**Universidade Federal de Alagoas - UFAL**
**Instituto de Matemática - IM**
Programa de Pós-Graduação em Matemática
em associação com a Universidade Federal da Bahia

**DEIVID SANTOS DE ALMEIDA**

# RIGIDEZ DE MOTS COM FRONTEIRA LIVRE EM UM CONJUNTO DE DADOS INICIAIS

**Orientador: Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia**

**Maceió-AL**

**2025**

DEIVID SANTOS DE ALMEIDA

# Rigidez de MOTS com fronteira livre em um conjunto de dados iniciais

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia

Maceió-AL

2025

**Catalogação na fonte**
**Universidade Federal de Alagoas**
**Biblioteca Central**
**Divisão de Tratamento Técnico**
Bibliotecária: Helena Cristina Pimentel do Vale CRB-4/661

A447r Almeida, Deivid Santos de.
Rigidez de MOTS com fronteira livre em um conjunto de dados iniciais / Deivid Santos de Almeida. – 2025
44 f. : il.

. Orientador: Abraão Mendes do Rêgo Gouveia.
Tese (doutorado em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Instituto de Matemática e Universidade Federal da Bahia. Maceió, 2025.

Bibliografia: f. 41-44.

1. Fronteira livre. 2. Invariante de Yamabe. 3. MOTS estáveis. 4. Rigidez de superfícies. I. Título.

CDU: 514.764.27

**FOLHA DE APROVAÇÃO**

AUTOR: DEIVID SANTOS DE ALMEIDA

**Rigidez de MOTS com fronteira livre em um conjunto de dados iniciais**

**Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Alagoas em Associação com a Universidade Federal da Bahia como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.**

**Trabalho aprovado, Maceió, 31 de janeiro de 2025.**

**Banca Examinadora**

Documento assinado digitalmente
gov.br
ABRAAO MENDES DO REGO GOUVEIA
Data: 06/03/2025 22:38:19-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

---

Prof. Dr. Abraão Mendes do Rêgo Gouveia - UFAL (Orientador)

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARCIO HENRIQUE BATISTA DA SILVA
Data: 07/03/2025 06:21:26-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

---

Prof. Dr. Márcio Henrique Batista da Silva - UFAL (Avaliador Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARCOS PETRUCIO DE ALMEIDA CAVALCANTE
Data: 07/03/2025 16:21:05-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

---

Prof. Dr. Marcos Petrúcio de Almeida Cavalcante - UFAL (Avaliador Interno)

Documento assinado digitalmente
gov.br
MARCIO SILVA SANTOS
Data: 10/03/2025 15:52:34-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

---

Prof. Dr. Márcio Silva Santos - UFPB (Avaliador Externo)

Documento assinado digitalmente
gov.br
IVALDO PAZ NUNES
Data: 11/03/2025 08:17:36-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

---

Prof. Dr. Ivaldo Paz Nunes - UFMA (Avaliador Externo)

Ao meu filho, Albert, e ao meu sobrinho, Davi Luiz.

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer à minha família, meus pais Quitéria e Sebastião, juntamente com meu irmão Leandro e minha esposa Rute. Vocês foram fundamentais ao longo de todo o percurso e são as principais fontes de minha motivação.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Abraão Mendes, pelos ensinamentos e pela dedicação durante o processo deste trabalho. Pelo suporte, não apenas neste trabalho, mas também durante todo o período desde o mestrado. Pelo exemplo de professor e pesquisador, deixo minha gratidão.

Agradeço aos professores Feliciano Vitório, Marcos P. Cavalcante, Márcio Batista, Márcio Cavalcante, Renan Medrado e Hilário Alencar pelas disciplinas ministradas e por toda a dedicação.

Aos membros da banca, que aceitaram o convite para participar da correção deste trabalho e pelas dicas e sugestões, muito obrigado.

Agradeço também à Ana e ao Willian por todo o suporte sempre que precisei, pela dedicação e pelo atendimento.

Gostaria de agradecer aos amigos Luiz Ricardo, Nemuel e Elaine pelos momentos de aprendizado nas disciplinas.

Agradeço à Genilda e toda a sua família pelo apoio e acolhida em sua casa sempre que precisei. Muito obrigado.

Aos amigos Carlos Henrique e Rodrigo Costa por todo apoio desde a graduação e pelas conversas sobre a matemática e a vida.

Aos amigos do IFCE: Diego, Luiz, Valricélio, Elano, Josafá e Ramom, por todo o suporte durante o processo deste trabalho, com a redução da carga horária.

Agradeço também à CAPES pela bolsa durante parte do doutorado.

# Resumo

Neste trabalho, nós apresentamos alguns resultados de rigidez de MOTS com fronteira livre em conjuntos de dados iniciais que satisfazem certas condições geométricas e de energia naturais. O primeiro resultado trata sobre hipersuperfícies compactas $\Sigma$ com fronteira livre em variedades Riemannianas $(M^{n+1}, g)$ com fronteira, onde a curvatura escalar de $M$ satisfaz $R^M \geq -(n+1)n$ ou $R^M \geq 0$ e a curvatura média de $\Sigma$ satisfaz $H^\Sigma \leq n$ ou $H^\Sigma \leq 0$, respectivamente. Na demonstração, é usada a teoria de MOTS com fronteira livre em conjuntos de dados iniciais com fronteira. Esse resultado foi motivado pelo trabalho de G. J. Galloway e H. C. Jang, que obtiveram o mesmo resultado para variedades $M$ com fronteira compacta $\Sigma$. No segundo resultado, é apresentada uma estimativa inferior para o volume de MOTS compactas estáveis $\Sigma$ com fronteira livre em conjuntos de dados iniciais $(M^{n+1}, g, K)$, com $n \geq 3$, assumindo que $\Sigma$ possui invariante de Yamabe negativo. No caso em que temos a igualdade na estimativa, é possível demonstrar que uma vizinhança exterior de $\Sigma$ em $M$ é isométrica a $([0,t) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$. Esse resultado foi motivado pelos trabalhos de A. Mendes, que fez o caso para MOTS fechadas, e de A. Barros e C. Cruz, que obtiveram estimativas *sharp* para o volume de hipersuperfícies compactas mínimas estáveis com invariante de Yamabe não-positivo satisfazendo a condição de fronteira livre em uma variedade Riemanniana com limitação inferior na curvatura escalar e na curvatura média da fronteira, e o resultado de rigidez quando se tem a igualdade no volume.

**Palavras-chave**: Fronteira livre. Invariante de Yamabe. MOTS estáveis. Rigidez.

# Abstract

In this work, we present some rigidity results for free boundary MOTS in initial data sets that satisfy certain natural geometric and energy conditions. The first result deals with compact free boundary hypersurfaces $\Sigma$ in Riemannian manifolds $(M^{n+1}, g)$ with boundary, where the scalar curvature of $M$ satisfies $R^M \geq -(n+1)n$ or $R^M \geq 0$ and the mean curvature of $\Sigma$ satisfies $H^\Sigma \leq n$ or $H^\Sigma \leq 0$, respectively. In the proof, we use the theory of free boundary MOTS in initial data sets with boundary. This result was motivated by the work of G. J. Galloway and H. C. Jang, who obtained the same result for manifolds $M$ with compact boundary $\Sigma$. In the second result, a lower bound is presented for the volume of compact stable free boundary MOTS $\Sigma$ in initial data sets $(M^{n+1}, g, K)$, with $n \geq 3$, assuming that $\Sigma$ has negative Yamabe invariant. In the case where the equality holds, it is possible to prove that an outer neighborhood of $\Sigma$ in $M$ is isometric to $([0, t) \times \Sigma, dt^2 + g_\Sigma)$. This result was motivated by the work of A. Mendes, who studied the case of closed MOTS, and the work of A. Barros and C. Cruz, who obtained sharp estimates for the volume of compact stable minimal hypersurfaces with nonpositive Yamabe invariant satisfying the free boundary condition in a Riemannian manifold with lower bounds on the scalar curvature and the mean curvature of the boundary, and the rigidity result when the volume saturates the inequality.

**Keywords**: Free boundary. Yamabe invariant. Stable MOTS. Rigidity.

# Sumário

Sumário . . . . . 8

1 INTRODUÇÃO . . . . . 9

2 PRELIMINARES . . . . . 15
2.1 Hipersuperfícies com fronteira livre . . . . . 15
2.2 O Invariante de Yamabe . . . . . 21

3 RESULTADOS PRINCIPAIS . . . . . 24
3.1 O Teorema de Decomposição . . . . . 24
3.2 Rigidez de MOTS com fronteira livre . . . . . 31

REFERÊNCIAS . . . . . 42

# 1 Introdução

Em geometria diferencial, temos diversos resultados que buscam entender a geometria das variedades Riemannianas que possuem uma cota inferior para a curvatura escalar. Em dimensão $n = 2$, podemos citar o clássico resultado devido a R. Schoen e S.-T. Yau [1], os quais provaram que qualquer superfície fechada que minimize área em uma variedade Riemanniana de dimensão três com curvatura escalar positiva é homeomorfa a $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{RP}^2$.

Nesse sentido, um outro resultado devido a Schoen e Yau [2] é o seguinte:

**Teorema 1** (Schoen-Yau, 1987)**.** *Seja $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com curvatura escalar positiva, $R^M > 0$. Se $\Sigma$ é uma hipersuperfície mínima fechada, two-sided e estável, então $\Sigma$ admite uma métrica de curvatura escalar positiva.*

Em [3], M. Cai provou o seguinte resultado de *splitting*, assumindo que $\Sigma$ minimiza volume no lugar de ser apenas estável.

**Teorema 2** (Cai, 2002)**.** *Seja $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com curvatura escalar não-negativa, $R^M \geq 0$. Suponha que $\Sigma$ é uma hipersuperfície mínima fechada, two-sided e que minimiza volume. Se $\Sigma$ não admite métrica de curvatura escalar positiva, então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Ricci plana.*

O caso do teorema acima em que $n = 2$ foi demonstrado por M. Cai e G. J. Galloway [4] (veja o comentário após o Teorema 5 abaixo).

Mais recentemente, G. J. Galloway e H. C. Jang [5] obtiveram um resultado de *splitting* para uma vizinhança da fronteira $\Sigma$ de uma variedade Riemanniana $(M, g)$ supondo uma limitação inferior na curvatura escalar de $M$ e uma limitação superior na curvatura média de $\Sigma$, admitindo que $\Sigma$ não possui métrica de curvatura escalar positiva. Para provar esse resultado, eles utilizaram alguns resultados da teoria de MOTS em conjuntos de dados iniciais ao considerar o conjunto de dados iniciais $(M, g, K = -\epsilon g)$, onde $\epsilon = 0$ ou $\epsilon = 1$. Mais precisamente, eles demonstraram o seguinte resultado:

**Teorema 3** (Galloway-Jang, 2020)**.** *Seja $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com fronteira compacta $\Sigma$. Fixado $\epsilon = 0$ ou $1$, assuma que:*

(1) *$M$ possui curvatura escalar $R^M \geq -\epsilon(n+1)n$;*

(2) *$\Sigma$ possui curvatura média $H^\Sigma \leq \epsilon n$;*

(3) *$\Sigma$ não admite métrica de curvatura escalar positiva;*

(4) *$\Sigma$ é localmente fracamente outermost.*

*Então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto warped $dt^2 + e^{2\epsilon t}h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Ricci plana.*

Abaixo, enunciaremos o primeiro resultado deste trabalho, o qual foi inspirado no Teorema 3 e cuja demonstração será apresentada na Seção 3.1 do Capítulo 3.

**Teorema A** (Teorema 3.1.2)**.** *Sejam $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com fronteira e $\Sigma$ uma hipersuperfície compacta com fronteira livre em $M$. Fixado $\epsilon = 0$ ou $1$, assuma que:*

(1) *$M$ tem curvatura escalar $R^M \geq -\epsilon(n+1)n$ e curvatura média da fronteira $H^{\partial M} \geq 0$;*

(2) *$\Sigma$ tem curvatura média $H^\Sigma \leq \epsilon n$;*

(3) *$\Sigma$ não admite métrica de curvatura escalar positiva com fronteira mínima;*

(4) *$\Sigma$ é localmente fracamente outermost com respeito a $H_0 = \epsilon n$.*

*Então existe uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto warped $dt^2 + e^{2\epsilon t}h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Ricci plana com fronteira totalmente geodésica.*

No final da seção 3.1, apresentamos exemplos que mostram a necessidade da condição (3) (para $\epsilon = 0$ ou 1) e da condição (4) (para $\epsilon = 1$) no Teorema A. Esses exemplos foram inspirados em Galloway e Jang (veja [3], *Remark* 1) no caso fechado.

Resultados de rigidez envolvendo a curvatura escalar têm atraído a atenção de geômetras ao longo dos anos, como poderemos perceber nos resultados a seguir. O primeiro é um resultado para superfícies devido a H. Bray, S. Brendle e A. Neves [6], que supõe a existência de uma esfera mergulhada que localmente minimiza área em uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante positiva, o qual nós parafraseamos da seguinte forma:

**Teorema 4** (Bray-Brendle-Neves, 2010)**.** *Seja $(M^3, g)$ uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M \geq 2c$, para alguma constante $c > 0$. Se $\Sigma^2 \subset M^3$ é uma esfera mergulhada que localmente minimiza área, então a área de $\Sigma$ satisfaz*

$$A(\Sigma) \leq \frac{4\pi}{c}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é a esfera redonda de raio $1/\sqrt{c}$. Em particular, se $M$ é completa e $\Sigma$ minimiza área em sua classe de isotopia, então o recobrimento universal de $M$ é isométrico ao produto $(\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + h)$, assumindo que vale a igualdade acima.*

O próximo teorema, devido a I. Nunes [7], estende o resultado de Bray, Brendle e Neves acima para o contexto de superfícies fechadas $\Sigma$ com gênero $g(\Sigma) \geq 2$ mergulhadas em uma variedade Riemanniana com curvatura escalar limitada inferiormente por uma constante negativa.

**Teorema 5** (Nunes, 2013)**.** *Seja $(M^3, g)$ uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M \geq -2c$, para alguma constante $c > 0$. Se $\Sigma^2 \subset M^3$ é uma superfície de Riemann fechada, mergulhada, two-sided, de gênero $g(\Sigma) \geq 2$ e que localmente minimiza área, então a área de $\Sigma$ satisfaz*

$$A(\Sigma) \geq \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ tem curvatura Gaussiana constante igual a $-c$. Em particular, se $M$ é completa e $\Sigma$ minimiza área em sua classe de isotopia, então o recobrimento universal de $M$ é isométrico ao produto $(\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + h)$, assumindo que vale a igualdade acima.*

Vale destacar que tanto o trabalho de Cai quanto os trabalhos de Bray, Brendle e Neves e de Nunes foram inspirados, em parte, no pioneiro trabalho de Cai e Galloway [4], onde, motivados por questões relacionadas com a topologia de buracos negros, eles resolveram um problema proposto por D. Fischer-Colbrie e R. Schoen [8], demonstrando o que nós parafraseamos da seguinte forma: se $(M^3, g)$ é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar não-negativa e $\Sigma^2 \subset M^3$ é um toro *two-sided* mergulhado que localmente minimiza área, então $M$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$ em uma vizinhança de $\Sigma$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é um toro plano (*i.e.* $M$ é plana em uma vizinhança de $\Sigma$); além disso, se $M$ é completa e $\Sigma$ minimiza área em sua classe de isotopia, então o recobrimento universal de $M$ é isométrico a $(\mathbb{R} \times \Sigma, dt^2 + h)$ (ou seja, $M$ é globalmente plana).

