Revista Olímpica Alagoana de Matemática

Vol. 2

Revista Olímpica Alagoana de Matemática #2

Universidade Federal de Alagoas.
Instituto de Matemática.
BR-104, Km 97 - Cidade Universitária, Maceió - AL, 57072-970

Coordenador e Editor Responsável:
Alan Anderson da Silva Pereira

Capa:
Francisco Alan Lima da Silva
Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva

Redatores:
Cícero Calheiros Filho
Hegel Marinho Viana Filho
Jeann da Rocha Silva
Lucas Hiroshi dos Santos Nakagawa
Rodrigo Severo Araújo
Samuel Nascimento Figueredo

Supervisão dos Artigos:
Alcides de Carvalho Jr
Davi dos Santos Lima
Diogo Carlos dos Santos
Francisco Alan Lima da Silva

Revisão:
Alan Anderson da Silva Pereira
Argos de Omena Albuquerque
Jairon Henrique Noia Batista
Rebeca Alves Dantas de Lima e Silva

Conteúdo

1 A ROAM voltou!

Olá, leitor!

É com grande entusiasmo que retornamos com o Volume 2 da ROAM, a revista alagoana feita para os apaixonados por matemática!

Aqui você encontrará as soluções das provas da OAM do ano anterior e artigos que ajudarão a aprimorar as suas habilidades em matemática. Quer você seja um estudante aspirante a medalhista, ou um professor dedicado a preparar seus alunos para o sucesso ou um curioso buscando por conhecimento, esta revista é feita para você.

Além do conteúdo semelhante ao apresentado no Volume 1, nesta edição teremos duas novidades. A primeira delas é a seção de Problemas Propostos, onde serão apresentados problemas para que você leitor resolva e envie-nos a sua solução para publicação. A segunda é a seção de Curiosidades, onde serão apresentadas diversas informações científicas, culturais e históricas sobre matemática e suas competições.

A ROAM é um projeto de extensão idealizado no Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas (IM-UFAL), onde a sua realização tem sido um trabalho realizado por uma equipe de voluntários que inclui pessoas em vários estados do Brasil.

Então abrace conosco a emoção da busca pelo conhecimento matemático e desafie seus limites. Seja bem-vindo de volta à ROAM, onde o espírito olímpico e a paixão pela matemática encontram-se para criar uma experiência única e enriquecedora.

Boa leitura!

Alan Pereira
Editor-Chefe.

2 Breve escorço histórico sobre as olimpíadas

É comum que os estudantes que participam de competições de matemática tenham curiosidade sobre quando surgiram as olimpíadas da disciplina. Devido a popularidade da OBMEP há muita gente que acredita que as olimpíadas de matemática surgiram em 2005 e que a OBMEP é a primeira delas. Na verdade, competições de matemática já vem ocorrendo ao redor do mundo há muito tempo. Em 1894 (isso, mil e **oitocentos** e noventa e quatro), já ocorreu uma competição num modelo semelhante às principais competições da atualidade. Esta competição aconteceu na Hungria, um país do leste europeu com uma forte tradição em matemática. Nos anos seguintes aconteceram diversas competições na mesma região do globo que culminou numa competição internacional em 1959. Esta competição foi nomeada International Mathematical Olympiad (IMO), cuja tradução em português Olimpíada Internacional de Matemática, e é considerada a competição de matemática mais difícil e importante do mundo para estudantes.

A competição brasileira que mais se assemelha à IMO é a OBM, a Olimpíada Brasileira de Matemática. A OBM é uma olimpíada de altíssimo nível e pode ser considerada a competição de matemática mais difícil do Brasil. Realizada pela primeira vez em 1979, a OBM vem ocorrendo ano a ano. A OBM é também o meio de seleção de estudantes brasileiros para diversas competições internacionais incluindo a própria IMO.

Já no Estado de Alagoas, aconteceram várias competições de matemática desde a década de 1980. Mas foi só em 2003 que um projeto de olimpíada consolidou-se, a Competição Edmílson Pontes, que hoje recebe o título oficial de Olimpíada Alagoana de Matemática (OAM). Todas as edições da OAM foram organizadas e coordenadas pelo Instituto de Matemática da UFAL, tendo sido financiada por várias instituições e recebido enorme apoio da OBM.

Outro fato importante é o surgimento da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). A OBMEP, que surgiu em 2005, é um programa acadêmico de notável impacto social. Desde o seu surgimento, a OBMEP tem não só descoberto talentos em todas as partes do Brasil, como também dando novas perspectivas de vida para pessoas em situações sociais vulneráveis, através de bolsas de estudos para os seus premiados ainda na fase escolar, e na graduação e pós-graduação.

É claro que existem diversas outras olimpíadas importantes de matemática nos níveis escolar e universitário. Essa nova edição da ROAM estará aqui para apresentar mais dessas competições e aproximar ainda mais do clima olímpico, pois é comprovado que as olimpíadas de matemática transformam vidas.

3 Enunciados da OAM Nível 1

PARTE A

Problema 3.1. O número $x = 2000\ldots022$ tem 22 zeros. Qual é a soma dos algarismos de $x/3$?

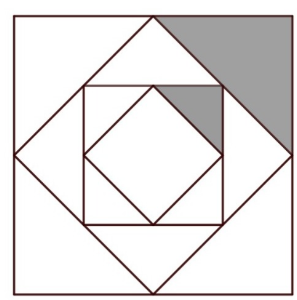
Problema 3.2. Dizemos que um número natural é **jotinha** quando o seu quadrado é o triplo de outro quadrado perfeito mais um. Por exemplo, o número 7 é jotinha, pois $7^2 = 49 = 3 \times 4^2 + 1$. Determine o maior número jotinha com dois dígitos.

Problema 3.3. Fralão quer montar um número de quatro dígitos usando cada um dos algarismos $1, 3, 5$ e 7 exatamente uma vez. De quantas formas Fralão pode construir esse número de modo que a soma dos dois primeiros dígitos seja menor que a soma dos dois últimos dígitos?

Problema 3.4. Seja R um retângulo com lados a e b, e Q um quadrado de lado c, sendo a, b e c números inteiros positivos consecutivos nessa ordem. Sejam A_Q o valor área do quadrado, A_R valor da área do retângulo e P_R o valor do perímetro do retângulo. Sabendo que $A_R + P_R = A_Q + 1$, calcule abc.

4 PARTE B

Problema 4.1. Samujerson desenhou um quadrado com lado 8 e marcou os pontos médios. Em seguida construiu um novo quadrado ligando os pontos médios do anterior e marcou os pontos médios dos lados do novo quadrado. Depois ele repetiu o processo até obter a seguinte figura ao lado. Qual é a área da região cinzenta no desenho de Samujerson?



Problema 4.2. Na sala de aula do professor Ronjai há 2022 cadeiras e 15 alunos. Acontece algo engraçado nessa sala: sempre que Ronjai remove uma cadeira da sala, chega mais um aluno para assistir a aula. Por exemplo, se Ronjai remover 5 cadeiras, ficarão na sala 2017 cadeiras e 20 alunos. Qual o número máximo de cadeiras que Ronjai pode remover de modo a todos os alunos na sala ainda terem lugar para sentar?

5 Enunciados da OAM Nível 2

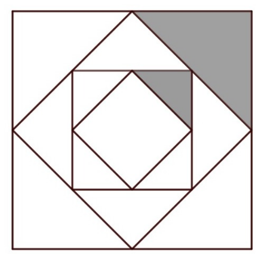
PARTE A

Problema 5.1. Sabendo que α e β são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, encontre o valor de $\alpha^5 + \beta^5$.

Problema 5.2. Encontre a quantidade de pares inteiros positivos x, y de dois dígitos tais que $2x$ tem uma quantidade diferente de dígitos que $3y$.

Problema 5.3. Dizemos que um número natural é **jotinha** quando o seu quadrado é o triplo de outro quadrado perfeito mais um. Por exemplo, o número 7 é jotinha, pois $7^2 = 49 = 3 \times 4^2 + 1$. Determine o maior número jotinha com dois dígitos.

Problema 5.4. Samujerson desenhou um quadrado com lado 8 e marcou os pontos médios. Em seguida construiu um novo quadrado ligando os pontos médios do anterior e marcou os pontos médios dos lados do novo quadrado. Depois ele repetiu o processo até obter a seguinte figura ao lado. Qual é a área da região cinzenta no desenho de Samujerson?



6 PARTE B

Problema 6.1. Dizemos que um número com $2n$ algarismos é **elaino** quando a soma dos seus primeiros n algarismos, da esquerda para a direita, é maior que ou igual a soma dos n últimos algarismos. Por exemplo, o número 9721 é elaino, pois $9 + 7 = 16$, $2 + 1 = 3$ e $16 > 3$. Encontre a quantidade de números elainos de quatro algarismos.

Problema 6.2. Seja R um retângulo com lados a e b, e Q um quadrado de lado c, sendo a, b e c números inteiros positivos consecutivos nessa ordem. Sejam A_Q o valor área do quadrado, A_R valor da área do retângulo e P_R o valor perímetro do retângulo. Sabendo que $A_R + P_R = A_Q + 1$, determine a, b e c.

7 Enunciados da OAM Nível 3

PARTE A

Problema 7.1. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a+b$?

Problema 7.2. Encontre o menor valor de x^2+y^2, sabendo que x e y são inteiros que são soluções da equação

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

onde $x > 3$.

Problema 7.3. É dado um quadrado $ABCD$ e desenha-se um círculo centrado em A com raio igual a medida do lado do quadrado. Este círculo intersecta a mediatriz de BC em dois pontos, um dos quais, O, é o mais próximo do vértice C. Qual o valor do ângulo AOC em graus?

Obs: Uma mediatriz é uma reta corta um lado do triângulo dividindo-o em dois segmentos de mesmo comprimento.

Problema 7.4. Encontre um número de 4 dígitos $abcd$ tal que se multiplicarmos 4 o número obtido tem os mesmos dígitos em ordem contrária, isto é, $4 \cdot abcd = dcba$.

8 PARTE B

Problema 8.1. Uma fábrica produz 10 tipos de balas. Um saco de balas vem com pelo menos 20 balas, e no máximo 30 balas. Quantos diferentes sacos de balas a fábrica pode produzir?

Problema 8.2. Seja G o baricentro do $\triangle ABC$, isto é, o ponto de encontro de suas medianas. Denote por $|XY|$ a distância entre os pontos X e Y e seja M um ponto qualquer do plano. Prove que

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 + 3|GM|^2.$$

9 Enunciados da OAM Nível U

PARTE A

Problema 9.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável satisfazendo

$$x^2 f(x) + x f'(x) = 2022.$$

Qual é o valor de $|f''(1)|$?

Problema 9.2. Determine os 2 últimos dígitos antes da vírgula de

$$\frac{10^{800}}{10^{100}+3}.$$

Problema 9.3. Sejam A, B, C e D soluções de

$$\mathbf{X^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qual é o valor de $tr(A^{2021} + B^{2021} + C^{2021} + D^{2021} + 2I)$?

Aqui I é a matriz identidade e $tr(Z)$ é o traço da matriz Z, i.e., a soma dos elementos que estão em sua diagonal principal.

Problema 9.4. Sejam $a < b < c$ inteiros positivos tais que

$$\begin{cases} a+b+c & = 1014 \\ ab+bc+ca & = 3035 \\ abc & = 2022. \end{cases}$$

Calcule $c - a$.

PARTE B

Problema 9.5. Em uma urna existem 1 bola branca, x bolas cinzas e y bolas pretas, com $1 < x < y$. Ayane retira uma bola da urna ao acaso, anota a cor, devolve a bola para urna e depois retira outra bola ao acaso. Sabe-se que a probabilidade de retirar duas bolas de cores iguais da urna é igual a probabilidade de retirar duas bolas de cores distintas. Calcule o valor mínimo de $y - x$.

Problema 9.6. Defina $F_1 = F_2 = 1$ e para $n > 1$ defina $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ a sequência de Fibonacci. O Teorema de Zeckendorf diz que todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de números distintos e não consecutivos da sequência de Fibonacci. Por exemplo, $10 = 8+2 = F_6 + F_3$ e escrevemos $10 = (100100)_F = 1\cdot F_6 + 0\cdot F_5 + 0\cdot F_4 + 1\cdot F_3 + 0\cdot F_2 + 0\cdot F_1$. Pelo Teorema de Zeckendorf todo $N = \sum_{i=1}^{k} a_i F_i = (a_k a_{k-1} \ldots a_1)_F$, $a_i \in \{0,1\}$. Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ por $f(N) = (a_k a_{k-1} \ldots a_1)_2 = \sum_{i=1}^{k} a_i 2^{i-1}$ se $N = (a_k a_{k-1} \ldots a_1)_F$. Sejam $M = \max(f(\mathbb{N}) \cap [1, 1000])$ e j tal que $f(j) = M$. Determine $j + M$.

10 Soluções da OAM Nível 1

PARTE A

Problema 10.1. O número $x = 2000\ldots022$ tem 22 zeros. Qual é a soma dos algarismos de $x/3$?

Solução [Resposta 143]: Temos $x = 2000...022 = 1 = 2000...001 + 21$, donde

$$\frac{x}{3} = \frac{2000...001}{3} + \frac{21}{3} = \frac{2000...001}{3} + 7.$$

Além disso, veja que $2000...001 = 3000...000 - 999...999$ (com 24 zeros e 24 noves), donde

$$\frac{2000...001}{3} = \frac{3000...000}{3} - \frac{999...999}{3} = 1000...000 - 333...333 = 666...667$$

com vinte e três dígitos 6. Logo,

$$\frac{x}{3} = 666...667 + 7 = 666...674 \text{ com vinte e dois dígitos 6.}$$

Portanto, a soma dos algarismos de $\dfrac{x}{3}$ é $6 \times 22 + 7 + 4 = 132 + 11 = 143$.

Problema 10.2. Dizemos que um número natural é **jotinha** quando o seu quadrado é o triplo de outro quadrado perfeito mais um. Por exemplo, o número 7 é jotinha, pois $7^2 = 49 = 3 \times 4^2 + 1$. Determine o maior número jotinha com dois dígitos.

Solução [Resposta 97]: Pela definição, um número n é jotinha se $n^2 = 3k^2 + 1$, para algum k inteiro positivo. Veja que se n é múltiplo de 3 então $n = 3m$ para algum m inteiro positivo, logo $n^2 = (3m)^2 = 9m^2 = 3(3m^2)$. Assim, nenhum múltiplo de 3 pode ser jotinha. Portanto 99 não é jotinha.

Vamos testar de 98 é jotinha. Devemos ver se existe k tal que $98^2 = 3k^2 + 1$. Veja que

$$98^2 = 3k^2 + 1 \iff 9604 = 3k^2 + 1 \iff 9603 = 3k^2 \iff 3201 = k^2.$$

Basta verificar se 3201 tem raiz inteira. Mas veja que $54^2 = 2916$ e $55^2 = 3025$, logo a raiz de 3201 não pode ser inteira.

Agora vamos testar de 97 é jotinha. Devemos ver se existe k tal que $97^2 = 3k^2 + 1$. Veja que

$$97^2 = 3k^2 + 1 \iff 9409 = 3k^2 + 1 \iff 9408 = 3k^2 \iff 3136 = k^2.$$

Basta verificar se 3136 tem raiz inteira. Como visto acima, $55^2 = 3025$, logo podemos testar 56^2. De fato, $56^2 = 3136$, logo

$$97^2 = 3 \times 56^2 + 1.$$

Portanto, 97 é o maior número jotinha com dois dígitos.

Problema 10.3. Fralão quer montar um número de quatro dígitos usando cada um dos algarismos $1, 3, 5$ e 7 exatamente uma vez. De quantas formas Fralão pode construir esse número de modo que a soma dos dois primeiros dígitos seja menor que a soma dos dois últimos dígitos?

Solução [Resposta 8]: Se o número for da forma $1xyz$, então, devemos ter $1 + x < y + z$. Isso é claramente verdade para $x = 3$ (pois $1 + 3 = 4 < 12 = 5 + 7$) e, do mesmo modo, é verdade para $x = 5$ (pois $1 + 5 = 6 < 10 = 3 + 7$), mas, não é verdade para $x = 7$, pois $1 + 7 = 8 = 3 + 5$. Além disso, como $1xyz$ e $1xzy$ são números diferentes mas que satisfazem a mesma propriedade (pois $y + z = z + y$), temos $2 \times 2 = 4$ números da forma $1xyz$ que Fralão pode construir. Pelo mesmo raciocínio, obtemos que números da forma $3xyz$ só poderão ser construidos se $x = 1$, números da forma $5xyz$ só poderão ser construídos se $x = 1$ e, por fim, números da forma $7xyz$ não poderão ser construídos. Assim, o total de números que Fralão poderá constuir será:

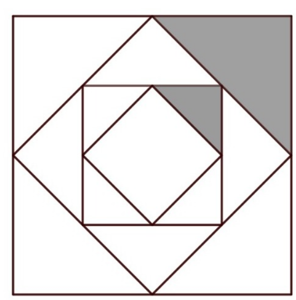
$$2 \times 2 + 1 \times 2 + 1 \times 2 + 0 \times 2 = 8.$$

Problema 10.4. Seja R um retângulo com lados a e b, e Q um quadrado de lado c, sendo a, b e c números inteiros positivos consecutivos nessa ordem. Sejam A_Q o valor área do quadrado, A_R valor da área do retângulo e P_R o valor do perímetro do retângulo. Sabendo que $A_R + P_R = A_Q + 1$, calcule abc.

Solução [Resposta 60]: Ver solução do Problema 6 do Nível 2.

PARTE B

Problema 10.5. Samujerson desenhou um quadrado com lado 8 e marcou os pontos médios. Em seguida construiu um novo quadrado ligando os pontos médios do anterior e marcou os pontos médios dos lados do novo quadrado. Depois ele repetiu o processo até obter a seguinte figura ao lado. Qual é a área da região cinzenta no desenho de Samujerson?



Solução de Isabel Santos Costa: Sabemos que a área do quadrado grande é $8 \times 8 = 64$ e o triângulo grande cinza tem área igual a $\frac{4 \times 4}{2} = 8$, pois usa altura e base são a metade de 8. Como os 4 triângulos formados após desenhar um quadrado traçando linhas a partir dos pontos médios têm tamanhos iguais, os triângulos maiores têm juntos $8.4 = 32$ de área total e o quadrado desenhado, também tem a mesma área, ou seja, 32 que é $1/2$ de 64. Portanto podemos dizer que as áreas dos quadrados desenhados a partir dos pontos médios de outro quadrado tem $1/2$ da área desse quadrado. Assim o terceiro quadrado desenhado tem $1/2$ de $32 = 16$ e o quarto quadrado tem $1/2$ de 16 ou seja, 8. Como o último quadrado tem área igual a 8, então a região dos últimos triângulos também tem área igual a 8 e cada triângulo menor tem área igual a $8/4 = 2$. Podemos concluir então que a área da região cinzenta é igual a $8 + 2 = 10$.

