Jogos matemáticos: uma maneira divertida de aprender Matemática

Rogério Ricardo Steffenon[1], *Thomás Jung Spier*[2]

[1] Universidade do Vale do Rio dos Sinos, *Email:* `steffenonenator@gmail.com`

[2] Universidade Federal do Rio Grande do Sul (estudante de graduação), *Email:* `thomasjspier@yahoo.com.br`

Neste minicurso serão apresentados atividades lúdicas e jogos matemáticos. Como atividades lúdicas citamos o problema de Josephus, os cartões mágicos binários e os cartões mágicos de Fibonacci. No caso de jogos veremos o NIM e sua relação com os sistema binário (soma NIM e Teorema de Bouton), Fibonacci NIM e sua relação com o Teorema de Zeckendorf, jogos de subtração com palitos e Hackenbush.

Os jogos que abordaremos têm as seguintes características: há dois jogadores, que jogam alternadamente; os competidores têm informação completa da situação do jogo em qualquer momento e as jogadas possíveis estão esclarecidas e são conhecidas por ambos; não há dispositivos aleatórios; existe um critério bem definido e de conhecimento de todos que determina um único vencedor; o jogo termina em tempo finito. Além disso, serão discutidos alguns resultados básicos da teoria de jogos combinatórios. Nos jogos que envolvem retirada de palitos iremos considerar também a versão misère em que o critério de vitória é invertido.

A distribuição das aulas será a seguinte:

Primeira Aula: Serão vistas as mágicas com os cartões binários, os cartões de Fibonacci e o problema de Josephus. Além disso, apresentaremos os Jogos de subtração com palitos, considerando os casos: NIM, Fibonacci NIM e outros.

Segunda Aula: Iremos desenvolver a notação e resultados básicos da teoria de jogos combinatórios aplicando as estratégias nos jogos já discutidos e no Hackenbush.

Pré-requisito: nenhum.

1 Primeira Aula

Segue uma lista das atividades que pretendemos abordar no minicurso. No presente texto encontram-se os enunciados e uma breve explanação.

Cartões Mágicos Binários

Inicialmente deduzimos o resultado $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$, para todo $n \geq 1$, através do seguinte problema:

"Num torneio de tênis individual há 2^{n+1} participantes. Sabendo que a disputa é do tipo *mata-mata** , quantos jogos serão realizados para se definir o vencedor?"

Utilizamos um argumento de contagem dupla para estabalecer a igualdade. Considere um torneio de tênis com n competidores como o enunciado acima. Observe que em cada rodada o número de jogos é igual a metade do total de participantes restantes. Com isso, na primeira rodada temos 2^n partidas, na segunda 2^{n-1}, e assim sucessivamente até que na última rodada temos o jogo que decide o campeão. Com isso temos um total de $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$ partidas. Por outro lado, podemos ver que a cada jogo está associado um jogador que é eliminado do torneio. Como temos 2^{n+1} competidores e no final só resta um, que é o grande vencedor, segue que foram realizadas $2^{n+1} - 1$ partidas. Concluímos então que $1+2+2^2+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$ para todo $n \geq 1$.

*Os jogadores são divididos em grupos de 2, ao acaso, e jogadores de um mesmo grupo jogam entre si. Os perdedores são eliminados e os vencedores são divididos novamente em grupos de 2 e assim por diante até restar um jogador, que é proclamado campeão.

O resultado abaixo se refere ao sistema de numeração binário.

Teorema: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como uma soma de diferentes potências de 2: $1, 2, 4, 8, \ldots$

Demonstração: Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução em n. Temos que $1 = 1, 2 = 2, 3 = 1 + 2, 4 = 4, 5 = 4 + 1, 6 = 4 + 2, 7 = 4 + 2 + 1$ e, com isso, o resultado vale para todo $n \leq 7$. Supõe que o resultado vale até um certo k. Se $k + 1$ é uma potência de 2, então está provado. Caso contrário, existe j tal que $2^j < k + 1 < 2^{j+1}$. Logo $k + 1 - 2^j \leq k$ e como qualquer número menor ou igual a k é soma de potências de 2, segue que $k + 1$ também é.