Apesar da semelhança entre os resultados de Bray-Brendle-Neves, Nunes e Cai-Galloway, suas demonstrações são bastante diferentes. Contudo, no ano de 2015, M. Micallef e V. Moraru [9] apresentaram uma demonstração unificada para esses importantes resultados. Isso permitiu que, um ano mais tarde, V. Moraru [10] estendesse o Teorema de Nunes para o caso de hipersuperfícies fechadas $\Sigma$ de dimensão $n \geq 3$.

**Teorema 6** (Moraru, 2016)**.** *Seja $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M \geq -2c$, para alguma constante $c > 0$. Se $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ é uma hipersuperfície fechada mergulhada two-sided com $\sigma(\Sigma) < 0$ que localmente minimiza volume, então o volume de $\Sigma$ satisfaz*

$$\mathrm{vol}(\Sigma) \geq \left(\frac{|\sigma(\Sigma)|}{2c}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Einstein com curvatura escalar $R^\Sigma = -2c$.*

Acima, $\sigma(\Sigma)$ representa o invariante de Yamabe de $\Sigma$ (*vide* Seção 2.2).

O caso de hipersuperfícies fechadas $\Sigma$ de dimensão $n \geq 2$ com $\sigma(\Sigma) \leq 0$ (*i.e.* que não admitem métrica de curvatura escalar positiva) em variedades Riemannianas com curvatura escalar não-negativa corresponde ao Teorema 2. Para hipersuperfícies de dimensão $n \geq 3$ com $\sigma(\Sigma) > 0$ em variedades com curvatura escalar positiva, apenas alguns casos especiais foram tratados até o momento: A. Barros *et al.* [11] estudaram o caso de hipersuperfícies $\Sigma$ de dimensão $n = 4$, assumindo que $(\Sigma, h)$ é Einstein; A. Mendes [12] estendeu o trabalho de A. Barros *et al.* para hipersuperfícies mais gerais (não necessariamente Einstein) de dimensão $n = 4$; e H. Deng [13] estudou o caso em que $n > 4$ e $(\Sigma, h)$ é Einstein.

Em 2020, A. Barros e C. Cruz [14] estenderam o Teorema 6 para hipersuperfícies compactas com fronteira livre. Vejamos:

**Teorema 7** (Barros-Cruz, 2020)**.** *Seja $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 3$, uma variedade Riemanniana com curvatura escalar $R^M$ limitada inferiormente e fronteira $\partial M$ convexa em média, $H^{\partial M} \geq 0$. Considere uma hipersuperfície $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ compacta, two-sided, propriamente mergulhada, com fronteira livre e que localmente minimiza volume.*

*I) Se $\inf R^M < 0$ e $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, então*

$$\mathrm{vol}(\Sigma) \geq \left( \frac{\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)}{\inf R^M} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Einstein com curvatura escalar $R^\Sigma = \inf R^M$ e fronteira $\partial\Sigma$ totalmente geodésica.*

*II) Se $R^M \geq 0$ e $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$, então existe uma vizinhança $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $(-\delta, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Ricci plana com fronteira $\partial\Sigma$ totalmente geodésica.*

Acima, $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ representa o invariante de Yamabe da variedade compacta $\Sigma$ com fronteira (*vide* Seção 2.2).

Ao longo dos anos, o estudo das MOTS (abreviação para *marginally outer trapped surfaces*, em inglês), que tem motivação na teoria da relatividade, tem atraído a atenção da comunidade acadêmica matemática, principalmente no campo da geometria diferencial. Nesse sentido, e ainda sobre resultados de rigidez, temos o seguinte resultado devido a Mendes [15] (as definições serão apresentadas na Seção 2.1):

**Teorema 8** (Mendes, 2019)**.** *Sejam $(M^3, g, K)$ um conjunto de dados iniciais e $\Sigma^2$ uma MOTS fechada fracamente outermost em $(M^3, g, K)$ de gênero $g(\Sigma) \geq 2$. Se $\mu - |J| \geq -c$ para alguma constante $c > 0$ e $K$ é 2-convexo, ambos em $M_+$, então a área de $\Sigma$ satisfaz*

$$A(\Sigma) \geq \frac{4\pi(g(\Sigma) - 1)}{c}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então:*

(1) *Existe uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ tem curvatura Gaussiana constante igual a $-c$;*

(2) *$K = a\, dt^2$ em $V$, onde $a \in C^\infty(V)$ depende apenas de $t \in [0, \delta)$;*

(3) *$\mu = -c$ e $J = 0$ em $V$.*

Para hipersuperfícies de dimensão $n \geq 3$, Mendes demonstrou o seguinte resultado:

**Teorema 9** (Mendes, 2019)**.** *Sejam $(M^{n+1}, g, K)$, $n \geq 3$, um conjunto de dados iniciais e $\Sigma^n$ uma MOTS fechada fracamente outermost em $(M^{n+1}, g, K)$ com invariante de Yamabe $\sigma(\Sigma) < 0$. Se $\mu - |J| \geq -c$ para alguma constante $c > 0$ e $K$ é $n$-convexo, ambos em $M_+$, então o volume de $\Sigma$ satisfaz*

$$\mathrm{vol}(\Sigma) \geq \left( \frac{|\sigma(\Sigma)|}{2c} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então:*

(1) *Existe uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Einstein com curvatura escalar $R^\Sigma = -2c$;*

(2) *$K = a\, dt^2$ em $V$, onde $a \in C^\infty(V)$ depende apenas de $t \in [0, \delta)$;*

(3) *$\mu = -c$ e $J = 0$ em $V$.*

Recentemente, A. Alaee, M. Lesourd e S.-T. Yau [16] estenderam o conceito de superfície mínima com fronteira livre para MOTS, onde, entre outras coisas, eles demonstraram o análogo do Teorema 8 para MOTS compactas com fronteira livre.

O segundo teorema deste trabalho foi inspirado nos resultados mencionados acima, o qual estende uma parte do trabalho de Alaee, Lesourd e Yau para MOTS compactas $\Sigma^n$, $n \geq 3$, com fronteira livre e invariante de Yamabe $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$. O caso de MOTS compactas com fronteira livre e invariante de Yamabe $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) \leq 0$ (*i.e.* que não admitem métrica de curvatura escalar positiva com fronteira mínima) foi tratado recentemente por Mendes [17].

Vejamos o que diz o nosso segundo resultado (as definições serão apresentadas na Seção 2.1):

**Teorema B** (Teorema 3.2.5)**.** *Sejam $(M^{n+1}, g, K)$, $n \geq 3$, um conjunto de dados iniciais com fronteira e $\Sigma^n$ uma MOTS compacta, estável, com fronteira livre e fracamente outermost em $(M^{n+1}, g, K)$ com invariante de Yamabe $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$. Se $\mu - |J| \geq -c$ para alguma constante $c > 0$, $(M, g, K)$ satisfaz a condição de energia dominante de fronteira e $K$ é $n$-convexo, tudo isso em $M_+$, então o volume de $\Sigma$ satisfaz*

$$\mathrm{vol}(\Sigma) \geq \left( \frac{|\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)|}{2c} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então:*

(1) *Existe uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Einstein com curvatura escalar $R^\Sigma = -2c$ e fronteira totalmente geodésica;*

(2) *$K = a\, dt^2$ em $V$, onde $a \in C^\infty(V)$ depende apenas de $t \in [0, \delta)$;*

(3) *$\mu = -c$ e $J = 0$ em $V$;*

(4) *A condição de energia dominante de fronteira é saturada ao longo de $V \cap \partial M$.*

No final da seção 3.2, apresentamos um exemplo de um conjunto de dados iniciais modelo do Teorema B.

Esta tese está organizada da seguinte forma: Na seção 2.1, apresentamos algumas definições e resultados preliminares para o Teorema A e, na seção 2.2, para o Teorema B. Na seção 3.1, apresentamos a prova do Teorema A. Finalmente, na seção 3.2, apresentamos a demonstração do Teorema B.

# 2 Preliminares

## 2.1 Hipersuperfícies com fronteira livre

Um *conjunto de dados iniciais* $(M, g, K)$ consiste de uma variedade Riemanniana $(M, g)$ e um $(0,2)$-tensor simétrico $K$ definido em $M$. Em $(M, g, K)$, definimos a *densidade de energia local* e a *densidade de corrente local* por

$$\mu = \frac{1}{2}\left(R^M - |K|^2 + (\operatorname{tr} K)^2\right) \quad \text{e} \quad J = \operatorname{div}(K - (\operatorname{tr} K)g),$$

respectivamente, onde $R^M$ é a curvatura escalar de $(M, g)$. Dizemos que o conjunto de dados iniciais $(M, g, K)$ satisfaz a *condição de energia dominante* (CED) se

$$\mu - |J| \geq 0 \quad \text{em} \quad M.$$

Neste trabalho, assumiremos que $M$ é uma variedade diferenciável com fronteira e denotaremos a segunda forma fundamental de $\partial M$ em $(M, g)$ por $\mathrm{II}^{\partial M}$. Mais precisamente,

$$\mathrm{II}^{\partial M}(Y, Z) = \langle \nabla_Y \varrho, Z \rangle, \quad Y, Z \in \mathfrak{X}(\partial M),$$

onde $\varrho$ é o vetor normal unitário exterior de $\partial M$ em $(M, g)$.

O *tensor momento* $\pi$ de $(M, g, K)$ é definido por

$$\pi = K - (\operatorname{tr} K)g.$$

Definimos $(\iota_\varrho \pi)^\top$ como a restrição de $\iota_\varrho \pi = \pi(\varrho, \cdot)$ aos campos vetoriais tangentes a $\partial M$ e dizemos que $(M, g, K)$ satisfaz a *condição de energia dominante de fronteira* (CEDF) se

$$H^{\partial M} \geq |(\iota_\varrho \pi)^\top| \quad \text{em} \quad \partial M.$$

A CEDF acima foi introduzida por S. Almaraz, L. L. de Lima e L. Mari [18] no contexto da demonstração de teoremas da massa positiva para conjuntos de dados iniciais assintoticamente planos ou assintoticamente hiperbólicos com fronteira não-compacta (veja [18, *Remark* 2.7] para uma motivação por trás da definição).

Seja $\Sigma$ uma hipersuperfície *two-sided* em $(M, g)$. Fixe um campo $N$ de vetores unitários normais a $\Sigma$ em $(M, g)$. As *curvaturas médias luminosas* $\theta^+$ e $\theta^-$ de $\Sigma$ em $(M, g, K)$ são definidas por

$$\theta^+ = \operatorname{tr}_\Sigma K + H^\Sigma \quad \text{e} \quad \theta^- = \operatorname{tr}_\Sigma K - H^\Sigma,$$

onde $H^\Sigma = \operatorname{div}_\Sigma N$ é a curvatura média de $\Sigma$ em $(M, g)$.

Após R. Penrose, dizemos que uma hipersuperfície $\Sigma$ está *aprisionada para o exterior* se $\theta^+ < 0$, *fracamente aprisionada para o exterior* se $\theta^+ \leq 0$ e *marginalmente aprisionada*

*para o exterior* se $\theta^+ = 0$. No último caso, dizemos que $\Sigma$ é uma MOTS (uma abreviação para *marginally outer trapped surface*, em inglês).

As *segundas formas fundamentais luminosas* $\chi^+$ e $\chi^-$ de $\Sigma$ em $(M, g, K)$ são definidas por

$$\chi^+ = K|_\Sigma + A \quad \text{e} \quad \chi^- = K|_\Sigma - A,$$

onde $A$ é a segunda forma fundamental de $\Sigma$ em $(M, g)$, ou seja,

$$A(Y, Z) = \langle \nabla_Y N, Z \rangle, \quad Y, Z \in \mathfrak{X}(\Sigma).$$

Observe que $\theta^\pm = \operatorname{tr} \chi^\pm$.

*Observação* 2.1.1. É importante ressaltar que conjunto de dados iniciais surgem de modo natural na teoria da relatividade geral. De fato, seja $M$ uma hipersuperfície tipo-espaço em um espaço-tempo, i.e. uma variedade Lorentziana tempo-orientada, $(\bar{N}, \bar{h})$. Seja $g$ a métrica Riemanniana em $M$ induzida por $\bar{h}$ e $K$ a segunda forma fundamental de $M$ em $(\bar{N}, \bar{h})$ com respeito ao normal unitário tipo-tempo que aponta para o futuro $u$ em $M$. Então $(M, g, K)$ é um conjunto de dados iniciais. Como anteriormente, seja $\Sigma$ uma hipersuperfície em $M$. Neste caso, $\chi^+$ e $\chi^-$ são as segundas formas fundamentais de $\Sigma$ em $(\bar{N}, \bar{h})$ com respeito aos normais

$$\ell^+ = u|_\Sigma + N \quad \text{e} \quad \ell^- = u|_\Sigma - N,$$

respectivamente, (veja a figura 1). Observe que $\theta^\pm = \operatorname{div}_\Sigma \ell^\pm$. Fisicamente, $\theta^+$ (resp. $\theta^-$) mede a divergência dos raios de luz apontando para fora (resp. apontando para dentro) que saem de $\Sigma$.

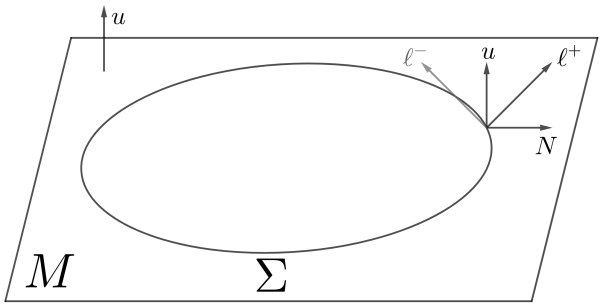


Figura 1 – Espaço-tempo

Seja $(\Sigma_t)_{|t|<\epsilon}$ uma variação de $\Sigma$ em $M$, $\Sigma = \Sigma_0$, com campo variacional

$$\mathcal{V} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi N \quad \text{para alguma} \quad \phi \in C^\infty(\Sigma).$$

Podemos ver a curvatura média luminosa $\theta^+ = \theta^+(t)$ de $\Sigma_t$ em $(M, g, K)$ como uma família a 1-parâmetro de funções definidas em $\Sigma$. É conhecido (veja [19]) que

$$\left.\frac{\partial \theta^+}{\partial t}\right|_{t=0} = L\phi + \left(-\frac{1}{2}(\theta^+)^2 + \theta^+ \tau\right)\phi, \tag{2.1}$$

onde

$$L\phi = -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi\rangle + \left(Q - |X|^2 + \operatorname{div} X\right)\phi$$

e

$$Q = \frac{1}{2}R^{\Sigma} - (\mu + J(N)) - \frac{1}{2}|\chi^+|^2.$$

Acima, $R^{\Sigma}$ é a curvatura escalar de $\Sigma$ com respeito à métrica induzida. Além disso, $X$ é o campo vetorial tangente a $\Sigma$ que é dual à 1-forma $K(N,\cdot)|_{\Sigma}$ e $\tau = \operatorname{tr} K$.