Problema 10.6. Na sala de aula do professor Ronjai há 2022 cadeiras e 15 alunos. Acontece algo engraçado nessa sala: sempre que Ronjai remove uma cadeira da sala, chega mais um aluno para assistir a aula. Por exemplo, se Ronjai remover 5 cadeiras, ficarão na sala 2017 cadeiras e 20 alunos. Qual o número máximo de cadeiras que Ronjai pode remover de modo a todos os alunos na sala ainda terem lugar para sentar?

Solução de Pablo Vinícius dos Santos Gomes: Somando o número de cadeiras com o número de alunos, obtemos 2037. Dividindo esse resultado por 2 o resultado é 1018,5. No entanto, não existe meia cadeira, nem meio aluno e de acordo com o enunciado todos os alunos precisam ter uma cadeira para sentar. Por isso Ronjai não pode remover 1004 cadeiras, pois teriam 1019 alunos para 1018 cadeiras. Portanto, Ronjai deve remover 1003 cadeiras, para que tenham 1019 cadeiras para 1018 alunos.

11 Soluções da OAM Nível 2

Problema 11.1. Sabendo que α e β são raízes da equação $x^2 - x - 1 = 0$, encontre o valor de $\alpha^5 + \beta^5$.

Solução [Resposta 11]: Observe que

$$x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = x + 1.$$

Daí,

$$x^4 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = (x+1) + 2x + 1 = 3x + 2$$

e, por fim,

$$x^5 = x \cdot x^4 = x(3x+2) = 3x^2 + 2x = 3(x+1) + 2x = 5x + 3.$$

Como α e β satisfazem a equação inicial, eles satisfazem também a equação $x^5 = 5x + 3$, ou seja, $\alpha^5 = 5\alpha + 3$ e $\beta^5 = 5\beta + 3$. Somando estas duas equações, encontramos que

$$\alpha^5 + \beta^5 = (5\alpha + 3) + (5\beta + 3) = 5(\alpha + \beta) + 6.$$

Agora, recorde do fato que a soma das raízes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$ é $-b/a$, logo

$$\alpha^5 + \beta^5 = 5 \cdot 1 + 6 = 11$$

Se você não conhecia o fato acima, poderia simplesmente calcular as raízes da equação:

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

e verificar que $\alpha + \beta = 1$.

Problema 11.2. Encontre a quantidade de pares inteiros positivos x, y de dois dígitos tais que $2x$ tem uma quantidade diferente de dígitos que $3y$.

Solução [Resposta 3840]: Se x e y têm 2 algarismos, então $10 \leq x, y \leq 99$, donde $20 \leq 2x \leq 198$ e $30 \leq 3y \leq 297$. Ou seja, $2x$ e $3y$ podem ter 2 ou 3 algarismos. Para que eles tenham uma quantidade diferente de algarismos, devemos ter que $2x$ tem 2 algarismos e $3y$ tem 3 algarismos ou vice-versa. Assim, vamos analisar os casos:

1. Se $2x$ tem dois algarismos, então $10 \leq 2x \leq 99 \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 49,5$, ou seja, $10 \leq x \leq 49$. Além disso, se $3y$ tem três algarismos, então $100 \leq 3y \leq 999 \Leftrightarrow 33,33... \leq y \leq 333$, ou seja, $34 \leq y \leq 99$. Entre 10 e 49, há $49-10+1 = 40$ inteiros e, entre 34 e 99, há $99 - 34 + 1 = 66$ inteiros. Logo, nesse caso, há $40 \times 66 = 2640$ pares (x, y) pedidos.

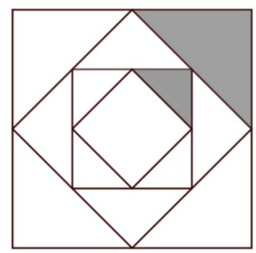
2. Se $2x$ tem três algarismos, então $100 \leq 2x \leq 999 \Leftrightarrow 50 \leq x \leq 499,5$, ou seja, $50 \leq x \leq 99$. Além disso, se $3y$ tem dois algarismos, então $10 \leq 3y \leq 99 \Leftrightarrow 3,33... \leq y \leq 33$, ou seja, $10 \leq y \leq 33$. Entre 50 e 99, há $99 - 50 + 1 = 50$ inteiros e, entre 10 e 33, há $33 - 10 + 1 = 24$ inteiros. Logo, nesse caso, há $50 \times 24 = 1200$ pares (x, y) pedidos.

Portanto, ao todo, há $2640 + 1200 = 3840$ pares de inteiros positivos (x, y) de dois dígitos tais que $2x$ tem uma quantidade diferente de dígitos que $3y$.

Problema 11.3. Dizemos que um número natural é **jotinha** quando o seu quadrado é o triplo de outro quadrado perfeito mais um. Por exemplo, o número 7 é jotinha, pois $7^2 = 49 = 3 \times 4^2 + 1$. Determine o maior número jotinha com dois dígitos.

Solução: Veja a solução do Problema 2 da Parte A do Nível 1.

Problema 11.4. Samujerson desenhou um quadrado com lado 8 e marcou os pontos médios. Em seguida construiu um novo quadrado ligando os pontos médios do anterior e marcou os pontos médios dos lados do novo quadrado. Depois ele repetiu o processo até obter a seguinte figura ao lado. Qual é a área da região cinzenta no desenho de Samujerson?



Solução [Resposta 10]: Ver solução do Problema 5 da Parte B do Nível 1.

PARTE B

Problema 11.5. Dizemos que um número com $2n$ algarismos é **elaino** quando a soma dos seus primeiros n algarismos, da esquerda para a direita, é maior que ou igual a soma dos n últimos algarismos. Por exemplo, o número 9721 é elaino, pois $9 + 7 = 16$, $2 + 1 = 3$ e $16 > 3$. Encontre a quantidade de números elainos de quatro algarismos.

Solução da banca: Contaremos quantos números de 4 algarismos $abcd$ são tais que $a + b \leq c + d$. Para tal, contaremos os números entre 0 e 9999 que obedecem essa propriedade. Depois removeremos os que iniciam em 0.

Começaremos contando quantos números $abcd$, com $a, b, c, d \in \{0, \ldots, 9\}$, são tais que $a + b = c + d$:

- Caso $a + b = c + d$:

Se $a + b = i$, como $0 \leq i \leq 9$, temos de possibilidade para (c, d) os pares $(0, i), (1, i - 1), \ldots, (i, 0)$, totalizando $i + 1$ possibilidades. Agora note que temos o mesmo número de possibilidades para (a, b) com $a + b = i$. Logo, para $a + b = i$, com $0 \leq i \leq 9$, temos um total de $1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2 = 385$ números.

Por outro lado, se $a+b=i$, com $10 \leq i \leq 18$, então $i=9+j$, com $j \in \{1,\dots,9\}$, de onde temos de possibilidade para (c,d) os pares $(j,9),(j-1,8),\dots,(9,j)$, totalizando $9-j+1$ para cada j. Este vai ser também o número de possibilidades para o par (a,b). Assim, há no total $1^2+2^2+\cdots+9^2=285$ desses tais números.

Portanto, temos $385+285=670$ desses tais números entre 0 e 9999.

- Caso $a+b<c+d$:

Pelo caso anterior, temos 9330 números $abcd$ entre 0 e 9999 tais que $a+b \neq c+d$. Por simetria, metade desses obedecem $a+b<c+d$, dando um total de 4665.

Agora retiraremos os números que iniciam em 0. Faremos isso contando os números entre 0 e 9999 tais que a soma dos dois primeiros dígitos é maior do que a dos dois últimos. O resultado vai ser 1000 subtraído desse número, uma vez que os números que sobram são os que a soma dos dois primeiros dígitos é menor ou igual a dos dois últimos.

Contaremos a quantidade de números $0bcd$ tais que $0+b>c+d$. Para $b=0$, não temos nenhum valor possível. Agora note que a quantidade de pares (c,d) tal que $c+d<b$, $1 \leq b \leq 9$, é igual a quantidade de pares tais que $0 \leq c+d \leq b-1$, onde $1 \leq b \leq 9$. Logo, há

$$\sum_{i=0}^{b-1} i+1 = 1+\cdots+b.$$

Fazendo b variar de 1 a 9, temos um total de 165 possibilidades.

Subtraindo esses casos (os que não são desejados), de 1000, temos um total de 835 números "elainos"iniciando em 0. Retirando isso dos 5335 possíveis de 4 dígitos quaisquer, temos um total de 4500 números de 4 dígitos elainos.

Problema 11.6. Seja R um retângulo com lados a e b, e Q um quadrado de lado c, sendo a,b e c números inteiros positivos consecutivos nessa ordem. Sejam A_Q o valor área do quadrado, A_R valor da área do retângulo e P_R o valor perímetro do retângulo. Sabendo que $A_R+P_R=A_Q+1$, determine a,b e c.

Solução de Roberto Pacífico Gama Reys: Como a, b e c são consecutivos nessa ordem, temos que $b=a+1$ e $c=a+2$. A área de um retângulo de lados a e b é igual a $ab=a(a+1)=a^2+a$. O perímetro de um retângulo de lados a e b é igual a a $2a+2b=2a+2(a+1)=4a+2$. A área do quadrado de lado c é igual a $c^2=(a+2)^2=a^2+4a+4$. Agora sabemos os valores de $A_r=a^2+a$, $P_r=A_q+1$, portanto

$$\begin{gathered} a^2+a+4a+2=a^2+4a+4+1 \Rightarrow \\ a^2+5a+2=a^2+4a+5 \Rightarrow \\ 5a+2=4a+5 \Rightarrow \\ 5a-4a+2=5 \Rightarrow \\ a=3. \end{gathered}$$

Como $b=a+1$, então $b=3+1=4$. Como $c=a+2$ então $c=3+2=5$. Logo $a=3, b=4$ e $c=5$.

12 Soluções da OAM Nível 3

PARTE A

Problema 12.1. Quantos números ab de dois algarismos são tais que ao multiplicar ab por qualquer número entre 1 e 9 resulta em um número cuja soma dos seus algarismos é $a+b$?

Solução [Resposta 4]: Pela hipótese $2 \times ab \equiv ab \mod 9$, o que implica $ab \equiv 0 \mod 9$. Agora temos que testar os múltiplos de 9 com dois dígitos, isto é, os números 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99. Testando, podemos ver que a propriedade vale para 18, 45, 90, 99. A propriedade não vale para os outros múltiplos de 9, por causa dos seguintes contra exemplos 27×7, 36×8, 54×7, 63×3, 72×4, 81×6.

Problema 12.2. Encontre o menor valor de $x^2 + y^2$, sabendo que x e y são inteiros que são soluções da equação

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

onde $x > 3$.

Solução [Resposta 433]: Observe que $(x, y) = (3, 2)$ é uma solução. Note que x deve ser maior que 3. Logo, a outra menor solução é (X, Y) de modo que $X + Y\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$, onde verifica-se que $17 > 3$. Portanto $x = 17$ e $y = 12$.

Problema 12.3. É dado um quadrado $ABCD$ e desenha-se um círculo centrado em A com raio igual a medida do lado do quadrado. Este círculo intersecta a mediatriz de BC em dois pontos, um dos quais, O, é o mais próximo do vértice C. Qual o valor do ângulo AOC em graus?

Obs: Uma mediatriz é uma reta corta um lado do triângulo dividindo-o em dois segmentos de mesmo comprimento.

Solução [Resposta 135]: A resposta é 135 graus. O ângulo em questão é a soma dos ângulos $AOD = \alpha$ com $DOC = \beta$. Note que AOD é um triângulo equilátero, donde $\alpha = 60^o$. Também note que o comprimento da corda AO vale o mesmo que o tamanho do lado do quadrado, donde $\beta = DCO$. Ora, ADC é um ângulo reto e ADO vale 60^o donde OAC vale 30^o. Portanto, $\beta = 75^o$.

Problema 12.4. Encontre um número de 4 dígitos $abcd$ tal que se multiplicarmos 4 o número obtido tem os mesmos dígitos em ordem contrária, isto é, $4 \cdot abcd = dcba$.

Solução [Resposta 2178]: $abcd \cdot 4 = dcba \Rightarrow a < 3$, pois $3000 \times 4 = 12000$ tem cinco dígitos. Mas $dcba$ é par, assim a deve ser par. Portanto $a = 2$. De $2bcd \times 4 = dcb2$, nós temos $d \geq 8$, e o produto $d \times 4$ termina em 2. Assim $d = 8$. O resultado $2bc8 \times 4 = 8cb2$ ou

$$8000 + 400b + 40c + 32 = 8000 + 100c + 10b + 2 \Rightarrow 390b + 30 = 60c \Rightarrow 13b + 1 = 2c.$$

O lado direito é par, e $2c \leq 18$. Assim, b dever ser ímpar e menor que 2, isto é $b = 1$, $c = 7$. Portanto $abcd = 2178$.

13 PARTE B

Problema 13.1. Uma fábrica produz 10 tipos de balas. Um saco de balas vem com pelo menos 20 balas, e no máximo 30 balas. Quantos diferentes sacos de balas a fábrica pode produzir?

Solução de Jeann da Rocha Silva: Sejam $B_1, B_2, ..., B_{10}$ as balas que essa fábrica produz, com $B_i \neq B_j$ se $i \neq j$. Assim, se num saco de bolas há N bolas, sendo x_i a quantidade de bolas de B_i presente no saco, vem que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = N \tag{1}$$

Há uma forma simples e bem "bonitinha"de saber quantas formas diferentes existem de se escrever a equação acima, isto é, quantos pares $(x_1, x_2, ..., x_{10})$ existem de modo que (1) é satisfeita, com $x_i \in \mathbb{Z}_+$. Isso é feito pelo conhecido modelo "pau-bola"que consiste em trocar a equação dado por N pauzinhos ("—") e cada simbolo " $+$ " que aparece por "o", determinando uma contagem que se baseia em uma repetição como segue abaixo:

$$\underbrace{||||...|}_{N}\underbrace{\circ\circ ...\circ}_{10-1=9}$$

Por exemplo, se $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 0, x_5 = 5, x_6 = 7, x_7 = 1, x_8 = 1, x_9 = 1, x_{10} = 0$ e $N = 20$, então o modelo dado pode ser escrito como

$$\underbrace{\quad}_{0}\circ\underbrace{|||}_{3}\circ\underbrace{||}\circ\circ\underbrace{|||||}_{5}\circ\underbrace{|||||||}_{7}\circ\underbrace{|}_{1}\circ\underbrace{|}_{1}\circ\underbrace{|}_{1}\circ\underbrace{\quad}_{0}$$

Portanto de modo geral trata-se de uma permutação $N + 9$ elementos, com repetição de N e de 9, ou seja:

$$P_{n+9}^{N,9} = \frac{(N+9)!}{N! \cdot 9!} = \binom{N+9}{N} = \binom{N+9}{9}$$

Como um saco de balas pode possuir entre 20 e 30 balas, teremos $20 \leq N \leq 30$, donde a quantidade total de diferentes sacos de bolas que a fábrica pode produzir é:

$$\binom{20+9}{9} + \binom{21+9}{9} + ... + \binom{30+9}{9} = \binom{29}{9} + \binom{30}{9} + \binom{31}{9} + ... + \binom{39}{9}$$
$$= \sum_{i=29}^{39}\binom{i}{9} = \sum_{i=9}^{39}\binom{i}{9} - \sum_{i=9}^{28}\binom{i}{9} = \binom{39+1}{9+1} - \binom{28+1}{9+1} = \binom{40}{10} - \binom{29}{10}.$$

Problema 13.2. Seja G o baricentro do $\triangle ABC$, isto é, o ponto de encontro de suas medianas. Denote por $|XY|$ a distância entre os pontos X e Y e seja M um ponto qualquer do plano. Prove que

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 + 3|GM|^2.$$

Solução da banca: Note que

$$\vec{MA} = \vec{GA} - \vec{GM} \tag{2}$$

$$\vec{MB} = \vec{GB} - \vec{GM} \tag{3}$$

$$\vec{MC} = \vec{GC} - \vec{GM} \tag{4}$$

Tomando o produto interno em (2), (3), (4), por eles próprio obtemos:
$\langle \vec{GM} - \vec{GA}, \vec{GM} - \vec{GA} \rangle = |MA|^2$ and then

$$|MA|^2 = |GA|^2 + |GM|^2 - 2\langle \vec{GA}, \vec{GM} \rangle \tag{5}$$

Analogamente,

$$|MB|^2 = |GB|^2 + |GM|^2 - 2\langle \vec{GB}, \vec{GM} \rangle \tag{6}$$

$$|MC|^2 = |GC|^2 + |GM|^2 - 2\langle \vec{GC}, \vec{GM} \rangle \tag{7}$$

Somando (5), (6), (7) chegamos a

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = |GA|^2 + |GB|^2 + |GC|^2 + 3|GM|^2 - 2\langle \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}, \vec{GM} \rangle. \tag{8}$$

Construa o paralelogramo cujas diagonais são $\vec{GA} + \vec{GB}$ e $\vec{AB}$. Como G é o baricentro (i.e. $|GC| = \dfrac{1}{2}|GP|$, P ponto médio de $\vec{AB}$) e as diagonais se cruzam em seus pontos médios temos que $\vec{GA} + \vec{GB} = -\vec{GC}$. Usando (8) temos o desejado.

14 Soluções da OAM Nível U

PARTE A

Problema 14.1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável satisfazendo

$$x^2 f(x) + x f'(x) = 2022.$$

Qual é o valor de $|f''(1)|$?

Solução: Derivando em ambos os lados da equação

$$x^2 f(x) + x f'(x) = 2022 \tag{9}$$

obtemos

$$2x f(x) + x^2 f'(x) + f'(x) + x f''(x) = 0 \tag{10}$$

Fazendo $x = 1$ nas Equações (9) e (10) temos

$$f(1) + f'(1) = 2022 \quad \text{e} \quad 2f(1) + 2f'(1) + f''(1) = 0$$

Logo

$$2 \cdot 2022 + f''(1) = 0$$

portanto $f''(1) = -4044$, assim $|f''(1)| = 4044$.

Problema 14.2. Determine os 2 últimos dígitos antes da vírgula de

$$\frac{10^{800}}{10^{100} + 3}.$$

Solução: Chamemos $x = 10^{100}$. A equação do enunciado se torna então $\dfrac{x^8}{x+3}$. Dividindo os polinômios, temos

$$\frac{x^8}{x+3} = x^7 - 3x^6 + 9x^5 - 27x^4 + 81x^3 - 243x^2 + 729x + \frac{3^8}{x+3} - 2187.$$

Como queremos saber os dois últimos dígitos antes da vírgula, olhamos $\pmod{100}$ para a parte inteira. (Note que $\dfrac{3^8}{x+3} < 1$ e portanto é a parte depois da vírgula). Ora,

$$\begin{aligned} x^7 - 3x^6 + 9x^5 - 27x^4 + 81x^3 - 243x^2 + 729x - 2187 &\equiv -2187 \pmod{100} \\ &\equiv 13 \pmod{100} \end{aligned}$$

Portanto, os dois últimos dígitos antes da vírgula são 13.