Agora provaremos a unicidade da representação. Supõe que um certo número natural n tenha duas representações distintas $n = 2^t + \cdots = 2^s + \cdots$, onde os números da sequência aparecem em ordem decrescente. Ainda podemos supor, sem perda de generalidade, que $2^t > 2^s$. Mas pelo resultado acima segue que $2^s + \cdots \leq 2^{s+1} - 1 \leq 2^t - 1 < 2^t$, o que dá uma contradição. Portanto fica provada a unicidade.

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos Binários, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 63, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 6 cartelas abaixo e o matemático faz 6 perguntas. O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante.

Ao final das 6 perguntas o matemático revela o número que a pessoa pensou.

Após realizar a mágica umas duas ou três vezes, a plateia deve deduzir o truque utilizado e por que ele sempre funciona.

Cartões Mágicos Binários

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Sequência de Fibonacci

Consideremos a seguinte variação da sequência de Fibonacci $F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Os resultados abaixo podem ser provados facilmente por indução ou por argumentos combinatórios:

$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$.

$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$.

A partir das identidades acima é possível provar o resultado abaixo.

Teorema de Zeckendorf: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência F_n.

Demonstração: Iniciamos mostrando a existência da representação, usando indução em n. Temos que $1 = F_1, 2 = F_2, 3 = F_3, 4 = 3+1 = F_3+F_1, 5 = F_4, 6 = F_4+F_1$ e, com isso, o resultado vale para todo $n \leq 6$. Supõe que o resultado vale até um certo k. Se $k+1$ é um termo da sequência de Fibonacci, então está provado. Caso contrário, existe j tal que $F_j < k+1 < F_{j+1}$. Logo $a = k+1-F_j$ é menor que F_{j-1}. De fato, se $a \geq F_{j-1}$, então $k+1 = a+F_j \geq F_{j-1}+F_j = F_{j+1}$, o que dá uma contradição. Assim, por hipótese de indução, segue que a é soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci, onde o maior deles é menor que F_{j-1}. Portanto $k+1$ pode ser escrito como soma de termos não consecutivos da sequência de Fibonacci.

Agora provaremos a unicidade da representação. Supõe que um certo número natural n tenha duas representações distintas $n = F_t + \cdots = F_s + \cdots$, onde os números da sequência aparecem em ordem decrescente. Ainda podemos supor, sem perda de generalidade, que $F_t > F_s$. Assim segue que $n = F_s + \cdots \leq F_s + F_{s-2} + \cdots = F_{s+1} - 1 < F_{s+1} \leq F_t$, o que dá uma contradição. Com isso fica provada a unicidade.

Faremos a mágica com os Cartões Mágicos de Fibonacci, usando o seguinte roteiro:

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 120, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 10 cartelas abaixo e ele faz até 10 perguntas. O número que você pensou está na primeira cartela? Está na segunda cartela? E assim por diante. Aqui há uma coisa que impressiona mais, pois se o número estiver numa determinada cartela, ele não estará na seguinte e, nesse caso, a quantidade de perguntas pode ser inferior a 10.

Ao final das perguntas o matemático revela o número que a pessoa pensou.

Após realizar a mágica umas duas ou três vezes, a plateia deve deduzir o truque utilizado e por que ele sempre funciona.

Cartões Mágicos de Fibonacci

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125
130	133	138	143	146	151
154	159	164	172	175	180
185	188	193	198	201	206

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122
126	127	134	135	139	140

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130
141	142	143	149	150	151

8	9	10	11	12	29
30	31	32	42	43	44
45	46	63	64	65	66
67	84	85	86	87	88
97	98	99	100	101	118
119	120	121	122	131	132
133	134	135	152	153	154

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139
140	141	142	143	157	158

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125
126	127	128	129	130	131
132	133	134	135	136	137
138	139	140	141	142	143

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200
201	202	203	204	205	206

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124
125	126	127	128	129	130

Jogo de subtração com palitos

Nesse jogo há dois jogadores, digamos E e D, e 2014 palitos numa mesa. Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 palitos. O jogador E começa e eles jogam alternadamente. Ganha quem retirar o último palito.

Pode ser facilmente provado que um jogo imparcial seguindo as hipóteses do início da proposta possui, se jogado de maneira ótima, resultado dependente apenas de quem começa a jogar. Isso nos permite denominar de **G** uma posição que é vitoriosa para o primeiro jogador e de **P** uma posição ganhadora para o segundo competidor. É imediato ver que de uma configuração **P** só podemos ir para uma posição **G** após a primeira jogada e de uma posição **G** sempre existe estratégia que vai para posição **P**.

