Equivalências e Consequências da Hipótese do Contínuo em Análise e Topologia –

Parte I: Contexto, Consistência e Independência de CH

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva
IM/UFBA
Salvador – Bahia – Brasil

Maceió – Alagoas

Novembro de 2014

Sumário I

Sumário II

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** = **ZF** + **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais (e o menor ordinal limite). "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.

$\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável.

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** $=$ **ZF** $+$ **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais
  (e o menor ordinal limite).
  "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.

  $\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** = **ZF** + **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais
  (e o menor ordinal limite).
  "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.

  $\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável.

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** = **ZF** + **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais
  (e o menor ordinal limite).
  "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.

  $\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** = **ZF** + **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais
  (e o menor ordinal limite).
  "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.

  $\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável.

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** $=$ **ZF** $+$ **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais
  (e o menor ordinal limite).
  "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.
  $\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável

Notações e terminologia

No que segue,

- **ZF** é a Axiomática de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.
- **AC** é o Axioma da Escolha.
- **ZFC** = **ZF** + **AC**.
- **CH** é a Hipótese do Contínuo.
- Dado um conjunto X, o **conjunto das partes de** X (i.e., o conjunto de todos os subconjuntos de X) é denotado por $\mathcal{P}(X)$.
- A **cardinalidade** de um conjunto X é denotada por $|X|$.
- $\omega :=$ o conjunto dos números naturais
  (e o menor ordinal limite).
  "Ingenuamente", é o conjunto $\mathbb{N}$.

  $\omega_1 :=$ o primeiro ordinal não-enumerável.

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^{X}Y := \{f \mid f \text{ é função, } f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^{X}Y := \{f \mid f$ é função, $f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^{X}Y := \{f \mid f \text{ é função, } f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^X Y := \{f \mid f \text{ é função}, f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^{X}Y := \{f \mid f$ é função, $f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^X Y := \{f \mid f \text{ é função, } f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Notações e terminologia

- Tem-se também $\omega = \aleph_0$ (o **menor cardinal infinito**).
- Tem-se ainda $\omega_1 = \aleph_1$ (o **primeiro cardinal não-enumerável**).
- O cardinal $2^{\aleph_0}$ – que é a cardinalidade da reta – é denotado por $\mathfrak{c}$ (a chamada **a cardinalidade do contínuo**).
- Para X e Y conjuntos, ${}^{X}Y := \{f \mid f$ é função, $f : X \to Y\}$.
- Para X conjunto, ${}^{<\omega}X$ denota a família das sequências finitas de elementos de X.
- A existência de uma função bijetora entre X e Y será denotada por $X \approx Y$ (que se lê: "X é equipotente a Y").
- A existência de uma função injetora de X em Y será denotada por $X \preccurlyeq Y$ (que se lê: "X é dominado por Y").

Conjuntos finitos e enumeráveis

Nossas definições para as noções **finito** e de **infinito** vão usar os **Ordinais de von Neumman** !!!

Os ordinais finitos são exatamente **os números naturais**, que para nós conjuntistas são os conjuntos da forma $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, etc., i.e., $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots, n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \ldots$

O conjunto de todos os números naturais é $\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, que é, conforme já comentamos, o menor ordinal infinito (e o primeiro ordinal limite).

Com essas noções, já podemos definir exatamente quem são os conjuntos **finitos** e os **infinitos enumeráveis** !!!

Conjuntos finitos e enumeráveis

Conjuntos finitos

Um conjunto X é **finito** se $X = \emptyset$ ou se existe um número natural n tal que $X \approx n$.

Notar que se X é finito e equipotente a n, então X possui exatamente n elementos !!!

Piada.: "Nós conjuntistas contamos de 0 até $n - 1 \ldots$"

Um conjunto que não seja finito é dito **infinito**.

ω é infinito – já que não satisfaz o **Princípio da Casa dos Pombos** !!!

O Princípio da Casa dos Pombos como uma propriedade dos conjuntos finitos

Bijeções com partes próprias

Conjuntos finitos **não podem possuir** bijeções com partes próprias (pelo Princípio da Casa dos Pombos).

Como existem bijeções entre ω e subconjuntos próprios de ω, segue que ω é infinito.

Para a implicação contrária – i.e., se um conjunto é infinito, então ele possui bijeções com partes próprias –, o Axioma da Escolha é necessário !!!

Na verdade, os conjuntos que possuem bijeção com partes próprias são exatamente os que possuem uma cópia de ω dentro deles.

Conjuntos Dedekind-infinitos

Exercício (ZF). Mostre que X é Dedekind-infinito (i.e., possui uma bijeção com uma parte própria) se, e somente se, $\omega \preccurlyeq X$.

Atenção ! O exercício acima é para ser feito **sem o uso** do Axioma da Escolha... Trata-se de uma afirmação que é verdadeira mesmo em **ZF**.

O Axioma da Escolha "entra em ação" na prova de que infinitos possuem bijeção com uma parte própria exatamente por ser fácil construir, com o Axioma da Escolha, um subconjunto enumerável e infinito para qualquer conjunto infinito. Mas o que é enumerável mesmo ???