O operator $L$ acima é conhecido como *operador de estabilidade para MOTS*. Isto porque no caso Riemanniano, ou seja, quando $K \equiv 0$, uma MOTS nada mais é que uma hipersuperfície mínima e o operador $L$ se reduz ao clássico operador de estabilidade (operador de Jacobi) da teoria das superfícies mínimas.

Vale destacar que a noção de estabilidade para MOTS fechadas foi introduzida por L. Andersson, M. Mars e W. Simon [19]. No caso de MOTS capilares em conjuntos de dados iniciais com fronteira, a noção de estabilidade foi introduzida por A. Alaee, M. Lesourd e S.-T. Yau [16]. Neste trabalho, consideraremos apenas o caso de MOTS compactas com fronteira livre em conjuntos de dados iniciais $(M, g, K)$ com fronteira.

De agora em diante, assumiremos que $M$ é uma variedade diferenciável com fronteira e que $\Sigma$ é uma hipersuperfície compacta com fronteira propriamente mergulhada em $M$, ou seja, $\Sigma$ é mergulhada em $M$ e $\partial\Sigma = \Sigma \cap \partial M$.

Dizemos que $\Sigma$ possui *fronteira livre* em $(M, g)$ se $\Sigma$ intersecta $\partial M$ ortogonalmente, isto é, $\varrho = \nu$ ao longo de $\partial\Sigma$, onde $\nu$ é o vetor normal unitário exterior de $\partial\Sigma$ em $\Sigma$ com respeito à métrica induzida.

Uma MOTS compacta $\Sigma$ com fronteira livre em $(M, g, K)$ é dita *estável* (veja [16, *Definition* 5.1]) se existe uma função não-negativa $\phi \in C^{\infty}(\Sigma) \setminus \{0\}$ satisfazendo

$$\begin{cases} L\phi &= -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi\rangle + (Q - |X|^2 + \operatorname{div} X)\,\phi \geq 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ B\phi &= \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - \mathrm{II}^{\partial M}(N,N)\phi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Sigma. \end{cases}$$

Sem perda de generalidade, pelo princípio do máximo para funções não-positivas, podemos assumir que $\phi > 0$.

Suponha que $\Sigma$ é uma MOTS que separa em $(M, g, K)$, ou seja, $M \setminus \Sigma$ é um conjunto desconexo. O *exterior* de $\Sigma$, o qual denotamos por $M_+$, é formado por $\Sigma$ e pela região de $M \setminus \Sigma$ para a qual $N$ aponta. Dizemos que $\Sigma$ é *outermost* se nenhuma hipersuperfície homóloga a $\Sigma$, e contida em $M_+$, possui curvatura média luminosa $\theta^+ \leq 0$ ou, equivalentemente, se para qualquer hipersuperfície $\Sigma'$ homóloga a $\Sigma$ e contida em $M_+$, existe um ponto $p \in \Sigma'$ tal que $\theta^+(p) > 0$. Analogamente, dizemos que $\Sigma$ é *fracamente outermost* se nenhuma hipersuperfície homóloga a $\Sigma$, e contida em $M_+$, possui curvatura média luminosa $\theta^+ < 0$.

Dizemos que $K$ é *n-convexo* em $M_+$ se $\operatorname{tr}_{\pi} K \geq 0$ quaisquer que sejam $p \in M_+$ e $\pi \subset T_pM$, onde $\pi$ é um subespaço vetorial de dimensão $n$ de $T_pM$. Dizer que $K$ é

$n$-convexo é equivalente a dizer que a soma dos $n$ menores autovalores de $K$ é sempre não-negativa.

Os três próximos resultados são devidos a A. Mendes [17], que generalizou resultados devidos a G. J. Galloway e R. Schoen [20] para o contexto de MOTS compactas com fronteira livre em conjuntos de dados iniciais com fronteira.

**Lema 2.1.2** (Mendes, 2022)**.** Seja $(\Sigma^n, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana orientável, conexa e compacta com fronteira. Suponha que existe uma função $u \in C^\infty(\Sigma), u > 0$, tal que

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = -\Delta u + \left(\frac{1}{2}R^\Sigma - P\right) u \geq 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + H^{\partial\Sigma} u \geq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde $R^\Sigma$ é a curvatura escalar de $(\Sigma, g)$, $H^{\partial\Sigma}$ é a curvatura média de $\partial\Sigma$ em $(\Sigma, g)$ e $P$ é uma função não-negativa em $\Sigma$. Então vale uma das seguintes condições:

(1) $\Sigma$ admite uma métrica de curvatura escalar positiva com fronteira mínima;

(2) $(\Sigma, g)$ é Ricci plana com fronteira totalmente geodésica, $P = 0$ e $u$ é constante.

A conclusão (2) do lema anterior será importante para os nossos propósitos. De fato, uma das hipóteses do Teorema 3.1.2 (Teorema A da Introdução) é que $\Sigma$ não satisfaz a condição (1) acima. Portanto, ao mostrarmos que estamos nas condições do Lema 2.1.2, teremos necessariamente a validade da condição (2).

**Lema 2.1.3** (Mendes, 2022)**.** Seja $(M^{n+1}, g, K)$, $n \geq 2$, um conjunto de dados iniciais com fronteira e $\Sigma$ uma MOTS compacta com fronteira livre em $(M, g, K)$. Se $\Sigma$ é estável, então o primeiro autovalor $\lambda_1(\mathcal{L}_0)$ de $\mathcal{L}_0 = -\Delta + Q$ em $\Sigma$ com condição de fronteira de Robin $B_0 u = Bu + \langle X, \nu\rangle u = 0$ em $\partial\Sigma$ é não-negativo.

É bastante conhecido que o primeiro autovalor $\lambda_1(\mathcal{L}_0)$ do operador $\mathcal{L}_0$ definido no lema anterior pode ser caracterizado da seguinte forma:

$$\lambda_1(\mathcal{L}_0) = \inf_{u \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Sigma (|\nabla u|^2 + Qu^2)dv - \int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N, N) - \langle X, \nu\rangle) u^2 ds}{\displaystyle\int_\Sigma u^2 dv}.$$

**Teorema 2.1.4** (Mendes, 2022)**.** *Sejam $(M^{n+1}, g, K)$, $n \geq 2$, um conjunto de dados iniciais com fronteira e $\Sigma$ uma MOTS compacta estável com fronteira livre em $(M, g, K)$. Suponha que $(M, g, K)$ satisfaz a condição de energia dominante, $\mu \geq |J|$, e a condição de energia dominante de fronteira, $H^{\partial M} \geq |(\iota_\varrho \pi)^\top|$. Se $\Sigma$ não admite uma métrica de curvatura escalar positiva com fronteira mínima e é fracamente outermost em $(M, g, K)$, então existe uma vizinhança exterior $V \cong [0, \delta) \times \Sigma$ de $\Sigma$ em $M$ tal que*

$$g|_V = \varphi^2 dt^2 + h_t,$$

*onde* $\varphi : V \to \mathbb{R}$ *é uma função positiva e* $h_t$ *é a métrica induzida em* $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma$. *Além disso:*

(1) $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma$ *é uma MOTS com fronteira livre e* $\Sigma_t$ *tem segunda forma fundamental do tipo luz nula.*

(2) $\Sigma_t$ *é Ricci plana e possui fronteira totalmente geodésica com respeito a métrica induzida.*

(3) *A condição de energia dominante é saturada em* $V$ *e* $J|_{\Sigma_t} = 0$.

(4) *A condição de energia dominante de fronteira é saturada em* $\partial\Sigma_t$ *e* $(\iota_\varrho \pi)^\top\Big|_{\partial\Sigma_t} = 0$.

Um passo crucial para Galloway e Jang provarem o Teorema 3 da Introdução foi demonstrar que $\Sigma$ é uma MOTS no conjunto especial de dados iniciais $(M, g, K = -\epsilon g)$. Para isso, eles usaram um resultado bastante conhecido devido a L. Andersson e J. Metzger (veja [21, *Lemma* 5.2]).

No nosso caso, necessitamos de um resultado similar para hipersuperfícies compactas com fronteira livre. Este será o conteúdo do Lema 3.1.1 mais adiante. Mas, antes, iremos enunciar um princípio do máximo para equações parabólicas que será usado na demonstração do lema.

Sejam $u : \Sigma \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $T > 0$, uma função e $\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + Pu$ um operador parabólico, onde $P$ é dado por

$$Pu = -a^{ij}(x,t)\nabla_i\nabla_j u - b^i(x,t)\nabla_i u - c(x,t)u,$$

com $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty(\Sigma \times [0, T])$.

Além disso, seja $f : \mathbb{R} \times \Sigma \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

$$f(0, x, t) \geq 0,$$
$$|f(s, x, t) - f(0, x, t)| \leq K(x, t) \cdot |s| \quad \text{para} \quad |s| \leq \rho,$$

onde $\rho > 0$ é uma constante positiva e $K \in L^\infty(\Sigma \times [0, T])$.

Considere um campo vetorial $v$ definido em $\partial\Sigma \times [0, T]$ tal que, em cada ponto, $v$ é tangente a $\Sigma$ e satisfaz $g(v, \nu) > 0$, onde $\nu$ denota o campo normal unitário exterior de $\partial\Sigma$ em $\Sigma$.

Finalmente, podemos enunciar o princípio do máximo:

**Teorema 2.1.5** (Princípio do Máximo para Equações Parabólicas)**.** *Sejam* $\mathcal{L}$, $f$ *e* $v$ *como acima e* $u : \Sigma \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $u$ *é de classe* $C^{2,1}$ *em uma vizinhança de cada ponto* $(x, t) \in \Sigma \times [0, T]$ *com* $|u(x, t)| < \varepsilon$, *onde* $\varepsilon > 0$ *é uma constante pequena. Se* $u$ *satisfaz as condições:*

(*i*) $u(\cdot, 0) \geq 0$;

*(ii)* $\mathcal{L}u(x,t) \geq 0$ *para todo* $(x,t) \in \Sigma \times (0,T]$ *com* $|u(x,t)| < \rho$*;*

*(iii)* $\dfrac{\partial u}{\partial v}(x,t) = f(u(x,t),x,t)$ *para cada* $(x,t) \in \partial\Sigma \times (0,T]$ *com* $|u(x,t)| < \rho$*;*

*então* $u \geq 0$*. Além disso, se* $u(\,\cdot\,,0)$ *não é identicamente nula, então* $u(x,t) > 0$ *para todo* $(x,t) \in \Sigma \times (0,T) \cup \operatorname{int}\Sigma \times \{T\}$*.*

Esse resultado pode ser consultado em detalhes em [22].

*Observação* 2.1.6. Vale destacar que o princípio do máximo acima será usado em uma situação bastante especial: $u$ será de classe $C^\infty$ em $\Sigma \times [0,T]$, $\mathcal{L}u = 0$ em $\Sigma \times [0,T]$, $\frac{\partial u}{\partial v}(x,t) = f(u(x,t),x,t)$ para cada $(x,t) \in \partial\Sigma \times [0,T]$ e $|f(s,x,t) - f(0,x,t)| = K(x,t)\cdot|s|$ para todo $(s,x,t) \in \mathbb{R} \times \Sigma \times [0,T]$, dispensando os papeis das constantes $\rho > 0$ e $\varepsilon > 0$.

A seguir, apresentaremos a definição do fluxo pela curvatura média com condição de Neumann na fronteira (fronteira livre).

Para isso, considere uma hipersuperfície $S$ em $\mathbb{R}^{n+1}$ e uma variedade orientável compacta $\Sigma^n$ com fronteira $\partial\Sigma$. Além disso, seja $F_0 : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão com $\Sigma_0 := F_0(\Sigma)$ tal que

$$\begin{cases} \partial\Sigma_0 = F_0(\partial\Sigma) = \Sigma_0 \cap S, \\ \langle N_0, \varrho \circ F_0 \rangle(x) = 0, \quad \forall x \in \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde $N_0$ e $\varrho$ são campos unitários normais a $\Sigma_0$ e $S$, respectivamente.

**Definição 2.1.7.** Seja $F : \Sigma^n \times [0,T) \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, com $F(\,\cdot\,,0) = F_0$, uma família de imersões. Dizemos que $F$ evolui pelo fluxo da curvatura média com fronteira livre se valem as seguintes condições:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F(x,t) &= \vec{H}(x,t), \quad \forall (x,t) \in \Sigma \times [0,T), \\ F(\partial\Sigma,t) &\subset S, \quad \forall t \in [0,T), \\ \langle N, \varrho \circ F \rangle(x,t) &= 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Sigma \times [0,T), \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\vec{H}$ denota o vetor curvatura média da imersão.

A demonstração da existência do fluxo pela curvatura média com fronteira livre para tempo $T > 0$ pequeno foi apresentada por A. Stahl [22], a qual foi inspirada na demonstração da existência do fluxo pela curvatura média dada por K. Ecker e G. Huisken [23] no caso em que $\Sigma$ é fechada. É possível demonstrar que a existência do fluxo pela curvatura média com fronteira livre para tempo pequeno vale em variedades Riemannianas $(M^{n+1}, g)$ com fronteira $\partial M$ ao tomarmos $S = \partial M$ e $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta com fronteira livre.

Para aplicarmos o Princípio do Máximo para Equações Parabólicas (Teorema 2.1.5) a uma função $u$, precisamos verificar que $u$ satisfaz as condições $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$ do

Teorema 2.1.5. O próximo resultado nos auxiliará mais adiante a verificar a condição $(iii)$.

Seja $f : \Sigma \times (-\delta, \delta) \to M$ uma variação de $\Sigma$ tal que, para cada $t \in (-\delta, \delta)$, a aplicação $f_t : \Sigma \ni x \longmapsto f(x,t) \in M$ é uma imersão com $f_t(\partial\Sigma) \subset \partial M$. Usaremos $\Sigma_t$, $N_t$ e $H^{\Sigma_t}$ para representar $f_t(\Sigma)$, um vetor unitário normal a $\Sigma_t$ e a curvatura média de $\Sigma_t$ (*i.e.* $H^{\Sigma_t} = \operatorname{div}_{\Sigma_t} N_t$), respectivamente.

Como de costume, usaremos

$$\partial_t = \frac{\partial f}{\partial t}$$

para representar o campo variacional de $f$. Decompondo o campo variacional $\partial_t$ em parte tangente e parte normal, nós temos:

$$\partial_t = \partial_t^T + \phi_t N_t,$$

onde $\phi_t$ é a função em $\Sigma_t$ definida por $\phi_t = g(\partial_t, N_t)$.