Buscando descrever as posições vencedoras desse jogo montamos uma tabela marcando as posições **G** e **P** em função da quantidade de palitos:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	⋯
P	G	G	G	P	G	G	G	P	G				⋯

Após computar alguns valores pequenos fica evidente a distribuição das posições e pode ser facilmente apresentada e demonstrada a estratégia vencedora.

Possíveis variantes deste jogo em termos das possíveis jogadas:

(a) Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 4 palitos.

(b) Uma jogada consiste em retirar 1, 3 ou 4 palitos.

(c) Uma jogada consiste em retirar de 1 a 5 palitos.

(d) Uma jogada consiste em retirar pelos menos uma e até a metade dos palitos presentes na mesa, quando for a sua vez.

(e) A quantidade de palitos que pode ser retirada a cada jogada deve ser uma potência de 2: $1, 2, 4, 8, \ldots$

(f) A quantidade de palitos que pode ser retirada a cada jogada deve ser um número de Fibonacci: $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

Em seguida generalizamos o problema, com todas as variantes, no caso em que inicialmente temos n palitos, com $n \geq 0$.

Além disso, podemos considerar a versão misère de cada uma das situações acima, ou seja, quem retirar o último palito perde.

NIM – versão clássica

Agora temos n filas de palitos e dois jogadores E e D. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, aquele que estiver na sua vez pode retirar quantos palitos (pelo menos um) de apenas uma fila. Ganha quem retirar o último palito. Mais uma vez podemos considerar a versão misère em que o jogador que retirar o último palito perde.

Para esse jogo define-se a Soma Nim e o Teorema de Bouton (1901) dá a estratégia vencedora para o jogo:

Soma Nim

$(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n)_2 \oplus (b_1\ b_2\ b_3\ \cdots\ b_n)_2 = (c_1\ c_2\ c_3\ \cdots\ c_n)_2$

Onde somamos bit a bit módulo 2: $c_i = a_i + b_i (\text{mod } 2)$

Por exemplo: $(26)_{10} \oplus (14)_{10} = (11010)_2 \oplus (01110)_2 = (10100)_2 = (20)_{10}$

Teorema de Bouton – 1901: Um jogo que tem k pilhas de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_k$ é posição perdedora para o primeiro jogador se, e somente se, $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_k = 0$

A ideia da demonstração consiste nas seguintes observações que em conjunto provam o teorema: A posição terminal, em que todas pilhas estão vazias, satisfaz soma NIM zero. Além disso de uma configuração com soma NIM nula, $a_1 \oplus a_2 \oplus \cdots \oplus a_k = 0$, sempre será entregue uma posição com soma NIM diferente de zero, $b_1 \oplus b_2 \oplus \cdots \oplus b_k \neq 0$. Por último, de uma posição com soma NIM não nula sempre existe estratégia que torna a soma NIM, após a jogada, zero.

NIM – mais uma versão

Novamente temos dois jogadores, E e D, e n ($n \geq 2$) palitos numa mesa. O jogador E começa e deve retirar de 1 até $n-1$ palitos. Em seguida, o jogador D deve retirar de 1 até a quantidade de palitos retirada por E. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, deve ser retirado de 1 até a quantidade de palitos retirada na jogada anterior. Ganha quem retirar o último palito.

Faremos uma tabela para ver quem tem estratégia vencedora.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
D	E	D	E	E	E	D	E	E			$\cdots$

Aqui existe estratégia vencedora para o primeiro jogador, E, toda vez que o número de palitos não é uma potência de 2. Demonstra-se que uma estratégia que garante a vitória é sempre retirar uma quantidade de palitos igual a menor potência de 2 que consta na expansão binária do total de palitos.

