z_0 + w_0 + \tilde{x}_0 + \tilde{y}_0 \in X$. Como $\tilde{x}_0 = x_0/3 < x_0$ e $\tilde{y}_0 = y_0/3 < y_0$, então $z_0 + w_0 + \tilde{x}_0 + \tilde{y}_0 < x_0 + y_0 + z_0 + w_0 = \min X$, o que é uma contradição. Portanto, não existem inteiros positivos a, b, c e d tais que $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$. □

7.2 Subida de Fermat: infinitas soluções

Da mesma forma que podemos encontrar uma solução menor é possível, em certos problemas, encontrar uma solução maior a partir de uma solução existente. No exemplo a seguir mostraremos que a partir de uma solução é possível obter infinitas outras soluções que *crescem* em algum sentido.

Exemplo 7.3 (Putnam). Prove que, para todo número real N , a equação

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$$

possui uma solução na qual x_1, x_2, x_3 e x_4 são todos inteiros maiores do que N .

Ideia da prova: Inicialmente, perceba que x_1, x_2, x_3 e x_4 assumem papéis simétricos. Além disso, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ é uma solução da equação. Façamos o seguinte: tomemos $x_1 = x$ e $x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Teremos uma equação do segundo grau

$$x^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = x \cdot 1 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \iff x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Já sabemos que $x = 1$ é solução. Por soma e produto encontramos que $x = 2$ também é solução. Logo, a 4-lista $(2, 1, 1, 1)$ também é solução. Como os papéis das variáveis são simétricos, então podemos escrever os números na ordem não decrescente e ainda será solução. Ou seja, a 4-lista $(1, 1, 1, 2)$ é solução. Assim, temos que $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ e $x_4 = 2$ é solução da equação original. Façamos, mais uma vez, $x_1 = x$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$ e $x_4 = 2$. Daí, tem-se:

$$x^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 = x \cdot 1 \cdot 1 + x \cdot 1 \cdot 2 + x \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 2 \iff x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Já sabemos que $x = 1$ é solução. Por soma e produto encontramos que $x = 4$ também é solução. Assim, a 4-lista $(4, 1, 1, 2)$ é solução. Temos que, a 4-lista $(1, 1, 2, 4)$ é solução. Repetindo esse procedimento algumas vezes encontramos as seguintes soluções:

$$(1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 2) \rightarrow (1, 1, 2, 4) \rightarrow (1, 2, 4, 13) \rightarrow (2, 4, 13, 85) \rightarrow (4, 13, 85, 1495).$$

Aparentemente, as soluções crescem a cada operação realizada. Basicamente, a partir de uma solução inicial e utilizando a simetria do problema podemos, com o auxílio das relações de Vieta (soma e produto das raízes da equação do segundo grau) obter outra solução que é *maior* do que a anterior. Essas trocas de raízes com o auxílio das relações de Vieta é uma técnica que é muito utilizada com o P.B.O. para mostrar que a equação diofantina não possui solução. Essa técnica tem um nome e é chamada de Pulo de Vieta. No nosso caso utilizamos uma ideia muito parecida, só que para obter soluções cada vez *maiores*. A seguir provaremos que essa ideia de prova pode ser formalizada.

Demonstração. A 4-lista $(1, 1, 1, 1)$ é solução. Como as variáveis assumem papéis simétricos, então podemos supor S.P.G. que $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ e tomemos $x_1 = x$. Daí, tem-se:

$$x^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = xx_2x_3 + xx_2x_4 + xx_3x_4 + x_2x_3x_4 \iff$$

$$x^2 - x(x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_2x_3x_4 = 0.$$

Sabemos que $x = x_1$ é solução dessa equação do segundo grau e a outra solução chamaremos de \tilde{x}_1 . Pelas relações de soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau, tem-se:

$$\begin{cases} x_1\tilde{x}_1 = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_2x_3x_4 \\ x_1 + \tilde{x}_1 = x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \end{cases}$$

Como $\tilde{x}_1 = x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - x_1$, então \tilde{x}_1 é inteiro. Além disso, $x_2 \geq x_1$ implica em

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1 &= x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 - x_1 \\ &\geq x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 - x_1 \\ &= x_1(x_3 - 1) + x_1x_4 + x_3x_4 \\ &\geq x_1 \cdot 0 + 1 \cdot x_4 + 1 \cdot x_4 \\ &= 2x_4 \\ &> x_4. \end{aligned}$$

Logo, $\tilde{x}_1 > x_4 > 0$. Assim, a 4-lista (x_1, x_2, x_3, x_4) pode ser transformada na 4-lista $(\tilde{x}_1, x_2, x_3, x_4)$. Ou seja, após a operação de troca de raízes e a ordenação dos números na ordem não decrescente, a 4-lista (x_1, x_2, x_3, x_4) é transformada na 4-lista $(x_2, x_3, x_4, \tilde{x}_1)$. Dessa forma, se repetirmos a operação mais três vezes, então teremos:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow (x_2, x_3, x_4, \tilde{x}_1) \rightarrow (x_3, x_4, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \rightarrow (x_4, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \rightarrow (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4).$$

Portanto, após 4 operações cada entrada da 4-lista (x_1, x_2, x_3, x_4) aumenta em pelo menos uma unidade. Logo, podemos aumentar a primeira entrada da 4-lista o quanto quisermos. Ou seja, após $4n$ operações, para algum $n \in \mathbb{N}$, teremos uma 4-lista, digamos, (a_1, a_2, a_3, a_4) tal que $N < a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. O que conclui a demonstração. \square

A seguir mostraremos mais um exemplo de como obter infinitas soluções a partir de uma solução *base*. A partir da operação de troca de raízes e fazendo o uso da simetria do problema é possível, assim como fizemos no problema anterior, obter infinitas soluções.

Exemplo 7.4. Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que existem infinitos pares (a, b) tais que

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

Ideia da prova: Podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$a^2 - (3b)a + b^2 + 1 = 0.$$

O par $(1, 1)$ é solução. Façamos o seguinte: tomemos $a = x$ e $b = 1$. Daí, tem-se:

$$x^2 - (3 \cdot 1)x + 1^2 + 1 = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Já sabemos que $x = 1$ é raiz. Por soma e produto sabe-se que $x = 2$ também é raiz. Assim, o par $(2, 1)$ também é solução. Como a e b assumem papéis simétricos, então o par $(1, 2)$ também é solução. Fazamos $a = x$ e $b = 2$. Daí, tem-se:

$$x^2 - (3 \cdot 2)x + 2^2 + 1 = 0 \iff x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Como $x = 1$ é raiz, por soma e produto temos que $x = 5$ também é raiz. Logo, o par $(5, 2)$ também é solução. Por simetria, o par $(2, 5)$ também é solução. Repetindo essa operação algumas vezes encontramos os seguintes pares:

$$(1, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (2, 5) \rightarrow (5, 13) \rightarrow (13, 34) \rightarrow \dots$$

Parece que a partir da solução $(1, 1)$ podemos chegar em infinitas outras soluções.

Demonstração. Primeiramente, note que a e b assumem papéis simétricos. O par $(1, 1)$ é solução. A equação abaixo é equivalente à equação do enunciado:

$$a^2 - (3b)a + b^2 + 1 = 0.$$

O par (a, b) é solução da equação, assumamos S.P.G. que $a \leq b$. Tomemos $a = x$. Daí, tem-se:

$$x^2 - (3b)x + b^2 + 1 = 0.$$

Sabemos que $x = a$ é raiz da equação do segundo grau acima. Seja \tilde{a} a outra raiz. Pelas relações de soma e produto, temos que:

$$\begin{cases} a \cdot \tilde{a} = b^2 + 1 \\ a + \tilde{a} = 3b \end{cases}$$

Como $\tilde{a} = 3b - a$, então $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\tilde{a} = (b^2 + 1)/a > 0$. Logo, \tilde{a} é inteiro positivo. Também temos que $a \leq b < \tilde{a}$. De fato,

$$b < \tilde{a} \iff b < 3b - a \iff a < 2b.$$

A última desigualdade é verdadeira porque $a \leq b$ e $b < 2b \implies a < 2b$. Logo, $b < \tilde{a}$. Isso significa que conseguimos pular da solução (a, b) para a outra solução $(b, \tilde{a}) = (b, 3b - a)$. Dessa forma, a soma das entradas do par (a, b) é $a + b$ que é menor do que a do par (b, \tilde{a}) que é $\tilde{a} + b$. Assim, podemos encontrar uma solução com a soma das entradas sendo um número tão grande quanto a gente queira. Ou seja, a partir do par $(1, 1)$ podemos encontrar infinitos pares de inteiros positivos (a, b) tais que

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

□

7.3 Pulo de Vieta: trabalhando restrições

A simetria das variáveis nos permite pular de uma solução para outra. Praticamente da mesma forma que obtemos uma solução *maior* podemos mudar um pouco de perspectiva e obter uma solução *menor*. A seguir exemplificamos como podemos encontrar soluções menores com a ideia do Pulo de Vieta.

