Jogos Matemáticos: uma maneira divertida de aprender Matemática

Rogério Ricardo Steffenon
Unisinos
Thomás Jung Spier
UFRGS

Alagoas, 02 de Novembro de 2014

Sistema Binário

Num torneio de tênis individual há 2^{n+1} participantes.

Sabendo que a disputa é do tipo *mata-mata*, quantos jogos serão realizados para se definir o vencedor?

A partir desse problema podemos deduzir o seguinte resultado

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Teorema: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como uma soma de diferentes potências de 2: $1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

Cartões Mágicos Binários

O *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 63, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 6 cartelas abaixo e o matemágico faz 6 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela?

Está na segunda cartela?

E assim por diante.

Ao final das 6 perguntas o matemágico revela o número que a pessoa pensou.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Sequência de Fibonacci

Consideremos uma variação da sequência de Fibonacci

$F_1 = 1, F_2 = 2$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, para $n \geq 3$.

Os resultados abaixo podem ser provados por indução:

$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1.$

$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$

A partir das identidades acima é possível provar o resultado abaixo.

Teorema de Zeckendorf: Todo número inteiro positivo pode ser escrito de modo único como soma de termos não consecutivos da sequência F_n.

Cartões Mágicos de Fibonacci

Agora o *matemágico* escolhe alguém da plateia e pede que essa pessoa pense num número de 1 a 120, sem revelá-lo.

Em seguida, são apresentadas as 10 cartelas abaixo e ele faz até 10 perguntas.

O número que você pensou está na primeira cartela?

Está na segunda cartela? E assim por diante.

Aqui há uma coisa que impressiona mais, pois se o número estiver numa determinada cartela, ele não estará na seguinte e, nesse caso, a quantidade de perguntas pode ser inferior a 10.

1	4	6	9	12	14
17	19	22	25	27	30
33	35	38	40	43	46
48	51	53	56	59	61
64	67	69	72	74	77
80	82	85	88	90	93
95	98	101	103	106	108
111	114	116	119	122	124

2	7	10	15	20	23
28	31	36	41	44	49
54	57	62	65	70	75
78	83	86	91	96	99
104	109	112	117	120	125

3	4	11	12	16	17
24	25	32	33	37	38
45	46	50	51	58	59
66	67	71	72	79	80
87	88	92	93	100	101
105	106	113	114	121	122

5	6	7	18	19	20
26	27	28	39	40	41
52	53	54	60	61	62
73	74	75	81	82	83
94	95	96	107	108	109
115	116	117	128	129	130

8	9	10	11	12	29
30	31	32	42	43	44
45	46	63	64	65	66
67	84	85	86	87	88
97	98	99	100	101	118
119	120	121	122	131	132

13	14	15	16	17	18
19	20	47	48	49	50
51	52	53	54	68	69
70	71	72	73	74	75
102	103	104	105	106	107
108	109	136	137	138	139

21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	32
33	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86
87	88	110	111	112	113
114	115	116	117	118	119
120	121	122	165	166	167

34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51
52	53	54	123	124	125

55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	199	200

89	90	91	92	93	94
95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106
107	108	109	110	111	112
113	114	115	116	117	118
119	120	121	122	123	124

Jogos de subtração com palitos

Nesse jogo há dois jogadores, digamos E e D, e 2014 palitos numa mesa. Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 3 palitos. O jogador E começa e eles jogam alternadamente. Ganha quem retirar o último palito.

Posição que leva a **alguma** posição perdedora: **G**

Posição que **só** leva a uma posição ganhadora: **P**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
P	G	G	G	P									$\cdots$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
P	G	G	G	P	G	G	G	P	G				$\cdots$

Possíveis variantes deste jogo em termos das possíveis jogadas:

(a) Uma jogada consiste em retirar 1, 2 ou 4 palitos.

(b) Uma jogada consiste em retirar 1, 3 ou 4 palitos.

(c) Uma jogada consiste em retirar de 1 a 5 palitos.

(d) Uma jogada consiste em retirar pelos menos um e até a metade dos palitos presentes na mesa, quando for a sua vez.

Mais algumas variações:

(e) A quantidade de palitos que pode ser retirada a cada jogada deve ser uma potência de 2: $1, 2, 4, 8, \ldots$

(f) A quantidade de palitos que pode ser retirada a cada jogada deve ser um número de Fibonacci: $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$

Agora podemos generalizar o problema, com todas as variantes, no caso em que inicialmente temos n palitos, com $n \geq 0$.