NIM – versão Fibonacci

Como sempre há dois jogadores, E e D, e n ($n \geq 1$) palitos numa mesa. O jogador E começa e deve retirar de 1 até $n-1$ palitos. Em seguida, o jogador D deve retirar de 1 até o dobro da quantidade de palitos retirada por E. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, deve ser retirado de 1 até o dobro da quantidade de palitos retirada na jogada anterior. Ganha quem retirar o último palito. Nesse caso também podemos considerar a versão misère em que o jogador que retirar o último palito perde. Faremos uma tabela para ver quem tem estratégia vencedora.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
D	D	E	D	E	E	D	E	E			$\cdots$

Para esse jogo também podem ser descritas as posições e estratégias vencedoras que funcionam de modo análogo a última versão de NIM discutida. Nesse caso as posições perdedoras para E são as que possuem número de palitos inicial igual a um termo da sequência de Fibonacci. Para vencer deve ser retirada uma quantidade de palitos igual ao menor número da seguência de Fibonacci que aparece na expansão em Fibonacci do total de palitos.

NIM – uma última versão

Agora temos 2 pilhas de palitos (comece com uma de 7 e outra de 15) e dois jogadores E e D. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, aquele que estiver na sua vez pode retirar quantos palitos (pelo menos um) de apenas uma pilha ou a mesma quantidade em ambas as pilhas. Ganha quem retirar o último palito. Mais uma vez podemos considerar a versão misère em que o jogador que retirar o último palito perde.

O problema de Josephus

Flavius Josephus foi um famoso historiador judeu do século primeiro. Durante a guerra entre judeus e romanos, ele foi encurralado pelos romanos em uma caverna, junto com um grupo de 40 soldados judeus. Conta a lenda que, preferindo a morte à captura pelos romanos, os soldados decidiram suicidar-se da seguinte maneira: formaram um círculo e, a partir de uma determinada pessoa, cada um que estivesse vivo matava o soldado a sua esquerda. Nada entusiasmado com a ideia de morrer, Josephus encontrou rapidamente a posição no círculo que o manteria vivo. Qual foi esta posição? Resolva o mesmo problema para um círculo com n pessoas.

2 Segunda Aula

Construção de Jogos

Podemos verificar que os jogos já estudados respeitam as condições do início da proposta:

- Há dois jogadores, E (esquerda) e D (direita), que jogam alternadamente.
- Existe um critério bem definido de conhecimento de todos que determina um **único** vencedor.
- A informação é completa.
- Não há dispositivos aleatórios.
- O jogo termina em tempo finito.

Com a condição adicional de imparcialidade, isto é, em uma posição qualquer ambos jogadores podem executar as mesmas jogadas. O Xadrez, por exemplo, viola essa condição pois apenas um jogador move as peças brancas e o outro somente as pretas. Agora vamos trabalhar em condições um pouco mais gerais e abstratas somente impondo as condições do início do trabalho. O jogo que utilizaremos como centro da discussão para os resultados obtidos é o Hackenbush.

O jogo de Hackenbush é disputado em um grafo conexo com número finito de arestas onde fixa-se um vértice que é chamado de raiz ou chão. A cada jogada se retira uma aresta do grafo e todas as demais que não estão enraizadas, isto é, que não possuem sequência de arestas que as conectem ao chão, que é representado por uma linha pontilhada. O perdedor é aquele que se encontra sem arestas para ceifar. As arestas são divididas em três cores que definem quem pode retirá-las: azuis para E, vermelhas para D e verde para ambos. É fácil conferir que esse jogo satisfaz os itens expostos acima. As imagens abaixo ilustram algumas jogadas:

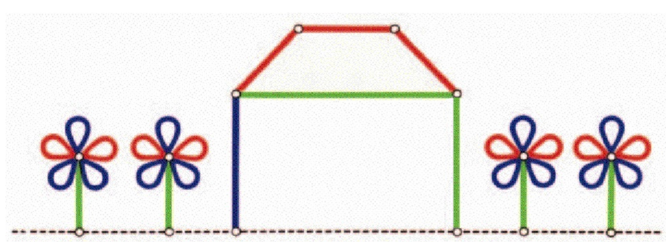

Figura 1: Exemplo com as três cores.

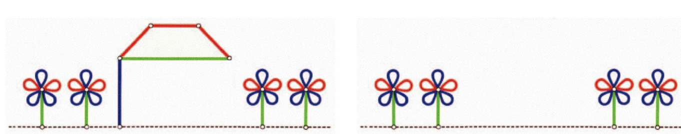

Figura 2: Após as duas bases da casa serem retiradas.

Também podemos jogar apenas com duas cores (ou apenas verde):

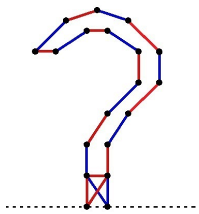

Figura 3: Jogo com duas cores.