Exemplo 7.5. Sejam a e b inteiros positivos tais que $ab \mid a^2 + b^2 + 1$. Prove que

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = 3.$$

Ideia da prova: Seja k inteiro tal que

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k \iff a^2 - (kb)a + b^2 + 1 = 0.$$

A 3-lista $(a, b, k) = (34, 13, k)$ é solução. Façamos $a = x$ e $b = 13$. Daí, tem-se:

$$x^2 - (13k)x + 13^2 + 1 = 0 \iff x^2 - (13k)x + 170 = 0.$$

Como $x = 34$ é raiz, então, por soma e produto, encontramos que a outra raiz é 5. Logo, a 3-lista $(13, 5, k)$ é solução. Note que, pulamos da solução $(34, 13, k)$ para $(13, 5, k)$, mantendo o valor de k . Façamos o mesmo para essa nova solução. Tomemos $a = x$ e $b = 5$. Daí, tem-se:

$$x^2 - (5k)x + 5^2 + 1 = 0 \iff x^2 - (5k)x + 26 = 0.$$

Como $x = 13$ é solução, então a outra solução é 2, porque o produto das raízes é 26. Ou seja, conseguimos pular de uma solução para uma solução “menor”. Repetindo o processo

$$(34, 13, k) \rightarrow (13, 5, k) \rightarrow (5, 2, k) \rightarrow (2, 1, k) \rightarrow (1, 1, k).$$

Terminamos quando $a = b = 1$. Neste caso,

$$k = \frac{1^2 + 1^2 + 1}{1 \cdot 1} = 3.$$

Então, em todos os casos anteriores $k = 3$. A nossa ideia é a seguinte: Enquanto $a > b$, poderemos transformar a solução (a, b, k) na solução (b, \tilde{a}, k) de sorte que $a > b \geq \tilde{a}$. Não podemos realizar essa operação de troca de raízes infinitamente, porque as soluções estão diminuindo a cada etapa e são inteiros positivos. Então, em algum momento, teremos que $a = b$. E, a única solução que existe é $a = b = 1$, o que implica em $k = 3$. Demonstraremos isto daqui a pouco. Perceba que a partir da solução (a, b, k) podemos chegar na solução $(1, 1, k)$. Como o k é preservado em cada etapa e na etapa final vale 3, então a solução inicial é $(a, b, 3)$, provando assim, que $k = 3$ em qualquer possível solução.

Demonstração. Seja k inteiro positivo tal que

$$\frac{a^2 + b^2 + 1}{ab} = k \iff a^2 - (kb)a + b^2 + 1 = 0.$$

Seja (a, b, k) uma solução da equação, assumindo $a > b$. Façamos $x = a$, daí tem-se:

$$x^2 - (kb)x + b^2 + 1 = 0.$$

Sendo \tilde{a} a outra raiz da equação do segundo grau acima, temos por soma e produto:

$$\begin{cases} a \cdot \tilde{a} = b^2 + 1 \\ a + \tilde{a} = kb \end{cases}$$

Como $\tilde{a} = kb - a$, então $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$. Além disso, $\tilde{a} = \frac{b^2+1}{a} > 0$. Logo, \tilde{a} é inteiro positivo. Já que $a > b$, temos que $b \geq \tilde{a}$. De fato, note que

$$b \geq \tilde{a} \iff b \geq \frac{b^2 + 1}{a} \iff ab \geq b^2 + 1.$$

Logo, basta mostrar que $ab \geq b^2 + 1$. Como $a > b$, então $a \geq b+1 \implies ab \geq b^2 + b \geq b^2 + 1 \implies ab \geq b^2 + 1$. Portanto, podemos pular da solução (a, b, k) para a solução (b, \tilde{a}, k) . Assim, encontramos uma solução menor a respeito da soma das coordenadas. Se em algum momento ocorrer a igualdade $a = b$, então $a \cdot a \mid a^2 + a^2 + 1 \implies a^2 \mid 2a^2 + 1 \implies a^2 \mid 1$. Logo, $a = 1$. A única solução com $a = b$ é quando ambos são iguais a 1, o que implica em $k = 3$. Portanto, dada qualquer solução (a, b, k) , podemos descer (pular) até o caso base $(1, 1, 3)$ preservando o valor de k , o que conclui a demonstração de que $k = 3$. \square

A seguir resolveremos um problema clássico da IMO. Basicamente é a mesma ideia do problema anterior. A partir de uma solução qualquer tentaremos *diminuir* até chegar em uma solução que nos permite demonstrar a propriedade pedida no enunciado.

Exemplo 7.6 (IMO 1988 P6). Sejam a e b inteiros positivos. Mostre que se $ab+1 \mid a^2+b^2$, então

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

é um quadrado perfeito.

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = k \iff a^2 - (kb)a + b^2 - k = 0.$$

Defina a função $f(x) = x^2 - (kb)x + b^2 - k$. Já sabemos que a é raiz. Seja \tilde{a} a outra raiz. Pelas relações de soma e produto temos que:

$$\begin{cases} a \cdot \tilde{a} = b^2 - k \\ a + \tilde{a} = kb \end{cases}$$

Como $\tilde{a} = kb - a$, então $\tilde{a} \in \mathbb{Z}$. Além disso,

$$0 < k = \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{\tilde{a}^2 + b^2}{\tilde{a}b + 1} \implies \tilde{a}b + 1 > 0. (*)$$

Afirmção: $\tilde{a} \geq 0$.

Prova: Se $\tilde{a} < 0$, então $\tilde{a}b < 0 \implies \tilde{a}b + 1 < 1 \implies \tilde{a}b + 1 \leq 0$. O que não pode, porque por (*) temos que $\tilde{a}b + 1 > 0$. Logo, $\tilde{a} \geq 0$.

Se $\tilde{a} = 0$, então

$$k = \frac{\tilde{a}^2 + b^2}{\tilde{a}b + 1} = \frac{0^2 + b^2}{0 \cdot b + 1} = b^2$$

é um quadrado perfeito. Assuma $\tilde{a} > 0$. Se $a = b$, então $a \cdot a + 1 \mid a^2 + a^2 \implies a^2 + 1 \mid 2a^2 \implies a^2 + 1 \mid 2(a^2 + 1) - 2a^2 \implies a^2 + 1 \mid 2$. Ou seja, $a^2 + 1 = 1$ ou $a^2 + 1 = 2 \implies a = 0$ ou $a = 1$. Mas, a é inteiro positivo, então só nos resta o caso em que $a = 1$. Daí, tem-se:

$$k = \frac{1^2 + 1^2}{1 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

Que é um quadrado perfeito. Como a e b assumem papéis simétricos, então podemos supor S.P.G. que $a > b$. Dessa forma, temos que $a > b > \tilde{a}$. De fato,

$$b > \tilde{a} \iff b > kb - a \iff b > \frac{a^2 + b^2}{ab + 1} \cdot b - a \iff ab^2 + a + b > b^3.$$

Assim, basta mostrar que $ab^2 + a + b > b^3$. Como $a > b$, então $ab^2 + a + b > ab^2 > b \cdot b^2 = b^3$. Logo, $a > b > \tilde{a}$. Segue que, da solução (a, b, k) podemos pular para uma solução menor (b, \tilde{a}, k) preservando o k , em que $\tilde{a} = kb - a > 0$. Repetindo esse procedimento e assumindo que em cada etapa a segunda coordenada é sempre positiva e que a primeira coordenada é maior do que a segunda, então, existiria uma sequência decrescente infinita de inteiros positivos (basta formar a sequência com o menor elemento de cada par ordenado que seja solução). O que não pode porque contradiz o P.B.O. Isto implica que em algum momento a segunda coordenada vai zerar, e daí podemos concluir que k é um quadrado perfeito. De fato, se (x, y, k) é uma solução em que $y = 0$, então

$$k = \frac{x^2 + y^2}{xy + 1} = \frac{x^2 + 0^2}{x \cdot 0 + 1} = x^2$$

é um quadrado perfeito. O que conclui a demonstração. \square

7.4 Problemas propostos

Problema 7.1. Seja k inteiro. Mostre que não existe inteiro entre k e $k + 1$.

Problema 7.2 (PUTNAM). Sejam x, y e z inteiros positivos. Mostre que a equação $x^2 + 10y^2 = 3z^2$ não possui solução.

Problema 7.3. Prove que a equação $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abcd$ possui infinitas soluções nos inteiros positivos.

Problema 7.4. Prove que a equação $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ possui uma solução com x, y e z inteiros positivos com $x + y + z > 100$.