Problema 14.3. Sejam A, B, C e D soluções de

$$\mathbf{X^2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qual é o valor de $\mathrm{Tr}(A^{2021} + B^{2021} + C^{2021} + D^{2021} + 2I)$?

Aqui I é a matriz identidade e $\mathrm{Tr}(Z)$ é o traço da matriz Z, i.e., a soma dos elementos que estão em sua diagonal principal.

Solução: Primeiramente se X é solução então $X^4 = -I$. Assim, $X^{2020} = (-1)^{505} I$, Daí

$$A^{2021} + B^{2021} + C^{2021} + D^{2021} = (-1)^{505}(A + B + C + D).$$

Por outro lado, se $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ então $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ equivale a resolver o sistema:

$$\begin{cases} a^2 + bc & = 0 \\ d^2 + bc & = 0 \\ ab + bd & = 1 \\ ac + cd & = -1 \end{cases}$$

Fazendo as contas , encontramos as soluções :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

que satisfaz $A + B + C + D = 0$, portanto

$$\mathrm{Tr}(A^{2021} + B^{2021} + C^{2021} + D^{2021} + 2I) = \mathrm{Tr}(2I) = 4.$$

Problema 14.4. Sejam $a < b < c$ inteiros positivos tais que

$$\begin{cases} a + b + c & = 1014 \\ ab + bc + ca & = 3035 \\ abc & = 2022. \end{cases}$$

Calcule $c - a$.

Solução: Note que pelas relações de Girard, a, b, c são raizes da equação

$$x^3 - 1014x^2 + 3035x - 2022 = 0$$

Testando $x = 1$ vemos que é raíz, fatoramos então da seguinte forma (só dividir os polinômios)

$$x^3 - 1014x^2 + 3035x - 2022 = (x - 1)(x^2 - 1013x + 2022)$$

e facilmente vemos que as outras raizes são 2 e 1011. Sendo assim $c - a = 1011 - 1 = 1010$

PARTE B

Problema 14.5. Em uma urna existem 1 bola branca, x bolas cinzas e y bolas pretas, com $1 < x < y$. Ayane retira uma bola da urna ao acaso, anota a cor, devolve a bola para urna e depois retira outra bola ao acaso. Sabe-se que a probabilidade de retirar duas bolas de cores iguais da urna é igual a probabilidade de retirar duas bolas de cores distintas. Calcule o valor mínimo de $y - x$.

Solução de Francisco Alan Lima da Silva: Defina as v.a.s

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a } i\text{-ésima bola é branca} \\ 2, & \text{se a } i\text{-ésima bola é cinza} \\ 3, & \text{se a } i\text{-ésima bola é preta,} \end{cases}$$

$i = 1, 2$. Sabemos, pois há reposição, que

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{1 + x + y}$$
$$\mathbb{P}(X_i = 2) = \frac{x}{1 + x + y}$$
$$\mathbb{P}(X_i = 3) = \frac{y}{1 + x + y},$$

$i = 1, 2$. Para que as duas bolas sejam iguais, devemos ter $X_1 = X_2$ e pela independência, temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = i, \text{ com } i = 1, 2, 3) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_1 = i) \cdot \mathbb{P}(X_2 = i) \\ &= \left(\frac{1}{1 + x + y}\right)^2 + \left(\frac{x}{1 + x + y}\right)^2 + \left(\frac{y}{1 + x + y}\right)^2 \\ &= \frac{1 + x^2 + y^2}{(1 + x + y)^2} \end{aligned}$$

Por outro lado, ter duas bolas diferentes sorteadas é o complementar de ter duas bolas iguais, donde

$$\mathbb{P}(X_1 \neq X_2) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = X_2) = \frac{2x + 2y + 2xy}{(1 + x + y)^2}.$$

Assim estamos interessados em minimizar $y - x$, sabendo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = X_2) &= \mathbb{P}(X_1 \neq X_2) \\ \Rightarrow 1 + x^2 + y^2 &= 2(x + y + xy) \\ \Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 &= 2x + 2y - 1 \\ \Rightarrow (y - x)^2 &= 2x + 2y - 1. \end{aligned}$$

Como o lado direito é ímpar, devemos ter $y-x$ ímpar e $2x+2y-1$ um quadrado perfeito. Assim, $y-x=5$, é o menor número possível, uma vez que se $y-x=1$, então

$$\begin{aligned} 2x+2(x+1)-1&=1\\ \Rightarrow 2x+2x+2-1-1&=0\\ \Rightarrow x=0 \ e \ y&=1, \end{aligned}$$

que desobedece a condição $1<x<y$; e também, fazendo $y-x=3$, temos que

$$\begin{aligned} 2x+2(x+3)-1&=3^2\\ \Rightarrow 4x+6-1&=10\\ \Rightarrow x=1 \ e \ y&=4 \end{aligned}$$

que novamente desobedece $1<x<y$; por último, fazendo $y-x=5$, temos que

$$\begin{aligned} 2x+2(x+3)-1&=5^2\\ \Rightarrow 4x+10&=26\\ \Rightarrow x=4 \ e \ y&=9, \end{aligned}$$

que agora sim obedece a condição do texto. Logo, o valor mínimo para $y-x$ é 5.

Problema 14.6. Defina $F_1=F_2=1$ e para $n>1$ defina $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ a sequência de Fibonacci. O Teorema de Zeckendorf diz que todo inteiro positivo pode ser escrito como soma de números distintos e não consecutivos da sequência de Fibonacci. Por exemplo, $10=8+2=F_6+F_3$ e escrevemos $10=(100100)_F=1\cdot F_6+0\cdot F_5+0\cdot F_4+1\cdot F_3+0\cdot F_2+0\cdot F_1$. Pelo Teorema de Zeckendorf todo $N=\sum_{i=1}^{k}a_iF_i=(a_ka_{k-1}...a_1)_F$, $a_i\in\{0,1\}$. Defina a função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ por $f(N)=(a_ka_{k-1}...a_1)_2=\sum_{i=1}^{k}a_i2^{i-1}$ se $N=(a_ka_{k-1}...a_1)_F$. Sejam $M=\max(f(\mathbb{N})\cap[1,1000])$ e j tal que $f(j)=M$. Determine $j+M$.

Solução da banca: Observe $M=f(j)$ é maior se M tiver potências de 2 altas em sua decomposição binária. Veja que $2^{10}>1000$, então a maior potência de 2 que pode compor M é 2^9. Seguindo essa análise podemos notar que o maior valor M é

$$2^9+2^7+2^5+2^3+2^1=682.$$

Escrevendo na base 2 isso é $(1010101010)_2$, portanto escrevendo isso na base F temos $(1010101010)_F=F_9+F_7+F_5+F_3+F_1=55=j$. Portanto $j+M=737$.

15 Áreas de Retângulos e Triângulos (por Rodrigo Severo)

Neste artigo, iremos direcionar nosso estudo para as áreas de retângulos e triângulos, explorando como podemos utilizar essas figuras elementares para calcular as áreas de outras figuras mais complicadas. Além disso, será abordado uma propriedade interessante para triângulos que é muito útil para diversos problemas olímpicos. Enfim, vamos ao que interessa.

15.1 Áreas: uma noção intuitiva

Intuitivamente, a área é a porção de espaço que uma figura ocupa no plano.

A *unidade de medida de área* na maioria dos casos está ligada a uma unidade de comprimento já existente (*uc*). Mais geralmente, seja *uc* a unidade de comprimento de uma figura, sua área pode ter como unidade de medida uc^2.

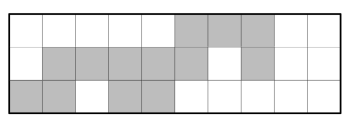
Nota. Caso haja omissão das unidades de medidas, considere que estão numa mesma unidade, sendo-a uma unidade genérica.

A partir do axioma abaixo, que diz sobre a área de quadrados, podemos ampliar nossas figuras de estudo.

Axioma 15.1. A área de um quadrado de lado l vale l^2.

Exemplo 15.1. A área de um quadrado de lado 2cm vale 4cm².

Exemplo 15.2. O quadriculado a seguir é formado por quadrados de lado 1cm. Qual é a área da região cinza?



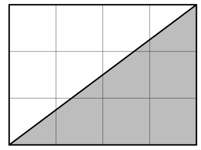
Solução. A área de cada quadrado menor vale $1 \cdot 1 = 1$cm². Como temos 13 quadrados cinzas, então a área da região cinza vale $13 \cdot 1 = 13$cm².

Há fatos bem básicos, porém muito importantes para resolver problemas olímpicos. Eles são usados desde problemas simples até os mais complicados.

Fato 1. Se uma figura plana é dividida em uma ou mais partes, a soma das áreas das partes deve ser igual a área da figura original.

Fato 2. Se duas figuras são idênticas (congruentes), então elas possuem mesma área.

Exemplo 15.3. Na grade quadricular a seguir, cada quadrado possui 1cm² de área. Qual é a área da região cinza?



Solução. Em vez de contar os quadrados, vamos fazer uso da multiplicação, como temos 4 quadrados no comprimento e outros 3 na largura, teremos um total de $4 \cdot 3 = 12$ quadrados de 1cm^2 de área. Logo, a área total do quadriculado vale $12 \cdot 1 = 12\text{cm}^2$. Note que poderíamos fazer de forma mais direta ($4 \cdot 3 = 12\text{cm}^2$), mas esse detalhe fica para a próxima seção.

Além disso, é fácil notar que a diagonal do retângulo divide ele em dois triângulos congruentes. (caso já tenha conhecimento de congruência de triângulos: prove!). Portanto, esses dois triângulos possuem a mesma área, assim, a área da região cinza vale $12 \div 2 = 6\text{cm}^2$.

15.2 Áreas de figuras elementares

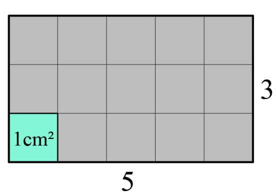
Nem toda área é feita de contar quadradinhos, nesta seção será mostrado áreas das figuras planas mais utilizadas para resolução de problemas. Concentraremos nosso estudo para triângulos e retângulos. Para figuras mais complicadas, tenha sempre em mente o fato 1, podemos dividir qualquer figura em várias figuras mais elementares.

15.2.1 Retângulo

Começaremos esta seção com um problema familiar.

Exemplo 15.4. Qual é a área de um retângulo que possui comprimento de 5cm e largura de 3cm?

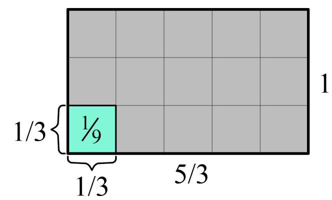
Solução. Para descobrir a área, podemos começar formando um quadriculado com quadrados menores de lado 1cm, dessa forma, temos um total de $5 \cdot 3 = 15$ quadrados, logo, a área do retângulo vale $15 \cdot 1 = 15\text{cm}^2$. De forma mais direta, teríamos $5 \cdot 3 = 15\text{cm}^2$.



O argumento utilizado acima pode ser facilmente estendido para qualquer retângulo cujos lados possuam, por medidas, quantidades inteiras. É possível usar um argumento análogo para retângulos que possuam lados com medidas racionais, usando como unidade de área um quadrado menor que seja possível preencher todo o retângulo.

Exemplo 15.5. Qual é a área de um retângulo de comprimento $5/3$ e largura 1?

Solução. Divida o retângulo em quadrados de lado $1/3$, assim, cada um dos quadrados tem área $(1/3)^2 = 1/9$. Como temos, no comprimento, $1 \div (1/3) = 3$ quadrados. Então, temos um total de $5 \cdot 3 = 15$ quadrados de área $1/9$. Portanto, a área do retângulo vale: $15 \cdot 1/9 = 5/3$, ou $5/3$ *ua* (unidades de área), se preferir.



Assim, seguindo esse raciocínio, fica fácil acreditar no seguinte teorema, cuja prova será omitida para todos os reais.

Teorema 15.1. *A área de um retângulo de comprimento m e largura n vale $m \cdot n$.*

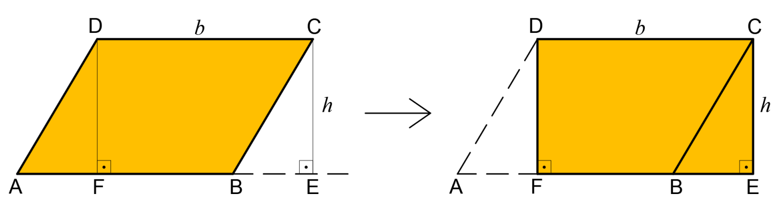
Exemplo 15.6. Qual é a área de um retângulo de comprimento $\sqrt{2}$ e largura 4?

Solução. Basta multiplicar. A área do retângulo vale $\sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2}$.

15.2.2 Paralelogramo

Definição 1. O Paralelogramo é um quadrilátero que possui os lados opostos paralelos.

Considere um paralelogramo $ABCD$. Sejam E e F as projeções ortogonais dos pontos C e D, respectivamente, sobre a reta que contém o lado AB, conforme ilustrado na figura a seguir.



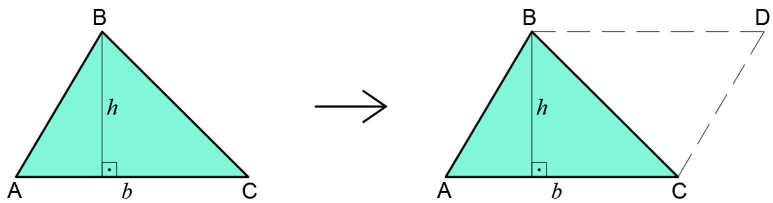
Consideraremos $\overline{CE} = \overline{DF} = h$, a qual h é conhecida como *altura* do paralelogramo. Além disso, teremos $\overline{AB} = \overline{DC} = b$, onde b é considerado como *base* do paralelogramo.

Veja que os triângulos ADF e BCE são congruentes. Assim, podemos transportar o triângulo ADF para o local do triângulo BCE, de forma que não haja sobreposição. Desse modo, a área do paralelogramo $ABCD$ é exatamente a área do retângulo $DEFC$, que tem comprimento b e altura h. Daí, segue o teorema.

Teorema 15.2. *A área de um paralelogramo de base b e altura h vale $b \cdot h$.*

15.2.3 Triângulo

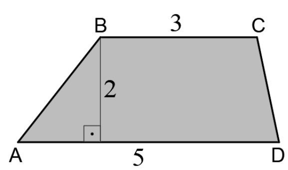
Considere um triângulo ABC, trace uma reta paralela ao segmento AB que passe por C, de maneira análoga, trace uma reta paralela ao segmento AC que passe por B. Desse modo, considere D o ponto de intersecção dessas retas, temos que $ABDC$ é um paralelogramo, já que os lados opostos são paralelos.



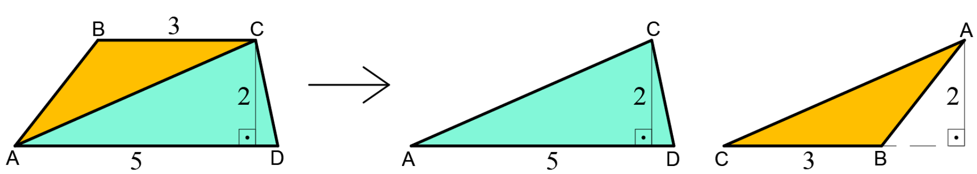
Desse modo, vemos que os triângulos ABC e DCB são congruentes. Portanto, a área do triângulo ABC original vale exatamente a metade da área do paralelogramo $ABDC$. Sendo b a base do paralelogramo que coincide com a base do triângulo, e h a altura do triângulo que também coincidirá com a altura do paralelogramo. Temos que $A_{\triangle ABC} = \dfrac{b \cdot h}{2}$.

Teorema 15.3. *A área de um triângulo de base b e altura h vale* $\dfrac{b \cdot h}{2}$.

Exemplo 15.7. Determine a área do trapézio[1] a seguir



Solução. Como o trapézio é uma figura que possui lados opostos paralelos, tracemos a diagonal AC deste trapézio, assim dividimos o trapézio em dois triângulos ABC e ACD, que possuem mesma altura e diferentes bases, como ilustra a figura abaixo. Assim a área do trapézio vale:



$$A_{\square ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ACD} = \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{5 \cdot 2}{2} = 3 + 5 = 8.$$

Com essa ideia é possível demonstrar uma fórmula mais geral para a área do trapézio, ficando como exercício.

[1]Diz-se por trapézio um quadrilátero que possui dois lados opostos paralelos.

15.3 Propriedades úteis

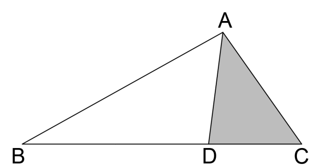
Teorema 15.4. *Se dois triângulos possuem mesma altura, então a razão entre suas bases é igual a razão entre suas áreas.*

Prova. Seja as bases b_1 e b_2 dos triângulos ABD e DBC, respectivamente. Considere que a razão entre as bases seja k, ou seja, $b_1 = k \cdot b_2$. A partir daí, calculemos a área do triângulo ABC, onde:

$$A_{\triangle ABC} = \frac{b_1 \cdot h}{2} = \frac{k \cdot b_2 \cdot h}{2} = k \cdot \frac{b_2 \cdot h}{2} = k \cdot A_{\triangle DBC}$$

Logo, a razão entre as bases de ABD e DBC é igual a razão de suas respectivas áreas. Assim, $b_1 = k \cdot b_2 \Leftrightarrow A_{\triangle ABC} = k \cdot A_{\triangle DBC}$.

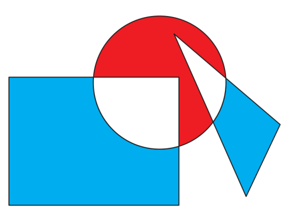
Exemplo 15.8. O ponto D pertence ao lado BC do triângulo ABC ao lado de modo que $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{DC}$. Se a área do triângulo ADC é igual a 5cm², qual é a área do triângulo ABC?



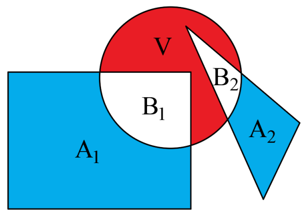
Solução. Note que os dois triângulos possuem a mesma altura, como a razão entre as bases é 2, então a razão entre as áreas também será 2, ou seja, $A_{\triangle ABD} = 2 \cdot A_{\triangle ADC} = 2 \cdot 5 = 10$cm². Mas perceba que queremos a área de ABC, que é exatamente a soma das áreas dos triângulos ABD e ADC. Portanto, $A_{\triangle ABC} = 10 + 5 = 15$cm².