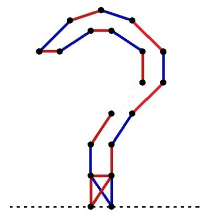

Figura 4: Após a primeira jogada.

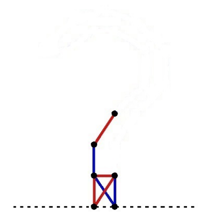

Figura 5: Após a segunda jogada.

Voltando aos jogos mais gerais, temos o seguinte método recursivo para construir jogos: dados dois conjuntos de jogos E' e D' construímos um novo jogo denotado $G = \{E'|D'\}$. Nesta nova disputa o primeiro jogador escolhe um jogo no seu conjunto correspondente e a partida continua com o que foi determinado. Todos os jogos são construídos dessa maneira e dado um jogo G se escreve G^E para uma opção do participante E e G^D para D. Podemos pensar que todos os jogos são construídos assim, pois uma opção de um dos jogadores pode sempre ser considerada um novo jogo. Com isso surge a pergunta de quando esse processo termina, ou em outras palavras qual é o jogo mais básico possível. A resposta para essa questão é que a princípio existe a disputa trivial $\{|\}$ que consiste em nenhuma opção para os jogadores. Essa partida $\{|\}$, que denotamos pelo número $0 = \{|\}$, serve de protótipo para a construção de todos outros jogos, a partir dela obtemos nas primeiras etapas de construção: $-1 = \{|0\}$,$1 = \{0|\}$,$* = \{0|0\}$,$2 = \{0, 1|\} = \{1|\}$,$-2 = \{|0, -1\} = \{| -1\}$,$\ldots$. Esses números associados com os jogos podem ser justificados observando posições simples no jogo de Hackenbush.

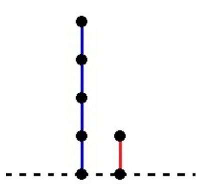

Figura 6: Jogo com valor 3.

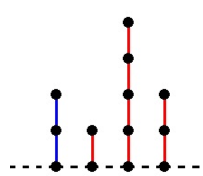

Figura 7: Valor -5.

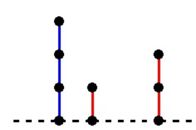

Figura 8: Valor nulo.

Observa-se que o valor associado a essas posições é igual a vantagem em número de movimentos que E tem sobre D. Podemos dizer em um certo sentido que esses jogos são iguais a 3,-5 e 0, respectivamente, com a ressalva de que isso é uma relação de equivalência e não uma igualdade na estrutura dos jogos. Na posição acima com valor 3, temos que se D começa jogando pode executar pelo menos um movimento, ainda que esteja fadado a derrota. Entretanto isso não acontece para o jogo $3 = \{0, 1, 2|\}$, pois D não possui jogadas. O modo como definimos essa igualdade é esclarecido a seguir.

Um jogo G qualquer deve pertencer a uma das seguintes classes:

- $G > 0$ (G é positivo) Vitória para o jogador esquerdo.

- $G < 0$ (G é negativo) Vitória para o jogador direito.
- $G = 0$ (G igual a 0) Vitória para o segundo a jogar.
- $G \parallel 0$ (G confundido com 0) Vitória para o primeiro jogador.
- $G \leq 0 (G < 0$ ou $G = 0)$ Supondo que D comece há estratégia vencedora para E.
- $G \geq 0$ ($G > 0$ ou $G = 0$) Supondo que E comece há estratégia vencedora para D.
- $G \triangleright 0$ ($G > 0$ ou $G \parallel 0$) Há estratégia vencedora para E se E começa.
- $G \triangleleft 0$ ($G < 0$ ou $G \parallel 0$) Há estratégia vencedora para D se D começa.

Definimos a soma de dois jogos G e H como sendo $G + H$, o jogo simultâneo de G e H, onde em sua vez o participante escolhe uma componente e executa um movimento ($G+H = \{G^E+H, H^E+G|G^D+H, H^D+G\}$), e utiliza-se a condição de término usual (aquele sem ações possíveis perde). Além disso, se $G = \{G^E|G^D\}$ definimos o oposto de G como sendo $-G = \{-G^D| - G^E\}$, com isso as jogadas possíveis trocam de jogador, isto é, o que era permitido para D passa a ser de E e vice-versa. Isso justifica a notação que utilizamos para jogos que busca tornar natural o manuseio com partidas simultâneos.