Problema 7.5. Encontre o número de pares ordenados (n, m) de inteiros positivos com $1 \leq n < m \leq 10$ tais que $n \mid m^2 - 1$ e $m \mid n^2 - 1$.

Problema 7.6. Determine todos os inteiros positivos m e n tais que $m \mid n^2 + 1$ e $n \mid m^2 + 1$.

Problema 7.7. Mostre que não existem inteiros positivos x, y e n tais que

$$x^2 + y^2 = n(x + 1)(y + 1).$$

Problema 7.8. Sejam a e b inteiros positivos tais que $ab - 1 \mid a^2 + b^2$. Mostre que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = 5.$$

Problema 7.9. Prove que para todo inteiro positivo m , existem infinitos pares (x, y) de inteiros positivos tais que

- x, y são distintos;
- $x \mid y^2 + m$ e $y \mid x^2 + m$.

Problema 7.10. Ache todos os possíveis valores de $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab - 1} = k \quad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Mostre que existem infinitas ternas (a, b, k) .

Problema 7.11. Ache todos os possíveis valores de $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{a^2 + b^2 - 1}{ab} = k \quad (a, b \in \mathbb{N}).$$

Mostre que existem infinitas ternas (a, b, k) tais que $a < b$ e a assume infinitos valores distintos.

Problema 7.12 (Romênia 2005). Determine todas as quádruplas de inteiros positivos (a, b, m, n) tais que

$$a^m b^n = (a + b)^2 + 1.$$

Problema 7.13. Sejam m, n e k inteiros positivos satisfazendo

$$k = \frac{(m + n)^2}{4mn(m - n)^2 + 4}.$$

Prove que k é um quadrado perfeito.

Problema 7.14 (Mais forte do que o problema da IMO 1988 P6). Mostre que se $ab + 1$ divide $a^2 + b^2$ para inteiros positivos a, b , então

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \text{mdc}(a, b)^2.$$

Problema 7.15 (Generalização do problema da IMO 1988). Se a, b e c são inteiros positivos tais que $0 < a^2 + b^2 - abc \leq c$, demonstre que $a^2 + b^2 - abc$ é um quadrado perfeito.

Problema 7.16 (IMO 2007). Dados os inteiros positivos a e b , prove que

$$\frac{(4a^2 - 1)^2}{4ab - 1}$$

é um inteiro se, e somente se, $a = b$.

Problema 7.17 (IMO 2003). Determine todos os pares de inteiros positivos (a, b) tais que

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

é um inteiro positivo.

Problema 7.18 (Olimpíada Matemática Coreana). Prove que $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ não tem soluções em números inteiros x, y, z exceto $(0, 0, 0)$.

Problema 7.19. Seja k inteiro positivo diferente de 1 e 3. Prove que a única solução da equação $x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$ os inteiros é $(0, 0, 0)$.

Problema 7.20. Descreva todas as soluções em inteiros positivos da equação diofantina

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz.$$

Problema 7.21. Sejam x_1, x_2, \dots, x_n inteiros. Se $k > n$ é um inteiro, prove que a única solução para

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = kx_1x_2 \dots x_n$$

é $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Problema 7.22 (IMO 1981). Determine o maior valor possível de $m^2 + n^2$, onde m, n são inteiros positivos menores do que ou iguais a 1981, tais que $(n^2 - nm - m^2)^2 = 1$.

Problema 7.23. Prove que a equação $x^4 + y^4 = z^4$ não possui solução nos inteiros positivos.

Problema 7.24. Prove que não existe $n > 1$ tal que $n \mid 2^n - 1$.

Problema 7.25 (OBM N3 2021 P5). Determine todas as triplas de inteiros não negativos (a, b, c) tais que

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1.$$

7.5 Dicas ou soluções dos problemas propostos

Problema 7.1. Assuma que exista tal inteiro t , então $0 < t - k < 1$. Utilize o exemplo 1.

Problema 7.2. Analisar módulo 3.

Problema 7.3. Utilize a técnica para sair de uma solução para outra, sempre encontrando soluções “maiores” que pertencem aos inteiros positivos.

Problema 7.4. Encontre uma solução base e a partir dela utilize a técnica para encontrar outras soluções “maiores”.

Problema 7.5. Encontre as soluções triviais; multiplique as duas divisibilidades, simplifique e utilize a técnica para encontrar outras soluções.

Problema 7.6. Encontre as soluções triviais, após isso multiplique as duas divisibilidades, simplifique e force uma maneira de encontrar uma solução “maior”.

Problema 7.7. Assuma que existe uma solução mínima em algum sentido e a partir dela encontre uma solução menor.

Problema 7.8.

Dica Utilize a técnica da descida para mostrar que a partir de qualquer solução é possível diminuir até chegar numa solução base $(a, b) = (2, 1)$.

Solução: Seja $k \geq 0$ inteiro tal que

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = k \iff a^2 - (kb)a + b^2 + k = 0. \quad (*)$$

Daí, sabemos que a é raiz. Seja \tilde{a} a outra raiz. Segue que $a + \tilde{a} = kb$ e $a \cdot \tilde{a} = b^2 + k$ (**). Suponha S.P.G. que $a > b$. Tentemos forçar que $b > \tilde{a}$. Vejamos, de (*) temos $\tilde{a} = kb - a$. Substituindo em (**), tem-se:

$$b > \tilde{a} = kb - a = \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} \cdot b - a \iff a + b > \frac{a^2 + b^2}{ab - 1} \cdot b \iff (a + b)(ab - 1) > (a^2 + b^2)b$$

$$\iff a^2b - a + ab^2 - b > a^2b + b^3 \iff -a + ab^2 - b > b^3 \iff a(b^2 - 1) > b^3 + b \quad (I).$$

Como $a > b$, então $a \geq b + 1$. Daí, tem-se:

$$a(b^2 - 1) \geq (b + 1)(b^2 - 1) = b^3 - b + b^2 - 1 = b^3 + b^2 - b - 1.$$

Assim, $a(b^2 - 1) \geq b^3 + b^2 - b - 1$. De (I) temos $a(b^2 - 1) > b^3 + b$. Então, vamos encontrar uma condição para b de sorte que:

$$b^3 + b^2 - b - 1 > b^3 + b \iff b^2 - 2b - 1 > 0 \iff b \geq 3.$$

Logo, enquanto $b \geq 3$ teremos que poderemos pular da solução (a, b) para a solução (menor) $(b, \tilde{a}) = (b, \frac{b^2+k}{a})$. Se $b = 1$, então $ab - 1 \mid a^2 + b^2 \implies a - 1 \mid a^2 + 1$, o que implica em $a - 1 \mid a^2 + 1 - (a - 1)(a + 1) = a^2 + 1 - a^2 + 1 = 2 \implies a - 1 = 1$ ou $a - 1 = 2$. Ou seja, $a = 2$ ou $a = 3$. Obtendo as soluções $(a, b) \in \{(2, 1), (3, 1)\}$. Em ambos os casos, $k = 5$. Se $b = 2$, então $2a - 1 \mid a^2 + 4 \implies 2a - 1 \mid 2(a^2 + 4) - (2a - 1) \cdot a \implies 2a - 1 \mid 2a^2 + 8 - 2a^2 + a \implies 2a - 1 \mid 8 + a \implies 2a - 1 \mid (a + 8) \cdot 2 - (2a - 1) \implies 2a - 1 \mid$

$2a + 16 - 2a + 1 \implies 2a - 1 \mid 17 \implies (2a - 1 = 1 \implies a = 1)$ ou $(2a - 1 = 17 \implies a = 9)$, mas $a > b = 2(a \neq 1)$. Logo, temos a solução $(a, b) = (9, 2)$. Além disso,

$$\frac{a^2 + b^2}{ab - 1} = \frac{9^2 + 2^2}{9 \cdot 2 - 1} = \frac{85}{17} = 5 = k.$$

Ou seja, enquanto $b \geq 3$ podemos encontrar uma solução (menor). Quando *diminuirmos* a solução a ponto de que b seja 1 ou 2, encontraremos que $k = 5$, o que conclui a demonstração.

Problema 7.9. Encontre uma solução base. Mostre que qualquer par (x, y) que respeite as divisibilidades implica $\text{mdc}(x, y) = 1$. A partir disso mostre que sempre é possível pular de uma solução para outra solução (maior), mostrando que as divisibilidades continuam ocorrendo nessa solução (maior).