Além disso, podemos considerar a versão misère de cada uma das situações acima, ou seja, nesse caso quem retirar o último palito perde.

NIM – versão clássica

Agora temos n filas de palitos e dois jogadores E e D. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, aquele que estiver na sua vez pode retirar quantos palitos quiser (pelo menos um) de apenas uma fila. Ganha quem retirar o último palito. Mais uma vez podemos considerar a versão misère em que o jogador que retirar o último palito perde.

Para esse jogo define-se a Soma Nim e o Teorema de Bouton (1901) dá a estratégia vencedora para o jogo.

Soma Nim

$641 = 600 + 40 + 1 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 1 \times 10^0$, $641 = (641)_{10}$

$37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0$, ou seja, $37 = (100101)_2$

$(11101)_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29$

Soma módulo 2

$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$

Soma Nim

$(11010)_2 \oplus (01110)_2 = (10100)_2$

$(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_n)_2 \oplus (b_1\ b_2\ b_3\ \cdots\ b_n)_2 = (c_1\ c_2\ c_3\ \cdots\ c_n)_2$

$c_i = a_i + b_i (\text{mod } 2)$

Teorema de Bouton – 1901

$(\alpha\ \beta\ \gamma)$ é uma posição Perdedora se, e somente se, $\alpha \oplus \beta \oplus \gamma = 0$

Esse resultado vale para qualquer número de filas!

Além disso, o jogador que "recebe"uma posição perdedora sempre entregará uma posição ganhadora e um jogador que recebe uma posição ganhadora sempre tem estratégia para devolver uma posição perdedora.

NIM – mais uma versão

Novamente temos dois jogadores, E e D, e n ($n \geq 2$) palitos numa mesa. O jogador E começa e deve retirar de 1 até $n-1$ palitos. Em seguida, o jogador D deve retirar de 1 até a quantidade de palitos retirada por E. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, deve ser retirado de 1 até a quantidade de palitos retirada na jogada anterior. Ganha quem retirar o último palito.

Faremos uma tabela para ver quem tem estratégia vencedora.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
D	E	D	E	E	E	D	E	E			$\cdots$

Corolário do Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número inteiro positivo n pode ser escrito de modo único na forma $n = 2^k(2m + 1)$ onde k e m são inteiros não negativos.

Para $k = 0$ temos os números ímpares e se $k = 1$ temos os números da forma $4m + 2$.

NIM – versão Fibonacci

Novamente temos dois jogadores, E e D, e n $(n \geq 2)$ palitos numa mesa. O jogador E começa e deve retirar de 1 até $n-1$ palitos. Em seguida, o jogador D deve retirar de 1 até o dobro da quantidade de palitos retirada por E. Os dois jogam alternadamente e, em cada jogada, deve ser retirado de 1 até o dobro da quantidade de palitos retirada na jogada anterior. Ganha quem retirar o último palito.

Faremos uma tabela para ver quem tem estratégia vencedora.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
D	D	E	D	E	E	D	E	E			$\cdots$

O Problema de Josephus – uma versão

Flavius Josephus foi um famoso historiador judeu do século primeiro. Durante a guerra entre judeus e romanos, ele foi encurralado pelos romanos em uma caverna, junto com um grupo de 40 soldados judeus. Conta a lenda que, preferindo a morte à captura pelos romanos, os soldados decidiram suicidar-se da seguinte maneira: formaram um círculo e, a partir de uma determinada pessoa, cada um que estivesse vivo matava o soldado a sua esquerda. Nada entusiasmado com a ideia de morrer, Josephus encontrou rapidamente a posição no círculo que o manteria vivo. Qual foi esta posição? Resolva o mesmo problema para um círculo com n pessoas.

Que jogos estudaremos?

Os jogos considerados tem as seguintes características:

- Há dois jogadores, E (esquerda) e D (direita), que jogam alternadamente.
- Existe um critério bem definido de conhecimento de todos que determina um **único** vencedor.
- A informação é completa.
- Não há dispositivos aleatórios.
- O jogo termina em tempo finito.
- (Ambos jogadores tem as mesmas opções.)

Como jogar?