No caso em que o campo variacional possui apenas a parte normal, ou seja, $\partial_t^T = 0$, o resultado abaixo nos mostra como calcular a derivada de $\phi_t$ em relação a $\nu_t$. A sua demonstração pode ser consultada em [24].

**Proposição 2.1.8** (Ambrozio, 2015)**.** *Se $\Sigma_0$ possui fronteira livre e $\partial_t^T = 0$ em $t = 0$, então*

$$\partial_t g(N_t, \varrho)\,|_{t=0} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial \nu_0} + g(N_0, \nabla_{N_0}\varrho)\,\phi_0.$$

Para finalizar esta seção, enunciaremos um lema devido a Mendes [15], o qual foi inspirado nas técnicas utilizadas por Micallef e Moraru [9] e Moraru [10] e será usado na demonstração do Teorema B da introdução.

**Lema 2.1.9** (Mendes, 2019)**.** Sejam $f \in C^1([0,\delta))$ e $\eta, \xi, \rho \in C^0([0,\delta)$ funções tais que $\max\{f, \rho\} \geq 0$, $\xi \geq 0$, $\eta > 0$ e $f(0) = 0$. Se

$$f'(t)\eta(t) - f(t)\rho(t) \leq \int_0^t f(s)\xi(s)ds, \quad \forall t \in [0,\delta),$$

então $f \leq 0$. Em particular, se $f$ é não-negativa, então $f \equiv 0$.

## 2.2 O Invariante de Yamabe

O clássico problema de Yamabe, resolvido por N. S. Trudinger [25], T. Aubin [26] e R. Schoen [27], afirma que na classe conforme de qualquer métrica Riemanniana $g$ em uma variedade fechada $\Sigma^n$, $n \geq 3$, sempre existe uma métrica $\bar{g}$ com curvatura escalar constante.

No caso de variedades $\Sigma^n$, $n \geq 3$, compactas com fronteira, há duas maneiras naturais de estender o problema de Yamabe. São elas:

(a) Dada uma métrica Riemanniana $g$ em $\Sigma$, existe uma métrica $\bar{g}$ na classe conforme de $g$ com curvatura escalar constante e fronteira mínima?

(b) Dada uma métrica Riemanniana $g$ em $\Sigma$, existe uma métrica $\bar{g}$ na classe conforme de $g$ com curvatura escalar identicamente nula e curvatura média da fronteira constante?

Os problemas acima foram propostos e estudados pela primeira vez por J. F. Escobar [28, 29]. Em seguida, vários matemáticos se debruçaram sobre esses problemas até resolvê-los completamente (veja [30, 31, 32, 33, 34]).

Não é difícil verificar que $\bar{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$, $\varphi \in C^\infty(\Sigma)$, $\varphi > 0$, é uma solução para o problema de Yamabe com fronteira (a) (resp. (b)) se, e somente se, $\varphi$ é um ponto crítico do funcional

$$Q_g^{a,b}(\varphi) = \frac{\displaystyle\int_\Sigma \left( \frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla \varphi|^2 + R_g^\Sigma \varphi^2 \right) dv + 2 \int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma} \varphi^2 ds}{\left( a \left( \displaystyle\int_\Sigma \varphi^{\frac{2n}{n-2}} dv \right) + b \left( \displaystyle\int_{\partial\Sigma} \varphi^{\frac{2(n-1)}{n-2}} ds \right)^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

com $(a,b) = (1,0)$ (resp. $(a,b) = (0,1)$), onde $R_g^\Sigma$ é a curvatura escalar de $(\Sigma, g)$ e $H_g^{\partial\Sigma}$ é a curvatura média de $\partial\Sigma$ em $(\Sigma, g)$. Além disso, $dv$ e $ds$ denotam os elementos de volume de $\Sigma$ e $\partial\Sigma$, respectivamente, com respeito à métrica $g$.

A *constante de Yamabe* $Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma)$ de $(\Sigma, g)$ é definida por

$$Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) = \inf_{\varphi \in C^\infty(\Sigma),\, \varphi > 0} Q_g^{a,b}(\varphi).$$

Dizemos que $\bar{g} = \varphi^{\frac{4}{n-2}} g$ é uma *métrica de Yamabe* se $\varphi$ atinge a constante de Yamabe, ou seja, $Q_g^{a,b}(\varphi) = Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Denotamos por $[g]$ a classe conforme de $g$, *i.e.* $[g] = \{\varphi^{\frac{4}{n-2}} g; \varphi \in C^\infty(\Sigma), \varphi > 0\}$, e por $\mathcal{C}(\Sigma)$ o conjunto de todas as classes conformes de métricas em $\Sigma$. Não é difícil verificar que $Q_g^{a,b}(\Sigma)$ é um invariante conforme, ou seja, que se $\bar{g}$ e $g$ pertencem a mesma classe conforme, então $Q_{\bar{g}}^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) = Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Por isso, muitas vezes, denotamos $Q_g^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma)$ por $Q_{[g]}^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Definimos o *invariante de Yamabe* $\sigma^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma)$ de uma variedade compacta $\Sigma$ com fronteira tomando o supremo das constantes de Yamabe sobre todas as classes conformes de métricas em $\Sigma$:

$$\sigma^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma) := \sup_{[g] \in \mathcal{C}(\Sigma)} Q_{[g]}^{a,b}(\Sigma, \partial\Sigma).$$

Para finalizar, apresentaremos dois resultados que serão usados nas demonstrações dos principais teoremas deste trabalho. O primeiro é um resultado devido a Escobar [35], o qual trata sobre a unicidade de métricas conformes:

**Teorema 2.2.1** (Escobar, 2003)**.** *Seja $(\Sigma^n, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com fronteira. Se $\bar{g} \in [g]$ é tal que $R^{\Sigma}_{\bar{g}} = R^{\Sigma}_{g} \leq 0$ e $H^{\partial\Sigma}_{\bar{g}} = H^{\partial\Sigma}_{g} \leq 0$, então $\bar{g} = g$.*

O segundo é um resultado devido a T. Cruz e A. S. Santos [36, *Proposition* 5.3] que nos dá condições para que métricas de Yamabe em variedades compactas com fronteira sejam Einstein, o qual nós parafraseamos da seguinte forma:

**Proposição 2.2.2** (Cruz-Santos, 2023)**.** *Seja $\Sigma^n$, $n \geq 3$, uma variedade compacta com fronteira cujo invariante de Yamabe $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$ é negativo. Suponha que $g$ é uma métrica em $\Sigma$ que realiza $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$, ou seja, $Q^{1,0}_{g}(\Sigma, \partial\Sigma) = \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Então toda métrica de Yamabe em $[g]$ é Einstein com fronteira totalmente geodésica.*

# 3 Resultados Principais

## 3.1 O Teorema de Decomposição

Nesta seção, apresentaremos a demonstração do Teorema A da Introdução (Teorema 3.1.2 abaixo), o qual foi inspirado no trabalho de G. J. Galloway e H. C. Jang [5]. Mas, antes, demonstraremos um resultado auxiliar:

**Lema 3.1.1.** Sejam $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com fronteira e $\Sigma$ uma hipersuperfície compacta com fronteira livre em $(M, g)$ cuja curvatura média satisfaz $H^\Sigma \leq \epsilon n$ e $H^\Sigma \not\equiv \epsilon n$, onde $\epsilon = 0$ ou $1$ está fixado. Então, dado $r > 0$, existe uma hipersuperfície compacta $\Sigma'$ com fronteira livre em $(M, g)$ que está contida em uma $r$-vizinhança exterior de $\Sigma$ em $M$ e satisfaz $H^{\Sigma'} < \epsilon n$ e $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$.

*Demonstração.* Considere o tensor $K = -\epsilon g$ e o *fluxo pela curvatura média luminosa com fronteira livre* $F : \Sigma \times [0, T) \to (M, g, K)$ definido por

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}F &= -\theta^+ N \quad \text{em} \quad \Sigma \times [0, T), \\ F(\partial\Sigma, t) &\subset \partial M, \quad \forall t \in [0, T), \\ \langle N, \varrho \circ F \rangle &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Sigma \times [0, T), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $F_0 = i$ é a aplicação inclusão $i : \Sigma \hookrightarrow M$. Como $\theta^+ = H^\Sigma + \mathrm{tr}_\Sigma K = H^\Sigma - \epsilon n$, temos que

$$\frac{d}{dt}F = -(H^\Sigma - \epsilon n)N.$$

Assim, para $\epsilon = 0$, o fluxo (3.1) assume a forma do fluxo (2.2), o qual, como mencionado anteriormente, possui solução para tempo $T > 0$ pequeno. No caso em que $\epsilon = 1$, a demonstração da existência de (3.1) para tempo pequeno pode ser feita de maneira totalmente análoga à demonstração da existência de (2.2).

Para concluir a demonstração do lema, usaremos o Princípio do Máximo para Equações Parabólicas (Teorema 2.1.5) para garantir que $\theta^+ < 0$ em $\Sigma_t = F(\Sigma, t)$ para cada $t \in (0, T)$.

Em primeiro lugar, segue de (2.1) e (3.1) que

$$\frac{\partial\theta^+}{\partial t} = -L_t\theta^+ = \Delta\theta^+ - 2\langle X, \nabla\theta^+\rangle - \mathcal{Q}\theta^+,$$

onde

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}R^\Sigma - (\mu + J(N)) - \frac{1}{2}|\chi^+|^2 - |X|^2 + \mathrm{div}\, X - \frac{1}{2}(\theta^+)^2 + \theta^+\tau,$$

com todas as quantidades geométricas sendo calculadas em $\Sigma_t$.

Agora, fixe $T_0 \in (0,T)$ e defina $u : \Sigma \times [0,T_0] \to \mathbb{R}$ por $u = -e^{-t}\theta^+$. Queremos verificar que $u$ satisfaz as condições $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$ do Teorema 2.1.5. Como $H^\Sigma \leq \epsilon n$, segue que $\theta^+ = H^\Sigma - \epsilon n \leq 0$ em $\Sigma$. Portanto, vale o item $(i)$, ou seja, $u(\,\cdot\,,0) \geq 0$.

Para verificar a condição $(ii)$, observe que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) u &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-e^{-t}\theta^+\right) - \Delta u \\ &= e^{-t}\theta^+ - e^{-t}\frac{\partial \theta^+}{\partial t} - \Delta u \\ &= -u - e^{-t}\left(\Delta\theta^+ - 2\langle X, \nabla\theta^+\rangle - \mathcal{Q}\theta^+\right) - \Delta u \\ &= -u + \Delta u - 2\langle X, \nabla u\rangle - \mathcal{Q}u - \Delta u \\ &= -2\langle X, \nabla u\rangle - (\mathcal{Q}+1)u.\end{aligned}$$

Segue então que

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + Pu = 0,$$

onde $Pu = -\Delta u + 2\langle X, \nabla u\rangle + (\mathcal{Q}+1)u$. Isso mostra que a condição $(ii)$ é satisfeita.

Por fim, segue da Proposição 2.1.8 e da equação (3.1) que $\frac{\partial \theta^+}{\partial \nu} = \mathrm{II}^{\partial M}(N,N)\theta^+$ e, portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \mathrm{II}^{\partial M}(N,N)u \quad \text{em} \quad \partial\Sigma_t.$$

Assim, definindo $f : \mathbb{R} \times \Sigma \times [0,T_0] \to \mathbb{R}$ por $f(s,x,t) = \mathrm{II}^{\partial M}(N,N)s$, nós temos:

(a) $f(0,x,t) = 0$;

(b) $|f(s,x,t) - f(0,x,t)| = |\,\mathrm{II}^{\partial M}(N,N)| \cdot |s|$.

Isso garante que a condição $(iii)$ também é satisfeita. Como $u(\,\cdot\,,0) \not\equiv 0$, pois $H^\Sigma \not\equiv \epsilon n$, segue do Teorema 2.1.5 que $u > 0$ em $\Sigma \times (0,T_0) \cup \operatorname{int}\Sigma \times \{T_0\}$. Uma vez que isso vale para todo $T_0 \in (0,T)$, temos que $\theta^+ < 0$ em $\Sigma_t$ para cada $t \in (0,T)$. Portanto, o fluxo $F$ evolui a hipersuperfície $\Sigma$ na direção de $N$. Em particular, para $t > 0$ suficientemente pequeno, $\Sigma_t$ será uma hipersuperfície mergulhada que pertence a uma $r$-vizinhança exterior de $\Sigma$ e satisfaz $\Sigma \cap \Sigma_t = \emptyset$. Basta então tomar $\Sigma' = \Sigma_t$. □

Sejam $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com fronteira e $\Sigma^n \subset M^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta propriamente mergulhada. Fixe $H_0 \in \mathbb{R}$ tal que $H^\Sigma \leq H_0$. Se $\Sigma$ é uma hipersuperfície que separa em $(M,g)$, dizemos que $\Sigma$ é *fracamente outermost com respeito a* $H_0$ se não existe nenhuma hipersuperfície $\Sigma'$ com curvatura média $H^{\Sigma'} < H_0$ que esteja contida no exterior $M_+$ de $\Sigma$ e que seja homóloga a $\Sigma$. Por sua vez, dizemos que $\Sigma$ é *localmente fracamente outermost com respeito a* $H_0$ se existe uma vizinhança $U$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $\Sigma$ é fracamente *outermost* com respeito a $H_0$ em $(U, g|_U)$.

Podemos então demonstrar o nosso primeiro teorema:

**Teorema 3.1.2.** *Sejam $(M^{n+1}, g)$, $n \geq 2$, uma variedade Riemanniana com fronteira e $\Sigma$ uma hipersuperfície compacta com fronteira livre em $M$. Fixado $\epsilon = 0$ ou $1$, assuma que:*

(1) *$M$ tem curvatura escalar $R^M \geq -\epsilon(n+1)n$ e curvatura média da fronteira $H^{\partial M} \geq 0$;*

(2) *$\Sigma$ tem curvatura média $H^{\Sigma} \leq \epsilon n$;*

(3) *$\Sigma$ não admite métrica de curvatura escalar positiva com fronteira mínima;*

(4) *$\Sigma$ é localmente fracamente outermost com respeito a $H_0 = \epsilon n$.*

*Então existe uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta)\times\Sigma$ com a métrica produto warped $dt^2+e^{2\epsilon t}h$, onde $h = g|_{\Sigma}$ e $(\Sigma, h)$ é Ricci plana com fronteira totalmente geodésica.*

*Demonstração.* Considere o conjunto de dados iniciais $(M, g, K)$ com $K = -\epsilon g$.