A imagem abaixo ilustra uma estratégia comum que em alguns casos pode ser efetiva:

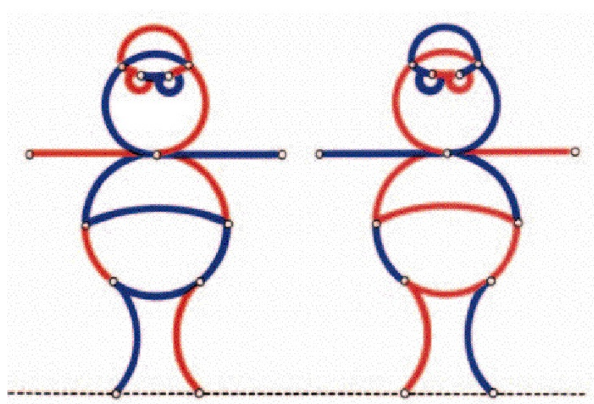

Figura 9: Uma estratégia básica. Quem ganha esse jogo?

O exemplo acima ilustra o seguinte fato de verificação imediata: $G - G = G + (-G) = 0$. De fato, basta o segundo jogador responder com as mesmas jogadas do primeiro só que na outra componente. Dessa maneira não faltam movimentos para o segundo jogador e portanto ele vence.

Ainda são pertinentes as seguintes definições para dois jogos G e H: $G > H \iff G - H > 0$, $G = H \iff G - H = 0$ e $G \parallel H \iff (G - H) \parallel 0$ sendo as demais meras combinações dessas. Esclarecemos então em que sentido dois jogos são considerados iguais: se oferecem mesma vantagem para ambos competidores, de modo que quando jogados simultaneamente um com o simétrico do outro o resultado é 0, isto é, o segundo jogador vence.

Já vimos que jogos imparciais são aqueles em que as opções para E e D são iguais para qualquer etapa da disputa. Portanto, vale nesse caso $G = -G \iff G + G = 0$, pois as opções de $-G$ são as mesmas de G (Não podemos pensar que $G = -G$ implica em imparcialidade, de fato, qualquer jogo igual a 0 satisfaz essa condição).

Podemos voltar um pouco e analisar o Nim novamente. Primeiramente observamos que o valor de uma pilha Nim de tamanho n é $*n$, onde definimos indutivamente $*0 = 0, *1 = * = \{*0| * 0\}, *2 = \{*0, *1| * 0, *1\}, *3 = \{*0, *1, *2|*0, *1, *2\}, \ldots, *n = \{*0, \ldots, *(n-1)|*0, \ldots, *(n-1)\}$. Em segundo lugar, necessitamos da definição de jogos curtos. Considerando os jogos $0 = \{|\}$, $1 = \{0|\}$, $2 = \{0, 1|\}$, $-3 = \{|0, -1, -2\}$ e mais geralmente $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1|\}$ e $-n = \{|0, -1, -2, \ldots, -(n-1)\}$, temos que a condição de um jogo G ter uma cota superior finita de número de rodadas se transforma em $-n < G < n$ para algum n natural, jogos com essa propriedade são ditos curtos. Pode ser provado facilmente que todos jogos imparciais curtos são equivalentes a jogar Nim com um pilha de determinado tamanho, isto é, seu valor é da forma $*n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Com isso já sabemos que o valor de um jogo de nim com pilhas $n_1, \ldots, n_k$ é $*n_1 + \cdots + *n_k = *n$ para um certo $n \in \mathbb{N}$. Temos também a regra do mex que afirma que se $G = \{*a, *b, \ldots | * a, *b, \ldots\}$ é jogo curto, onde $a, b, \cdots \in \mathbb{N}$, então o valor de G é $mex\{a, b, c \ldots\}$, o menor número natural que não aparece no conjunto $\{a, b, c, \ldots\}$. Através dessa regra podemos estabelecer de uma maneira diferente as estratégias para o Nim e algumas de suas modificações.

Até o momento já vimos algumas configurações com valores iguais a inteiros ou números Nim, será que existem jogos com outros valores, reais, nim ou nenhum dos dois? Claro, podem ser obtidos quaisquer números reais e outros valores que recebem nomes especiais. Entretanto iremos nos concentrar nos valores reais e nim, restringindo os jogos que podem ser tratados, mas facilitando a análise.