Problema 7.10. Note que,

$$\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab - 1} = k \iff \frac{a^2 + b^2 + ab - 1 + 1}{ab - 1} = k \iff \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab - 1} = k - 1 = m.$$

Defina a função $f(x) = x^2 - (bm)x + b^2 + 1 + m$. Assim a é raiz de f . Use as relações de Vieta e mostre que \tilde{a} é inteiro positivo. Seja \tilde{a} a outra raiz. Assuma $a > b$. Dessa forma, $a > b > \tilde{a}$. De fato,

$$\begin{aligned} b > \tilde{a} &\iff b > bm - a \iff a + b > b \frac{a^2 + b^2 + 1}{ab - 1} \iff (a + b)(ab - 1) > a^2b + b^3 + b \iff \\ a^2b - a + ab^2 - b &> a^2b + b^3 + b \iff ab^2 - a > b^3 + 2b \iff a(b^2 - 1) > b(b^2 + 2). \end{aligned}$$

Como $a \geq b + 1$, então $a(b^2 - 1) \geq (b + 1)(b^2 - 1) = b^3 + b^2 - b - 1$. Basta que,

$$b^3 + b^2 - b - 1 > b(b^2 + 2) \iff b^2 - 3b - 1 > 0 \iff b \geq 4.$$

Enquanto $b \geq 4$ poderemos (descer) a solução preservando m . Analise os casos em que $b = 1, 2$ e 3 .

Para mostrar que existem infinitas soluções use a solução $(1, 2)$. Assumindo $a < b$ é possível provar que $b < \tilde{a}$. E assim, podemos pular da solução (a, b) para a solução (\tilde{a}, b) . Fazendo alguns casos pequenos:

$$\begin{array}{c} (1, 2) \\ \downarrow \\ (11, 2) \rightarrow (2, 11) \\ \downarrow \\ (64, 11) \rightarrow (11, 64) \end{array}$$

A setinha para baixo indica a troca de raízes da primeira coordenada. A setinha para direita indica que trocamos a ordem das coordenadas, podemos fazer isso porque a e b assumem papéis simétricos. Escreva mais alguns elementos dessa tabela. Tente encontrar um algoritmo para achar mais rapidamente a próxima solução (uma dica é usar as relações de soma e produto).

Problema 7.11. Tomando $b = 1$, teremos que $k = a$. Então, k pode assumir qualquer valor inteiro positivo. Use o pulo de Vieta e, a partir da solução $(1, 2)$, gere infinitas soluções. Conclua que $(a, b, k) = (n, n + 1, 2)$ é solução para todo n inteiro positivo.

Problema 7.12. Divida os dois lados por ab e aplique a técnica da Descida de Fermat em $\frac{a^2+b^2+1}{ab}$. Pelo exemplo 5 essa divisão só é inteira quando vale 3.

Problema 7.13. Para $m = n$ é óbvio. Vamos mostrar que para $m > n$ não há solução. Tome $m + n = a$ e $m - n = b$. Daí, tem-se:

$$k = \frac{a^2}{4 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot b^2 + 4} = \frac{a^2}{a^2b^2 - b^4 + 4}.$$

Considere uma equação quadrática em b^2 . Seja $b^2 = l$. Daí,

$$k = \frac{a^2}{a^2l - l^2 + 4} \iff l^2k - (a^2k)l + a^2 - 4k = 0.$$

Uma solução é $l = b^2$. Mostre que a outra solução torna $k < 0$ e chegue em um absurdo. (Considere em algum momento que $|a - b| > 4$).

Problema 7.14. Prove que é possível (descer) a uma solução base e a partir dela é possível voltar para qualquer solução (maior).

Problema 7.15. Seja $k = a^2 + b^2 - abc$. Daí, tem-se: $0 < k \leq c$. Defina a função $f(x) = x^2 - (bc)x + b^2 - k$. Note que a é raiz de f . Seja \tilde{a} a outra raiz. Assuma $a > b$. Pelas relações de soma e produto temos que $a + \tilde{a} = bc$ e $a\tilde{a} = b^2 - k$. Assim, $\tilde{a} = bc - a$ e logo \tilde{a} é inteiro. Tomando $x = \tilde{a}$, segue que

$$0 = f(\tilde{a}) = \tilde{a}^2 - (bc)\tilde{a} + b^2 - k \iff k = \tilde{a}^2 - \tilde{a}bc + b^2.$$

Como $0 < k \leq c$, então

$$0 < \tilde{a}^2 - \tilde{a}bc + b^2 \leq c \implies 0 < \tilde{a}^2 + b^2 \leq c + \tilde{a}bc = c(1 + \tilde{a}b).$$

Logo, $1 + \tilde{a}b > 0 \implies \tilde{a} \geq 0$. Use um raciocínio análogo ao exemplo 6(IMO 1988 P6) para completar a solução. Lembre que também existe o caso em que $a = b$.

Problema 7.16.

Dica: Simplifique a divisibilidade e encontre que $4ab - 1 \mid (a - b)^2$. Sem perda de generalidade, assumo $a > b$ e, dada uma solução mínima, encontre uma menor gerando um absurdo.

Completando uma parte da dica: Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(a - b)^2}{4ab - 1} = k \iff a^2 - (2b + 4bk)a + b^2 + k = 0.$$

Defina o polinômio $f(x) = x^2 - (2b + 4bk)x + b^2 + k$. Sabemos que a é raiz de f . Seja \tilde{a} a outra raiz. Pelas relações de Girard, tem-se: $a \cdot \tilde{a} = b^2 + k > 0 \implies \tilde{a} > 0$ e $a + \tilde{a} = 2b + 4bk > 0 \iff \tilde{a} = 2b + 4bk - a \in \mathbb{Z}$. Logo, $\tilde{a} \in \mathbb{N}^*$. Suponha S.P.G. que $a > b$. Note que $b > \tilde{a} \iff b > \frac{b^2+k}{a} \iff ab > b^2 + k \iff ab >$

$$b^2 + \frac{(a-b)^2}{4ab-1} \iff b(a-b) > \frac{(a-b)^2}{4ab-1} \iff b > \frac{a-b}{4ab-1} \iff 4ab^2 - b > a - b \iff \\ \iff 4ab^2 > a \iff 4b^2 > 1.$$

Logo, da solução (a, b) com $a > b$ podemos pular para a solução (b, \tilde{a}) com $b > \tilde{a}$ e $a, b, \tilde{a} \in \mathbb{N}^*$.

Problema 7.17. Veja a solução trivial com $b = 1$, depois veja que para cada valor de $\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$ encontramos sempre uma solução maior.

Problema 7.18. Para simplificar o problema, assuma sem perda de generalidade que $x, y, z > 0$ e $x \geq y \geq z$; assuma uma solução mínima e a partir dela veja que se $z \geq 2$ a equação não tem solução e se $z = 1$ encontramos $(x - y)^2 = -1$.

Problema 7.19. Para simplificar o problema, assuma sem perda de generalidade que $x, y, z > 0$; se $x > y > z$ obtemos que não existe solução para $k > 3$, agora veja o caso de $k = 2$.

Problema 7.20. Veja que a solução base é $(x, y, z) = (1, 1, 1)$; com isso, mostre que a partir dela é possível criar infinitas soluções e mostre que é possível “diminuir” qualquer solução até chegar na solução base.

Problema 7.21. Seja $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ uma solução para a equação tal que y_1 tem o menor valor possível e $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \dots \geq y_n \geq 1$. Seja o polinômio

$$f(t) = t^2 - t \cdot k \cdot y_2 y_3 \dots y_n + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2,$$

com raízes y_1 e \tilde{y}_1 . Pelas relações de Girard, obtemos:

$$y_1 + \tilde{y}_1 = k \cdot y_2 y_3 \dots y_n \implies \tilde{y}_1 \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \tilde{y}_1 = \frac{y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2}{y_1} > 0.$$

Então \tilde{y}_1 é um inteiro positivo. Veja que,

$$f(y_2) = y_2^2 - y_2 \cdot k \cdot y_2 \cdot y_3 \dots y_n + y_2^2 + y_3^2 + \dots + y_n^2 \leq n \cdot y_2^2 - k \cdot y_2^2 \cdot y_3 \dots y_n.$$

Como $y_i \geq 1$ e por $(k > n \iff k \geq n + 1)$, obtemos:

$$n \cdot y_2^2 - k \cdot y_2^2 \leq n \cdot y_2^2 - (n + 1)y_2^2 = -y_2^2 \leq -1.$$

Portanto, pelo estudo do gráfico da função $f(t)$, obtemos $y_2 \in (\tilde{y}_1, y_1)$ e sabemos que $y_1 \geq y_2$, então $\tilde{y}_1 < y_2 \leq y_1 \implies \tilde{y}_1 < y_1$, contradição.

Portanto, a equação não tem solução nos inteiros positivos, ela só pode ter solução quando:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 0 \implies x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Problema 7.22. Considere que se $(m, n) = (a, b)$ é uma solução com $a > b$, então $(m, n) = (b, a - b)$ também será uma solução, porém com a soma das coordenadas menor. Portanto, identifique a solução cuja soma das coordenadas seja mínima e, a partir dela, aumente o valor das coordenadas de modo a maximizar o valor de $m^2 + n^2$.