Jogamos em um grafo conexo com número finito de arestas em que fixamos um vértice chamado de chão.

As arestas são coloridas com Azul, Vermelho e Verde.

Regras:

- E e D jogam alternadamente.
- Cada jogada consiste em retirar uma aresta e as demais que não estão "enraizadas".
- Arestas Azuis pertencem a E, e vermelhas a D. As verdes são para ambos.
- Perde aquele que não tem arestas para ceifar.

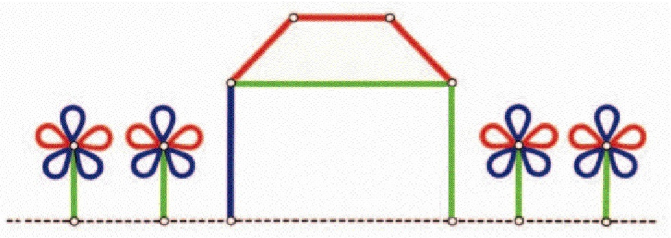


Figura: Exemplo de jogo com as três cores.

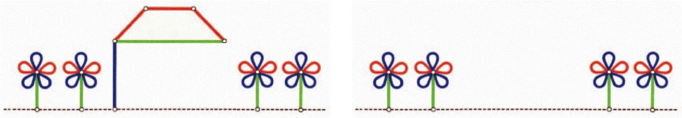
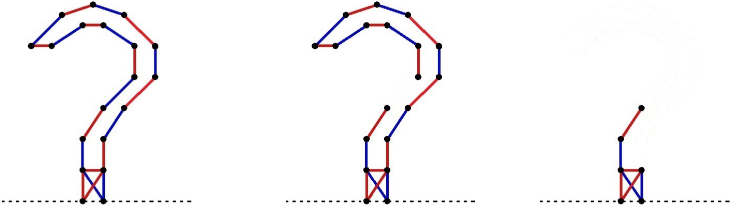


Figura: Após as duas bases da casa serem retiradas.

Apenas duas cores:



Construção

Dados dois conjuntos de jogos, E' e D' construímos o jogo $G = \{E'|D'\}$.

Nessa nova disputa o primeiro a jogar, E ou D, pode escolher um jogo em E' ou D', respectivamente.

A partir daí continua-se jogando com o que foi escolhido. Todos jogos são construídos assim.

Escreve-se G^E e G^D para as opções de E e D em G.

Surge a pergunta: Qual o jogo mais básico possivél?

Há a disputa trivial que consiste em $0 = \{|\}$, e não há movimento algum para os jogadores.

Utilizamos 0 como protótipo para construir indutivamente os outros jogos. Nas primeiras etapas temos: $-1 = \{|0\}$,$1 = \{0|\}$,$* = \{0|0\}$,$2 = \{0, 1|\} = \{1|\}$,$-2 = \{|0, -1\} = \{| -1\}$,...

Esses números associados aos jogos podem ser justificados observando algumas posições simples de Hackenbush:

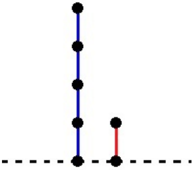


Figura: Valor 3.

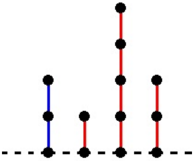


Figura: Valor -5.

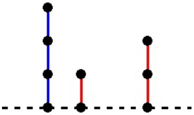


Figura: Valor nulo.

Observa-se que o valor associado é igual a vantagem que E possui em movimentos.

Pode se dizer em certo sentido que esses jogos são iguais a 3,-5 e 0, respectivamente.

Um jogo G qualquer deve pertencer a uma das seguintes classes:

- $G > 0$ (G é positivo) Vitória para o jogador esquerdo.
- $G < 0$ (G é negativo) Vitória para o jogador direito.
- $G = 0$ (G igual a 0) Vitória para o segundo a jogar.
- $G \parallel 0$ (G confundido com 0) Vitória para o primeiro jogador.
- $G \leq 0(G < 0$ ou $G = 0)$ Supondo que D comece há estratégia vencedora para E.
- $G \geq 0$ ($G > 0$ ou $G = 0$) Supondo que E comece há estratégia vencedora para D.
- $G \rhd 0$ ($G > 0$ ou $G \parallel 0$) Há estratégia vencedora para E se E começa.
- $G \lhd 0$ ($G < 0$ ou $G \parallel 0$) Há estratégia vencedora para D se D começa.