Afirmamos que $(M, g, K)$ satisfaz a CED. De fato, sendo $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ um referencial ortonormal em $M$, temos que

$$\operatorname{tr} K = \sum_{i=1}^{n+1} K(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n+1}(-\epsilon g(e_i, e_i)) = -\epsilon(n+1)$$

e

$$|K|^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1} K(e_i, e_j)^2 = \sum_{i,j=1}^{n+1}(-\epsilon g(e_i, e_j))^2 = \epsilon^2(n+1).$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2}(R^M + (\operatorname{tr} K)^2 - |K|^2) \\ &= \frac{1}{2}(R^M + \epsilon^2(n+1)^2 - \epsilon^2(n+1)) \\ &= \frac{1}{2}(R^M + \epsilon^2(n+1)n) \\ &= \frac{1}{2}(R^M + \epsilon(n+1)n), \end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do fato de que $\epsilon = 0$ ou $1$. Então, pela hipótese (1), temos que $\mu \geq 0$. Além disso,

$$J = \operatorname{div}(K - (\operatorname{tr} K)g) = \operatorname{div}(\epsilon n g) = 0.$$

Assim, $\mu - |J| \geq 0$, e a condição de energia dominante é satisfeita.

Por outro lado, sendo $\pi = K - (\operatorname{tr} K)g = \epsilon n g$ e $(\iota_{\varrho}\pi)^{\top} = \pi(\varrho, \cdot)|_{\partial M}$, temos que

$$(\iota_{\varrho}\pi)^{\top} = \epsilon n g(\varrho, \cdot)|_{\partial M} = 0,$$

tendo em vista que $\varrho$ é normal à fronteira de $M$. Assim, também vale a condição de energia dominante de fronteira, pois $H^{\partial M} \geq 0 = |(\iota_\varrho \pi)^\top|$.

**Afirmação 1:** $\Sigma$ é uma MOTS localmente fracamente *outermost* em $(M, g, K = -\epsilon g)$.

Em primeiro lugar, observe que a curvatura média luminosa $\theta^+$ de uma hipersuperfície $\Sigma'$ em $(M, g, K = -\epsilon g)$ é dada por $\theta^+ = H^{\Sigma'} - \epsilon n$. Assim, dizer que $\Sigma$ é uma MOTS localmente fracamente *outermost* em $(M, g, K = -\epsilon g)$ equivale a dizer que $H^\Sigma \equiv \epsilon n$ e que $\Sigma$ é localmente fracamente *outermost* em $(M, g)$ com respeito a $H_0 = \epsilon n$. Portanto, precisamos verificar apenas que $H^\Sigma = \epsilon n$ em $\Sigma$ (em razão da hipótese (4) do teorema).

Suponha que $H^\Sigma \not\equiv \epsilon n$. Como $H^\Sigma \leq \epsilon n$, segue do Lema 3.1.1 que, dada uma vizinhança exterior $U$ de $\Sigma$ em $M$, existe uma hipersuperfície $\Sigma' \subset U$ tal que $H^{\Sigma'} < \epsilon n$, o que contradiz o fato de $\Sigma$ ser localmente fracamente *outermost* com respeito a $H_0 = \epsilon n$. Assim, $H^\Sigma \equiv \epsilon n$.

**Afirmação 2:** $\Sigma$ é uma MOTS estável em $(M, g, K = -\epsilon g)$.

Queremos provar que existe um função positiva $\phi \in C^\infty(\Sigma)$ tal que

$$\begin{cases} L\phi &= -\Delta\phi + 2\langle X, \nabla\phi\rangle + (Q - |X|^2 + \operatorname{div} X)\,\phi \geq 0 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ B\phi &= \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} - \mathrm{II}^{\partial M}(N, N)\phi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Sigma, \end{cases}$$

onde

$$Q = \frac{1}{2}R^\Sigma - (\mu + J(N)) - \frac{1}{2}|\chi^+|^2.$$

Para isso, observe que, sendo $K(N, \cdot)|_\Sigma = -\epsilon g(N, \cdot)|_\Sigma = 0$, uma vez que $N$ é normal a $\Sigma$, temos $X \equiv 0$. Além disso, vimos acima que $\mu = \frac{1}{2}(R^M + \epsilon(n+1)n)$ e que $J = 0$. Portanto, o operador de estabilidade para MOTS se reduz a

$$L\phi = -\Delta\phi + Q\phi$$

com

$$Q = \frac{1}{2}\left(R^\Sigma - R^M - \epsilon(n+1)n - |\chi^+|^2\right);$$

em particular, $L$ é simétrico. Logo, existe uma autofunção positiva $\phi_1$ de $L$ associada ao primeiro autovalor $\lambda_1(L)$ com condição de fronteira de Robin:

$$\begin{cases} L\phi_1 &= \lambda_1(L)\phi_1 \quad \text{em} \quad \Sigma, \\ B\phi_1 &= 0 \quad \text{em} \quad \partial\Sigma. \end{cases}$$

Afirmamos que $\lambda_1(L) \geq 0$. Caso contrário, tomando uma variação $(\Sigma_t)$ de $\Sigma$ em $M$ com campo variacional $\mathcal{V} = \phi_1 N$, segue de (2.1) que

$$(\theta^+)'(0) = L\phi_1 = \lambda_1(L)\phi_1 < 0,$$

onde $(\theta^+)'(t)$ representa a derivada de $\theta^+(t)$ em relação a $t$. Logo, $\theta^+(t) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno, o que contradiz o fato de $\Sigma$ ser uma MOTS localmente fracamente *outermost*. Isso demonstra que $\lambda_1(L) \geq 0$, o que garante que $\Sigma$ é estável.

Agora estamos nas hipóteses do Teorema 2.1.4, de onde segue que existem uma vizinhança exterior $V \cong [0,\delta) \times \Sigma$ de $\Sigma$ em $M$ e coordenadas $(t, x_i)$ em $V$ de modo que a métrica $g$ pode ser escrita da forma

$$g = \varphi^2 dt^2 + h_{ij} dx_i dx_j \quad \text{em} \quad V,$$

onde $\varphi = \varphi(t, x_i)$ é positiva, $h_t = h_{ij}(t, x_i) dx_i dx_j$ é a métrica induzida em $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma$. Além disso, $\Sigma_t$ é uma MOTS com fronteira livre em $(M, g, K = -\epsilon g)$ para cada $t \in [0, \delta)$. Então, segue que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu_t} = \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t)\varphi \quad \text{em} \quad \partial\Sigma_t,$$

onde $\nu_t$ é o normal unitário exterior de $\partial\Sigma_t$ em $(\Sigma_t, h_t)$.

**Afirmação 3:** $\varphi$ é constante em cada $\Sigma_t$.

De fato, sendo $\Sigma_t$ uma MOTS para cada $t \in [0, \delta)$ e $\partial_t = \varphi N_t$ o campo variacional da variação $(\Sigma_t)$, segue de (2.1) que

$$0 = \frac{\partial \theta^+}{\partial t} = L_t \varphi = -\Delta\varphi + 2\langle X_t, \nabla\varphi\rangle + (Q_t - |X_t|^2 + \operatorname{div} X_t)\varphi,$$

onde

$$Q_t = \frac{1}{2} R^{\Sigma_t} - (\mu + J(N_t)) - \frac{1}{2}|\chi_t^+|^2.$$

Por outro lado, como $K(N_t, \cdot)|_{\Sigma_t} = -\epsilon g(N_t, \cdot)|_{\Sigma_t} = 0$, temos $X_t \equiv 0$. Além disso, como vimos acima, $\mu = \frac{1}{2}(R^M + \epsilon(n+1)n)$ e $J = 0$. Portanto,

$$-\Delta\varphi + \left(\frac{1}{2} R^{\Sigma_t} - P_t\right)\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_t,$$

onde

$$P_t := \frac{1}{2}\left(R^M + \epsilon(n+1)n + |\chi_t^+|^2\right) \geq 0.$$

Observe ainda que a curvatura média $H^{\partial M}$ de $\partial M$ em $(M, g)$ ao longo de $\partial\Sigma_t$ pode ser escrita como

$$H^{\partial M} = H^{\partial \Sigma_t} + \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t),$$

onde $H^{\partial\Sigma_t}$ é a curvatura média de $\partial\Sigma_t$ em $(\Sigma_t, h_t)$; isso porque $\Sigma_t$ tem fronteira livre em $(M, g)$ (veja a demonstração da Proposição 3.2.1 na próxima seção). Assim, ao longo de $\partial\Sigma_t$, nós temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_t} + H^{\partial\Sigma_t}\varphi &= \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t)\varphi + H^{\partial\Sigma_t}\varphi \\ &= H^{\partial M}\varphi \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Então, segue do Lema 2.1.2 que $\varphi$ é constante em $\Sigma_t$, $P_t \equiv 0$ e $(\Sigma_t, h_t)$ é Ricci plana com fronteira totalmente geodésica para cada $t \in [0, \delta)$.

Fazendo uma mudança de variável se necessário, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi \equiv 1$. Assim, temos que

$$g = dt^2 + h_{ij}dx_i dx_j \quad \text{em} \quad V.$$

Por outro lado, como $P_t \equiv 0$, temos que $\chi_t^+ \equiv 0$, ou seja,

$$\chi_t^+ = K|_{\Sigma_t} + A_t = -\epsilon h_t + A_t \equiv 0,$$

onde $A_t$ é a segunda forma fundamental de $\Sigma_t$ em $(M, g)$. Portanto, $A_t = \epsilon h_t$, que em coordenadas significa que $\frac{\partial h_{ij}}{\partial t} = 2\epsilon h_{ij}$. Assim,

$$h_{ij}(t, x_i) = e^{2\epsilon t} h_{ij}(0, x_i).$$

Por fim, tomando $h = h_0 = g|_\Sigma$, segue que $g|_V = dt^2 + e^{2\epsilon t}h$, onde $(\Sigma, h)$ é Ricci plana com fronteira totalmente geodésica, como queríamos demonstrar. □

**Exemplo 3.1.3.** Considere a variedade de dimensão $(n+1)$

$$N^{n+1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, r(x) \geq (m/2)^{\frac{1}{n-1}} \right\}$$

equipada com a métrica espacial de *Schwarzschild*

$$g_{\text{Sch}} = \left(1 + \frac{m}{2r^{n-1}}\right)^{\frac{4}{n-1}} \delta,$$

onde $\delta$ é a métrica Euclidiana e $r(x) = |x|$ denota a distância Euclidiana de $x \in N$ à origem. Assim, temos que a curvatura escalar de $(N, g_{\text{Sch}})$ é nula.

Além disso, a curvatura média da fronteira $S = \{r = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\}$ de $N$ é zero. Mais ainda, de modo geral, a curvatura média da esfera $S' = \{r = r_0\}$ é dada por

$$H^{S'} = \frac{n}{r_0}\left(1 - \frac{m}{r_0^{n-1} + \frac{m}{2}}\right).$$

Em particular, temos que $H^{S'} > 0$ para $r_0 > \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}$. Pelo princípio do máximo, isso implica que $S$ é fracamente *outermost* com respeito a $H_0 = 0$ (veja também *Proposition* 2.2 em [37]).

Isso confirma que $(N, g_{\text{Sch}})$ satisfaz todas as hipóteses do Teorema 3 para $\epsilon = 0$, exceto a condição (3). Porém, a conclusão do Teorema 3 não ocorre.

Agora, considere uma extensão deste exemplo. Seja $M^{n+1}$ a variedade com fronteira

$$M^{n+1} = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0\} \mid x_{n+1} \geq 0 \right\}$$

equipada com a métrica

$$g = \left(1 + \frac{m}{2r^{n-1}}\right)^{\frac{4}{n-1}} \delta.$$

A fronteira $\partial M$ de $M$ possui curvatura média zero; de fato, $\partial M$ é totalmente geodésica em $(M, g)$. Além disso, o hemisfério $\Sigma = \{r = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}\} \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$ é uma hipersuperfície com fronteira livre em $(M, g)$. Todas as hipóteses do Teorema A são satisfeitas, exceto a condição (3). Este exemplo mostra que a condição (3) do Teorema A é necessária quando $\epsilon = 0$.

**Exemplo 3.1.4.** Considere a variedade $N^{n+1} = [r_m, \infty) \times S^n$ de dimensão $(n+1)$ com a métrica *AdS-Schwarzschild*

$$g_{\text{AdS}-\text{Sch}} = V(r)^{-1} dr^2 + r^2 h_{S^n}$$

onde

$$r_m = (2m)^{\frac{1}{n-1}}, \quad V(r) = 1 + r^2 - \frac{2m}{r^{n-1}}$$

e $h_{S^n}$ é a métrica redonda padrão de curvatura constante igual a um em $S^n$. Segue que $(N, g_{\text{AdS-Sch}})$ possui curvatura escalar constante igual a $-(n+1)n$. Além disso, a curvatura média de cada folha $\{r_0\} \times S^n$ é dada por

$$H(r_0) = n \frac{V(r_0)^{\frac{1}{2}}}{r_0}.$$

Em particular, a fronteira $S = \{r_m\} \times S^n$ de $N$ possui curvatura média constante $H(r_m) = n$; e para $r_0 > r_m$, temos que $H(r_0) > n$. Portanto, $S$ é fracamente *outermost* com respeito a $H_0 = n$ (veja *Proposition* 2.2 em [38]). Isso mostra que a condição (3) no Teorema 3, como verificado por Galloway e Jang ([5], *Remark* 1), é também necessária quando $\epsilon = 1$.

Agora, estenderemos este exemplo considerando a variedade com fronteira

$$M = (r_+, \infty) \times S^n_+$$

com a métrica

$$g = V(r)^{-1} dr^2 + r^2 h_{S^n_+},$$

onde $S^n_+$ é um hemisfério de $S^n$, e $h_{S^n_+}$ é a métrica induzida em $S^n_+$. Aqui, $r_+$ é o único número positivo tal que $V(r_+) = 0$. Esse exemplo satisfaz todas as hipóteses do Teorema A para $\epsilon = 1$, com exceção da condição (3).

Apresentaremos agora o último exemplo desta seção mostrando a necessidade da condição (4) nos Teoremas 3 e A (quando $\epsilon = 1$).

**Exemplo 3.1.5.** Considere a variedade $N^{n+1} = [r_0, \infty) \times T^n$ com a métrica *Kottler*

$$g_{\text{K}} = \left(r^2 - \frac{2m}{r^{n-1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 h$$

onde $r_0 > (2m)^{\frac{1}{n+1}}$ e $h$ é uma métrica plana em $T^n$. A curvatura escalar de $(N, g_{\mathrm{K}})$ é constante igual $-(n+1)n$, e a curvatura média de uma folha $\{r\} \times T^n$ é dada por

$$H(r) = n\frac{\left(r^2 - \frac{2m}{r^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}{r} < n.$$

Além disso, a fronteira $\{r_0\} \times T^n$ de $N$ não admite uma métrica de curvatura escalar positiva. Portanto, isso mostra a necessidade da condição (4) no Teorema 3 quando $\epsilon = 1$.

Para estender esse exemplo para o caso de hipersuperfície com fronteira livre, considere a variedade $M^{n+1} = (r_+, \infty) \times [a, b] \times T^{n-1}$ com a métrica Riemanniana

$$g = \left(r^2 - \frac{2m}{r^{n-1}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 h_0,$$

onde $r_+ = (2m)^{\frac{1}{n+1}}, a < b$, e $h_0$ é uma métrica plana em $[a, b] \times T^{n-1}$. Esse exemplo satisfaz todas as hipóteses do Teorema A para $\epsilon = 1$, com exceção da condição (4).

## 3.2 Rigidez de MOTS com fronteira livre

O objetivo desta seção é demonstrar o Teorema B da Introdução (Teorema 3.2.5 abaixo). Mas, antes, iremos apresentar e demonstrar alguns resultados auxiliares. O primeiro deles é um resultado de estimativa de volume para MOTS compactas, estáveis, com fronteira livre e invariante de Yamabe negativo:

**Proposição 3.2.1.** *Sejam $(M^{n+1}, g, K)$, $n \geq 3$, um conjunto de dados iniciais com fronteira e $\Sigma^n$ uma MOTS compacta, estável, com fronteira livre em $(M^{n+1}, g, K)$.*

(1) *Se $\mu + J(N) \geq -c$ em $\Sigma$ para alguma constante $c > 0$, $H^{\partial M} \geq |(\iota_\varrho \pi)^\top|$ em $\partial M$ e $\Sigma$ possui invariante de Yamabe $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, então*

$$\mathrm{vol}\,(\Sigma) \geq \left(\frac{|\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)|}{2c}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{3.2}$$

(2) *Se $\mu + J(N) \geq 0$ em $\Sigma$, $H^{\partial M} - |(\iota_\varrho \pi)^\top| \geq -\bar{c}$ em $\partial M$ para alguma constante $\bar{c} > 0$ e $\Sigma$ possui invariante de Yamabe $\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$, então*

$$\mathrm{vol}\,(\partial\Sigma) \geq \left(\frac{|\sigma^{0,1}(\Sigma, \partial\Sigma)|}{2\bar{c}}\right)^{n-1}.$$

*Demonstração.* Começaremos com a demonstração do item (1).

Em primeiro lugar, como $\Sigma$ é uma MOTS estável, segue do Lema 2.1.3 que $\lambda_1(\mathcal{L}_0) \geq 0$, ou seja,

$$0 \leq \lambda_1(\mathcal{L}_0) = \inf_{u \in C^\infty(\Sigma)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Sigma (|\nabla u|^2 + Qu^2)dv - \int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N, N) - \langle X, \nu\rangle)u^2 ds}{\int_\Sigma u^2 dv}.$$

Assim, dada $u \in C^\infty(\Sigma)$, nós temos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + 2Qu^2)dv - 2\int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \langle X, \nu\rangle)u^2 ds \\ &= \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + (R^\Sigma - 2(\mu + J(N)) - |\chi^+|^2)u^2)dv \\ &\quad -2\int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \langle X, \nu\rangle)u^2 ds \\ &\leq \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + (R^\Sigma + 2c)u^2)dv - 2\int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \langle X, \nu\rangle)u^2 ds, \end{aligned} \tag{3.3}$$

onde, acima, nós usamos que $\mu + J(N) \geq -c$ em $\Sigma$.

Por outro lado, como $\Sigma$ tem fronteira livre em $(M, g)$, segue que o conormal $\nu$ de $\partial\Sigma$ em $\Sigma$, com respeito à métrica induzida $h = g|_\Sigma$, coincide com o conormal $\varrho$ de $\partial M$ em $(M, g)$ ao longo de $\partial\Sigma$. Assim, em cada ponto $p \in \partial\Sigma$, podemos escolher um referencial ortonormal $\{e_1, ..., e_{n-1}, e_n\}$ de $T_p\partial M$ tal que $e_n = N$, ou seja, de modo que $\{e_1, ..., e_{n-1}\}$ seja um referencial ortonormal de $T_p\partial\Sigma$. Logo,

$$H^{\partial M} = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i}\varrho, e_i\rangle + \langle \nabla_N \varrho, N\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{e_i}\nu, e_i\rangle + \mathrm{II}^{\partial M}(N,N) = H^{\partial\Sigma} + \mathrm{II}^{\partial M}(N,N);$$

o que, substituindo em (3.3), nos fornece:

$$0 \leq \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + (R^\Sigma + 2c)u^2)dv - 2\int_{\partial\Sigma} (H^{\partial M} - H^{\partial\Sigma} - \langle X, \nu\rangle)u^2 ds \tag{3.4}$$

para toda função $u \in C^\infty(\Sigma)$. Portanto, definindo $a_n = \frac{4(n-1)}{n-2}$, segue de (3.4), juntamente com a desigualdade de Hölder, que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Sigma (a_n|\nabla u|^2 + R^\Sigma u^2)dv + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \left(\int_\Sigma u^{\frac{2n}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n}} \\ &\quad +2\int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma} u^2 ds - 2\int_{\partial\Sigma} (H^{\partial M} - \langle X, \nu\rangle)u^2 ds, \end{aligned} \tag{3.5}$$

tendo em vista que $a_n > 2$ para todo $n \geq 3$.

Por sua vez, ao longo de $\partial\Sigma$,

$$(\iota_\varrho \pi)^\top(N) = K(\varrho, N) - (\mathrm{tr}\, K)\langle \varrho, N\rangle = K(\nu, N) = \langle X, \nu\rangle$$

e

$$H^{\partial M} \geq |(\iota_\varrho \pi)^\top| \geq (\iota_\varrho \pi)^\top(N),$$

de onde segue que

$$H^{\partial M} - \langle X, \nu\rangle = H^{\partial M} - (\iota_\varrho \pi)^\top(N) \geq 0.$$

Logo, usando a desigualdade acima em (3.5), obtemos que

$$0 \leq \frac{\int_\Sigma (a_n|\nabla u|^2 + R^\Sigma u^2)dv + 2\int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma} u^2 ds}{\left(\int_\Sigma u^{\frac{2n}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n}}} + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} = Q_h^{1,0}(u) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}}$$

para toda $u \in C^\infty(\Sigma)$ positiva. Disto segue que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \inf_{u\in C^\infty(\Sigma),\, u>0} Q_h^{1,0}(u) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \\ &= Q_h^{1,0}(\Sigma,\partial\Sigma) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \sigma^{1,0}(\Sigma,\partial\Sigma) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathrm{vol}\,(\Sigma) \geq \left(\frac{|\sigma^{1,0}\,(\Sigma,\partial\Sigma)|}{2c}\right)^{\frac{n}{2}},$$

como queríamos demonstrar.

Para provarmos o item (2), partiremos da desigualdade

$$0 \leq \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + (R^\Sigma - 2(\mu + J(N)) - |\chi^+|^2)u^2)dv - 2\int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \langle X,\nu\rangle)u^2 ds,$$

a qual, como antes, vale para toda $u \in C^\infty(\Sigma)$. Neste caso, como $\mu + J(N) \geq 0$ em $\Sigma$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \langle X,\nu\rangle &= H^{\partial M} - H^{\partial\Sigma} - (\iota_\varrho \pi)^\top(N) \\ &\geq H^{\partial M} - |(\iota_\varrho\pi)^\top| - H^{\partial\Sigma} \\ &\geq -\bar{c} - H^{\partial\Sigma} \end{aligned}$$

em $\partial\Sigma$, temos que

$$0 \leq \int_\Sigma (2|\nabla u|^2 + R^\Sigma u^2)dv + 2\int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma}u^2 ds + 2\bar{c}\int_{\partial\Sigma} u^2 ds$$

para toda função $u \in C^\infty(\Sigma)$.

Mais uma vez, segue da desigualdade de Hölder e do fato que $a_n > 2$ que

$$0 \leq \int_\Sigma (a_n|\nabla u|^2 + R^\Sigma u^2)dv + 2\int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma}u^2 ds + 2\bar{c}\,\mathrm{vol}(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} ds\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.$$

Portanto, dividindo a desigualdade acima por $\left(\int_{\partial\Sigma} u^{\frac{2(n-1)}{n-2}} ds\right)^{\frac{n-2}{n-1}}$ e tomando o ínfimo sobre as funções $u \in C^\infty(\Sigma)$ com $u > 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &\leq Q_h^{0,1}(\Sigma,\partial\Sigma) + 2\bar{c}\,\mathrm{vol}(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\leq \sigma^{0,1}(\Sigma,\partial\Sigma) + 2\bar{c}\,\mathrm{vol}(\partial\Sigma)^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

o que garante o resultado. □

A próxima proposição é um resultado de *rigidez infinitesimal* que obtemos ao supor que o volume de $\Sigma$ satura a desigualdade (3.2).

**Proposição 3.2.2** (Rigidez infinitesimal)**.** *Sob as hipóteses da Proposição 3.2.1, se vale a igualdade em (3.2), então:*

- $(\Sigma, h)$ *é Einstein com fronteira totalmente geodésica e curvatura escalar* $R^{\Sigma} = -2c$, *onde* $h = g|_{\Sigma}$;
- $\mu + J(N) = -c$ *e* $\chi^{+} = 0$ *em* $\Sigma$;
- $H^{\partial M} = |(\iota_{\varrho}\pi)^{\top}| = \langle X, \nu\rangle$ *em* $\partial\Sigma$;
- $\lambda_1(\mathcal{L}_0) = 0$.

*Demonstração.* Da solução do problema de Yamabe, temos que existe uma função positiva $\phi \in C^{\infty}(\Sigma)$ que realiza a constante de Yamabe $Q_h^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$, ou seja, $Q_h^{1,0}(\phi) = Q_h^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$.

Por outro lado, segue do final da demonstração do item (1) da proposição anterior, juntamente com a igualdade em (3.2), que

$$0 \leq Q_h^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \leq \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} = 0. \tag{3.6}$$

Portanto,

$$Q_h^{1,0}(\phi) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} = Q_h^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} = 0,$$

o que, multiplicando por $\left(\int_{\Sigma} \phi^{\frac{2n}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n}}$, implica em

$$\int_{\Sigma} (a_n |\nabla\phi|^2 + R^{\Sigma}\phi^2) dv + 2\int_{\partial\Sigma} H^{\Sigma}\phi^2 ds + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Sigma} \phi^{\frac{2n}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n}} = 0.$$

Por sua vez, como $\Sigma$ é uma MOTS estável, segue do Lema 2.1.3 que

$$\begin{aligned}
0 &\leq 2\lambda_1(\mathcal{L}_0)\int_{\Sigma} \phi^2 dv \\
&\leq 2\left(\int_{\Sigma} (|\nabla\phi|^2 + Q\phi^2) dv - \int_{\partial\Sigma} (\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) - \langle X, \nu\rangle)\phi^2 ds\right) \\
&= \int_{\Sigma} (2|\nabla\phi|^2 + (R^{\Sigma} - 2(\mu + J(N)) - |\chi^{+}|^2)\phi^2) dv \\
&\quad -2\int_{\partial\Sigma} (H^{\partial M} - H^{\partial\Sigma} - \langle X, \nu\rangle)\phi^2 ds \\
&\leq \int_{\Sigma} (a_n |\nabla\phi|^2 + (R^{\Sigma} + 2c)\phi^2) dv + 2\int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma}\phi^2 ds \\
&\leq \int_{\Sigma} (a_n |\nabla\phi|^2 + R^{\Sigma}\phi^2) dv + 2\int_{\partial\Sigma} H^{\partial\Sigma}\phi^2 ds + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{\Sigma} \phi^{\frac{2n}{n-2}} dv\right)^{\frac{n-2}{n}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde, acima, nós usamos que $a_n > 2$, $\mu + J(N) \geq -c$ em $\Sigma$, $\mathrm{II}^{\partial M}(N,N) = H^{\partial M} - H^{\partial\Sigma}$ e

$$H^{\partial M} - \langle X, \nu\rangle = H^{\partial M} - (\iota_{\varrho}\pi)^{\top}(N) \geq H^{\partial M} - |(\iota_{\varrho}\pi)^{\top}| \geq 0$$

em $\partial\Sigma$. Logo, todas as igualdades acima são, de fato, igualdades. Portanto,

- $\lambda_1(\mathcal{L}_0) = 0$;

- $\mu + J(N) = -c$ e $\chi^+ = 0$ em $\Sigma$;
- $H^{\partial M} = |(\iota_\varrho \pi)^\top| = \langle X, \nu \rangle$ em $\partial\Sigma$.

Além disso, $|\nabla\phi|^2 \equiv 0$, ou seja, $\phi$ é constante, uma vez que $a_n > 2$.

Por fim, segue de (3.6) que $Q_h^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) = \sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)$. Assim, pela Proposição 2.2.2, temos que a métrica de Yamabe $\bar{h} = \phi^{\frac{4}{n-2}} h$ em $\Sigma$ é Einstein com fronteira totalmente geodésica; o mesmo vale para $h$, tendo em vista que $\phi$ é constante, o que conclui a demonstração da proposição. □

Para o próximo lema, considere o operador

$$L^*\psi = -\Delta\psi - 2\langle X, \nabla\psi\rangle + (Q - |X|^2 - \operatorname{div} X)\psi, \quad \psi \in C^\infty(\Sigma),$$

chamado de *operador adjunto formal* de $L$; isso porque, pelo Teorema da Divergência,

$$\int_\Sigma \psi L\phi \, dv + \int_{\partial\Sigma} \psi B\phi \, ds = \int_\Sigma \phi L^*\psi \, dv + \int_{\partial\Sigma} \phi B^*\psi \, ds$$

para todas $\phi, \psi \in C^\infty(\Sigma)$, onde

$$B^*\psi := \frac{\partial\psi}{\partial\nu} - \left(\mathrm{II}^{\partial M}(N, N) - 2\langle X, \nu\rangle\right)\psi.$$

**Lema 3.2.3.** Sob as hipóteses da Proposição 3.2.2, temos que $\lambda = 0$ é um autovalor simples de $L$ em $\Sigma$ com condição de fronteira de Robin $B\phi = 0$ cujas autofunções associadas podem ser escolhidas positivas. O mesmo vale para o operador adjunto formal $L^*$ de $L$ em $\Sigma$ com condição de fronteira de Robin $B^*\phi^* = 0$.

A demonstração do lema acima é totalmente análoga à demonstração do *Lemma* 3.5 em [17] (com a Proposição 3.2.2 fazendo o papel da *Proposition* 3.3) e, por isso, ela será omitida.

**Lema 3.2.4.** Sob as hipóteses da Proposição 3.2.2, temos que existem uma vizinhança $V \cong (-\delta, \delta) \times \Sigma$ de $\Sigma \cong \{0\} \times \Sigma$ em $M$ e uma função positiva $\varphi : V \to \mathbb{R}$ tais que:

(1) $g|_V$ possui a decomposição ortogonal,

$$g|_V = \varphi^2 dt^2 + h_t,$$

onde $h_t$ é a métrica induzida em $\Sigma_t \cong \{t\} \times \Sigma$;

(2) Cada $\Sigma_t$ é uma hipersuperfície com fronteira livre em $(M, g, K)$ com curvatura média luminosa constante $\theta^+(t)$ com respeito ao normal exterior $N_t = \varphi^{-1}\frac{\partial}{\partial t}$, onde $N_0 = N$;

(3) $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_t} = \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t)\,\varphi$ em $\partial\Sigma_t$, onde $\nu_t$ é o normal unitário exterior de $\partial\Sigma_t$ em $(\Sigma_t, h_t)$.

Mais uma vez, a demonstração do lema acima é totalmente análoga à demonstração do *Lemma* 3.6 em [17] (com o Lema 3.2.3 fazendo o papel do *Lemma* 3.5) e, por isso, ela também será omitida.

Podemos agora apresentar o principal resultado desta seção.

**Teorema 3.2.5.** *Sejam $(M^{n+1}, g, K)$, $n \geq 3$, um conjunto de dados iniciais com fronteira e $\Sigma^n$ uma MOTS compacta, estável, com fronteira livre e fracamente outermost em $(M^{n+1}, g, K)$ com invariante de Yamabe $\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma) < 0$. Se $\mu - |J| \geq -c$ para alguma constante $c > 0$, $(M, g, K)$ satisfaz a condição de energia dominante de fronteira e $K$ é $n$-convexo, tudo isso em $M_+$, então o volume de $\Sigma$ satisfaz*

$$\mathrm{vol}(\Sigma) \geq \left(\frac{|\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)|}{2c}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

*Além disso, se vale a igualdade acima, então:*

(1) *Existe uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma$ em $M$ tal que $(V, g|_V)$ é isométrica a $[0, \delta) \times \Sigma$ com a métrica produto $dt^2 + h$, onde $h = g|_\Sigma$ e $(\Sigma, h)$ é Einstein com curvatura escalar $R^\Sigma = -2c$ e fronteira totalmente geodésica;*

(2) *$K = a\, dt^2$ em $V$, onde $a \in C^\infty(V)$ depende apenas de $t \in [0, \delta)$;*

(3) *$\mu = -c$ e $J = 0$ em $V$;*

(4) *A condição de energia dominante de fronteira é saturada ao longo de $V \cap \partial M$.*

*Demonstração.* Em primeiro lugar, uma vez que $\mu + J(N) \geq \mu - |J| \geq -c$ em $M_+$ (em particular, em $\Sigma$), segue do item (1) da Proposição 3.2.1 que

$$\mathrm{vol}(\Sigma) \geq \left(\frac{|\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)|}{2c}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Além disso, se vale a igualdade acima, podemos usar o Lema 3.2.4 para garantir a existência de uma folheação $(\Sigma_t)_{0 \leq t < \delta}$ de uma vizinhança exterior $V$ de $\Sigma = \Sigma_0$ em $M$ tal que cada folha $\Sigma_t$ é uma hipersuperfície com curvatura média luminosa $\theta^+ = \theta^+(t)$ constante e fronteira livre em $(M, g, K)$. Outrossim, a métrica $g$ se escreve da forma

$$g = \varphi^2 dt^2 + h_t$$

em $V \cong [0, \delta) \times \Sigma$, onde $h_t = g|_{\Sigma_t}$ é a métrica induzida em $\Sigma_t$.

Por outro lado, segue de (2.1) que, em $\Sigma_t$,

$$\frac{d\theta^+}{dt} = -\Delta\varphi + 2\langle X, \nabla\varphi\rangle + \left(Q - |X|^2 + \mathrm{div}\, X - \frac{1}{2}(\theta^+)^2 + \theta^+\tau\right)\varphi. \tag{3.7}$$

Assim, tomando $Y = X - \varphi^{-1}\nabla\varphi$ e observando que

$$\mathrm{div}\, Y = \mathrm{div}\, X - \frac{\Delta\varphi}{\varphi} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2}$$

e

$$|Y|^2 = |X|^2 - 2\frac{\langle X, \nabla\varphi\rangle}{\varphi} + \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi^2},$$

temos por (3.7) que

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\theta^+}{dt} = \operatorname{div} Y - |Y|^2 + Q - \frac{1}{2}(\theta^+)^2 + \theta^+\tau \leq \operatorname{div} Y - |Y|^2 + Q + \theta^+\tau$$

em $\Sigma_t$ para cada $t \in [0, \delta)$. Portanto, dada $u \in C^\infty(\Sigma_t)$, nós temos:

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{\varphi}\frac{d\theta^+}{dt} - u^2\theta^+\tau &\leq u^2 \operatorname{div} Y - u^2|Y|^2 + Qu^2 \\
&= \operatorname{div}(u^2 Y) - 2u\langle\nabla u, Y\rangle - u^2|Y|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}R^{\Sigma_t} - (\mu + J(N_t)) - \frac{1}{2}|\chi_t^+|^2\right)u^2 \\
&\leq \operatorname{div}(u^2 Y) + 2|u||\nabla u||Y| - u^2|Y|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}R^{\Sigma_t} - (\mu - |J|)\right)u^2 \\
&\leq \operatorname{div}(u^2 Y) + |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{2}R^{\Sigma_t} + c\right)u^2, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

onde, acima, nós usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, juntamente com o fato que

$$\mu + J(N_t) \geq \mu - |J| \geq -c.$$

Logo, integrando (3.8) sobre $\Sigma_t$ e observando que $\dfrac{d\theta^+}{dt}$ e $\theta^+$ são constantes em $\Sigma_t$, obtemos que

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{d\theta^+}{dt}\int_{\Sigma_t}\frac{u^2}{\varphi}dv_t - \theta^+\int_{\Sigma_t}\tau u^2 dv_t\right) &\leq \int_{\Sigma_t}(2|\nabla u|^2 + R^{\Sigma_t}u^2)dv_t + 2c\int_{\Sigma_t}u^2 dv_t \\
&\quad + 2\int_{\partial\Sigma_t}u^2\langle Y, \nu_t\rangle ds_t, \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

onde, acima, nós usamos o Teorema da Divergência.

Agora, substituindo $Y$ por $X - \varphi^{-1}\nabla\varphi$ e usando o fato que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_t} = \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t)\varphi = (H^{\partial M} - H^{\partial\Sigma_t})\varphi$$

(veja o Lema 3.2.4), nós temos:

$$\int_{\partial\Sigma_t}u^2\langle Y, \nu_t\rangle ds_t = \int_{\partial\Sigma_t}u^2\langle X - \varphi^{-1}\nabla\varphi, \nu_t\rangle ds_t = \int_{\partial\Sigma_t}u^2(\langle X, \nu_t\rangle + H^{\partial\Sigma_t} - H^{\partial M})ds_t.$$

Por sua vez, usando a CEDF como fizemos na demonstração da Proposição 3.2.1, temos que $\langle X, \nu_t\rangle - H^{\partial M} \leq 0$. Portanto,

$$\int_{\partial\Sigma_t}u^2\langle Y, \nu_t\rangle ds_t \leq \int_{\partial\Sigma_t}u^2 H^{\partial\Sigma_t}ds_t. \qquad (3.10)$$

Assim, substituindo (3.10) em (3.9) e usando o fato que $a_n = \frac{4(n-1)}{n-2} > 2$ para todo $n \geq 3$, juntamente com a desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{d\theta^+}{dt}\int_{\Sigma_t}\frac{u^2}{\varphi}dv_t - \theta^+\int_{\Sigma_t}\tau u^2 dv_t\right) &\leq \int_{\Sigma_t}(a_n|\nabla u|^2 + R^{\Sigma_t}u^2)dv_t + 2\int_{\partial\Sigma_t}u^2 H^{\partial\Sigma_t}ds_t \\ &\quad +2c\,\mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}}\left(\int_{\Sigma_t}u^{\frac{2n}{n-2}}dv_t\right)^{\frac{n-2}{n}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

para toda $u \in C^\infty(\Sigma_t)$ e todo $t \in [0,\delta)$.

Segue da solução do problema de Yamabe, juntamente com o Teorema 2.2.1, que, para cada $t \in [0,\delta)$, existe uma única métrica de Yamabe $\bar{h}_t$ na classe conforme de $h_t$ com curvatura escalar constante $R^{\Sigma_t}_{\bar{h}_t} = -2c$ e fronteira mínima. Seja $u_t \in C^\infty(\Sigma_t)$, $u_t > 0$, tal que $\bar{h}_t = u_t^{4/(n-2)}h_t$. Tomando $u = u_t$ em (3.11), temos que

$$\begin{aligned} \frac{2\left(\frac{d\theta^+}{dt}\int_{\Sigma_t}\frac{u_t^2}{\varphi}dv_t - \theta^+\int_{\Sigma_t}\tau u_t^2 dv_t\right)}{\left(\int_{\Sigma_t}u_t^{\frac{2n}{n-2}}dv_t\right)^{\frac{n-2}{n}}} &\leq \frac{\int_{\Sigma_t}(a_n|\nabla u_t|^2 + R^{\Sigma_t}u_t^2)dv_t + 2\int_{\partial\Sigma_t}u_t^2 H^{\partial\Sigma_t}ds_t}{\left(\int_{\Sigma_t}u_t^{\frac{2n}{n-2}}dv_t\right)^{\frac{n-2}{n}}} \\ &\quad +2c\,\mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &= Q^{1,0}_{h_t}(u_t) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &= Q^{1,0}_{h_t}(\Sigma_t,\partial\Sigma_t) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &\leq \sigma^{1,0}(\Sigma,\partial\Sigma) + 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} \\ &= 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma_t)^{\frac{2}{n}} - 2c\,\mathrm{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} \\ &= 2c\int_0^t\frac{d}{ds}\left(\mathrm{vol}(\Sigma_s)^{\frac{2}{n}}\right)ds \\ &= \frac{4c}{n}\int_0^t\mathrm{vol}(\Sigma_s)^{\frac{2-n}{n}}\frac{d}{ds}\mathrm{vol}(\Sigma_s)ds \end{aligned}$$

para cada $t \in [0,\delta)$. Acima nós usamos que $\Sigma_t$ é difeomorfa a $\Sigma$ e que $\sigma^{1,0}(\Sigma,\partial\Sigma)$ é um invariante topológico de $\Sigma$. Também foi usado o Teorema Fundamental do Cálculo e a hipótese que $\mathrm{vol}(\Sigma) = (|\sigma^{1,0}(\Sigma,\partial\Sigma)|/2c)^{n/2}$.

Por sua vez, usando a hipótese que $K$ é $n$-convexo em $M_+$, temos que $\mathrm{tr}_{\Sigma_t}K \geq 0$ para cada $t \in [0,\delta)$. Assim, $\theta^+(t) = \mathrm{tr}_{\Sigma_t}K + H^{\Sigma_t} \geq H^{\Sigma_t}$. Portanto, segue da Fórmula da Primeira Variação do Volume que

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d\theta^+}{dt}\int_{\Sigma_t}\frac{u_t^2}{\varphi}dv_t - \theta^+\int_{\Sigma_t}\tau u_t^2 dv_t}{\left(\int_{\Sigma_t}u_t^{\frac{2n}{n-2}}dv_t\right)^{\frac{n-2}{n}}} &\leq \frac{2c}{n}\int_0^t\mathrm{vol}(\Sigma_s)^{\frac{2-n}{n}}\left(\int_{\Sigma_s}H^{\Sigma_s}\varphi dv_s\right)ds \\ &\leq \frac{2c}{n}\int_0^t\theta^+(s)\left(\mathrm{vol}(\Sigma_s)^{\frac{2-n}{n}}\int_{\Sigma_s}\varphi dv_s\right)ds. \end{aligned}$$

Assim, tomando

$$f(t) = \theta^+(t), \quad \eta(t) = \left(\int_{\Sigma_t}\frac{u_t^2}{\varphi}dv_t\right)\left(\int_{\Sigma_t}u_t^{\frac{2n}{n-2}}dv_t\right)^{-\frac{n-2}{n}},$$

$$\rho(t) = \left(\int_{\Sigma_t}\tau u_t^2 dv_t\right)\left(\int_{\Sigma_t}u_t^{\frac{2n}{n-2}}dv_t\right)^{-\frac{n-2}{n}},$$

e

$$\xi(t) = \frac{2c}{n}\,\mathrm{vol}\,(\Sigma_t)^{\frac{2-n}{n}} \int_{\Sigma_t} \varphi dv_t,$$

no Lema 2.1.9, temos que $\theta^+(t) \leq 0$ para cada $t \in [0,\delta)$. Contudo, como $\Sigma$ é fracamente *outermost* e $\theta^+(t)$ é constante em $\Sigma_t$, segue que $\theta^+(t) = 0$ para todo $t \in [0,\delta)$. Então todas as desigualdades acima são, de fato, igualdades.

Em particular, $\mu + J(N) = \mu - |J| = -c$, $\langle X, \nu_t\rangle - H^{\partial M} = 0$, $\mathrm{div}\, Y - |Y|^2 + Q = 0$ e $\chi_t^+ = 0$ em $V \approx [0,\delta)\times\Sigma$.

Além disso, sendo $\Sigma_t$ uma MOTS para cada $t \in [0,\delta)$, ou seja, $\theta(t) = 0$ para cada $t \in [0,\delta)$, usando novamente (2.1), temos que

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = L\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_t$$

e pelo Lema 3.2.4, temos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_t} - \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t)\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \partial\Sigma_t.$$

Assim, temos que $\Sigma_t$ é estável para cada $t \in [0,\delta)$. Então, podemos aplicar a Proposição 3.2.2 para $\Sigma_t$ e concluir que $H^{\partial\Sigma_t} = 0$ e $Q = 0$.

Assim, das igualdades $\mathrm{div}\, Y - |Y|^2 + Q = 0$ e $Q = 0$, temos que $\mathrm{div}\, Y - |Y|^2 = 0$, então

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_t} |Y|^2 dv_t &= \int_{\Sigma_t} \mathrm{div}\, Y\, dv_t = \int_{\partial\Sigma_t} \langle Y, \nu_t\rangle ds_t = \int_{\partial\Sigma_t} \left(\langle X, \nu_t\rangle + H^{\partial\Sigma_t} - H^{\partial M}\right) ds_t \\ &= \int_{\partial\Sigma_t} \left(\langle X, \nu_t\rangle - H^{\partial M}\right) ds_t = 0,\end{aligned}$$

logo $Y = X - \varphi^{-1}\nabla\varphi = 0$. Temos ainda,

$$\mathrm{vol}\,(\Sigma_t) = \mathrm{vol}\,(\Sigma) = \left(\frac{|\sigma^{1,0}(\Sigma, \partial\Sigma)|}{2c}\right)^{\frac{n}{2}}$$

para todo $t \in [0,\delta)$. Isso implica que

$$0 = \frac{d}{dt}\,\mathrm{vol}(\Sigma_t) = \int_{\Sigma_t} H^{\Sigma_t}\varphi_t dv.$$

Como $H^{\Sigma_t}$ não muda de sinal, pois $0 = \theta(t) \geq H^{\Sigma_t}$ e $\varphi_t > 0$, então $H^{\Sigma_t} = 0$ para cada $t \in [0,\delta)$. Então $\Sigma_t$ é uma MOTS mínima, o que implica que $\mathrm{tr}_{\Sigma_t} K = 0$, pois $\theta^+(t) = \mathrm{tr}_{\Sigma_t} K + H^{\Sigma_t}$. Neste caso, também temos que $\theta^-(t) = \mathrm{tr}_{\Sigma_t} K - H^{\Sigma_t}$ de $\Sigma_t$ é nula.

Usando a equação (2.1) trocando $\theta^-$ e $\varphi^- = -\varphi$ no lugar de $\theta = \theta^+$ e $\varphi$ respectivamente, temos

$$0 = \frac{d\theta^-}{dt} = -\Delta\varphi^- + 2\left\langle X^-, \nabla\varphi^-\right\rangle + \left(Q^- - \left|X^-\right|^2 + \mathrm{div}\, X^-\right)\varphi^-, \tag{3.12}$$

onde

$$\begin{aligned} Q^- &= \frac{1}{2}R^\Sigma - (\mu + J(-N)) - \frac{1}{2}\left|\chi_t^-\right|^2 \\ &= -c - (\mu + |J|) - \frac{1}{2}\left|\chi_t^-\right|^2 \\ &= -2|J| - \frac{1}{2}\left|\chi_t^-\right|^2, \qquad (3.13) \\ X^- &= -X = -\frac{1}{\varphi}\nabla\varphi. \qquad (3.14) \end{aligned}$$

Substituindo (3.13) e (3.14) em (3.12), temos

$$\Delta\varphi + \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + \left(|J| + \frac{1}{4}\left|\chi_t^-\right|^2\right)\varphi = 0.$$

Como

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_t} = \mathrm{II}^{\partial M}(N_t, N_t)\varphi = (H^{\partial M} - H^{\partial\Sigma_t})\varphi = H^{\partial M}\varphi \geq 0.$$

Integrando sobre $\Sigma_t$, e usando o Teorema da Divergência, temos que

$$0 \leq \int_{\partial\Sigma_t}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_t}ds_t = \int_{\Sigma_t}\Delta\varphi dv_t = -\int_{\Sigma_t}\left(\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi} + \left(|J| + \frac{1}{4}\left|\chi_t^-\right|^2\right)\varphi\right)dv_t \leq 0,$$

assim

$$|\nabla\varphi| = \left|\chi_t^-\right| = |J| = 0 \quad \text{em } V.$$

Então $\varphi$ é constante, e como $X = -\varphi^{-1}\nabla\varphi = 0$ temos $K(N_t,\cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$. Além disso, sendo $\chi_t^+ = K|_{T\Sigma_t\times T\Sigma_t} + A_t$ e $\chi_t^- = K|_{T\Sigma_t\times T\Sigma_t} - A_t$, temos que $K|_{T\Sigma_t\times T\Sigma_t} = 0$, pois $\chi_t^+ = \chi_t^- = 0$. Temos que $(\Sigma_t, h_t)$ é totalmente geodésica em $M$ para cada $t \in [0,\delta)$, onde $h_t$ é a métrica em $\Sigma_t \approx \{t\}\times\Sigma$ induzida de $(M,g)$. Escrevendo $g = \varphi^2 dt^2 + h_t$ em $V \approx [0,\delta)\times\Sigma$ e observando que $\varphi = \varphi_t$ depende somente de $t \in [0,\delta)$, além disso $h_t$ não depende de $t \in [0,\delta)$, pois $\Sigma_t$ é totalmente geodésica. Então, fazendo uma mudança de variável podemos ver que $g$ possui a estrutura de uma métrica produto $dt^2 + h$ em $V$, onde $(\Sigma, h)$ é Einstein com curvatura escalar $R^\Sigma = -2c$ e fronteira totalmente geodésica. Finalmente, usando que $0 = J = \operatorname{div}(K - (\operatorname{tr}K)g) = \operatorname{div}K - d(\operatorname{tr}K)$, implica que $d\tau = d(\operatorname{tr}K) = \operatorname{div}K$, além disso usando que $K|_{T\Sigma_t\times T\Sigma_t} = A_t = K(N_t,\cdot)|_{T\Sigma_t} = 0$, concluímos que $K = adt^2$ em $V$, onde $a$ depende apenas de $t \in [0,\delta)$. □

**Exemplo 3.2.6.** Seja $(\Sigma^n, h_{\text{hyp}})$ uma variedade Riemanniana hiperbólica fechada de dimensão $n$, onde $n \geq 2$. O Espaço-tempo anti-Nariai $(\bar{M}, \bar{g})$ de dimensão $(n+2)$ é dado pela variedade

$$\bar{M} = \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\Sigma^n$$

com a métrica Lorentziana

$$\bar{g} = \frac{n}{2(-\Lambda)}\left(-\sinh^2\chi dt^2 + d\chi^2 + (n-1)h_{\text{hyp}}\right)$$

a qual satisfaz a equação de Einstein

$$\text{Ric}_{\bar{M}} - \frac{1}{2}R^{\bar{M}}\bar{g} + \Lambda\bar{g} = 0$$

onde $\Lambda$ é uma constante cosmológica negativa. Acima, $\text{Ric}_{\bar{M}}$ e $R^{\bar{M}}$ denotam o tensor de Ricci e a curvatura escalar de $(\bar{M}, \bar{g})$, respectivamente. (Veja [39] para mais detalhes sobre os espaços-tempo anti-Nariai.)

Neste caso, a segunda forma fundamental $K$ de cada folha $M = \{t = t_0\}$ é nula. Além disso, a densidade local de energia $\mu$ e a corrente local de energia $J$ de $(M, g, K)$ (onde $g$ é a métrica induzida em $M$) são dadas por $\mu = \Lambda$ e $J = 0$.

Agora, assumindo que $(\Sigma^n, h_{\text{hyp}})$ realiza o invariante de Yamabe (isso sempre ocorre para $n = 2$ e $n = 3$, veja [40]):

$$\sigma(\Sigma) = \frac{\int_\Sigma R^\Sigma dv}{\text{vol}(\Sigma)^{\frac{n-2}{n}}} = -n(n-1)\,\text{vol}(\Sigma)^{\frac{2}{n}} = 2\Lambda\,\text{vol}(\Sigma, h)^{\frac{2}{n}}$$

onde $h = \frac{n(n-1)}{2(-\Lambda)}h_{\text{hyp}}$ é a métrica induzida em $\Sigma$. Aqui, $R^\Sigma = -n(n-1), dv$, e $\text{vol}(\Sigma)$ são a curvatura escalar, o elemento de volume e o volume de $\Sigma$ com respeito a $h_{\text{hyp}}$. Portanto,

$$\text{vol}(\Sigma, h) = \left(\frac{|\sigma(\Sigma)|}{2(-\Lambda)}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Isso mostra um exemplo de um conjunto de dados iniciais que satisfaz todas as hipóteses e satura as desigualdades do Teorema 8 (para $n = 2$) e Teorema 9 (para $n \geq 3$).

De maneira semelhante, considerando uma variedade hiperbólica compacta $(\Sigma^n, h_{\text{hyp}})$ com fronteira totalmente geodésica, podemos construir um conjunto de dados iniciais satisfazendo todas as hipóteses do Teorema B, o qual também satura a desigualdade do volume.

# Referências

[1] SCHOEN, R.; YAU, S.-T. Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature. Ann. Math. (2), v. 110, p. 127–142, 1979. ISSN 0003-486X.

[2] SCHOEN, R.; YAU, S.-T. On the structure of manifolds with positive scalar curvature. Manuscr. Math., v. 28, p. 159–183, 1979. ISSN 0025-2611.

[3] CAI, M. Volume minimizing hypersurfaces in manifolds of nonnegative scalar curvature. In: Minimal surfaces, geometric analysis and symplectic geometry. Based on the lectures of the workshop and conference, Johns Hopkins University, Baltimore, MD, USA, March 16–21, 1999. [S.l.]: Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2002. p. 1–7. ISBN 4-931469-18-3.

[4] CAI, M.; GALLOWAY, G. J. Rigidity of area minimizing tori in 3-manifolds of nonnegative scalar curvature. Commun. Anal. Geom., v. 8, n. 3, p. 565–573, 2000. ISSN 1019-8385.

[5] GALLOWAY, G. J.; JANG, H. C. Some scalar curvature warped product splitting theorems. Proc. Am. Math. Soc., v. 148, n. 6, p. 2617–2629, 2020. ISSN 0002-9939.

[6] BRAY, H.; BRENDLE, S.; NEVES, A. Rigidity of area-minimizing two-spheres in three-manifolds. Commun. Anal. Geom., v. 18, n. 4, p. 821–830, 2010. ISSN 1019-8385.

[7] NUNES, I. Rigidity of area-minimizing hyperbolic surfaces in three-manifolds. J. Geom. Anal., v. 23, n. 3, p. 1290–1302, 2013. ISSN 1050-6926.

[8] FISCHER-COLBRIE, D.; SCHOEN, R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non- negative scalar curvature. Commun. Pure Appl. Math., v. 33, p. 199–211, 1980. ISSN 0010-3640.

[9] MICALLEF, M.; MORARU, V. Splitting of 3-manifolds and rigidity of area-minimising surfaces. Proc. Am. Math. Soc., v. 143, n. 7, p. 2865–2872, 2015. ISSN 0002-9939.

[10] MORARU, V. On area comparison and rigidity involving the scalar curvature. J. Geom. Anal., v. 26, n. 1, p. 294–312, 2016. ISSN 1050-6926.

[11] BARROS, A. et al. Rigidity in dimension four of area-minimising Einstein manifolds. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., v. 158, n. 2, p. 355–363, 2015. ISSN 0305-0041.

[12] MENDES, A. Rigidity of volume-minimising hypersurfaces in Riemannian 5-manifolds. Math. Proc. Camb. Philos. Soc., v. 167, n. 2, p. 345–353, 2019. ISSN 0305-0041.

[13] DENG, H. A Bray-Brendle-Neves type inequality for a Riemannian manifold. Acta Math. Sci., Ser. B, Engl. Ed., v. 41, n. 2, p. 487–492, 2021. ISSN 0252-9602.

[14] BARROS, A.; CRUZ, C. Free boundary hypersurfaces with non-positive Yamabe invariant in mean convex manifolds. J. Geom. Anal., v. 30, n. 4, p. 3542–3562, 2020. ISSN 1050-6926.

[15] MENDES, A. Rigidity of marginally outer trapped (hyper)surfaces with negative $\sigma$-constant. Trans. Am. Math. Soc., v. 372, n. 8, p. 5851–5868, 2019. ISSN 0002-9947.

[16] ALAEE, A.; LESOURD, M.; YAU, S.-T. Stable surfaces and free boundary marginally outer trapped surfaces. Calc. Var. Partial Differ. Equ., v. 60, n. 5, p. 27, 2021. ISSN 0944-2669. Id/No 186.

[17] MENDES, A. Rigidity of free boundary MOTS. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A, Theory Methods, v. 220, p. 15, 2022. ISSN 0362-546X. Id/No 112841.

[18] ALMARAZ, S.; LIMA, L. L. de; MARI, L. Spacetime positive mass theorems for initial data sets with non-compact boundary. Int. Math. Res. Not., v. 2021, n. 4, p. 2783–2841, 2021. ISSN 1073-7928.

[19] ANDERSSON, L.; MARS, M.; SIMON, W. Stability of marginally outer trapped surfaces and existence of marginally outer trapped tubes. Adv. Theor. Math. Phys., v. 12, n. 4, p. 853–888, 2008. ISSN 1095-0761.

[20] GALLOWAY, G. J.; SCHOEN, R. A generalization of Hawking's black hole topology theorem to higher dimensions. Commun. Math. Phys., v. 266, n. 2, p. 571–576, 2006. ISSN 0010-3616.

[21] ANDERSSON, L.; METZGER, J. The area of horizons and the trapped region. Commun. Math. Phys., v. 290, n. 3, p. 941–972, 2009. ISSN 0010-3616.

[22] STAHL, A. Regularity estimates for solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition. Calc. Var. Partial Differ. Equ., v. 4, n. 4, p. 385–407, 1996. ISSN 0944-2669.

[23] ECKER, K.; HUISKEN, G. Interior estimates for hypersurfaces moving by mean curvature. Invent. Math., v. 105, n. 3, p. 547–569, 1991. ISSN 0020-9910.

[24] AMBROZIO, L. C. Rigidity of area-minimizing free boundary surfaces in mean convex three-manifolds. J. Geom. Anal., v. 25, n. 2, p. 1001–1017, 2015. ISSN 1050-6926.

[25] TRUDINGER, N. S. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III. Ser., v. 22, p. 265–274, 1968. ISSN 0036-9918.

[26] AUBIN, T. Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. J. Math. Pures Appl. (9), v. 55, p. 269–296, 1976. ISSN 0021-7824.

[27] SCHOEN, R. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. J. Differ. Geom., v. 20, p. 479–495, 1984. ISSN 0022-040X.

[28] ESCOBAR, J. F. The Yamabe problem on manifolds with boundary. J. Differ. Geom., v. 35, n. 1, p. 21–84, 1992. ISSN 0022-040X.

[29] ESCOBAR, J. F. Conformal deformation of a Riemannian metric to a scalar flat metric with constant mean curvature on the boundary. Ann. Math. (2), v. 136, n. 1, p. 1–50, 1992. ISSN 0003-486X.

[30] MARQUES, F. C. Existence results for the Yamabe problem on manifolds with boundary. Indiana Univ. Math. J., v. 54, n. 6, p. 1599–1620, 2005. ISSN 0022-2518.

[31] MARQUES, F. C. Conformal deformations to scalar-flat metrics with constant mean curvature on the boundary. Commun. Anal. Geom., v. 15, n. 2, p. 381–405, 2007. ISSN 1019-8385.

[32] ALMARAZ, S. de M. An existence theorem of conformal scalar-flat metrics on manifolds with boundary. Pac. J. Math., v. 248, n. 1, p. 1–22, 2010. ISSN 1945-5844.

[33] CHEN, S. yu S. Conformal Deformation to Scalar Flat Metrics with Constant Mean Curvature on the Boundary in Higher Dimensions. 2010. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/0912.1302>.

[34] BRENDLE, S.; CHEN, S.-Y. S. An existence theorem for the Yamabe problem on manifolds with boundary. J. Eur. Math. Soc. (JEMS), v. 16, n. 5, p. 991–1016, 2014. ISSN 1435-9855.

[35] ESCOBAR, J. F. Uniqueness and non-uniqueness of metrics with prescribed scalar and mean curvature on compact manifolds with boundary. J. Funct. Anal., v. 202, n. 2, p. 424–442, 2003. ISSN 0022-1236.

[36] CRUZ, T.; SANTOS, A. S. Critical metrics and curvature of metrics with unit volume or unit area of the boundary. J. Geom. Anal., v. 33, n. 1, p. 34, 2023. ISSN 1050-6926. Id/No 22.

[37] GALLOWAY, G.; MENDES, A. Aspects of the geometry and topology of expanding horizons. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 153, n. 03, p. 1239–1250, 2025.

[38] GALLOWAY, G.; MENDES, A. Aspects of the geometry and topology of expanding horizons. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 153, n. 03, p. 1239–1250, 2025.

[39] CARDOSO, V.; DIAS, O. J.; LEMOS, J. P. Nariai, bertotti-robinson, and anti-nariai solutions in higher dimensions. Physical review D, APS, v. 70, n. 2, p. 024002, 2004.

[40] ANDERSON, M. T. Canonical metrics on 3-manifolds and 4-manifolds. Asian J. Math, v. 10, n. 1, p. 127–164, 2006.