Sugestão: Conclua então que as soluções da equação $(m^2 - mn + n^2)^2 = 1$ são geradas a partir dos números de Fibonacci consecutivos.

Problema 7.23. Veja que uma generalização desse problema é mostrar que $x^4 + y^4 = z_1^2$. Com isso, utilize as ternas pitagóricas para mostrar que dado um z_1 mínimo, é possível encontrar outra solução com um z_1 menor ainda.

Problema 7.24.

Solução.1 Suponha, por redução ao absurdo, que existe $n > 1$ natural tal que $n \mid 2^n - 1$. Como $n \mid 2^n - 1$, então n é ímpar. Daí, $\text{mdc}(2, n) = 1$. Pelo teorema de Euler-Fermat temos que $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1$. Já que $n \mid 2^n - 1$ e $n \mid 2^{\varphi(n)} - 1$, então

$$n \mid \text{mdc}(2^n - 1, 2^{\varphi(n)} - 1) = 2^{\text{mdc}(n, \varphi(n))} - 1.$$

Além disso, $\text{mdc}(n, \varphi(n)) \mid n$, logo, por transitividade

$$\text{mdc}(n, \varphi(n)) \mid 2^{\text{mdc}(n, \varphi(n))} - 1.$$

Como $n > 1$, então $\text{mdc}(n, \varphi(n)) \leq \varphi(n) < n$. Ou seja, se $n \mid 2^n - 1$, então $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $k \mid 2^k - 1$, sendo $k < n$, com $k = \text{mdc}(n, \varphi(n))$. Logo, dada uma solução em inteiro positivo sempre é possível obter uma menor. O que é uma contradição.

Solução.2 Suponha, por redução ao absurdo, que exista $n > 1$ natural tal que $n \mid 2^n - 1$. Como $n \mid 2^n - 1$, então n é ímpar. Seja p o menor primo positivo tal que $p \mid n$. Por transitividade, $p \mid 2^n - 1$. Se n é ímpar, então p é ímpar $\Rightarrow \text{mdc}(2, p) = 1$. Pelo Pequeno Teorema de Fermat, $p \mid 2^{p-1} - 1$. Já que $p \mid 2^n - 1$ e $p \mid 2^{p-1} - 1$, então $\text{ord}_p 2 \mid n$ e $\text{ord}_p 2 \mid p - 1 \Rightarrow \text{ord}_p 2 \mid \text{mdc}(n, p - 1)$. Sendo p o menor primo positivo tal que $p \mid n$, temos que $\text{mdc}(n, p - 1) = 1$ (prove isso). Daí, temos $\text{ord}_p 2 \mid 1 \Rightarrow \text{ord}_p 2 = 1$. Segue que $p \mid 2^{\text{ord}_p 2} - 1 = 2^1 - 1 = 1 \Rightarrow p = 1$, mas p é primo. O que é uma contradição.

Problema 7.25. Seja $x \geq y \geq z \geq 1$ a solução com o menor valor de $x + y + z$ para a equação $a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1$. Seja $f(t) = t^2 - tyz + (y^2 + z^2 - 1)$ um polinômio com raízes x e \tilde{x} . Pelas relações de Girard, obtemos:

$$x + \tilde{x} = yz \implies \tilde{x} \in \mathbb{Z} \quad \text{e} \quad \tilde{x} = \frac{y^2 + z^2 - 1}{x} > 0.$$

Afirmção: $\tilde{x} < x$.

Prova: Suponha $\tilde{x} \geq x$. Então $yz = x + \tilde{x} \geq 2x \implies x \leq \frac{yz}{2} \implies x = \frac{yz}{2} - k$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$ (Não existe solução se y e z forem ambos ímpares, confira! Então pelo menos um deles é par. Assim, $yz/2$ é um natural). Segue que,

$$\left(\frac{yz}{2} - k\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{yz}{2} - k\right)yz + 1 \iff 4k^2 = (yz)^2 + 4 - 4y^2 - 4z^2.$$

Como $\frac{yz}{2} - k = x \geq y$, então $k \leq \frac{yz}{2} - y$. Daí, tem-se: $4k^2 \leq (yz)^2 - 4y^2z + 4y^2$. Logo,

$$(yz)^2 - 4y^2z + 4y^2 \geq 4k^2 = (yz)^2 + 4 - 4y^2 - 4z^2.$$

Simplificando obtemos $2y^2 + z^2 - 1 \geq y^2z \implies z \leq 2$. Analisaremos os dois casos:

- Se $z = 2$, então $x^2 + y^2 + 4 = 2xy + 1 \iff (x - y)^2 = -3$. Absurdo!
- Se $z = 1$, então $x^2 + y^2 + 1 = xy + 1 \iff x^2 + y^2 = xy \iff (x - y)^2 = -xy < 0$. Absurdo!

Portanto, nos resta o caso em que $z = 0$ e assim $x^2 + y^2 = 1$. Dessa forma, por simetria, podemos listar todas as soluções: $(a, b, c) \in \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

Referências

- [1] SHKLARSKY, D. O.; CHENTZOV, N. N.; YAGLOM, I. M. *The USSR Olympiad Problem Book: Selected Problems and Theorems of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, 1993.
- [2] KHURMI, Aditya. *Modern Olympiad Number Theory*. Self-published, 2020. (Published on 11/2020).
- [3] GELCA, Răzvan; ANDREESCU, Titu. *Putnam and Beyond*. 2nd ed. Springer, 2017.
- [4] LOPES, Davi. *Pulo de Vieta*. Anápolis: Material da 22ª Semana Olímpica - OBM, 2019. Programa Especial de Treinamento Internacional.
- [5] REGIS, Prof. *Aula 14 - Resolvendo Equações Diofantinas (2): Descida Infinita de Fermat e Root Flipping*. Rio de Janeiro: PETI - Programa Especial de Treinamento Internacional da OBM, 2026. Teoria dos Números - Nível 3.
- [6] MARTINEZ, Fabio Brochero; MOREIRA, Carlos Gustavo; SALDANHA, Nicolau; TENGAN, Eduardo. *Teoria dos Números: Um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro*. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, 2013.

Identidades Binomiais e Somas Telescópicas

por Francisco Alan Lima da Silva

Neste artigo estudaremos somas do tipo

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1). \quad (1)$$

A expressão em (1) é especialmente boa, porque o segundo termo de cada parênteses se cancela com o primeiro do próximo, nos dando uma cadeia de cancelamentos, da qual só restará $a_n - a_1$.

O leitor é convidado a fazer um paralelo entre os resultados que aqui serão apresentados e o Teorema Fundamental do Cálculo, levando em consideração o operador derivada discreta, $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$, e o operador soma definida, Σ , que é definido por

$$\sum_a^b f(x)\delta x := \sum_{x=a}^{b-1} f(x),$$

e que satisfaz $\sum_a^b \Delta f(x) = f(b) - f(a)$.

Esperamos do leitor alguma familiaridade com a notação Σ de somatórios. Isso inclui saber fazer mudança de variáveis, tanto nos índices de uma soma quanto na sequência somada; e outras propriedades mais básicas, como a sua linearidade. Durante o texto, escreveremos $[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$, e consideraremos o conjunto dos números naturais como sendo $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.

8.1 Somas Telescópicas

Vamos definir algo que já foi escrito, que é muito simples, mas que é muito útil para muitos propósitos.

Definição 3 (Soma telescópica). Uma soma como a da Equação (1) será chamada de *soma telescópica*.

A ideia da soma telescópica é cancelar todos, exceto o primeiro e último termo de uma soma da forma

$$T_n = \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j). \quad (2)$$

Por propriedades de somatório, pode-se obter facilmente que

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} a_j = \sum_{j=2}^n a_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_j \\ &= \left(a_n + \sum_{j=2}^{n-1} a_j \right) - \left(a_1 + \sum_{j=2}^{n-1} a_j \right) = a_n - a_1. \end{aligned}$$

Note que podemos inverter a ordem em (2) para obter que

$$T'_n = \sum_{j=1}^{n-1} (a_j - a_{j+1}) = a_1 - a_n. \quad (3)$$

É claro, também, que uma soma do tipo da (3) pode ser reescrita como uma soma do tipo da (2) ao fazer a mudança de variáveis $a'_j = -a_j$.

Veremos agora alguns exemplos de problemas que podem ser resolvidos utilizando somas telescópicas.

Como primeira aplicação, provaremos a fórmula $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. Utilizaremos o fato que a diferença de dois quadrados consecutivos é um número ímpar conveniente.

Exemplo 8.1. Uma vez que $j^2 - (j - 1)^2 = 2j - 1$, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^n (2j - 1) = \sum_{j=1}^n [j^2 - (j - 1)^2] = n^2 - 0^2 = n^2,$$

o que prova que a soma dos n primeiros ímpares positivos é o n -ésimo quadrado positivo.