Em geral os valores de retas de segmentos no Hackenbush, denominados *bambus*, podem ser calculadas com uma simples regra. Com os bambus conseguimos obter posições de Hackenbush com valor igual a qualquer racional diádico:

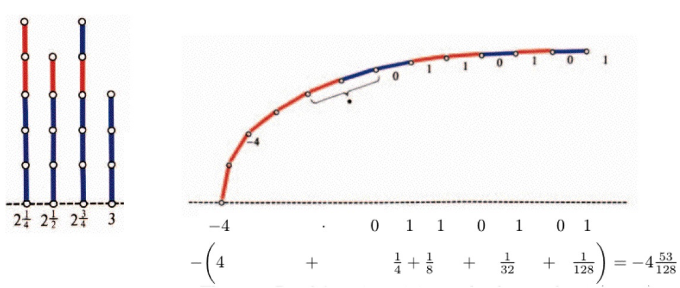

Figura 10: Bambus com respectivos valores e regra para calcular valor de bambu.

Curiosamente, podemos usar essa notação de jogos para construir os números reais de maneira diferente. Dizemos que o número real está associado a $\{a_1, a_2, \ldots | b_1, b_2, \ldots\}$, onde $a_i < b_j, \forall i, j \in \mathbb{R}$ e $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i$, se é o número "mais simples"maior que todos a_i e menor que todos b_i . A árvore da simplicidade captura de uma maneira melhor essa construção.

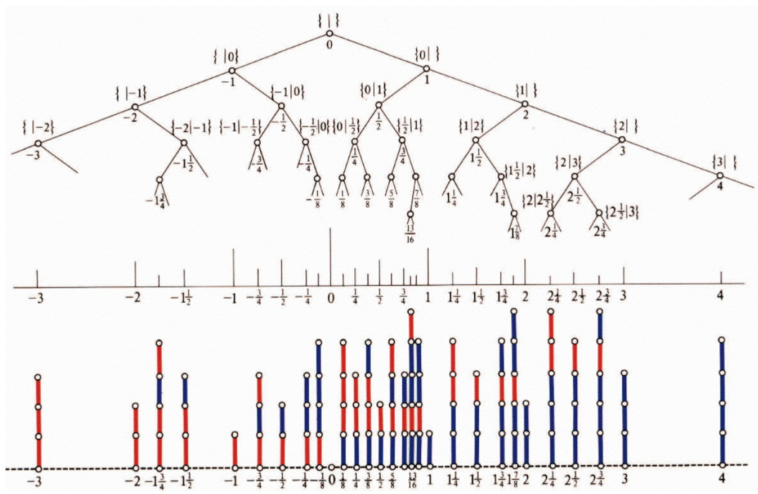

Figura 11: Árvore da simplicidade.

A regra de soma pode ser feita da maneira que foi definida para jogos e existem análogos para multiplicação, inverso e raiz quadrada. Na verdade pode se construir um corpo ordenado maior com esse método, onde também temos todos os ordinais e muitos outros elementos. Esse corpo não é igual a classe de todos os jogos, pois existem jogos que se confudem com 0, como o $*$, por exemplo.

Agora que já sabemos alguns dos valores que podemos esperar quando analisamos um jogo vamos nos aprofundar no Hackenbush e dar uma descrição mais completa de regras de simplificação e estratégias que podem ser utilizadas. Vamos começar pelo mais fácil:

Hackenbush Verde

Já sabemos que devido a imparcialidade devemos esperar valores nim para o Hackenbush verde. Acontece que esse jogo pode ser completamente resolvido através do:

Princípio de fusão: Podem ser fundidos quaisquer nós no Hackenbush verde sem alterar o seu valor.

Obs: A demonstração desse princípio é um pouco extensa.