15.4 Problemas Resolvidos

Problema 15.1. Na figura temos um retângulo com área igual a 120cm^2, um círculo com área igual a 81cm^2 e um triângulo com área igual a 29cm^2. Qual a diferença entre a soma das áreas das regiões azuis e a área da região vermelha?



Solução. Denotaremos cada área de uma das cores como na figura abaixo. Veja que $A_1 + A_2 - V$ é o valor que queremos encontrar. Além disso, sabemos que:



(1) $V + B_1 + B_2 = 81\text{cm}^2$

(2) $A_1 + B_1 = 120\text{cm}^2$

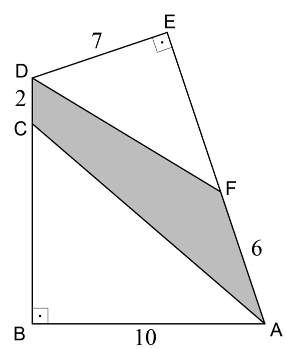
(3) $A_2 + B_2 = 29\text{cm}^2$

Somando as equações (2) e (3), obtemos que $A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 149\text{cm}^2$ (*). Assim, Podemos subtrair a equação (1) da equação (*), onde:

$$(A_1 + A_2 + B_1 + B_2) - (V + B_1 + B_2) = 149 - 81 \Leftrightarrow A_1 + A_2 - V = 68\text{cm}^2.$$

Portanto, a diferença entre a soma das áreas das regiões azuis e a área da região vermelha vale 68cm^2.

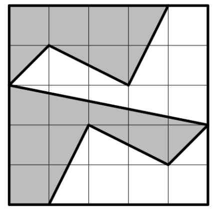
Problema 15.2. Na figura, os pontos C e F pertencem aos lados BD e AE do quadrilátero $ABDE$, respectivamente. Os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{E}$ são retos e os segmentos AB, CD, DE e FA têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero $ACDF$?



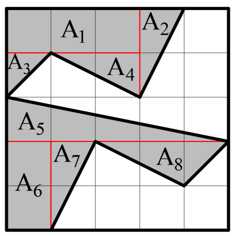
Solução. Traçando a diagonal AD, divida o quadrilátero $ACDF$ em dois triângulos, AFD e DCA. Note que a altura do triângulo AFD relativa a base AF é exatamente o segmento $\overline{DE} = 7$. Analogamente, a altura do triângulo DCA relativa à base DC vale $\overline{BA} = 10$. Desse modo, a área do quadrilátero $ACDF$ vale:

$$A_{\square ACDF} = A_{\triangle AFC} + A_{\triangle DCF} = \frac{6 \cdot 7}{2} + \frac{2 \cdot 10}{2} = \frac{42 + 20}{2} = \frac{62}{2} = 31.$$

Problema 15.3. Na figura, o lado de cada quadradinho mede 1cm. Qual é a área da região cinza?



Solução Fraca. Divida a figura em 8 regiões, como na figura abaixo, sendo elas triângulos e retângulos. Assim, a área total A será $A = A_1 + A_2 + ... + A_8$. Como o lado do quadrado do quadriculado possui 1cm, substituindo suas respectivas bases e alturas temos:

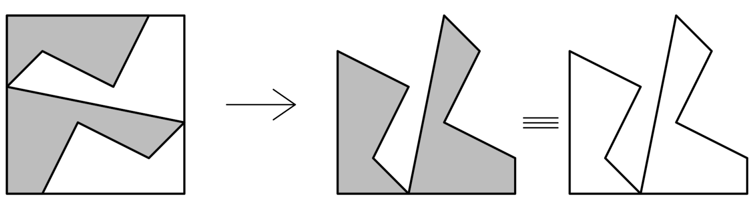


$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{1 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{5 \cdot 1}{2} + 2 \cdot 1 + \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{3 \cdot 1}{2} \\ &= 3 + 1 + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{5}{2} + 2 + 1 + \frac{3}{2} \\ &= 8 + \frac{1}{2} + \frac{8}{2} = 12 + \frac{1}{2} = 12,5\text{cm}^2. \end{aligned}$$

Portanto, a área da região cinza vale 12,5cm².

Como vimos, essa solução requer um pouco de trabalho ao fazer as contas e a determinar as regiões que devemos dividir, mas existe uma solução mais simples para esse problema que nem sempre é notada num primeiro momento.

Solução Forte. Observe atentamente a figura cinza contida no quadriculado, além dela, analise a figura branca. Veja que, pela simetria da figura, todos os segmentos correspondentes são congruentes, além disso, é fácil ver que os ângulos internos das figuras também serão congruentes, fazendo com que as duas figuras sejam idênticas.

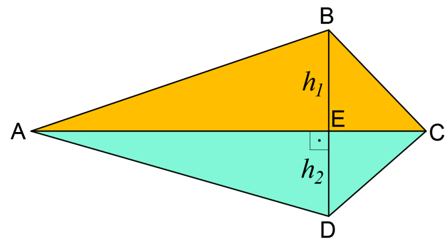


Desse modo, como a área do quadriculado vale $5 \cdot 5 = 25\text{cm}^2$, a área da figura cinza é exatamente a metade desta área. Portanto, a área da região cinza vale $25 \div 2 = 12,5\text{cm}^2$.

Problema 15.4. Prove que a área de um quadrilátero convexo $ABCD$ que possui as diagonais AC e BD perpendiculares vale $\dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}$.

Solução. Note que podemos dividir essa figura em dois triângulos, ABC e ADC, como na figura abaixo. Sendo o ponto de intersecção das retas o ponto E, sabemos que $\overline{EB} = h_1$

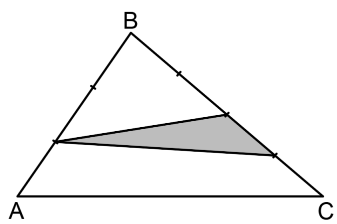
é altura do triângulo ABC, relativa a base AC. Analogamente, $\overline{ED} = h_2$ é altura do triângulo ABC, relativa a base AC.



Portanto, a área do quadrilátero $ABCD$ é a soma das áreas dos triângulos ABC e ADC. Ou seja:

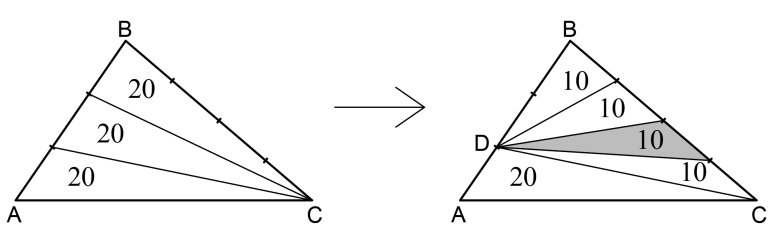
$$A_{\square ABCD} = A_{\triangle ABC} + A_{\triangle ADC} = \frac{\overline{AC} \cdot h_1}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot h_2}{2} = \frac{\overline{AC}(h_1 + h_2)}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{2}.$$

Problema 15.5. A área do Triângulo ABC abaixo vale 60. O lado BA está dividido em 3 segmentos congruentes, já o lado BC está dividido em 4 segmentos congruentes. Qual a área da região sombreada?



Solução. Ligue os pontos do lado AB ao ponto C, dessa forma, dividimos o triângulo ABC em 3 triângulos que possuem a mesma base e mesma altura, portanto, possuem a mesma área. Como $A_{\triangle ABC} = 60$, então a área de cada um desses triângulos menores vale $60 \div 3 = 20$.

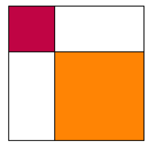
De maneira análoga, ligue os pontos do lado BC ao ponto D, assim, dividimos o triângulo CDB em 4 triângulos que possuem a mesma base e mesma altura, portanto, possuem a mesma área. Como $A_{\triangle CDB} = 40$, então a área de cada um desses triângulos menores vale $40 \div 4 = 10$. Abaixo segue a ilustração do que foi feito.



Portanto, a área da região sombreada vale 10.

15.5 Problemas propostos

Exercício 15.1. (OBM) Com dois cortes perpendiculares, Pablo dividiu uma folha de madeira quadrada em dois quadrados, um de área 400cm² e outro de área de 900cm² e mais dois retângulos iguais, conforme desenho. Qual é a área da folha de madeira?



Exercício 15.2. Dado um *tangram* que forma um quadrado de área 100cm², mostrado na figura 1. Foi construído uma figura em torno de um retângulo (Figura 2), qual é a área desse retângulo?

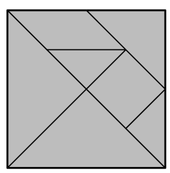


Figura 1

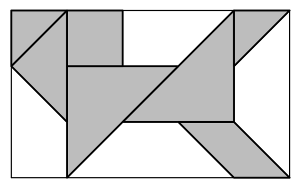
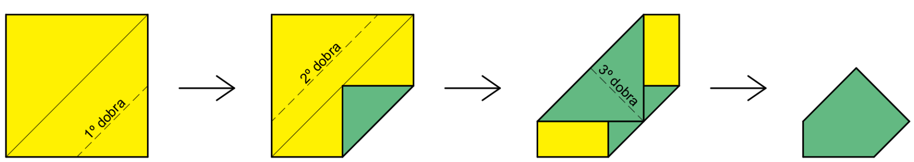


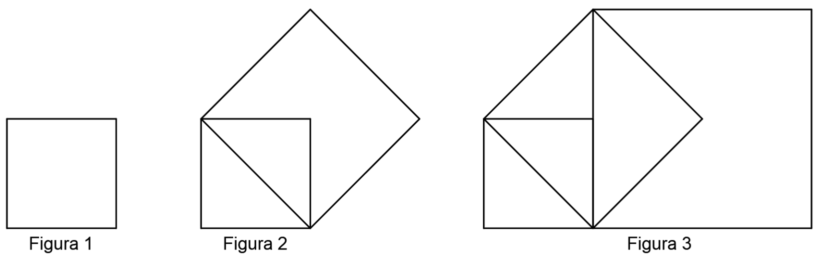
Figura 2

Exercício 15.3. (OBM) Um quadrado de área 1 foi dividido em 4 retângulos congruentes, conforme indicado no desenho à esquerda. Em seguida, os quatro retângulos foram reagrupados de maneira a formar um quadrado, com um buraco quadrado no centro, conforme indica o desenho à direita. Qual a área do buraco?

Exercício 15.4. (OBMEP) Uma folha quadrada de 8cm de lado foi dobrada três vezes como na figura. A primeira e segunda dobras ficaram paralelas a uma diagonal da folha, e a terceira dobra ficou perpendicular a essa diagonal. Qual é a área da figura final?



Exercício 15.5. (OBM) Janaína desenha uma sequência de figuras conforme a ilustração a seguir. Cada figura tem um quadrado a mais do que a figura anterior e esse quadrado que foi acrescentado tem lado igual à diagonal do maior quadrado da figura anterior. Além disso, todos os quadrados de cada figura têm um vértice comum. O quadrado da figura 1 tem área de 2cm².

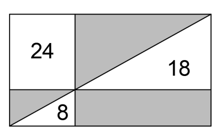


(a) Qual é a área do quadrado maior da figura 2?

(b) Qual é a área total da figura 2?

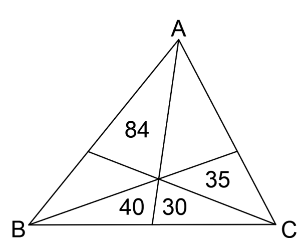
(c) Qual é a área total da figura 3?

Exercício 15.6. (OBM) O retângulo da figura foi repartido em várias regiões por meio de três segmentos concorrentes, sendo um deles uma de suas diagonais e os outros dois paralelos aos lados do mesmo. Os números indicam as áreas em metro quadrado das regiões brancas em que se encontram.

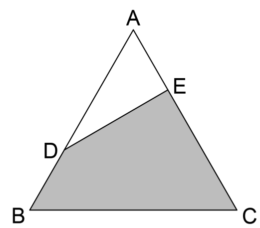


Qual é a área do retângulo original, em m²?

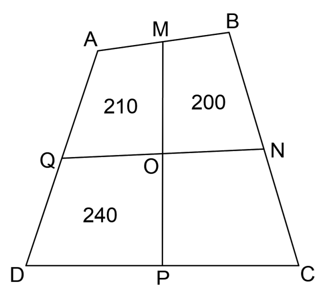
Exercício 15.7. Como mostra o desenho, o triângulo ABC está dividido em seis triângulos. O número indicado no interior de quatro deles expressa a sua área. Determine a área do triângulo ABC.



Exercício 15.8. (OBM) No triângulo equilátero ABC da figura, o segmento DA é o dobro de DB e o segmento EC é o dobro de EA. Sabendo que a área do triângulo ABC é igual a 162cm², qual é a área, em cm², do quadrilátero sombreado?



Exercício 15.9. Na figura a seguir, M, N, P, Q são os pontos médios dos lados do quadrilátero $ABCD$. O número indicado no interior de cada quadrilátero representa sua área. Calcule a área do quadrilátero $ONCP$.



Exercício 15.10. Dá-se um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$ com $a > b$ e de altura h. Demonstre que a diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases AB e CD respectivamente e por vértice oposto a interseção das diagonais vale $\dfrac{(a-b)h}{2}$.

Referências

[1] Portal da OBMEP, https://portaldaobmep.impa.br/

[2] Eduardo Wagner. Teorema de Pitágoras e áreas. Rio de Janeiro, IMPA, 2015.

[3] EUREKA!, vol. 41, Outubro 2019.

16 Métodos de Contagem (por Jeann Rocha)

16.1 Contando em Intervalos

Vamos, primeiramente, definir duas terminologias importantes, que são a "inclusividade" e a "exclusividade".

Quando falarmos sobre algum número, utilizando o termo "inclusive", estaremos contando esse número. Da mesma forma, quando falarmos "exclusive", não contaremos o número. Para fins didáticos, basta observar que "inclusive" assemelha-se a "incluir" e que "exclusive" assemelha-se a "excluir".

Teorema 16.1. *Sejam a e b inteiros, com $a \leq b$. Então, entre a (inclusive) e b (inclusive), existem $b - a + 1$ inteiros.*

Demonstração. Seja a o primeiro número, $a + 1$ o segundo número, $a + 2$ o terceiro, e assim sucessivamente (veja que o termo $a + i$ será o $(i + 1)$-ésimo termo dessa sequência). Como $a \leq b$, seja n tal que $b = a + n$. Então, b será o $(n + 1)$-ésimo número e $b = a + n \Leftrightarrow n = b - a$, ou seja, há $n + 1 = (b - a) + 1$ números inteiros entre a (inclusive) e b (inclusive). $\square$

Fica de exercício para o leitor calcular a quantidade de inteiros entre a e b, tomando os demais casos de "inclusividade" e "exclusividade" para a e b, ou seja, entre a (inclusive) e b (exclusive), a (exclusive) e b (inclusive) e a (exclusive) e b (exclusive).

Embora haja importância em destacar a "inclusividade" e a "exclusividade", é muito comum observar que esses termos muitas vezes não aparecem, isto é, é comum aparecer somente "entre a e b". Nesses casos, se o contexto não deixar explícito de qual caso se trata, por convenção, será "a (inclusive) e b (inclusive)".

16.2 O Fatorial

Definição 2. Seja $n \in \mathbb{Z}_+$. Então, *o fatorial de n* ou *n fatorial* é definido pelo produto de todos os números inteiros de 1 a n e é denotado por $n!$. Ou seja, $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$. Por convenção, temos $0! = 1$.

Exemplo 16.1. Temos $1! = 1, 2! = 2 \times 1 = 2$ e $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

A fim de fixar a notação, tente resolver os seguintes exercícios.

1. Calcule $4!, 5!, 6!, 7!$ e $8!$.
2. Calcule $\dfrac{15!}{12!}$ e $\dfrac{10!}{3!7!}$.
3. Dado $k \in \mathbb{Z}_+$, escreva $(n + k)!$ em função de $n!$ e use isso para resolver a equação $(n + 2)! = 42n!$.

4. Mostre que $2 \times 4 \times 6 \times 8 \times ... \times 2n = 2^n \times n!$.

5. Encontre todos os naturais n tais que $1! + 2! + ... + n! = n^2$.

16.3 Princípio Multiplicativo

O primeiro, e talvez o mais importante, princípio que conduz aos Métodos de Contagem, é o chamado **Princípio Fundamental da Contagem** (ou **Princípio Multiplicativo**): Se uma decisão pode ser tomada de a maneiras e, uma vez tomada essa decisão, uma outra decisão puder ser tomada de b maneiras, então o número de maneiras de se tomarem ambas as decisões, na ordem estabelecida, é $a \cdot b$.

Para entender o Princípio acima, considere o seguinte exemplo.

Exemplo 16.2. Em uma sala, há 3 homens e 4 mulheres. De quantas formas é possível escolher um casal homem-mulher?

Demonstração. Sendo H_1, H_2, H_3 os homens e M_1, M_2, M_3, M_4 as mulheres, temos que para formar um casal homem-mulher, devemos tomar 1 dentre 3 decisões de escolher um homem e tomar 1 dentre 4 decisões de escolher uma mulher, donde o número de maneiras de se tomar 1 homem e 1 mulher das 7 pessoas presentes, é de $3 \times 4 = 12$ formas. □

Na prática, o Princípio Multiplicativo permite obter o número de elementos do conjunto de pares ordenados (a, b), onde a é o número de formas de se tomar a primeira decisão e b é o número de formas de se tomar a segunda. No caso do exemplo acima, o Princípio Multiplicativo fornece o número de elementos do conjunto

$$\{(H_1, M_1), (H_1, M_2), (H_1, M_3), (H_1, M_4), (H_2, M_1), (H_2, M_2),$$
$$(H_2, M_3), (H_2, M_4), (H_3, M_1), (H_3, M_2), (H_3, M_3), (H_3, M_4)\}.$$

Exemplo 16.3. Uma bandeira é formada por cinco listras consecutivas que devem ser coloridas usando-se apenas as cores azul, verde e vermelho, não devendo listras adjacentes ter a mesma cor. De quantos modos pode ser colorida a bandeira?

Demonstração. A primeira listra pode ser colorida de 3 modos, isto é, há 3 possíveis decisões de cores para a primeira listra. A segunda de 2 modos (não podemos usar a cor utilizada na primeira listra), a terceira de 2 modos (não podemos usar a cor utilizada na segunda listra), a quarta de 2 modos (não podemos usar a cor utilizada na terceira listra) e a quinta de 2 modos (não podemos usar a cor utilizada na quarta listra). Logo, a bandeira pode ser colorida de $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ formas distintas. □

Exemplo 16.4 (Quantidade de Divisores)**.** Seja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ um número natural fatorado em primos distintos. Mostre que o número de divisores positivos de n é

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1).$$

Demonstração. Um divisor positivo de n é da forma $p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$, onde $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$. Como existem $\alpha_i + 1$ números entre 0 e α_i, temos que o número de formas de se estabelecer um divisor de n consiste em tomar uma decisão das $\alpha_1 + 1$ possíveis para o expoente β_1, depois tomar uma decisão das $\alpha_2 + 1$ possíveis para o expoente β_2, e assim sucessivamente, até tomar uma decisão das $\alpha_n + 1$ possíveis para o expoente β_n. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue o resultado esperado. $\square$

16.4 Princípio Aditivo

Um outro princípio, efetivamente útil para simplificar a contagem, é o chamado **Princípio Aditivo**: Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com a e b elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $a + b$ elementos.

O Princípio Aditivo é comumente utilizado para dividir o problema em casos nos quais a contagem se torna pequena e fácil ou é facilitada pelo Princípio Multiplicativo.

Um exemplo em que isso se faz comum é o seguinte.

Exemplo 16.5. Esmeralda escreve a lista de todos os números naturais menores que 10000 que tem exatamente dois dígitos 1 consecutivos. (Por exemplo, 113, 5112, 1181 estão na lista de Esmeralda, porém 1312, 2111 não estão). Achar quantos números têm a lista de Esmeralda.

Demonstração. Para números com 1 algarismo, isso não é possível. Para números de 2 algarismos, só há 1 possibilidade (a saber: 11). Para números de 3 algarismos, há dois casos possíveis: números da forma $11A$ ou $B11$. No primeiro caso, temos 9 possibilidades de escolha para A (de 0 a 9, exceto o 1) e, no segundo caso, temos 8 possibilidades de escolha para B (de 2 a 9). Por fim, para números de 4 algarismos, há 3 casos possíveis: números da forma $11AB$, $C11D$ ou $EF11$. No primeiro caso, temos 9 possibilidades de escolha para A (de 0 a 9, exceto o 1) e 10 para B (de 0 a 9). No segundo caso, temos 8 possibilidades de escolha para C (de 2 a 9) e 9 para D (de 0 a 9, exceto o 1). E, no terceiro caso, temos 9 possibilidades de escolha para E (de 1 a 9) e 9 para F (de 0 a 9, exceto o 1). Assim, na lista de Esmeralda há, ao todo $1 + 9 + 8 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 8 + 9 \cdot 9 = 261$ números. $\square$

Observe que, nesse caso, estamos considerando 4 conjuntos disjuntos (os conjuntos formados por $1, 2, 3$ e 4 algarismos), efetuando a contagem em cada um separadamente e, somando os resultados, ao final.

Um outro exemplo, mais simples, da aplicação desse princípio é o seguinte.

Exemplo 16.6. O alfabeto da Tanzunlândia é formado por apenas três letras: A, B e C. Uma palavra na Tanzunlândia é uma sequência com no máximo 4 letras. Quantas palavras existem neste país?

Demonstração. Existem 3 palavras com uma letra, 3^2 com duas letras, 3^3 com três letras, e 3^4 com quatro letras. Logo, o total de palavras é $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$ letras. $\square$

Para o leitor atento, no exemplo acima, o nome do lugar se escreve com mais do que quatro letras e não somente com "A", "B"e "C", mas relevamos esse fato, hehe! :D

16.5 Ideias Importantes

Vamos agora analisar algumas estratégias para resolver problemas envolvendo contagem a partir do uso somente desses dois princípios básicos estudados.

1. BOAS DECISÕES!

   Exemplo 16.7. Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

   Demonstração. O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o zero!) o segundo algarismo de 9 modos (não podemos usar o algarismo utilizado anteriormente) e o terceiro de 8 modos (não podemos usar os dois algarismos já empregados anteriormente). A resposta é $9 \times 9 \times 8 = 648$. □

   Note que se começássemos a contagem pelo último algarismo, teríamos 10 modos de escolher este, 9 modos de escolher o penúltimo algarismo, entretanto, não haveria um valor fixo de decisões para se tomar quanto ao primeiro algarismo, já que se o algarismo 0 tiver sido usado em alguma das últimas casas, a resposta é 8 decisões (não podemos usar os dois algarismos utilizados anteriormente) e, se o algarismo 0 não tiver sido usado, a resposta é 7 decisões (não podemos usar nem o zero nem os dois algarismos usados anteriormente). É claro que essa dificuldade não ocorre quando começamos do primeiro dígito, que é o mais problemático do ponto de vista analítico (não pode ser zero!). Ou seja, "pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar".

2. DIVIDIR PARA CONQUISTAR!

   Exemplo 16.8. Determine o total de números pares com 3 algarismos distintos.

   Demonstração. Para que um número de 3 algarismos seja par, ele deve ter como algarismo das unidades $0, 2, 4, 6$ ou 8. Então, vamos dividir o problema em dois casos:

   (a) <u>O algarismo das unidades é 0</u>: Nesse caso, há somente 1 decisão para o algarismo das unidades. Há 9 decisões para o algarismo das dezenas (não pode ser o zero!). E, há 8 decisões para o algarismo das centenas (não pode ser nenhum dos dois algarismos já escolhidos para a unidade e a dezena). Assim, temos $8 \times 9 \times 1 = 72$ casos.

(b) O algarismo das unidades é $2, 4, 6$ ou 8: Nesse caso, há 4 decisões para o algarismo das unidades. Há 8 decisões para o algarismo das centenas (não pode ser o algarismo escolhido para a unidade nem o zero!). E, há 8 decisões para o algarismo das dezenas (não pode ser nenhum dos dois algarismos já escolhidos para a unidade e a centena). Assim, temos $8 \times 8 \times 4 = 256$ casos.

Logo, pelo Princípio Aditivo, o total de números pares com 3 algarismos é $72 + 256 = 328$. □

Note que, embora a escolha do primeiro algarismo seja problemática, devido ao fato de não poder ter o zero como dígito nessa posição, temos a escolha das unidades com restrições maiores, pois deve conter somente números pares. Assim, seguir começando pelo algarismo das unidades, prosseguir pelo das centenas e finalizar com o das dezenas é a alternativa mais natural. Entretanto, em certos casos, como esse por exemplo, podemos ignorar uma das restrições (que é uma alternativa mais sofisticada), como segue na terceira e última das três estratégias que apresentamos nessa parte.

3. ESTRATÉGIA DO COMPLEMENTAR!

Exemplo 16.9. Determine o total de números pares com 3 algarismos distintos.

Demonstração. Ignorando o fato de zero não poder ser o primeiro algarismo, teríamos 5 modos de escolher o ultimo algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total de $5 \times 8 \times 9 = 360$ números. Esses 360 números incluem números começados por zero, que devem ser descontados. Começando em zero, temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último ($2, 4, 6$ ou 8) e 8 modos de escolher o do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de $1 \times 4 \times 8 = 32$ números. A resposta é, portanto, $360 - 32 = 328$ números. □

Essa estratégia consiste em tomar aquilo que não queremos (ou parte daquilo que não queremos) e subtrair essa quantidade dos casos totais, que englobam o problema em questão, restando somente aquilo que queríamos contar previamente. Uma outra versão dessa ideia, um pouco mais evidente, é a seguinte, que também é solução para o mesmo problema.

Exemplo 16.10. Determine o total de números pares com 3 algarismos distintos.

Demonstração. Realizando contas similares as feitas anteriormente, temos que há $9 \times 9 \times 8 = 648$ números de 3 algarismos distintos, dos quais $5 \times 8 \times 8 = 320$ deles são ímpares, donde a quantidade de números de 3 algarismos distintos e pares é $648 - 320 = 328$ números. □

16.6 Permutações Simples

Teorema 16.2. *O número de modos de ordenar n objetos distintos é*

$$n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 = n!.$$

A isso chamamos de permutação de n elementos e representamos por $P_n = n!$.

Demonstração. Para ordenar, devemos definir quem é o primeiro elemento, quem é o segundo, quem é o terceiro, e assim por diante, até o n-ésimo elemento. Temos n possíveis escolhas (ou decisões) para o primeiro objeto. Uma vez escolhido o primeiro, temos $n-1$ escolhas para o segundo. Em seguida, $n-2$ escolhas para o terceiro, e assim sucessivamente, até termos 2 escolhas para o $(n-1)$-ésimo e, por fim, 1 escolha para o n-ésimo elemento. Daí, pelo Princípio Multiplicativo, segue-se que há $n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1 = n!$ modos de permutar n objetos distintos. □

Exemplo 16.11. Quantos são os anagramas da palavra $PERMUTANDO$?

Demonstração. Cada anagrama de $PERMUTANDO$ nada mais é que uma ordenação das letras $P, E, R, M, U, T, A, N, D, O$. Assim, o número de anagramas de $PERMUTANDO$ é $P_{10} = 10! = 3628800$. □

Exemplo 16.12. Quantos são os anagramas da palavra $PERMUTANDO$ que começam e terminam com consoante?

Demonstração. A consoante inicial pode ser escolhida de 6 maneiras, a consoante final de 5 maneiras e as 8 letras restantes podem ser arrumadas entre essas duas consoantes de $P_8 = 8!$ modos. Logo, há $6 \times 5 \times 8! = 30 \times 8! = 1209600$ anagramas de $PERMUTANDO$ que satisfazem a restrição dada. □

Exemplo 16.13. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos de dois lugares cada, de modo que em cada banco fiquem um homem e uma mulher?

Demonstração. O primeiro homem pode escolher seu lugar de 10 modos, o segundo de 8 modos, o terceiro de 6 modos, o quarto de 4 modos e o quinto de 2 modos. Uma vez colocados os homens, restam 5 lugares para colocar as mulheres, que pode ser feito de 5! modos distintos. Assim, o número de modos de 5 homens e 5 mulheres sentarem nesses bancos, de modo que cada banco contenha um casal homem-mulher, é $10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2 \times 5! = (2^5 \times 5!) \times 5! = 2^5 \times 5!^2 = 32 \times 120^2 = 460800$. □

16.7 Permutações Repetidas

Teorema 16.3. *O número de modos de ordenar n objetos, onde há repetição de $p_1, ..., p_k$ objetos, é*

$$\frac{n!}{p_1!p_2!...p_k!}.$$

A isso chamamos de permutação de n elementos com repetição de $p_1, p_2, ..., p_k$ elementos e representamos por $P_n^{p_1,p_2,...,p_k} = \dfrac{n!}{p_1!p_2!...p_k!}$.

Demonstração. Se imaginarmos que não há repetição, o número de permutações será $n!$. Porém, ao permutarmos os objetos que na realidade são iguais, a ordenação continua a mesma. Dessa forma, cada ordenação foi contada $p_1!p_2!...p_k!$ vezes. Portanto, o número de permutações possíveis desses objetos é $\dfrac{n!}{p_1!p_2!...p_n!}$. □

Exemplo 16.14. Quantos são os anagramas da palavra $MATEMATICA$?

Demonstração. Como temos 3 letras A, 2 letras M, 2 letras T, 1 letra I e 1 letra E, a resposta é

$$P_{10}^{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151200.$$

□

Para melhor entender a prova do teorema acima, considere o exemplo anterior e imagine que se tratam de 10 letras distintas, isto é, permutar $M_1, A_1, T_1, E, M_2, A_2, T_2, I, C$ e A_3. O número total de anagramas, nesse caso, será 10!. Mas, ao trocarmos letras que, na realidade, são iguais (por exemplo, A_1 e A_3 ou T_1 e T_2), o anagrama continua o mesmo. Ao todo, o número de permutações equivalentes a um anagrama dado é obtida permutando os termos que se repetem, que é de $3! \times 2! \times 2!$ permutações iguais. Daí, o número de permutações distintas, considerando agora as repetições das letras, é $\dfrac{10!}{3!2!2!} = 151200$.

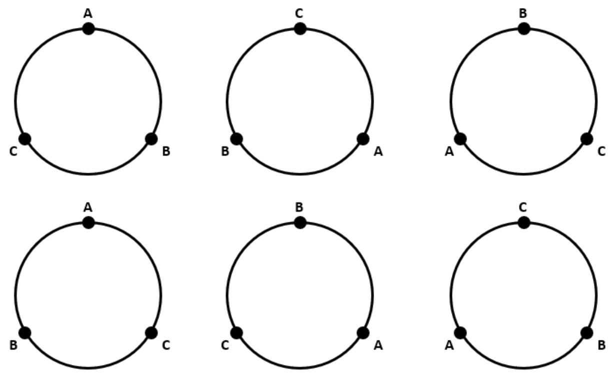
16.8 Permutações Circulares

Teorema 16.4. *O número de modos de ordenar n objetos distintos em lugares equi-espaçados em torno de um círculo, onde disposições iguais que são obtidas por rotações são consideradas como equivalentes, é*

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

A isso chamamos de permutação circular de n elementos e representamos por $(PC)_n = (n-1)!$.

Demonstração. Se não considerássemos equivalentes as disposições que possam coincidir por rotação, teríamos $n!$ disposições. Considerando a equivalência, basta observar que, para cada disposição, temos n permutações circulares equivalentes (obtidas rotacionando por, no máximo, n objetos), donde o número de permutações circulares distintas, nesse aspecto, será $\dfrac{n!}{n} = (n-1)!$. □



Para entender melhor essa prova, vamos considerar o caso particular a seguir.

No caso $n = 3$, temos $P_3 = 3! = 6$ modos de colocar 3 objetos distintos em 3 lugares.

No entanto, as três primeiras disposições podem coincidir entre si por rotação e o mesmo ocorre com as três últimas, de modo que $(PC)_3 = 2$.

Exemplo 16.15. De quantos modos podemos formar uma roda com 7 crianças, de modo que duas determinadas dessas crianças A e B não fiquem juntas?

Demonstração. Podemos formar $(PC)_5 = 4!$ rodas com as cinco outras crianças. Há agora 5 modos de colocar a criança A na roda e, consequentemente, haverá 4 modos de colocar a criança B na roda sem colocá-la junto de A. Logo, a resposta é $4! \times 5 \times 4 = 480$. □

16.9 Combinações Simples

Teorema 16.5. *O número de modos de escolher p objetos distintos em n objetos distintos dados é*

$$\frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

A isso chamamos de combinação de p objetos em n elementos ou simplesmente n escolhe p e representamos por C_n^p, $C_{n,p}$ ou $\binom{n}{p}$.

Demonstração. Sendo $A = \{k_1, k_2, ..., k_n\}$ o conjunto com os n objetos, ao escolher p distintos deles, temos a formação de dois conjuntos disjuntos $B, C \subset A$, onde B é o conjunto dos p elementos escolhidos e C é o conjunto dos $n-p$ elementos não escolhidos. Considerando as possíveis ordenações dos elementos de A, temos $n!$ modos de permutá-los. Ao escolhermos p elementos dos n disponíveis, temos $p!$ ordenações dos elementos de B e $(n-p)!$ ordenações de C. Como permutações do conjunto B, bem como permutações do conjunto C não mudam o número de modos de escolher p objetos dos n fornecidos, já que a ordem é irrelevante nesse caso, para cada ordenação dos elementos de A temos, ao todo,

$p!(n-p)!$ ordenações de B e C semelhantes entre si, donde, o número de combinações distintas será $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. □

Exemplo 16.16. Quantas saladas de frutas contendo exatamente 6 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes?

Demonstração. Para formar uma salada de frutas, basta escolher 6 das 10 frutas, o que pode ser feito de $C_{10}^{6} = \dfrac{10!}{6!4!} = 210$ modos. □

Vamos analisar agora mais dois exemplos do uso de combinações simples, onde apresentamos duas abordagens de solução em cada um deles (uma da forma natural de contagem e outra através da estratégia do complementar).

Exemplo 16.17. Dadas as retas r, contendo os pontos $R1, R2, R3, R4$ e $R5$, e s, contendo os pontos $S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7$ e $S8$, com r paralela a s. Quantos triângulos existem com todos os vértices em algum desses 13 pontos?

Demonstração. Para formar um triângulo ou tomamos um vértice em r e dois em s ou tomamos um vértice em s e dois em r. O número de triângulos do primeiro tipo é $5 \times \binom{8}{2}$ e o do segundo tipo é $8 \times \binom{5}{2}$. Logo, o número de triângulos possíveis é $5 \times \binom{8}{2} + 8 \times \binom{5}{2} = 5 \times 28 + 8 \times 10 = 220$. □

Demonstração. Para formar um triângulo, devemos escolher três pontos não situados na mesma reta, entre os treze pontos dados. O número de modos de escolher 3 dos 13 pontos é $\binom{13}{3}$. Desse total, devemos retirar as $\binom{5}{3}$ escolhas de 3 pontos em r e as $\binom{8}{3}$ escolhas possíveis de 3 pontos em s. Logo, o número de triângulos possíveis é $\binom{13}{3} - \binom{5}{3} - \binom{8}{3} = 286 - 10 - 56 = 220$. □

16.10 Problemas Resolvidos

Problema 16.1. Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus quatro amigos? (Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas)

Demonstração. Lembre-se de ter "boas escolhas". Começando com Arnaldo, temos 35 possíveis posições na fila para que ele possa estar. Entretanto, como queremos que seus quatro amigos fiquem atrás dele, devemos considerar que ele deve estar pelo menos a partir do quinto lugar da fila. Assim, ele terá 31 posições da fila para estar (pois de 5 a 35 há $35 - 5 + 1 = 31$ inteiros). Se Arnaldo está na k-ésima posição da fila, com $k \geq 5$, então seus quatro amigos vão estar em 4 das $k-1$ posições iniciais, para o qual temos $(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$ formas de distribuí-los. As demais $35 - 5 = 30$ posições conterão as demais pessoas, que pode ser feito de 30! modos. Observe que a resposta depende do k escolhido e, como $5 \leq k \leq 35$, devemos "dividir para conquistar" e somar todos os casos de k. Assim, temos:

$k = 5 \to (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 30! = \dfrac{4!}{0!} \cdot 30!$

$k = 6 \to (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2) \cdot 30! = \dfrac{5!}{1!} \cdot 30!$

$k = 7 \to (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3) \cdot 30! = \dfrac{6!}{2!} \cdot 30!$

...

$k = 35 \to (34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31) \cdot 30! = \dfrac{34!}{30!} \cdot 30!$

Portanto, a respota é

$$\frac{4!}{0!} \cdot 30! + \frac{5!}{1!} \cdot 30! + \frac{6!}{2!} \cdot 30! + ... + \frac{34!}{30!} \cdot 30! = 30! \left(\frac{4!}{0!} + \frac{5!}{1!} + \frac{6!}{2!} + ... + \frac{34!}{30!} \right).$$

□

Uma solução bem mais rápida e sofisticada é a seguinte.

Demonstração. Ao todo, há 35! possíveis formas de fazer a fila. Pela simetria, a quantidade de vezes que Arnaldo fica na frente é a mesma que a de Bernaldo, que é a mesma que a de Cernaldo, que é a mesma de Dernaldo e de Ernaldo, dentre todas as 35!. Logo, a quantidade de vezes que Arnaldo fica na frente é $\frac{35!}{5}$. □

Fica como exercício mostrar que ambos os valores obtidos nas duas demontrações são os mesmos, isto é, que

$$30! \left(\frac{4!}{0!} + \frac{5!}{1!} + \frac{6!}{2!} + ... + \frac{34!}{30!} \right) = \frac{35!}{5}.$$

Observação. Isso pode não ser trivial!

Problema 16.2. Quantas soluções inteiras de $x + y + z = 10$ existem, com $x \geq 0, y \geq 0$ e $z \geq 0$?

Demonstração. Considere 10 "pauzinhos" (|) e 2 "bolinhas" ($\circ$). O número de permutações desses 12 objetos (isto é, o número de permutações de ||||||||||$\circ\circ$) é uma permutação de 12 elementos com uma repetição de 10 deles e outra repetição dos outros 2. Ou seja,

$$P_{12}^{10,2} = \frac{12!}{10!2!} = \frac{12 \times 11}{2} = 66.$$

Para cada uma das permutações, podemos tomar x como a quantidade de pauzinhos à esquerda da primeira bolinha, y como a quantidade de bolinhas entre as duas bolinhas, e z como a quantidade de pauzinhos à direita da segunda bolinha. Daí, obtém-se todos os casos de soluções inteiras para a equação dada e seu valor (como visto acima) será 66. □

O problema anterior fomenta a criação de uma nova notação para casos como esses. "Se temos um estoque infinito de n tipos de objetos diferentes, dos quais devemos escolher um número limitado k, chamamos o número das diferentes formas de realizar isso de *combinação completa*, *combinação com repetição* ou, mais informalmente, de **modelo de pauzinhos e bolinhas**", este último pois esse problema pode ser traduzido na forma de uma equação na qual desejamos descobrir o número de soluções inteiras tal como visto acima. Como exercício, tente generalizar o que foi feito acima para qualquer equação $x_1+x_2+...+x_n = k$.

Problema 16.3. De quantos modos 5 homens e 5 mulheres podem se sentar em 5 bancos, de dois lugares cada, em torno de um círculo, de modo que em cada banco fiquem um homem e uma mulher?

Demonstração. Analogamente a solução feita no Exemplo 16.13, teríamos, desconsiderando o fato de que as pessoas estão distribuidas em torno de um círculo, 460800 modos para que isso ocorra. Como devemos desconsiderar os casos de rotações e, cada configuração admite 10 possíveis rotações, temos que o número de modos de 5 homens e 5 mulheres sentarem nesses bancos, de modo que cada banco contenha um casal homem-mulher e sabendo que eles estão dispostos em torno de um circulo, é $\dfrac{460800}{10} = 46080$. □

Problema 16.4. Em um grupo de 7 homens e 4 mulheres, de quantos modos podemos escolher 6 pessoas, sendo pelo menos duas delas mulheres.

Demonstração. Há 3 possibilidades para essa escolha: 4 homens e 2 mulheres, 3 homens e 3 mulheres ou 2 homens e 4 mulheres. Daí, a resposta é obtida somando-se as quantidades obtidas pelas decisões das escolhas de cada parte individualmente, como se segue abaixo

$$\binom{7}{4}\binom{4}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{3} + \binom{7}{2}\binom{4}{4} = 35 \times 6 + 35 \times 4 + 21 \times 1 = 371.$$

□

Demonstração. Pela estratégia do complementar, podemos contar o número total de escolhas, desconsiderando a restrição dada a quantidade de mulheres, e descontar do número de escolhas nas quais há nenhuma ou uma mulheres (que é, respectivamente, $\binom{7}{6}$ e $4 \times \binom{7}{5}$). Assim, a resposta será

$$\binom{7+4}{6} - \binom{7}{6} - 4 \times \binom{7}{5} = 462 - 7 - 4 \times 21 = 371.$$

□

16.11 Problemas Propostos

Exercício 16.1. Determine o número de inteiros entre 60 e 6559 que são múltiplos de 10 e 12, mas não são múltiplos de 120.

Exercício 16.2. O professor Piraldo fará uma avaliação para 5 alunos de uma turma: Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo. Essa prova consiste em chamar cada um ao quadro, uma única vez, para resolver um problema cada.

1. De quantas maneiras diferentes o professor pode chamá-los ao quadro?

2. Em quantas destas sequências eles **NÃO** estão em ordem alfabética?

3. Em quantas dessas sequências Arnaldo e Bernaldo são chamados em posições consecutivas?

Exercício 16.3. Um número natural A de três algarismos *detona* um número natural B de três algarismos se cada algarismo de A é maior do que o algarismo correspondente de B. Por exemplo, 876 detona 345; porém, 651 não detona 542 pois $1 < 2$. Quantos números de três algarismos detonam 314?

Exercício 16.4. Um número inteiro positivo é chamado de *interessante* quando termina com um algarismo que é igual ao produto de seus demais algarismos. Por exemplo, 326 e 1020 são *interessantes*, pois $3 \times 2 = 6$ e $1 \times 0 \times 2 = 0$. Quantos números *interessantes* de 5 algarismos terminam com o algarismo 0?

Exercício 16.5. Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?
(Dica: Lembre-se de ter *boas escolhas*. Comece contando a partir da parte mais problemática do triângulo, que, por ser retângulo, é o vértice onde está o seu ângulo reto).

Exercício 16.6. Duas casas de um tabuleiro 7×7 são pintadas de amarelo e as outras são pintadas de verde. Duas pinturas são ditas equivalentes se uma é obtida a partir de uma rotação aplicada no plano do tabuleiro. Quantas pinturas inequivalentes existem?
(Dica: Lembre-se de *dividir para conquistar*. Divida o problema em dois casos: um que utilize algum tipo de simetria e outro que conte os casos restantes).

Exercício 16.7. Um número natural n é dito elegante se pode ser escrito como soma de um cubo com um quadrado ($n = a^3 + b^2$, onde $a, b \in \mathbb{N}$). Entre 1 e 1000000 existem mais números que são elegantes ou que não são?
(Dica: Use que $a^3 + b^2 = n \leq 1000000 = 10^6$ e estabeleça restrições para a e b, contando uma cota para o máximo de soluções que o par (a, b) tem na equação $n = a^3 + b^2$).

Exercício 16.8. Um número de oito dígitos é dito robusto se cumprir ambas condições a seguir:

1. Nenhum dos seus algarismos é 0.

2. A diferença entre dois algarismos consecutivos é 4 ou 5.

Responda às perguntas a seguir:

1. Quantos são os números robustos?

2. Um número robusto é dito super-robusto se todos os seus algarismos são distintos. Calcule a soma de todos os números super-robustos.

Exercício 16.9. Dizemos que uma palavra Q é *quase-anagrama* de outra palavra P quando Q pode ser obtida retirando-se uma letra de P e trocando a ordem das letras restantes, resultando em uma palavra com uma letra a menos do que P. Um *quase-anagrama* pode ter sentido em algum idioma ou não. Por exemplo, RARO, RACR e ARCO são *quase-anagramas* de CARRO. Quantos são os *quase-anagramas* da palavra BACANA que começam com A?

Exercício 16.10. Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita *alternada* quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMATICA, LEGAL e ANIMADA são palavras *alternadas*, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINARIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências *alternadas*?

Exercício 16.11. Sejam $P_1, P_2, ..., P_n$ pontos de um mesmo círculo. Quantos polígonos de n lados (não necessariamente convexos) existem com vértices nesses pontos?

Exercício 16.12. Quantos dados diferentes existem se a soma das faces opostas deve ser 7? (Dica: Lembre-se de desconsiderar rotações!)

Exercício 16.13. Uma aranha tem uma meia e um sapato para cada um de seus oito pés. De quantas maneiras diferentes a aranha pode se calçar admitindo que as 8 meias e os 8 sapatos são distintos e que cada meia precisa ser colocada antes do seu respectivo sapato?

Exercício 16.14. Em uma circunferência há 10 pontos equiespaçados. De quantas maneiras, podemos

1. obter um diâmetro de extremos nesses pontos?

2. obter um triângulo retângulo de vértices nesses pontos?

3. obter um retângulo de vértices nesses pontos?

16.12 Referências

[1] Augusto C. de Oliveira Morgado, João B. P. de Carvalho, Paulo C. P. Carvalho, Pedro Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, 2006.

[2] OBMEP - Provas Anteriores. Disponível em: http://www.obmep.org.br/provas.htm

[3] OBM - Provas Anteriores. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/

17 Sequências (por Samuel Figueredo)

Introdução

Este artigo é direcionado aos alunos do nível 3 (o que não impede que alunos de outros níveis o estude) para aprofundamento de conhecimentos básicos sobre sequências e, mais especificamente, sequências definidas por recorrências. Além disso, apresentaremos problemas interessantes que aparentemente são difíceis, mas que a abordagem por sequências de recorrências demonstra que com a técnica correta o problema não é tão difícil quanto parece; assim pretendemos dar uma abordagem lúdica. Dentre os problemas apresentados, o problema das retas no plano, o problema da torre de Hanói com n discos, o problema de Josefus com n pessoas e outros problemas extremamente interessantes demonstram a força desta técnica. Por fim, deixaremos exercícios para que o leitor possa treinar o conteúdo visto.

17.1 Sequências

Para iniciarmos o nosso estudo de sequências definidas recursivamente vamos apresentar noções básicas como a definição de uma sequência.

Definição 3. Uma *sequência infinita* é uma função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que associa a cada número natural n um número real $f(n)$. Geralmente denotamos como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência cujo os termos são $f(n) = x_n$.

Perceba que na definição acima a sequência tem uma infinidade de termos (mesmo se for f uma função com imagem finita), pois esse conjunto é imagem de um conjunto infinito. Uma sequência é dita ser uma *sequência finita* quando seu domínio é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$.

Observe que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida de modo que x_n é o resto de n na divisão por 10, apesar de ter imagem finita, não é uma sequência finita.

Para sequências assim daremos o nome de sequência periódica de peródo 10. Mais formalmente, uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita ser uma *sequência periódica* quando existe um número $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n+k} = x_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e o menor k com tal propriedade é dito ser o *período da sequência*.

Abaixo daremos alguns exemplos de sequências com particularidades que serão cruciais para a construção da teoria e comparações.

Exemplo 17.1. Sequência dos números pares $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...$ que associa a cada número natural n o número natural $2n$, isto é, $x_n = 2n$.

Exemplo 17.2. Sequência dos números triangulares $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \cdots$ que associa a cada número n a soma do termo anterior com n, sabendo que o primeiro termo da sequência é 1.

Exemplo 17.3. Sequência de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$ que associa a cada número natural n o soma dos dois números anteriores sendo os primeiros termos 1 e 1. Note que não é simples imaginar uma fórmula para o n-ésimo número de Fibonacci.

Cada um dos três exemplos acima carrega uma particularidade quando se busca prever qual número real aparecerá como imagem de um natural qualquer dado. No Exemplo 17.1 é fácil calcular qual o décimo termo da sequência, basta apenas multiplicar o índice por 2, resultado em 20. Já no Exemplo 17.2 não é tão fácil assim, deve-se calcular a soma $28 + 8 + 9 + 10 = 55$, que não é difícil, mas é trabalhosa para índices muito grandes, até mesmo impossível de se resolver apenas efetuando somas. Da mesma forma, no Exemplo 17.3 o décimo termo depende dos dois termos anteriores a ele, que são o nono e o oitavo termo, como o oitavo termo é 21 e o nono é 34 o décimo é 55 e notamos a mesma dificuldade vista no exemplo anterior a esse (caso o leitor não esteja convencido da dificuldade, sugerimos que calcule o milésimo número da sequência de Fibonacci). Surge então a seguinte pergunta: "O que há de diferente entre as sequências que torna as previsões difíceis ou não?"

Observe que os termos da sequência dos números pares dependem apenas da indicação de seu índice, ora, pergunte-se: "qual o centésimo termo da sequência?", a resposta será imediata, a saber 200. Mas, os Exemplos 17.2 e 17.3 não só dependem do índice, como também dependem de seus termos anteriores, para calcular o décimo termo da sequência de Fibonacci foi necessário calcular o oitavo e o nono tormo. Sendo assim, a pergunta que mais se encaixa com a discussão é: "é possível reescrever uma sequência dada em termos de seus índices?".

Em geral esse trabalho não é tão fácil, mas apresentaremos situações em que podemos resolver, portanto focaremos agora em encontrar estratégias para reescrever sequências como as dos Exemplos 17.2 e 17.3, que são ditas sequências definidas por recorrência, em função de seus índices.

17.2 Sequências Definidas Por Recorrência Linear

Antes de irmos ao ponto em discussão, vamos definir o que é uma sequência definida por recorrência linear, que será o tema central do texto, após definir, mostraremos como recorrências lineares podem surgir em diversos contextos.

Definição 4. Uma sequência $(x_n)_n$ tal que $x_1, \cdots, x_k$ estão determinados e

$$\alpha_0 \cdot x_n + \alpha_1 \cdot x_{n-1} + \alpha_2 \cdot x_{n-2} + \cdots + \alpha_k \cdot x_{n-k} = f(n) \tag{11}$$

para $n \geq k$, onde $\alpha_0, \cdots, \alpha_k$ são números complexos, com $\alpha_0 \neq 0$, e $f(n)$ uma função que depende de n é dita ser uma sequência definida por recorrência linear.

Exemplo 17.4. A sequência definida por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = x_n^2 + 1$ não é linear, assim como a sequência $y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{y_n}$.

No Exemplo 17.2 os números triangulares podem ser definidos como $x_1 = 1$ e $x_n = x_{n-1} + n$ para todo $n \geq 2$, que é uma recorrência linear, como já sabíamos. No Exemplo

17.3 a sequência de Fibonacci $(F_n)_n$ é definida como $F_1 = 1, F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Exemplo 17.5. A sequência de Lucas satisfaz as condições da sequência de Fibonacci, mudando apenas os termos iniciais, isto é, se $(L_n)_n$ é a sequência de Lucas então são dados os termos iniciais $L_1 = 2, L_2 = 1$ e $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

O Exemplo 17.5 é de uma sequência definida por recorrência que é muito estudada na teoria dos números. Apresentaremos agora alguns problemas interessantes que podem envolver sequências definidas por recorrência linear.

Problema 17.1 (Torre de Hanói com n discos)**.** Dada uma torre com n discos inicialmente empilhados por tamanho decrescente em um de três pinos dados, o objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor. A quantidade de movimentos necessária e suficiente para completar o quebra-cabeça é $2^n - 1$.

Demonstração. Observe que os casos consistindo de um ou dois discos são fáceis de solucionar e são resolvidos com 1 e 3 movimentos, respectivamente.

Para resolver o caso $n = 3$, move-se o primeiro disco para o pino que se deseja transferir a torre. Logo após, o segundo disco para o pino intermediário e o disco menor para cima do pino intermediário, passando o ultimo disco para onde deseja-se montar a torre, basta resolver o caso de dois pinos e a quantidade de movimentos foi 7.

Percebe-se um padrão na solução do quebra-cabeça, para quisermos transferir a torre com n discos, devemos transferir a torre com $n-1$ discos para a torre intermediária passar o disco maior para onde deseja-se transferir a torre de n discos e novamente transferir a torre com $n-1$ discos agora para o pino desejado. Vamos denotar a quantidade mínima de movimentos para solucionar o quebra-cabeça com n pinos de T_n. Observe que dentro das observações feitas no caso 3 temos que a quantidade mínima necessária para solucionar o quebra-cabeças está em relação com o caso anterior e a relação é:

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

De fato T_n é igual pois em algum momento teremos que transferir o maior disco para o pino que desejamos transferir a torre e ele deve estar vazio.

Portanto, vemos a seguinte sequência de soluções $(1, 3, 2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 7 + 1, \cdots)$ percebe-se então que uma possível solução é $T_n = 2^n - 1$, usando indução prova-se que é solução. $\square$

Problema 17.2 (Retas no plano)**.** O número máximo L_n de regiões definidas por n retas no plano é de $\frac{n(n+1)}{2} + 1$.

Demonstração. Os casos iniciais são fáceis de mostrar, pois número de regiões definidas por uma reta é igual a 2 e por duas retas é 2 ou 4.

Para o caso $n = 3$ a melhor configuração não é com três retas coincidindo em um mesmo ponto, pois essa configuração perde sempre para a configuração em que nenhuma das retas são paralelas e coincidem duas a duas, mas não coincidem todas em um mesmo

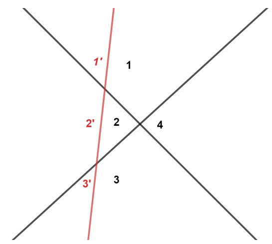


Figura 1: retas no plano.

ponto, mais ainda, essa configuração nos dá exatamente 7 regiões (veja a figura abaixo).

Note que a n-ésima reta aumenta em uma quantidade k de regiões se, e somente se, ela dividir k das regiões já existentes, mais ainda, divide em k regiões se, e somente se, a reta intersectar $k-1$ das retas já dispostas no plano. Sabendo que duas retas no plano se intersectam no máximo em 1 ponto então a n-ésima reta pode intersectar, no máximo, $n-1$ das retas anteriores, mais ainda, sempre é possível colocar mais uma reta no plano de forma que ela não seja paralela a nenhuma das outras. Portanto, sendo L_n a quantidade máxima de regiões com n retas, obtemos a seguinte relação

$$L_n = L_{n-1} + n,\ n > 1.$$

Portanto, a sequência das soluções é $(2, 2+2, 2+2+3, 2+2+3+4, \cdots)$. Percebe-se então que uma possível solução é $1 + \frac{n(n+1)}{2}$, usando indução prova-se que é solução. $\square$

17.2.1 Recorrências Lineares Homogêneas

Agora vamos mostrar uma forma de se resolver sequências de recorrência definidas por recorrências lineares homogêneas.

Definição 5. Uma sequência definida por recorrência é dita *linear homogênea* quando é da forma

$$\alpha_0 \cdot x_n + \alpha_1 \cdot x_{n-1} + \alpha_2 \cdot x_{n-2} + \cdots + \alpha_k \cdot x_{n-k} = 0, \text{ para } n \geq k, \tag{12}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_k$ estão fixados e $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ são números complexos fixados.

Um método usado para escrever uma sequência definida por uma recorrência linear homogênea em função de n é o seguinte.

Suponha que a sequência $\{x_n\}$, definida como em (1), tenha solução $\lambda \neq 0$ de modo que $x_n = \lambda^n$ e λ não depende de n. Então essa solução deve satisfazer

$$\alpha_0 \cdot \lambda^n + \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1} + \alpha_2 \cdot \lambda^{n-2} + \cdots + \alpha_k \cdot \lambda^{n-k} = 0 \implies \alpha_0 \cdot \lambda^k + \alpha_1 \cdot \lambda^{k-1} + \alpha_2 \cdot \lambda^{k-2} \cdots + \alpha_k = 0$$

a equação acima é chamada de equação característica de (1) e as raízes da equação são chamadas de raízes características da relação (1).

Exemplo 17.6. A sequência de Fibonacci $\{F_n\}$ definida como em 17.3 tem raízes características

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \; e \; \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Solução. Ora, sabemos que $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ e a equação característica da sequência é

$$x^2 - x - 1 = 0$$

cujo as raízes são $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. □

Proposição 1. *Se* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{k+1}$ *são raízes características distintas da relação de recorrência* (5), *então*

$$x_n = a_1 \cdot (\lambda_1)^n + a_2 \cdot (\lambda_2)^n + \cdots + a_{k+1} \cdot (\lambda_{k+1})^n,$$

onde $a_1, a_2, \cdots, a_{k+1}$ *são constantes, é uma solução de* (5).

Exemplo 17.7. A sequencia de Fibonacci $(F_n)_n$ é tal que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Solução. Pela Proposição 1 existem constantes a_1 e a_2 tais que

$$F_n = a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observando que $F_1 = F_2 = 1$ encontramos o sistema linear,

$$\begin{cases} a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ a_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + a_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

cujo a solução é $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $a_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. □

Nas hipóteses da Proposição 1 todas as raízes são de multiplicidade 1, mas nem sempre isso ocorre. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 17.8. Encontre as raízes características da relação de recorrência

$$x_n - 7x_{n-1} + 15x_{n-2} - 9x_{n-3} = 0$$

com $x_0 = 1, x_1 = 2$ e $x_3 = 3$.

Solução. A equação característica da relação é

$$x^3 - 7x^2 + 15x - 9 = (x-3)^2(x-1) = 0.$$

A raiz característica 3 é de multiplicidade 2 e a raiz característica 1 de multiplicidade 1. □

Perceba que se utilizarmos a Proposição 1 as condições iniciais não serão satisfeitas, logo, faz-se necessário enunciarmos a próxima proposição.

Proposição 2. *Se $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ são raízes características distintas da relação de recorrência (2) tais que λ_i é de multiplicidade m_i, $i = 1, 2, \cdots, r$ então*

$$\begin{aligned} x_n = &\left(a_{11} + a_{12}n + \cdots + a_{1m_1}n^{m_1-1}\right)(\lambda_1)^n + \\ &+ \left(a_{21} + a_{22}n + \cdots + a_{2m_2}n^{m_2-1}\right)(\lambda_2)^n + \cdots + \\ &+ \left(a_{r1} + a_{r2}n + \cdots + a_{rm_r}n^{m_r-1}\right)(\lambda_r)^n, \end{aligned}$$

onde a_{ij} são constantes, é uma solução de (2).

Exemplo 17.9. Resolva a relação de recorrência

$$x_n - 7x_{n-1} + 15x_{n-2} - 9x_{n-3} = 0$$

com $x_0 = 1, x_1 = 2$ e $x_3 = 3$.

Solução. Como já vimos, a raiz característica 3 é de multiplicidade 2 e a raiz característica 1 de multiplicidade 1. Pela Proposição 2, existem a_1, a_2 e a_3 tais que

$$x_n = (a_1 + a_2 \cdot n) \cdot 3^n + a_3 \cdot 1^n.$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \\ (a_1 + a_2) \cdot 3 + a_3 = 2 \\ (a_1 + a_2 \cdot 2) \cdot 9 + a_3 = 3 \end{cases}$$

obtemos que $a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{3}$ e $a_3 = 0$ donde

$$x_n = \left(1 - \frac{n}{3}\right) \cdot 3^n.$$

□

Não provaremos as proposições 1 e 2, caso o leitor esteja interessado, indicamos a leitura do capítulo 22 de Lima [4], equações a diferença finita.

17.2.2 Recorrências Lineares Não Homogêneas

Vamos definir agora um tipo mais geral de recorrências lineares que são as recorrências lineares não homogêneas.

Definição 6 (Recorrência Linear Não Homogênea)**.** Uma sequência definida por recorrência é dita linear não homogênea quando é da forma

$$\alpha_0 \cdot x_n + \alpha_1 \cdot x_{n-1} + \alpha_2 \cdot x_{n-2} + \cdots + \alpha_k \cdot x_{n-k} = f(n), \text{ para } n \geq k, \qquad (13)$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_k$ estão fixados, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ são números reais e f é não identicamente nula.

Na seção anterior aprendemos a solucionar recorrências lineares parecidas com a dessa seção (estrategicamente). Uma maneira de resolver um sistema linear não homogêneo como descrito na definição 4 é a descrita no passo a passo abaixo:

1. Resolva a recorrência linear homogênea de $(x_n^{(h)})_n$ que satisfaz

$$\alpha_0 \cdot x_n^{(h)} + \alpha_1 \cdot x_{n-1}^{(h)} + \alpha_2 \cdot x_{n-2}^{(h)} + \cdots + \alpha_k \cdot x_{n-k}^{(h)} = 0;$$

2. Encontre uma solução particular $(x_n^{(p)})_n$ da recorrência;

3. A solução geral da recorrência é $x_n = x_n^{(h)} + x_n^{(p)}$.

Para facilitar o entendimento do método apresentaremos o seguinte exemplo de relação de recorrência envolvendo uma recorrência linear não homogênea.

Exemplo 17.10. Resolva a relação de recorrência do exemplo 1.2

$$x_n - 3x_{n-1} = 2 - 2n^2$$

com $x_0 = 3$.

Solução. Seja $(x_n^{(h)})_n$ tal que $x_n^{(h)} - 3x_{n-1}^{(h)} = 0$. A raiz característica dessa sequência é 3, por esse motivo existe uma constante α tal que

$$x_n^{(h)} = \alpha \cdot 3^n.$$

Para encontrar uma solução particular $(x_n^{(p)})_n$ façamos $x_n^{(p)} = a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0$, assim, sendo $(x_n^{(p)})_n$ uma solução particular obtemos

$$a_2 \cdot n^2 + a_1 \cdot n + a_0 - 3 \cdot (a_2 \cdot (n-1)^2 + a_1 \cdot (n-1) + a_0) = 2 - 2n^2$$

daí, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a_2 - 3a_2 = -2 \\ 6a_2 - 2a_1 = 0 \\ -3a_2 + 3a_1 - 2a_0 = 2 \end{cases}$$

resolvendo o sistema obtemos $x_n^p = n^2 + 3n + 2$. Portanto, sabendo que $x_0 = 3$ e $x_n = \alpha 3^n + n^2 + 3n + 2$, obtemos o resultado

$$x_n = 3^n + n^2 + 3n + 2.$$

□

17.3 Problemas envolvendo recorrências

Nem sempre problemas envolverão sequências definidas por recorrência linear como já foi comentado no início. Agora mostraremos alguns problemas nessa perspectiva que são muito interessantes e revelam o quão abrangente é o uso de recorrências para resolver problemas diversos.

Problema 17.3 (Problema de Josefus adaptado)**.** Se há n pessoas enumeradas de 1 a n em um círculo e eliminamos cada segunda pessoa restante do círculo começando da pessoa dois, a última pessoa que sobrará será a pessoa $2l+1$, onde $n = 2^m + l$ e $m \geq 0$ com $0 \leq l < 2^m$.

Demonstração: Para mostrar isso, vamos denotar a numeração da pessoa que sobrou em um círculo com n pessoas por J_n. Calculando os casos iniciais, obtemos a tabela abaixo:

n	1	2	3	4	5	6
J_n	1	1	3	1	3	5

Se forem $2n$ pessoas então no fim da primeira volta sobrarão os impares entre 1 e $2n$ e será a vez sair a pessoa que estiver ao lado de 1. Daí teremos um circulo com n pessoas e essa situação se assemelha ao círculo com n pessoas, cujo a pessoa que sobra é L_n, essa pessoa no círculo com $2n$ pessoas é a pessoa com numeração $2L_n - 1$.

Se forem $2n+1$ pessoas então ao fim da primeira volta os pares sairão do círculo e o próximo a sair será o 1. Daí, sobrará um círculo com n pessoas e começando do 3, nesse círculo deverá ser a que equivale a L_n que é $2L_n + 1$. Logo, obtemos a seguinte relação

$$L_{2n} = 2L_n - 1,\ n \geq 1;$$
$$L_{2n+1} = 2L_n + 1,\ n \geq 1.$$

Analisando os cálculos usando a relação de recorrência na construção da tabela abaixo vemos um certo padrão, que nos permite conjecturar uma solução $J_n = 2l+1$, onde $n = 2^m + l$ com $2^m < n$ maior possível.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J_n	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15	1

□

Antes do próximo exemplo, lembremos $\lfloor x \rfloor = \max(\mathbb{Z} \cap (-\infty, x])$, isto é, $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a x. Assim, por exemplo, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Vamos escrever $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ a parte fracionária de x.

Problema 17.4. O número $\lfloor (1+\sqrt{3})^{2n-1} \rfloor$ é divisível por 2^n.

Demonstração. Vamos escrever $a = 1+\sqrt{3}$ e $b = 1-\sqrt{3}$. Sejam $x_n = \lfloor (1+\sqrt{3})^n \rfloor$ e $z_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n = a^n + b^n$. Deixamos como exercício para o leitor provar que $z_n \in \mathbb{Z}$. Observe que $a+b = 2$ e $ab = -2$. Daí,

$$z_n = (a+b)(a^{n-1} + b^{n-1}) - ab(a^{n-2} + b^{n-2}) = 2z_{n-1} + 2z_{n-2}.$$

Como $-1 < b < 0$, temos que $-1 < b^{2n-1} < 0$ e daí $a^{2n-1} - 1 < z_{2n-1} = a^{2n-1} + b^{2n-1} < a^{2n-1}$, isto é, $\lfloor z_n \rfloor = x_n$. Mas z_n é inteiro e daí $z_{2n-1} = x_{2n-1}$. Usando a definição temos $x_1 = 2, x_0 + 1 = 2, x_3 = 20$ e $x_2 + 1 = 8$. Logo, como base de indução temos que para $n = 1$ vale $2^1 | x_1$ e $2^1 | x_2 + 1$ e, para $n = 2$, $2^2 | x_{x_3}$ e $2^2 | x_2 + 1$. Suponhamos por hipótese que $2^n | x_{2n-1}$ e $2^n | x_{2n} + 1$ para um n. Como $x_{2n+1} = 2z_{2n} + 2z_{2n-1} = 2z_{2n} + 2x_{2n-1}$ e $z_{2n} - (1 - \sqrt{3})^{2n} = (1 + \sqrt{3})^{2n}$, obtemos que $z_{2n} = x_{2n} + 1$ com $x_{2n+1} = 2(x_{2n}+1) + 2x_{2n-1}$, por hipótese de indução, $2^{n+1} | x_{2n+1}$. Mais ainda, com cálculos análogos, obtemos $x_{2(n+1)} + 1 = z_{2(n+1)} = 2z_{2(n+1)-1} + 2z_{2n} = 2x_{2n+1} + 2(x_{2n} + 1)$, por hipótese de indução o resultado segue.

$\square$

A fim de que o leitor pratique o conteúdo apresentado e identifique relações de recorrência em diversos problemas, selecionamos alguns exercícios e problemas de olimpiadas na próxima seção. Mas, indicamos ao leitor a consulta das referências utilizadas para a construção do presente texto, pois há diversos métodos para solucionar relações de recorrências que são apresentados nos livros e não apresentamos aqui e há uma diversidade ainda maior de problemas propostos em cada livro.

Exercícios

Problema 17.5. A sequência de Lucas $(L_n)_n$ com termos iniciais $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$ satisfaz a mesma relção de recorrência que a sequência de Fibonacci, isto é, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n > 2$. Resolva a recorrência.

Problema 17.6 (CIIM 2009)**.** Demonstrar que para qualquer inteiro positivo n o número

$$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$$

é um número inteiro impar.

Problema 17.7. Resolva a relação de recorrência

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2^n$$

de modo que $a_1 = 3$ e $a_2 = 8$.

Problema 17.8. Mostre que a sequência $x_n = \sin n\alpha$ satisfaz uma recorrência Linear.

Problema 17.9. Os n setores, $n \geq 1$, de um círculo são coloridos por k cores, com $k \geq 3$, cada setor é colorido por apenas uma cor e quaisquer dois setores adjacentes são coloridos por cores diferentes. Seja a_n o número de formas que o círculo pode ser colorido.

(a) Calcule a_1, a_2 e a_3.

(b) Encontre uma relação de recorrência para $(a_n)_n$ para $n \geq 4$ e resolva a recorrência.

Problema 17.10. Resolva o seguinte sistema de relações de recorrência

$$\begin{cases} x_n - 2x_{n-1} - 4y_{n-1} = 0 \\ y_n + 5x_{n-1} - 7y_{n-1} = 0 \end{cases}$$

de modo que $x_1 = 4$ e $y_1 = 1$.

Problema 17.11 (IMO 1979/6)**.** Sejam A e E vértices opostos de um octágono regular. Um sapo começa a pular do vértice A. De qualquer um dos vértices do octágono regular exceto E, ele pode saltar para os vértices adjacentes. Quando atinge o vértice E o sapo para e fica lá. Seja a_n o número de caminhos distintos que o sapo atinge para no vértice E em exatamente n pulos. Prove que

$$a_{2n-1} = 0,\ a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right],\ \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots .$$

Problema 17.12 (Banco IMO 1988)**.** Seja α a maior raiz da equação $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\lfloor \alpha^{1988} \rfloor$ é divisível por 17.

Referências

[1] Chuan-Chong, C. Khee-Meng, K. *Principles and Techniques in Combinatorics.* World Scientifc Publihing, 1992;

[2] Engel, Arthur. *Problem Solving Strategies.* Springer verlag, 1997.

[3] Brochero, Fábio; Moreira, Carlos Gustavo; Saldanha, Nicolau e Tengan, Eduardo. *Teoria dos Números - um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.* Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[4] Lima, Elon Lages. *Álgebra linear. 1.ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2014.

18 Integrais (por Cícero Filho)

18.1 Regras de Integração

Vamos listar as principais propriedades que podem ser úteis para resolver problemas de integrais.

- (Linearidade) $\int [f(x) + \alpha g(x)]dx = \int f(x)dx + \alpha \int g(x)dx.$
- (Regra da Substituição) Se $u = g(x)$ então
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$
- Se f é uma função par, ou seja $f(x) = f(-x)$, então
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$
- Se f é uma função ímpar,ou seja $f(-x) = -f(x)$, então
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$
- (Integração por partes) $\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$

Para ver um pouco sobre essas ideias veja [1] ou outro livro da sua preferência.

18.2 Exemplos olímpicos

Uma primeira ideia útil é procurar simetrias. Vamos a um exemplo que apareceu na OBMU de 2004.

Exemplo 18.1. (OBMU 2004) Calcule $\int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{e^x + 1}dx.$

Solução. Primeiramente chame de $I = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{e^x + 1}dx$. Olhando a simetria do intervalo de integração, somos levados a fazer a mudança de variável $t = -x$, daí $dt = -dx$. Portanto
$$I = \int_{1}^{-1} \frac{(-t)^{2004}}{e^{-t} + 1}(-dt) = -\int_{1}^{-1} \frac{t^{2004}}{e^{-t} + 1}dt = \int_{-1}^{1} \frac{t^{2004}}{e^{-t} + 1}dt.$$
Assim,
$$I + I = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{e^x + 1}dx + \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}}{e^{-x} + 1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^{2004}(e^x + 1)}{e^x + 1}dx = \int_{-1}^{1} x^{2004}dx = \frac{2}{2005}.$$

Concluímos então que $I = \dfrac{1}{2005}$.

Vamos a mais um exemplo que ilustra um pouco mais de simetrias.

Exemplo 18.2. (OBMU 2005) Calcule $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$.

Solução. Chame $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))dx$. Fazendo a mudança de variável $t = \frac{\pi}{4} - x$, temos $dt = -dx$. Além disso, quando $x = 0, t = \frac{\pi}{4}$ e quando $x = \frac{\pi}{4}$, t=0. Sendo assim,

$$I = \int_{\pi/4}^{0} \ln(1+\tan(\pi/4 - t))(-dt) = \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(\pi/4-t))dt.$$

Usando a fórmula para $\tan(x-y)$ obtemos

$$\tan(\pi/4 - t) = \frac{1-\tan(t)}{1+\tan(t)}$$

temos que

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1-\tan(t)}{1+\tan(t)}\right) dt = \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1+\tan(t)}\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \ln(2)dt - \int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(t))dt = \frac{\pi}{4}\ln(2) - I. \end{aligned}$$

Logo, $2I = \frac{\pi}{4}\ln(2)$ e assim, $I = \frac{\pi}{8}\ln(2)$.

Um outro exemplo que ilustra agora uma outra ideia que é a de utilizar uma recursão. Vamos apresentar essa técnica com um problema que apareceu na IMC 1996.

Exemplo 18.3. (IMC 1996) Para cada $n \in \mathbb{N}$, calcule $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin(x)}dx$.

Solução. Chame de $I_n = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nx)}{(1+2^x)\sin(x)}dx$. Usando um processo análogo ao que fizemos no primeiro exemplo, temos que

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}dx.$$

Usando a fórmula

$$\sin(a) - \sin(b) = \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

com $a = nx$ e $b = (n-2)x$ temos

$$\sin(nx) - \sin((n-2)x) = \sin(x)\cos((n-1)x)$$

e daí temos

$$I_n - I_{n-2} = \int_0^\pi \cos((n-1)x)dx = 0.$$

Portanto $I_n = I_{n-2}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Logo, temos que

$$I_{2n} = I_0 = 0 \text{ e } I_{2n-1} = I_1 = \pi.$$

Exemplo 18.4. (IMC 2010) Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}$.

Solução. Por questão de espaço, escreva

$$F = \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)}.$$

Parece natural começar usando frações parciais. Fazendo isso chegamos a

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4k+3} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4k+4} \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 x^{4k}dx - \frac{1}{2}\int_0^1 x^{4k+1}dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^{4k+2}dx - \frac{1}{6}\int_0^1 x^{4k+3}dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 x^{4k}(1-3x+3x^2-x^3)dx \end{aligned}$$

Usamos agora o fato de que

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

e assim

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{4k} = \frac{1}{1-x^4},$$

daí trocando a integral com o somatório temos o seguinte

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{1-3x+3x^2-x^3}{1-x^4}dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^4}dx.$$

Nosso objetivo agora é calcular $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^4}dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{1-x^4}dx &= \int_0^1 \frac{1+x^2-2x}{(1+x)(1+x^2)}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{2x}{(1+x)(1+x^2)}dx \\ &= \ln(2) + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}dx \\ &= 2\ln(2) - \frac{\ln(2)}{2} + \arctan(1) = \frac{3\ln(2)}{2} - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+2)(4k+3)(4k+4)} = \frac{\ln(2)}{4} - \frac{\pi}{24}.$$

Vamos finalizar esse artigo apresentando uma outra ideia bastante interessante que é devida a Feynman.

Teorema 18.1. *(Derivação sob o sinal de integral) Seja $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\frac{\partial f}{\partial t}$ é contínua. Então podemos derivar sob o sinal da integral. Mais precisamente,*

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(t, x)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(t, x)dx. \tag{14}$$

Demonstração. Para a prova desse teorema consulte [2]. □

Exemplo 18.5. Calcule

$$\int_0^1 \frac{x^{2023} - 1}{\ln x} dx.$$

Solução. Primeiramente trocamos o 2023 por uma variável t. Chame

$$I(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx.$$

Queremos calcular $I(2023)$.Temos uma função $f(t, x) = \dfrac{x^t - 1}{\ln x}$ que é contínua. Além disso, $\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = x^t$. Usando o teorema anterior, temos que

$$I'(t) = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t + 1}.$$

Logo, integrando, temos que

$$I(t) = \ln(t + 1) + C.$$

Para achar C, note que $I(0) = 0$ e portanto $I(t) = \ln(1 + t)$. Sendo assim, $I(2023) = \ln(2024)$.

Para ver mais sobre essa técnica, você pode consultar [3].

Agora você pode praticar um pouco as técnicas com os exercícios propostos abaixo.

18.3 Exercícios propostos

1. Seja f definida em $[0, 1]$ contínua, calcule

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x) + f(1 - x)} dx.$$

2. Seja f contínua e par definida em $[-a, a]$, com $a > 0$. Mostre que

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_{-a}^{a} f(x) dx.$$

3. (OBMU 2002) Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1} dx$.

4. (OBMU 2010) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{x}{\sin x + \cos x} dx$.

5. (PUTNAM 2005) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx$.

6. Para $n \in \mathbb{N}$ calcule $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \tan^{2n}(x) dx$.

7. Para $n \in \mathbb{N}$, calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} (-\ln(x))^n dx$.

8. (OBMU 2019) Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \ln(\sin(x)) dx$.

9. (OBMU 2004) Calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)(3k+3)}$.

10. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}} dx$.

11. Calcule $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln(x)\ln^2(1-x)}{x} dx$.

12. (József Wildt 2019) Ache todas as funções contínuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$f(-x) + \int_{0}^{x} t f(t-x) dt = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Referências

[1] James Stewart. Cálculo, vol. 1. *Pioneira Thomson Learning*, page 47, 2001.

[2] Elon Lages LIMA. Curso de análise vol. 2, 2015.

[3] Keith Conrad. Differentiating under the integral sign, 2022.

19 Problemas Propostos

19.1 Problemas Escolares

Problema 19.1 (OBM 2014)**.** Seja N um inteiro maior do que 2. Cícero e Samuel disputam o seguinte jogo: há N pedras em uma pilha. Na primeira jogada, feita por Cícero, ele deve tirar uma quantidade k de pedras da pilha com $1 \leq k < N$. Em seguida, Samuel deve retirar uma quantidade de pedras m da pilha com $1 \leq m \leq 2k$, e assim por diante, ou seja, cada jogador, alternadamente, tira uma quantidade de pedras da pilha entre 1 e o dobro da última quantidade de pedras que seu oponente tirou, inclusive. Ganha o jogador que tirar a última pedra.Para cada valor de N, determine qual jogador garante a vitória, independente de como o outro jogar, e explique qual é a estratégia vencedora para cada caso.

Problema 19.2 (Alan Pereira)**.** Calcule o resto da divisão de 2023^{2025} por 2027.

Problema 19.3 (Jônatas Marinho)**.** Determine os dois últimos dígitos de 2023^{2023}.

Problema 19.4 (OBM 2016 N2 Fase 1)**.** Determine o valor da expressão

$$\frac{2015^3 - 1^3}{1^2 + 2015^2 + 2016^2}$$

Problema 19.5 (OBM 2015 N2, Fase 2)**.** Determine o número de inteiros positivos n menores que 100 de modo que a fração $\dfrac{8n+5}{5n+8}$ seja irredutível.

Problema 19.6 (Putnam and Beyond, 879)**.** Encontre uma forma fechadaa para

$$1 \cdot 2\binom{n}{2} + 2 \cdot 3\binom{n}{3} + \cdots + (n-1)n\binom{n}{n}.$$

Problema 19.7 (Putnam and Beyond, 880)**.** Prove que

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

19.2 Problemas Universitários

Problema 19.8 (Putnam and Beyond, 82)**.** Sejam A e B duas matrizes com entradas complexas que comutam (isto é, $AB = BA$) tais que para alguns inteiros positivos p e q, vale $A^p = I$, $B^q = \mathcal{O}$, onde I é a matriz identidade e $\mathcal{O}$ é a matriz nula.

Prove que $A + B$ é invertível, e encontre seu inverso.

Problema 19.9 (Jônatas Marinho)**.** Prove ou dê um contra-exemplo: dado $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, vale $g^{16} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema 19.10 (Jônatas Marinho)**.** Dado G um grafo simples, seja $p(n)$ a quantidade de caminhos de tamanho n no grafo que ligam dois vértices seus. Prove que existe pelo menos um $\lambda > 0$ tal que

$$\limsup_{n} \frac{p(n)}{\lambda^n} < +\infty.$$

Observação. Um caminho de tamanho n em um grafo é uma sequência $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de vértices, onde cada $x_i x_{i+1}$ é uma aresta de G)

Problema 19.11 (IMC 2015)**.** Seja $F(0) = 0$, $F(1) = \frac{3}{2}$, e $F(n) = \frac{5}{2}F(n-1) - F(n-2)$ por $n \geq 2$.

Determine se $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F(2^n)}$ é um número racional.

19.3 Proponentes

Samuel Figueredo: P1
Alan Pereira: P2
Jônatas Marinho: P3 a P10
Jairon Batista: P11

20 Premiados na OAM 2022

20.1 Nível 1

Lista de Premiados OAM 2022 - Nível 1	
NOME	**PRÊMIO**
JOSÉ PEREIRA MENDES NETO	OURO
KAWANY VITÓRIA MOREIRA DE OLIVEIRA	OURO
ISABEL SANTOS COSTA	OURO
LUÍSA PERDIGÃO ÁVILA SARMENTO	OURO
PABLO VINICIUS DOS SANTOS GOMES	OURO
LUCAS DA ROCHA FIGUEIRÊDO	PRATA
RODRIGO CHAGAS TENÓRIO LEVINO	PRATA
MANUELLA BARBOSA DE GUSMÃO	PRATA
DAVI WÉVERTON PEREIRA DA SILVA	PRATA
DANIEL KAUÃ SANTOS CAVALCANTI	PRATA
JANDERLYER MARLEY DA SILVA SANTOS	PRATA
ORHANA MARIA ROMEIRO DE LIMA	PRATA
PEDRO AUGUSTO FERNANDES FIGUEIRÔA	PRATA
PEDRO LUCCA DE ALBUQUERQUE LÔBO	PRATA
ANA MICAELI CAETANO CALHEIROS	PRATA
JACKSON EMANOEL RUFINO DA SILVA	PRATA
PEDRO GUILHERME DA COSTA MOURA	PRATA
ADHELMO HENRIQUE DE OLIVEIRA MELO	PRATA
LUCAS GABRIEL LIMA ALVES	PRATA
MARYA LYVIA SOARES DE QUEROZ	PRATA
ALLANA SANTANA SILVA	BRONZE
PEDRO ALBERTO DE ALMEIDA LEANDRO	BRONZE
PABLO VINICIUS VENCESLAU DIAS	BRONZE
VINÍCIUS DA SILVA MAGALHÃES	BRONZE
JASLINY TAYSA RIBEIRO DE FARIAS	BRONZE
CAUBI DAMARA DE OMENA FREITAS NETO	BRONZE
JÚLLIA MAYSA FREIRE SOUZA	BRONZE
CLÁUDIA MAUELLY SOARES SANTOS	BRONZE
MARCOS RIAN SOARES SALDANHA HONORATO	BRONZE
LUIZ OTAVIO DA SILVA PEREIRA	BRONZE
LUCAS GABRIEL GONÇALVES SANTOS	BRONZE
MARIA CLARA DE SOUZA ALBUQUERQUE	BRONZE
CLARA EVELLY MARQUES DE OLIVEIRA	BRONZE
ISIS RAFAELA DA SILVA NEVES	BRONZE

SERGIO REIS DOS SANTOS FILHO	BRONZE
MANOEL MARCELO ACCIOLY GALVÃO FILHO	BRONZE
IAGO MARCELO OLIVEIRA MOREIRA	BRONZE
LUIZ FERNANDO BAERE MENDES	BRONZE
DANIELA AGRA CAVALCANTE	BRONZE
EDUARDO MASSAO ARAKAKI FILHO	BRONZE
CLAUDEVAN JÚNIO ALVES PACHECO	BRONZE
CAUÃ MATEUS DE ALMEIDA SILVA	MENÇÃO HONROSA
ANTHONY GABRIEL ALVES DOS SANTOS	MENÇÃO HONROSA
CÉSAR GABRIEL OLIVEIRA MELO	MENÇÃO HONROSA
EFRAIM FERNANDO MATOS BRAZ	MENÇÃO HONROSA
KEMILLY LAIANE DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
MIGUEL AUGUSTO SILVA DE OLIVEIRA	MENÇÃO HONROSA
GUILHERME SOARES DOS SANTOS ARAÚJO	MENÇÃO HONROSA
JOÃO ROCHA NETO	MENÇÃO HONROSA
GUSTAVO PEREIRA BERNARDO	MENÇÃO HONROSA
NATAN MEDEIROS LEONCIO	MENÇÃO HONROSA
GESSIVALDO ANTÔNIO ALVES DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
ANALIS BARBOSA DE OLIVEIRA	MENÇÃO HONROSA
MARIA GABRIELI NICÁCIO CORDEIRO RODRIGUES ROSA	MENÇÃO HONROSA
ANABELA SOFIA CORREIA VARELA	MENÇÃO HONROSA
ANDRESSA WITORIA DA SILVA FERREIRA	MENÇÃO HONROSA
EVERTON NUNES BARBOSA	MENÇÃO HONROSA
EVILY JESUS DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
GUSTAVO DOS SANTOS SILVA	MENÇÃO HONROSA
ISABELLY EMANUELLY VIEIRA DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
JHENNYFFER MAYRA CESAR DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
JORGE OTÁVIO FERNANDES LUCENA	MENÇÃO HONROSA
GUSTAVO BARROS DE FREITAS	MENÇÃO HONROSA

20.2 Nível 2

Lista de Premiados OAM 2022 - Nível 2	
NOME	**PRÊMIO**
LEANDRO EDUARDO DE OLIVEIRA MELLO	OURO
TIAGO VINÍCIUS MONTEIRO LIMA	OURO
ROBERTO PACÍFICO GAMA REYS	PRATA
MATHEUS BARBOSA DA SILVA	PRATA
LUCAS GABRIEL FERREIRA SANTANA	PRATA
PAULO VICENTE ABDALA DE NASCIMENTO	PRATA
MARIANA MARIA DAS GRAÇAS FONTES SILVA	PRATA
MARIA LUIZA NEPOMUCENO MOREIRA	PRATA
WESLEY EZEQUIEL SÁ DE OLIVEIRA	PRATA
GABRIEL VENCESLAU DE FARIAS COSTA	PRATA
MARIANA DE SOUZA SANTOS	PRATA
LARA CECYLLYA MARIANO COSTA SANTOS	PRATA
LAURA TORRES LIMA	BRONZE
KEVIN WILLIAN SANTOS FLORÊNCIO	BRONZE
ANA CLARA SILVA DE MELO	BRONZE
GLEYCE DOS REIS CARVALHO	BRONZE
SÁVIO RAFAEL CORDEIRO DA SILVA	BRONZE
CARLOS DANIEL DA SILVA	BRONZE
JOSÉ GABRIEL JUVINO SANTOS	BRONZE
PAULO DIEGO VASCONCELOS NEVES	BRONZE
RUAN MARCOS DOS SANTOS GOMES	BRONZE
ADALBERTO ROCHA BARROS	BRONZE
ALEXIA PYETRA FERRO DA ROCHA	BRONZE
APOLO DA SILVA LIMA	BRONZE
DERLANE ALMEIDA DE ALBUQUERQUE	BRONZE
JOÃO VICTOR DA SILVA	BRONZE
MILENA DE JESUS BARBOSA	BRONZE
SARAH DA SILVA RAMALHO	BRONZE
ANNA CLARA DE JESUS DOS SANTOS	BRONZE
KEIRRISON MATEUS DA SILVA	BRONZE
GABRIEL CORDEIRO CALHEIROS	BRONZE
DAVI CORREIA DOS SANTOS	BRONZE
LUÍS EDUARDO DA SILVA	BRONZE
WELIZA MAYSA DA SILVA SANTOS	BRONZE

MARIA WITORIA CIRIACO GOMES	MENÇÃO HONROSA
NAYARA YASMIN DO CARMO	MENÇÃO HONROSA
MIRELA DE MOURA SILVA DE BRITO	MENÇÃO HONROSA
ANA CLARA SOUZA MAGALHÃES	MENÇÃO HONROSA
JOÃO GUILHERME DOS SANTOS	MENÇÃO HONROSA
JEHNNEFER WILLYANE LIMA DOS SANTOS	MENÇÃO HONROSA
LUIZ HENRIQUE MATSUBARA DE SOUZA	MENÇÃO HONROSA
PEDRO HENRIQUE VASCONCELOS NEVES	MENÇÃO HONROSA
RAQUEL DOS SANTOS ALVES DE MESQUITA	MENÇÃO HONROSA
VINÍCIUS MATIAS FERRO	MENÇÃO HONROSA
ALICE RABELLO OLIVEIRA	MENÇÃO HONROSA
LUIZ ANTONIO ALVES LIMA	MENÇÃO HONROSA
ERICA KELIANE DE OLIVEIRA	MENÇÃO HONROSA
IAGO VINÍCIUS MARSUETO DO NASCIMENTO	MENÇÃO HONROSA
LUCAS ADIEL NASCIMENTODA SILVA	MENÇÃO HONROSA
YASMIN DE OLIVEIRA SANTOS	MENÇÃO HONROSA
MAEVILLY ANDRADE DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
JOSÉ FELIPE MARQUES DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
MARIA LUISA AMARO DOS SANTOS	MENÇÃO HONROSA
ANNA LETÍCIA SANTOS DA SILVA	MENÇÃO HONROSA

20.3 Nível 3

Lista de Premiados OAM 2022 - Nível 3	
NOME	**PRÊMIO**
JEANN DA ROCHA SILVA	OURO
ANTONIO FRANCISCO BATISTA FILHO	PRATA
ALLANE KARINE FERREIRA DA SILVA	BRONZE
ANDRESSA FARIAS DA SILVA	BRONZE
PEDRO HENRIQUE MONTEIRO LIMA	BRONZE
MARCOS KAYKE CANUTO DOS SANTOS	BRONZE
AMON CHALEGRE GOMES VANDERLEI	BRONZE
CLARK OLIVEIRA SANTANA CONCE ROCHA	BRONZE
DINEY FERREIRA DE LIMA	BRONZE
WELBERT DA SILVA FREITAS FILHO	BRONZE
EDEILSON COSTA DE AZEVEDO FILHO	BRONZE
ÍCARO INÁCIO SILVA SANTOS	MENÇÃO HONROSA
CLÁUDIO MATHEUS ANSELMO S.SANTOS	MENÇÃO HONROSA
EMYLLE PAULA OLIVEIRA SANTOS	MENÇÃO HONROSA
FELIPE PROTÁZIO MENDES DE AMORIM	MENÇÃO HONROSA
JOÃO GUILHERME NASCIMENTO VIEIRA	MENÇÃO HONROSA
MARIANA CORREIA DA COSTA	MENÇÃO HONROSA
VITOR GABRIEL RODRIGUES DE OLIVEIRA	MENÇÃO HONROSA
PABLO LEVY FERNANDES ALCÂNTARA	MENÇÃO HONROSA
RAÍSSA MARIÂNGELA DOS SANTOS	MENÇÃO HONROSA
WENDEL KAUÊ MÉLO PEREIRA	MENÇÃO HONROSA
ALISON BRUNO MARTIRES SOARES	MENÇÃO HONROSA
ANA VITÓRIA LAURINDO DE LIMA	MENÇÃO HONROSA
BRUNO BELO MATOS DE FIGUEIREDO	MENÇÃO HONROSA
CAMILA OMENA MONTONI	MENÇÃO HONROSA

CARLOS EDUARDO DA SILVA AGUIAR	MENÇÃO HONROSA
GUILHERME FONSECA TRAPP	MENÇÃO HONROSA
HELORA KELLY TAVARES MATIAS	MENÇÃO HONROSA
JESSYCKON PETERSON FARIAS DA COSTA	MENÇÃO HONROSA
JOÃO GABRIEL DOS SANTOS	MENÇÃO HONROSA
JOAQUIM BENCHIMOL GUIMARÃES	MENÇÃO HONROSA
JÚLIA BEATRIZ ALMEIDA DE CARVALHO	MENÇÃO HONROSA
LAISE MARIA DE OLIVEIRA PEREIRA	MENÇÃO HONROSA
LUIZ ANTÔNIO ALVES DE LIMA	MENÇÃO HONROSA
LUÍZA CARAMORI CALLADO DE SOUZA	MENÇÃO HONROSA
MARINA VIEIRA ALMEIDA LIMA	MENÇÃO HONROSA
RONALD MATHEUS DOS SANTOS GOMES	MENÇÃO HONROSA
TAYLLO JONATHAS MONTEIRO MENDES	MENÇÃO HONROSA
YAN MARTINS DE OLIVEIRA VILLA NOVA	MENÇÃO HONROSA
REBECA MOURA GAMELEIRA	MENÇÃO HONROSA
MATHEUS MENDES DE ASSUNÇÃO	MENÇÃO HONROSA
GUILHERME FERREIRA DA COSTA SILVA	MENÇÃO HONROSA
JAIME WILLIAN CARNEIRO DA SILVA	MENÇÃO HONROSA
RITA BEATRIZ MELO LACERDA	MENÇÃO HONROSA

20.4 Nível U

Lista de Premiados OAM 2022 - Nível U	
NOME	**PRÊMIO**
Samuel Nascimento Figueredo	OURO
Gerson Ferreira Santos Junior	PRATA
Francisco Alan Lima da Silva	PRATA
Lucas Hiroshi Nakagawa	BRONZE
Lucas Brunno Barbosa	BRONZE
Marina Oliveira	MENÇÃO HONROSA
Lemuel Carvalho	MENÇÃO HONROSA

21 Como contribuir com a ROAM

A Revista da OAM visa levar conhecimentos de matemática olímpica para estudantes de Alagoas. Essa missão não é unicamente nossa. Você pode fazer parte dessa missão, colaborando com a continuidade do nosso trabalho.

A seguir listamos diversas formas de contribuir na construção da revista:

1. Digitar em Latex as provas antigas da OAM;

2. Digitar em Latex as soluções das provas antigas da OAM;

3. Enviar os PDFs de provas antigas que ainda não foram encontradas.

Para demais esclarecimentos, envie um email para `roam.ufal@gmail.com`.

ROAM

Vol. 2