Soma de Jogos

Dados G e H jogos definimos a soma $G+H$ como sendo o jogo simultâneo de G e H.

Em sua vez o competidor escolhe uma componente e executa o movimento. Perde aquele que fica sem movimentos.

Podemos também esclarer indutivamente:
$G+H=\{G^E+H, H^E+G|G^D+H, H^D+G\}$

Definimos o oposto de um jogo $G=\{G^E|G^D\}$ como sendo $-G=\{-G^D|-G^E\}$, onde os jogadores trocam de papéis.

Voltando um pouco ao Hackenbush perguntamos:

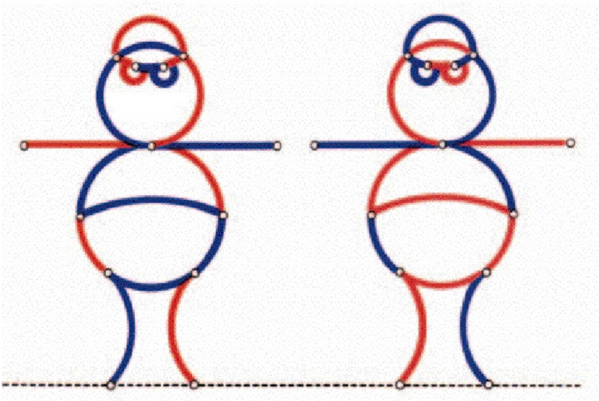


Figura: Uma estratégia básica. Quem ganha esse jogo?

Esse exemplo ilustra o seguinte fato de verificação imediata: $G - G = G + (-G) = 0$.

Basta o segundo jogador responder com as mesmas jogadas do primeiro só que na outra componente.

Dessa maneira não faltam movimentos ao segundo jogador e portanto ele vence

Ainda são pertinentes as seguintes definições para dois jogos G e H: $G > H \iff G - H > 0$, $G = H \iff G - H = 0$ e $G \parallel H \iff (G - H) \parallel 0$

Soma de jogos e conclusões

Se possuímos alguma informação sobre dois jogos o que podemos dizer sobre sua soma?

	$H = 0$	$H > 0$	$H < 0$	$H \parallel 0$
$G = 0$	$G + H = 0$	$G + H > 0$	$G + H < 0$	$G + H \parallel 0$
$G > 0$	$G + H > 0$	$G + H > 0$	$G + H \ ?\ 0$	$G + H \mathrel{\vert\!\triangleright} 0$
$G < 0$	$G + H < 0$	$G + H \ ?\ 0$	$G + H < 0$	$G + H \mathrel{\triangleleft\!\vert} 0$
$G \parallel 0$	$G + H \parallel 0$	$G + H \mathrel{\vert\!\triangleright} 0$	$G + H \mathrel{\triangleleft\!\vert} 0$	$G + H \ ?\ 0$

Figura: Informações sobre a soma.

Jogos Imparciais

Os valor de uma pilha de Nim de tamanho $n \in \mathbb{N}$ é $*n$, onde definimos indutivamente: $*0 = 0, *1 = * = \{*0 | *0\}, *2 = \{*0, *1 | *0, *1\}, \ldots, *n = \{*0, \ldots, *(n-1) | *0, \ldots, *(n-1)\}$.

Um jogo G é dito curto se existe n natural tal que $-n < G < n$.

Teorema: Todo jogo imparcial curto tem valor igual a $*n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

$G = \{*a_1, *a_2, \ldots\} = *m$, onde $m = mex\{a_1, a_2, \ldots\}$.

Hackenbush e outros valores

Quais valores mais podem aparecer?

Calculamos o valor de um *bambu* com uma simples regra, obtendo um racional diádico:

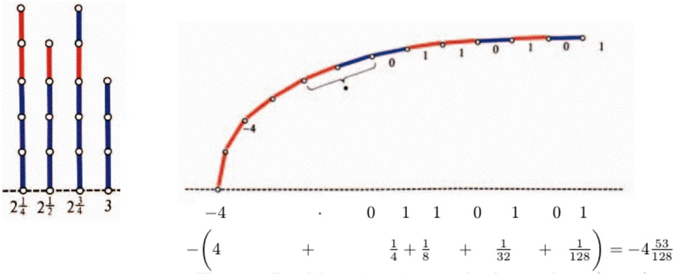


Figura: Bambus com respectivos valores e regra para calcular valor de bambu.

Números reais

Se $\{a_1, a_2, \dots | b_1, b_2, \dots\}$, onde $a_i < b_j, \forall i, j \in \mathbb{R}$ e $a_i, b_i \in \mathbb{R}, \forall i$, então seu valor é $r \in \mathbb{R}$ "mais simples" tal que é maior que todos a_i e menor que todos b_i.

A árvore da simplicidade ilustra a construção:

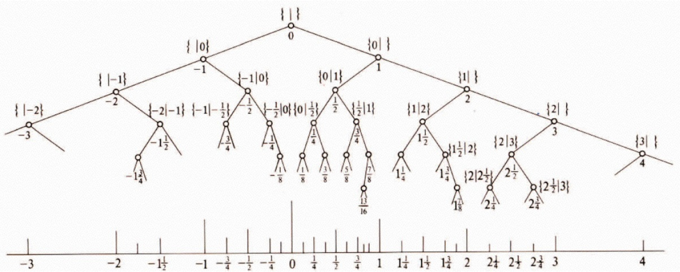


Figura: Árvore da simplicidade.

Hackenbush Verde

Resolvemos o Hackenbush Verde completamente através do:

Princípio da fusão: Podem ser fundidos quaisquer nós no Hackenbush verde sem alterar o seu valor.

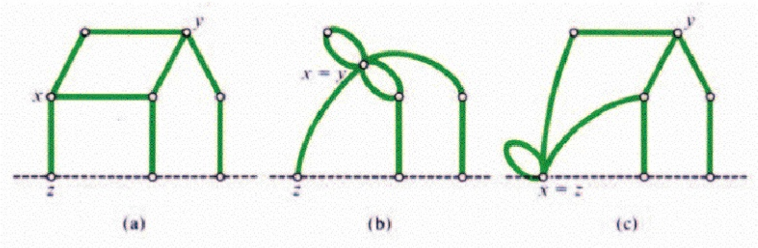


Figura: Princípio da Fusão.

Hackenbush Azul e Vermelho

Os números são sempre reais.

Sejam G e H jogos de Hackenbush, e x é um nó no jogo G. Construímos $G_x : H$ e enunciamos:

Princípio de Colon: Se G, H e K são jogos de Hackenbush e $H \geq K$ então para qualquer nó x de G vale $G_x : H \geq G_x : K$. Em particular, se $H = K$ então $G_x : H = G_x : K$.

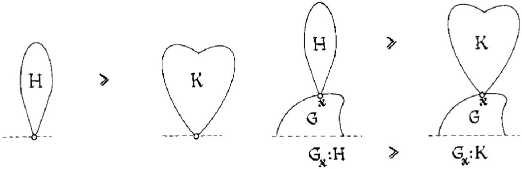
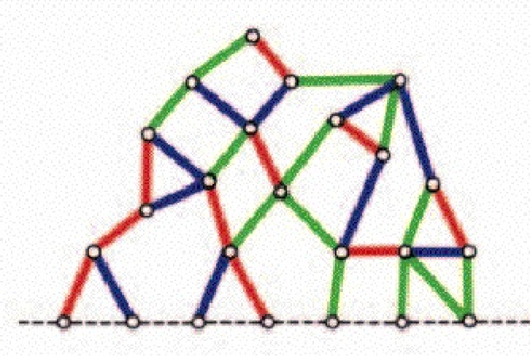


Figura: Princípio de Colon.

Hackenbush com três cores



Referências

- Ferguson, T. S. – Game Theory – http://www.math.ucla.edu/ tom/math167.html (2005)
- Holanda, B. Jogos – Pólos Olímpicos de Treinamento – http://poti.impa.br/upload/Aula%2006%20-%20Jogos45.pdf
- Saldanha, N. C. – Tópicos em Jogos Combinatórios – 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática. (1991)
- Conway, J. H. – On Numbers and Games – Academic Press, New York(1976)
- Berlekamp, E. R. ; Conway, J. H.; Guy, R. K. – Winning Ways for your mathematical plays, vols. 1 and 2 – Academic Press, New York(1982)