Por exemplo, nas imagens abaixo juntamos dois nós, de duas maneiras diferentes, e o valor do jogo continua o mesmo:

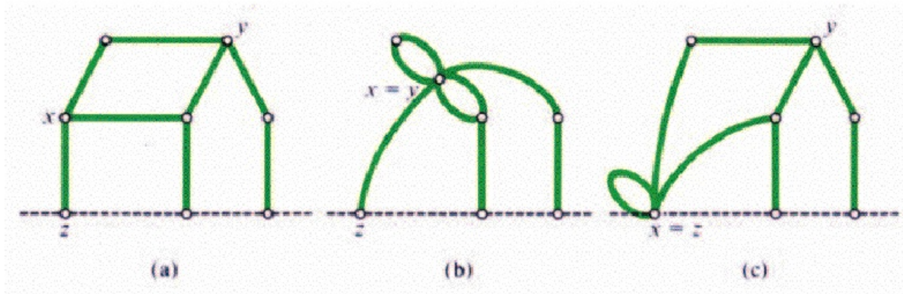

Figura 12: Princípio da Fusão.

Com isso, se esforçando um pouco é fácil vencer o Hackenbush verde!

Hackenbush Azul e Vermelho

Pode ser facilmente provado por indução que os valores para essa situação são sempre números reais.

Quando temos duas posições de Hackenbush, digamos G e H, e x é um nó no jogo G, construimos um novo Hackenbush que denotamos $G_x : H$ em que adicionamos o H em G considerando que a raiz de H é o nó x. Com essa notação podemos enunciar o seguinte:

Princípio de Colon: Se G, H e K são jogos de Hackenbush e $H \geq K$ então para qualquer nó x de G vale $G_x : H \geq G_x : K$. Em particular, se $H = K$ então $G_x : H = G_x : K$.

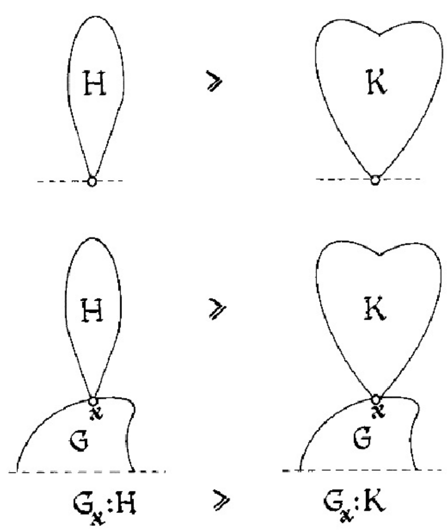

Figura 13: Princípio de Colon.

Esse princípio é natural e muito útil e vale também para hackenbush com as três cores.

É importante ressaltar que apesar de conseguirmos algumas regras de simplificação podemos encontrar dificuldades para calcular o valor exato.

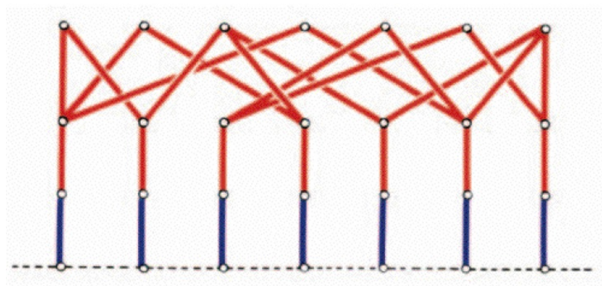

Figura 14: Jogo de Hackenbush complicado

Hackenbush Azul, vermelho e Verde

É evidente que esse último jogo é o que apresenta maiores empecilhos na sua análise. Nesse caso ainda podemos aplicar os princípios de Colon e Fusão(somente em componentes verdes) e existem alguns outros critérios pontuais que nos permitem dizer quem possui vantagem.

Referências

[1] Berlekamp, E. R. ; Conway, J. H.; Guy, R. K.(1982) *Winning Ways for your mathematical plays.* – Volume 1 Academic Press, New York

[2] Berlekamp, E. R. ; Conway, J. H.; Guy, R. K.(1982) *Winning Ways for your mathematical plays.* – Volume 2 Academic Press, New York

[3] Castro L. M .(2013) *Desafiando para pensar a ensinar.* Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática

[4] Conway, J. H. (1976) *On Numbers and Games.* Academic Press, New York

[5] Ferguson, T. S. (2005) *Game Theory.* http://www.math.ucla.edu/ tom/math167.html

[6] Holanda, B. *Jogos.* Pólos Olímpicos de Treinamento - http://poti.impa.br/upload/Aula%2006%20-%20Jogos45.pdf

[7] Saldanha, N. C. (1991) *Tópicos em Jogos Combinatórios.* 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática.