Apresentações de Grupos

Saimon de Souza Rocha
Bolsista PIBIC-FAPESB

Orientador: Kisnney Emiliano de Almeida

Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS
saimonhp@gmail.com; kisnney@gmail.com

Grupos Livres

Definição: *Seja A um conjunto qualquer. Um **grupo livre sobre o conjunto A** (ou um **grupo livre gerado por A**) é um grupo F_A juntamente com uma função $\imath : A \longrightarrow F_A$ tal que a seguinte condição seja satisfeita: Para qualquer grupo G e qualquer função $\varphi : A \longrightarrow G$, há um único homomorfismo $\Phi : F_A \longrightarrow G$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook, "\iota"'] & G \\ F_A \arrow[ur, dashed, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Exemplo: *F $= \{x^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$ é um grupo livre com um gerador sobre o conjunto $A = \{x\}$.*

Teorema: *Dado um conjunto qualquer A, existe um grupo livre F_A.*

Demonstração: Seja A um conjunto finito, chamado alfabeto. Os elementos de A são chamados letras. Uma palavra em A é uma sequência finita de elementos de A.

As palavras de A formam um monóide A^*, com a operação de aglutinação. Exemplo: $(abacb) \cdot (bab) := abacbbab$. O elemento neutro é a palavra vazia. (Notação: 1). Podemos estender esse conjunto para um conjunto de palavras, denotado por A^{**}, que inclua palavras com elementos inversos a^{-1} como letras, como por exemplo $aba^{-1}b^{-1}$.

Definição: *Chamamos de **redução** de uma palavra u uma outra palavra v que seja obtida de u após retirar uma subpalavra aa^{-1} ou $a^{-1}a$, com $a \in A$. Dizemos que uma palavra é **irredutível** se ela não admite redução. Por exemplo, $abca^{-1}$ é irredutível, enquanto $baa^{-1}b$ não é.*

É possível provar que toda palavra u ou é irredutível ou pode ser reduzida a uma única palavra irredutível $\bar{u}$. Assim, se $u \in A^{**}$, podemos definir uma relação de equivalência da seguinte forma: $u \sim v \iff \bar{u} = \bar{v}$. Denotamos a classe de equivalência de u com relação a $\sim$ por $\rho(u)$.

Teorema: *Seja $F_A := \frac{A^{**}}{\sim}$. O par $(F_A, \cdot)$ é um grupo livre gerado por A, onde $\rho(u) \cdot \rho(v) := \rho(uv)$.*

Utilizando o teorema do homomorfismo

Teorema: *Seja $\varphi : F \longrightarrow G$ um homomorfismo de grupos. Então, existe um isomorfismo $\Phi : \dfrac{F}{\ker \varphi} \longrightarrow \operatorname{Im} \varphi$,*

podemos obter um resultado essencial para a definição de **apresentação** de um grupo:

Corolário: *Todo grupo é isomorfo a algum quociente de um grupo livre, ou seja, para todo grupo G existe um grupo livre F e um subgrupo normal $N \triangleleft F$ tais que $G \cong \dfrac{F}{N}$.*

Demonstração: Seja G um grupo e seja $A \subseteq G$ um subconjunto gerador de G. Pela propriedade universal, a inclusão $A \hookrightarrow G$ induz um homomorfismo de grupos $\Phi : F_A \to G$, que é sobrejetivo pois $G = \langle A \rangle$. Logo, pelo teorema do homomorfismo, $G \cong \dfrac{F_A}{\ker(\Phi)}$.

Apresentações de grupos

Definição: *Uma **apresentação** de um grupo G é dada por dois conjuntos: Um conjunto de geradores X e um conjunto de relações R. Todo elemento do grupo pode ser obtido a partir de aplicações sucessivas da operação sobre os geradores, e as relações são propriedades que são satisfeitas por esses geradores e que são suficientes para determinar o grupo.*

A notação é a seguinte:

$$G = \langle X \mid R \rangle.$$

Observação: podemos usar, em vez das equações de R, os elementos que são igualados a 1 por essas equações.

Exemplo: $\mathbb{Z}_3 = \langle x \mid x^3 = 1 \rangle = \langle x \mid x^3 \rangle$.

Exemplo: $S_3 = \langle a\,,\, b \mid a^3 = b^2 = 1\,,\, ab = ba^{-1} \rangle = \langle a\,,\, b \mid a^3, b^2, abab^{-1} \rangle$.

Exemplo: $\mathbb{Z} = \langle x \mid \emptyset \rangle$.

Definição: *Seja G um grupo e R um subconjunto de G. O **fecho normal** de R em G (Notação: $\langle R \rangle^G$) é o subgrupo gerado pelos elementos da forma $g^{-1}rg$, onde $r \in R \cup R^{-1}$ e $g \in G$.*

Proposição: *O fecho normal de R em G é o menor subgrupo normal de G que contém R, ou seja, $\langle R \rangle^G \lhd G$ e se $R \subset N \lhd G$ então $\langle R \rangle^G \subset N$.*

Demonstração: Primeiro vamos mostrar que $\langle R \rangle^G \lhd G$, isto é, $(\langle R \rangle^G)^g = \langle R \rangle^G$, para todo $g \in G$. Para isso seja $x \in \langle R \rangle^G$ e $g \in G$. Então, $x = (g_1^{-1}r_1g_1) \cdots (g_n^{-1}r_ng_n)$, com $r_1, \ldots, r_n \in R \cup R^{-1}$, $g_1, \ldots, g_n \in G$. Isso implica $x^g = g^{-1}xg = g^{-1}(g_1^{-1}r_1g_1) \cdots (g_n^{-1}r_ng_n)g$. Acrescentando gg^{-1} entre cada g_ig_{i+1}, obtêm-se que $x^g = ((g_1g)^{-1}r_1(g_1g)) \cdots ((g_ng)^{-1}r_n(g_ng))$. Logo, $x^g \in \langle R \rangle^G$.

Agora vamos mostrar que se $R \subset N \lhd G$ então $\langle R \rangle^G \subset N$. Se N é um subgrupo normal de G, então $N^g = N$, ou seja, $g^{-1}ng \in N$, para todo $g \in G$ e para todo $n \in N$. Então, $(g_1^{-1}r_1g_1), \ldots, (g_n^{-1}r_ng_n) \in N$, para quaisquer $r_1, \ldots, r_n \in R \cup R^{-1}$ e quaisquer $g_1, \ldots, g_n \in G$. Como N é um subgrupo, então $x \in N$. Portanto, $\langle R \rangle^G \subset N$.

Exemplo: $\dfrac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_5 = \langle a | a^5 = 1 \rangle$ e $5\mathbb{Z} = \langle 5 \rangle^{\mathbb{Z}}$.

Exemplo: *Sejam $A = \{a, b\}$ e F_A o grupo livre gerado por A. Seja $N := \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle^{F_A}$. Então, $\dfrac{F_A}{N} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$.*

Conclusão:

$$\langle X \mid R \rangle = \frac{F_X}{\langle R \rangle^{F_X}}$$