Outra soma que pode ser transformada em uma telescópica, é a soma dos n primeiros cubos naturais. Veremos que essa soma é igual ao quadrado da soma dos n primeiros naturais.

Exemplo 8.2. Provaremos agora a elegante fórmula $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ por soma telescópica. Note que podemos escrever j como sendo:

$$j = \frac{(j + 1)^2 - (j - 1)^2}{4}.$$

Da expressão anterior temos, por soma telescópica, que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j^3 &= \sum_{j=1}^n j^2 \left(\frac{(j + 1)^2 - (j - 1)^2}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^n ((j(j + 1))^2 - (j(j - 1))^2) \\ &= \frac{1}{4} ((n(n + 1))^2 - (1(1 - 1))^2) \\ &= \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2 = \left(\sum_{j=1}^n j \right)^2, \end{aligned}$$

como buscávamos.

Exemplo 8.3. Escreva $S_m(n) = \sum_{j=0}^n j^m$. Já vimos uma fórmula fechada para $S_m(n)$ no caso em que $m = 3$. Observe agora que, por soma telescópica, temos que

$$(n+1)^{k+1} - 0^{k+1} = \sum_{j=0}^n ((j+1)^{k+1} - j^{k+1}). \quad (4)$$

Utilizando o teorema binomial, obtemos que

$$\begin{aligned} (n+1)^{k+1} &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m} j^m \right) \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m} \sum_{j=0}^n j^m = \sum_{m=0}^k \binom{k+1}{m} S_m(n) \\ &= S_0(n) + \sum_{m=1}^k \binom{k+1}{m} S_m(n) \\ &= (n+1) + \sum_{m=1}^k \binom{k+1}{m} S_m(n). \end{aligned}$$

Portanto, ao conhecer as somas $S_m(n)$ com $1 \leq m \leq k-1$, podemos calcular $S_k(n)$.

Exemplo 8.4. Vamos encontrar uma expressão fechada para a soma

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

Não há real trabalho em transformar a soma acima em uma soma telescópica. De fato, uma primeira tentativa de racionalização já funciona:

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \cdot \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^n [\sqrt{k+1} - \sqrt{k}] = \sqrt{n+1} - 1,$$

a expressão procurada.

Exemplo 8.5. Seja $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$, a soma dos n primeiros recíprocos de números naturais. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = nH_n - n.$$

Para isso, utilizaremos a forma recursiva de definir H_n , ou seja, a expressão $H_{k+1} = H_k + \frac{1}{k+1}$. Multiplicando essa igualdade por $k+1$, obtemos a expressão

$$(k+1)H_{k+1} = kH_k + H_k + 1,$$

que nos dá uma expressão com parte telescópica para a soma dos primeiros recíprocos:

$$H_k = [(k + 1)H_{k+1} - kH_k] - 1.$$

Pela igualdade acima, concluímos que

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k = \sum_{k=1}^{n-1} [(k + 1)H_{k+1} - kH_k] - \sum_{k=1}^{n-1} 1 = nH_n - n.$$

O exemplo abaixo exige do leitor também familiaridade com a ideia de limites de seqüências. O leitor pode consultar o artigo nível U do volume 1 dessa revista para o conteúdo necessário.

Vamos falar brevemente da ideia de séries numéricas. Pondo $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, a soma dos primeiros termos de uma seqüência (a_n) , temos uma seqüência (S_n) definida. Se $S_n \rightarrow S$, dizemos que a *série*, ou *soma infinita*, de (a_n) converge para S , e escrevemos

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S.$$

Vamos calcular o valor de algumas séries utilizando somas telescópicas.

Exemplo 8.6. Vamos mostrar que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k+1)!} = 1.$$

Faremos isso calculando suas somas parciais, $S(n) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$. Para isso, perceba que podemos escrever

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1) - 1}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!},$$

o que nos dá uma expressão telescópica para $S(n)$. Concluindo, temos que

$$S(n) = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \rightarrow 1,$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

É muito bem conhecido que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com termo inicial a_1 e razão r é $\sum_{k=1}^n a_1 r^k = \frac{a_1(1-r^{n+1})}{1-r}$. Portanto, se $0 < r < 1$ temos que $\sum_{k=1}^{+\infty} a_1 r^k = \frac{a_1}{1-r}$. A série $\sum_k r^k$ é chamada de *série geométrica*.

Exemplo 8.7. Esta aplicação conecta somas telescópicas com a Função Zeta de Riemann, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$. Mais precisamente, vamos encontrar

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1).$$

Para isso, vamos reescrever as parcelas que serão somadas. Perceba que

$$\zeta(n) - 1 = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Como todos os termos são positivos, podemos inverter a ordem dos dois somatórios

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Agora veja que a série de dentro é a série de progressão geométrica de termo inicial $\frac{1}{k^2}$ e razão $\frac{1}{k}$, e portanto

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{1 - \frac{1}{k}} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}.$$

Por outro lado, é fácil encontrar uma forma telescópica para $\frac{1}{k(k-1)}$. De fato, note que $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$, o que nos dá que

$$S = \sum_{k=2}^{+\infty} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right].$$

Perceba que as somas parciais da série acima são $S(n) = \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right] = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$, quando $n \rightarrow +\infty$. Portanto, segue que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) = 1,$$

a expressão que procurávamos.

8.2 Identidades Binomiais

Vamos começar com uma identidade binomial extremamente importante. Agora e durante todo o texto utilizaremos a convenção de que $\binom{n}{k} = 0$, quando $n < 0$, ou $k < 0$, ou $n < k$.

Proposição 1 (Relação de Stifel). *Para quaisquer inteiros n, k , temos*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Demonstração. Por contagem dupla, quando $1 \leq k \leq n$. Há $\binom{n-1}{k}$ formas de escolher k elementos de $[n]$ sem escolher o elemento n , e há $\binom{n-1}{k-1}$ formas de escolher k elementos de $[n]$ escolhendo-se o elemento n . Mas escolher k elementos de $[n]$ é o mesmo que escolher k elementos de $[n]$ escolhendo n , ou não escolhendo n . Pelo Princípio Aditivo, há $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ formas de escolher k elementos de $[n]$. Como $\binom{n}{k}$ também conta essa quantidade, temos o resultado.

Os casos em que $n < 0$, $k < 0$, ou $n < k$ são fáceis de verificar. □

A Relação de Stifel é especialmente boa pela sua “forma telescópica”. Mais precisamente, fixado k e definindo $a_j = \binom{j}{k+1}$, pela Relação de Stifel temos que

$$\binom{j}{k} = \binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1} = a_{j+1} - a_j.$$

Em particular, somando de $j = k$ até n , temos a prova do Teorema das Colunas, por soma telescópica.

Teorema 8.1 (Teorema das Colunas). *Para $k \geq 1$ e $n \geq k$, temos que*

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Demonstração. Por soma telescópica. Veja que

$$\sum_{j=k}^n \binom{j}{k} = \sum_{j=k}^n \left[\binom{j+1}{k+1} - \binom{j}{k+1} \right] = \binom{n+1}{k+1} - \binom{k}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

onde acima utilizamos que $\binom{k}{k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. □

Um fato interessante é que o Teorema das Colunas é equivalente, em certo sentido, ao Teorema das Diagonais, pela simetria $\binom{k+j}{k} = \binom{k+j}{j}$.

Teorema 8.2 (Teorema das Diagonais). *Para $k \geq 1$ e $n \geq k$, temos que*

$$\sum_{j=0}^n \binom{k+j}{j} = \binom{k+n+1}{n}.$$

Demonstração. Utilizaremos o fato que $\binom{k+j}{k} = \binom{k+j}{j}$. Pelo Teorema das Colunas, temos que

$$\sum_{j=0}^n \binom{k+j}{j} = \sum_{j=0}^n \binom{k+j}{k} = \sum_{j=k}^{n+k} \binom{j}{k} = \binom{n+k+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{n},$$

o que conclui a prova. □

Na Figura 39 abaixo representamos o Triângulo de Pascal e a relação entre o Teorema das Colunas e o Teorema das Diagonais. Perceba que o valor escolhido na linha j é sempre igual, tanto na coluna quanto na diagonal correspondente de cada teorema.

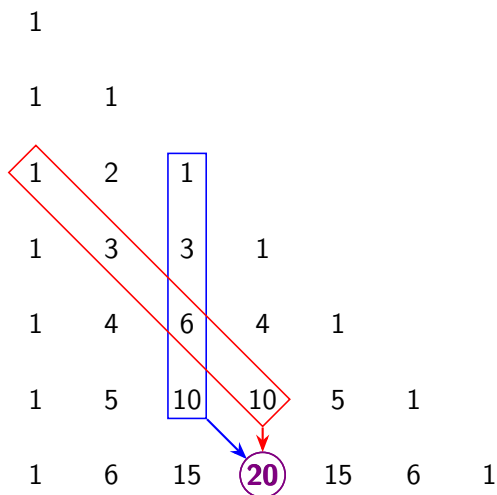


Figura 39: “Equivalência” entre o Teorema das Colunas, representado em azul, e o Teorema das Diagonais, em vermelho.

Proposição 2 (Identidade de Absorção).

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Demonstração. Uma simples manipulação algébrica. Perceba que

$$k \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1},$$

como queríamos demonstrar. □

Perceba que poderíamos ter escrito a Identidade de Absorção de outra forma. Para $k > 0$, temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Utilizaremos a identidade acima para provar uma espécie de Relação de Stifel “Reversa” e concluir uma fórmula para a soma dos recíprocos dos elementos de uma coluna no Triângulo de Pascal.

Exemplo 8.8. Vamos calcular a soma dos recíprocos de uma coluna no Triângulo de Pascal. Mais precisamente, provaremos que

$$\sum_{k=r}^n \frac{1}{\binom{k}{r}} = \frac{r}{r-1} \left[1 - \frac{1}{\binom{n}{r-1}} \right].$$

Para isso, utilizaremos a Identidade de Stifel reversa, enunciada abaixo.

Lema 1 (Relação de Stifel Reversa). Para $2 \leq k \leq n$ temos que

$$\frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{k}{k-1} \left[\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} - \frac{1}{\binom{n}{k-1}} \right].$$

Demonstração. Expandiremos a expressão dentro do colchetes. Perceba que

$$\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} - \frac{1}{\binom{n}{k-1}} = \frac{\binom{n}{k-1} - \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1}} = \frac{\binom{n-1}{k-2}}{\frac{k}{n}\binom{n}{k-1}\binom{n-1}{k-2}} = \frac{k-1}{k} \frac{1}{\binom{n}{k}},$$

onde na segunda igualdade utilizamos a Identidade de Absorção duas vezes. \square

Pelo Lema 1 e soma telescópica temos que

$$\sum_{k=r}^n \frac{1}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=r}^n \frac{r}{r-1} \left[\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}} - \frac{1}{\binom{n}{k-1}} \right] = \frac{r}{r-1} \left[\frac{1}{\binom{n-1}{r-1}} - \frac{1}{\binom{n}{r-1}} \right],$$

o que conclui a prova da fórmula.

Exemplo 8.9. Fixe $1 \leq m \leq n$ dois números naturais. Vamos utilizar a Relação de Stifel para transformar a soma

$$S = \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k},$$

em uma soma telescópica. Pela Relação de Stifel temos que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \left[(-1)^k \binom{n-1}{k} - (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1} \right] \\ &= (-1)^m \binom{n-1}{m}, \end{aligned}$$

pois $\binom{n-1}{-1} = 0$. Se $m = n$, temos que $S = (-1)^n \binom{n-1}{n} = 0$, que também poderia ter sido obtido pelo Teorema Binomial, uma vez que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

8.3 Somas com fatoriais

Começaremos esta seção ilustrando o tipo de somas que pretendemos calcular.

Exemplo 8.10. Vamos mostrar que $\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1$. Por soma telescópica e pelo fato que $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, temos que

$$\sum_{k=0}^n k \cdot k! = \sum_{k=0}^n [(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1,$$

uma vez que $0! = 1$, e o resultado segue.

Agora perguntamos: o que devemos fazer se quisermos calcular o valor da soma

$$\sum_{k=1}^n P(k) \cdot k!,$$

com $P(X)$ um polinômio? Como o fatorial preserva parte da sua estrutura de diferença pela relação $(k+1)! - k! = k \cdot k!$, quando quisermos calcular a soma de funções do tipo $g(k) = P(k) \cdot k!$, com $P(X)$ polinômio de grau n , primeiro buscaremos uma função f da forma $f(k) = H(k) \cdot k!$, com $H(k)$ polinômio de grau $n-1$, de tal modo que $f(k+1) - f(k) = g(k)$. Perceba que se conseguirmos uma tal que função f , o problema está resolvido, uma vez que

$$\begin{aligned} k! \cdot P(k) &= g(k) = f(k+1) - f(k) \\ &= H(k+1)(k+1)! - H(k) \cdot k! \\ &= k![(k+1)H(k+1) - H(k)], \end{aligned}$$

e portanto $P(k) = (k+1)H(k+1) - H(k)$. Em particular, se o coeficiente líder de $P(X)$ é a , então também é a o coeficiente líder de $H(X)$. Se $P(X)$ tem grau $n+1$, então $H(X)$ tem grau n . Por soma telescópica segue que

$$\sum_{k=1}^n g(k) = \sum_{k=1}^n [f(k+1) - f(k)] = f(n+1) - f(1).$$

Pela forma como definimos as funções f e g , segue a forma de resolver a pergunta inicial:

$$\sum_{k=1}^n P(k) \cdot k! = H(n+1) \cdot (n+1)! - H(1). \quad (5)$$

Infelizmente, a limitação do grau de $H(X)$ ser menor que o de $P(X)$, não nos permite calcular uma fórmula para $\sum_{k=1}^n k!$ utilizando o método que vamos discutir, porque uma vez que $P(X) = 1$ tem grau 0, não podemos obter um polinômio $H(X)$, porque ele teria grau -1 , o que não faz sentido. Devido a esta dificuldade, veremos que, se quisermos calcular a soma pretendida, não podemos controlar o coeficiente b_0 de $P(X) = b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0$, que sempre dependerá dos outros coeficientes de $P(X)$. Nosso objetivo será, portanto:

1. Calcular $b_0 = b_0(b_1, b_2, \dots, b_n)$.
2. Calcular $H(X) = a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ em termos de b_1, \dots, b_n .

Não vamos tentar um método genérico para quaisquer polinômios de grau n , mas os casos específicos em que $n = 1, 2$ e 3 . Antes, vamos estabelecer uma notação.

Definição 4. Diremos que um polinômio $P(X)$ é *f-somável* se podemos encontrar $H(X)$, também um polinômio, tal que

$$H(k+1) \cdot (k+1)! - H(k) \cdot k! = P(k) \cdot k! \quad (6)$$

para todo k inteiro positivo. Neste caso, $H(X)$ é chamado de *polinômio derivado* de $P(X)$.

Exemplo 8.11. Qualquer polinômio da forma $P(X) = aX$ é *f-somável*, com polinômio derivado $H(X) = a$. De fato, isso é apenas o Exemplo 8.10, com a soma multiplicada por a . Provaremos que os polinômios de grau 2 que são *f-somáveis* são precisamente os da forma $P(X) = aX^2 + bX + a$, e seu polinômio derivado tem forma $H(X) = aX + b - a$. De fato, se $P(X)$ tem grau 2 e $H(X)$ satisfaz

$$(k+1)H(k+1) - H(k) = P(k),$$

para todo k , então $H(X)$ tem de ser da forma $aX + c$, e portanto temos que

$$\begin{aligned} P(k) &= (k+1) \cdot (a(k+1) + c) - (ak + c) \\ &= ak^2 + (a+c)k + a, \end{aligned}$$

e portanto $P(X)$ deve ser da forma $aX^2 + bX + a$. Neste caso, $b = a + c$, donde $c = b - a$, o que mostra que o polinômio derivado tem forma $H(X) = aX + b - a$.

Pelo Exemplo 8.11 acima e pela Equação (5), para $P(X) = aX^2 + bX + a$, temos o polinômio derivado $H(X) = aX + b - a$, e portanto temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (aX^2 + bX + a) \cdot k! &= H(n+1) \cdot (n+1)! - H(1) \\ &= (an + b) \cdot (n+1)! - b. \end{aligned}$$

Vamos aplicar esse resultado no exemplo a seguir.

Exemplo 8.12. Vamos calcular $\sum_{k=0}^n (2k^2 + 3k + 2) \cdot k!$. Pela discussão anterior, temos que

$$\sum_{k=1}^n (2k^2 + 3k + 2k) \cdot k! = (2n + 3) \cdot (n+1)! - 3,$$

o que termina este exemplo.

Podemos ainda adaptar o método para calcular somas do tipo $\sum_{k=1}^n P(k) \cdot (k+p)!$. Embora seja viável uma mudança de variável $k+p \mapsto k$, queremos demonstrar que a ideia pode ser adaptada.

Exemplo 8.13. Vamos encontrar uma expressão para a soma $\sum_{k=1}^n k^2 \cdot (k+1)!$. Faremos isto encontrando uma função f tal que

$$f(k+1) - f(k) = k^2(k+1)!.$$

Já vimos que, nestes casos, devemos procurar por uma função $f(k) = h(k) \cdot (k+1)!$. Como estamos lidando com $(k+1)!$ agora, ao invés de $k!$, devemos ajustar o método. Calculando, concluímos que

$$f(k+1) - f(k) = (k+1)![(k+2)h(k+1) - h(k)].$$

Como queremos que $f(k+1) - f(k) = k^2 \cdot (k+1)!$, devemos buscar $h(k)$ satisfazendo:

$$k^2 = (k+2)h(k+1) - h(k). \quad (7)$$

Vamos procurar por h polinômio de grau 1, ou seja, da forma $h(X) = aX + b$. Pela forma da Equação (7), é imediato que devemos ter $a = 1$. Assim, tentando $h(X) = X + b$, obtemos:

$$\begin{aligned} k^2 &= (k+2)((k+1) + b) - (k + b) \\ &= (k+2)(k+1) + b((k+2) - 1) - k \\ &= k^2 + (2+b)k + (2+b). \end{aligned}$$

Para que a igualdade acima seja satisfeita, devemos ter $b = -2$. Portanto, para

$$f(k) = (k-2)(k+1)!,$$

temos que $f(k+1) - f(k) = k^2 \cdot (k+1)!$, e por soma telescópica vem que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \cdot (k+1)! &= f(n+1) - f(1) \\ &= (n-1)(n+2)! - (-1) \cdot 2! \\ &= (n-1)(n+2)! + 2, \end{aligned}$$

a fórmula que procurávamos.

No entanto as coisas começam a complicar quando tentamos fazer essas contas para polinômios $P(X)$ de grau 3. Para $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ ser f -somável, devemos ter $H(X) = aX^2 + eX + f$ satisfazendo (6). Escrevendo $I(k) := H(k+1)(k+1)! - H(k)$, temos que

$$\begin{aligned} I(k) &= (a(k+1)^2 + e(k+1) + f)(k+1)! - (ak^2 + ek + f)k! \\ &= (ak^3 + (2a+e)k^2 + (3a+e+f)k + (a+e))k!. \end{aligned}$$

Uma vez que $I(k) = P(k) \cdot k!$, então temos o sistema

$$\begin{aligned} b &= 2a + e \\ c &= 3a + e + f \\ d &= a + e \end{aligned}$$

Sabemos que basta determinar d em função de a, b e c , para determinar quando $P(X)$ é f -somável; e depois e e f , em termos de a, b e c para determinar seu polinômio derivado. Resolvendo, temos que

$$b = 2a + 2 = a + (a + e) = a + d,$$

e portanto $d = b - a$. Portanto, os polinômios f -somáveis de grau 3 são da forma $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + (b - a)$. Agora veja que

$$\begin{aligned} e &= d - a = (b - a) - a = b - 2a \\ f &= c - 3a - e = c - 3a - (b - 2a) = c - b - a. \end{aligned}$$

Dessa forma, o polinômio derivado de $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + (b - a)$ é o polinômio $H(X) = aX^2 + (b - 2a)X + (c - b - a)$.

Mais geralmente, sendo $P(X) = \sum_{j=0}^n b_j X^j$ um polinômio f -somável com polinômio derivado $H(X) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j$, seus coeficientes satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ b_1 &= a_0 + (2 - 1)a_1 + \binom{3}{1}a_2 + \cdots + \binom{n+1}{1}a_n \\ b_2 &= a_1 + (3 - 1)a_2 + \binom{4}{2}a_3 + \cdots + \binom{n+1}{2}a_n \\ b_3 &= a_2 + (4 - 1)a_3 + \binom{5}{3}a_4 + \cdots + \binom{n+1}{3}a_n \\ &\vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ b_n &= a_{n-1} + ((n+1) - 1)a_n \\ b_{n+1} &= a_n. \end{aligned}$$

Para os detalhes da conta acima, veja [3].

Para terminar, vamos calcular uma soma com produto de fatorial com polinômio f -somável de grau 3.

Exemplo 8.14. Vamos encontrar o valor da soma $\sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2 + 3k + 1) \cdot k!$. Aqui, temos que $a = 1, b = 2, c = 3$ e $d = 1 = c - b$, e portanto $P(X) = k^3 + 2k^2 + 3k + 1$ é f -somável. Vamos encontrar primeiro seu polinômio derivado $H(X) = X^2 + eX + f$. Sabemos que:

- $e = b - 2a = 0$, e
- $f = c - b - a = 0$.

Assim, $H(X) = X^2$. Por (5), segue que

$$\sum_{k=1}^n (k^3 + 2k^2 + 3k + 1) \cdot k! = (n+1)^2 (n+1)! - 1,$$

a soma que buscávamos.

8.4 Problemas propostos

Problema 8.1. Defina recursivamente $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, e $a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n + n$. Calcule $a_{2025} + a_{2023}$.

Problema 8.2. Mostre que

$$\sum_{k=0}^m k^2 \binom{n}{k} = n^2 \binom{2n-2}{n-1}.$$

Problema 8.3. Prove que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Problema 8.4. Mostre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n},$$

onde F_n denota o n -ésimo número de Fibonacci.

Problema 8.5. Prove que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k F_k = F_{3n}.$$

Problema 8.6. Calcule

$$\sum_{k=1}^n [(k+1)^{n+1} - k^n] \cdot k!.$$

Problema 8.7 (IMO Longlist 1970). Para n inteiro positivo par, mostre que

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \frac{1}{i} = 2 \sum_{i=1}^{n/2} \frac{1}{n+2i}.$$

Problema 8.8 (Romênia TST 2003). Seja $(a_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de números reais dada por $a_1 = 1/2$ e, para cada inteiro positivo n ,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}.$$

Prove que para todo inteiro positivo n , temos $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 1$.

Problema 8.9 (IMO Longlist 1966). Prove que para todo número natural n , e para todo número real $x \neq k\pi/2^t$ ($t = 0, 1, \dots, n$; com k inteiro)

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(2x)} + \frac{1}{\operatorname{sen}(4x)} + \dots + \frac{1}{\operatorname{sen}(2^n x)} = \operatorname{cotg}(2^{n-1}x) - \operatorname{cotg}(2^n x).$$

Problema 8.10 (OBM). O número

$$\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2000^2} + \frac{1}{2001^2}}$$

é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros.

Problema 8.11 (OBM). Observe que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Assim, podemos calcular a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots = 1.$$

Sabendo que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$, o valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots$$

é da forma $A - \frac{\pi^2}{B}$, com A e B inteiros positivos. Determine o valor de $A + B$.

Problema 8.12 (IMO 1968 P6). Para todo número natural n , avalie a soma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \dots$$

(O símbolo $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro que não excede x .)

Problema 8.13 (Estônia). Prove a desigualdade:

$$2010 < \frac{2^2 + 1}{2^2 - 1} + \frac{3^2 + 1}{3^2 - 1} + \dots + \frac{2010^2 + 1}{2010^2 - 1} < 2010 + \frac{1}{2}.$$

Problema 8.14. Calcule a soma:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}}.$$

Problema 8.15. Se $n \in \mathbb{N}$ e a é um ímpar positivo, então

$$\sum_{k=0}^a \frac{k^{2n+1}}{k^{2n+1} + (a-k)^{2n+1}} = \frac{a+1}{2}.$$

8.5 Dicas dos problemas propostos

Problema 8.3. Utilize a Identidade de Absorção.

Problema 8.4. Utilize a Fórmula de Binet, $F_k = (\phi^k - \psi^k)/\sqrt{5}$, onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ e $\psi = (1 - \sqrt{5})/2$ são as raízes da equação $x^2 = 1 + x$, e depois utilize o Teorema Binomial de forma apropriada.

Problema 8.9. Mostre que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(2^n x)} = \operatorname{cotg}(2^{n-1}x) - \operatorname{cotg}(2^n x).$$

Use soma telescópica.

Problema 8.11. Use a identidade

$$1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n^2 + n + 1)^2}{n^2(n+1)^2}.$$

Problema 8.12. Use a identidade de Hermite para $n = 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor x + \frac{k}{n} \right\rfloor = \lfloor nx \rfloor.$$

A identidade é válida para todo n inteiro positivo e x real. Encontre uma soma telescópica.

Problema 8.15. Some as parcelas equidistantes dos extremos.

Agradecimentos. O autor agradece ao Henrique Trajano por sugerir os problemas 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15 deste capítulo.

Referências

-
- [1] Arthur Engel, *Problem-solving strategies*, Nova Iorque: Springer-Verlag New York Inc., 1998.
- [2] Art of Problem Solving. AoPS Online, 2022. *Stretch Your Student to Their Fullest Mathematical Potential*. Disponível em: <<https://artofproblemsolving.com/online>>.

- [3] Silva, F. A. L., *Somas com fatoriais*, 2025. Notas.
- [4] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O., *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.
- [5] Titu Andreescu e Marian Tetiva, *Sums and Products*, XYZ Press, LLC, 2018.