Aliás – o que diz o Axioma da Escolha mesmo ???

Conjuntos finitos e enumeráveis

Conjuntos enumeráveis

Um conjunto X é dito enumerável em duas situações:

- se for finito; ou
- se for infinito, porém equipotente a ω.

Exercícios.
1) Mostre que X é enumerável se, e somente se, $X \preccurlyeq \omega$.
2) Se X é não-vazio, X é enumerável se, e somente se, existe uma função sobrejetora de ω em X.

Obs. Notar que a função sobrejetora do segundo exercício é, exatamente, o que chamamos de uma **enumeração** de X...

Conjuntos finitos e enumeráveis

Conjuntos enumeráveis

Um conjunto X é dito enumerável em duas situações:

- se for finito; ou
- se for infinito, porém equipotente a ω.

Exercícios.
1) Mostre que X é enumerável se, e somente se, $X \preccurlyeq \omega$.
2) Se X é não-vazio, X é enumerável se, e somente se, existe uma função sobrejetora de ω em X.

Obs. Notar que a função sobrejetora do segundo exercício é, exatamente, o que chamamos de uma **enumeração** de X...

Enunciados do Axioma da Escolha

Existem várias versões claramente equivalentes do Axioma da Escolha; vamos enunciar algumas dessas versões.

Axioma da Escolha – enunciado mais "intuitivo"

Dada uma família qualquer de conjuntos não-vazios, é possível construir um conjunto escolhendo exatamente um elemento de cada um dos membros dessa família.

Axioma da Escolha - 2a. Versão

O produto cartesiano de uma família qualquer de conjuntos não-vazios é não-vazio.

Axioma da Escolha - 3a. Versão

Toda família de conjuntos não-vazios admite uma função-escolha.

Qualquer $\equiv$ infinita ...

Em todos os enunciados do Axioma da Escolha do slide anterior, a expressão "família qualquer de conjuntos não-vazios" pode ser substituída por "família infinita de conjuntos não-vazios".

Isso ocorre devido ao fato de que, como a lógica é finitária, **não necessitamos do Axioma da Escolha** para definirmos funções-escolha no caso de **famílias finitas** de conjuntos não-vazios !!!

Também não necessitamos do Axioma da Escolha em situações nas quais tenhamos uma escolha pré-definida e "canônica" em cada um dos (mesmo que infinitos) conjuntos não-vazios; lembrar da famosa analogia envolvendo **infinitos pares de sapatos** e **infinitos pares de meias** !!!

Objetivos do Minicurso

A Hipótese do Contínuo – conjecturada por Cantor nos anos 1880, e muito provavelmente a mais célebre asserção matemática cuja independência dos axiomas usuais da Teoria dos Conjuntos já foi demonstrada – é, essencialmente, uma asserção a respeito da cardinalidade (i.e., do "tamanho") do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Neste minicurso, descreveremos o contexto que levou Cantor a enunciar a sua conjectura (a qual foi resultado de uma série de tentativas de exibir algum subconjunto da reta com cardinalidade intermediária entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$) e apresentaremos com detalhes algumas equivalências e consequências da Hipótese do Contínuo em Análise e Topologia.

O argumento diagonal

Nos anos 1880, Cantor estabeleceu a não-enumerabilidade da reta, e, mais geralmente, obteve a desigualdade estrita $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ para qualquer conjunto X, resultado conhecido como o **Teorema de Cantor**.

Tal teorema foi demonstrado a partir do uso do célebre **argumento diagonal**.

Como é mesmo o argumento diagonal ???

Um caso particular importante . . .

Ao invés de fazer o tradicional argumento usando a representação decimal de números reais entre 0 e 1, vamos apresentar um exemplo mais básico:

As sequências infinitas de 0's e 1's

A família de todas as sequências infinitas de 0's e 1's é não-enumerável.

Primeiro, vamos fazer identificações que nos permitam dizer exatamente o que é "uma sequência infinita de 0's e 1's" .

A família das funções de ω em 2

Como o número natural 2 é, para a Teoria dos Conjuntos, o conjunto $2 = \{0, 1\}$, e identificando uma sequência binária infinita com uma função definida em ω com valores em 2, o que afirmamos no slide anterior é:

O conjunto ${}^{\omega}2$ é não-enumerável.

A demonstração é simples ! Visualmente, trata-se de fazer as conhecidas "modificações na diagonal" a partir de uma lista enumerável de funções (digamos, $\{f_n : n < \omega\}$) e exibir uma função que **não** esteja na lista.

Formalmente, o resultado dessas modificações na diagonal é a função g dada por $g(n) = 1 - f_n(n)$.

Identificando outra vez...

Uma outra identificação bastante usual em Matemática é aquela dada por **funções-característica**: dado um conjunto X e um subconjunto $A \subseteq X$, a função-característica de A é a função $f_A : X \to 2$ que é tal que $f(x) = 1 \iff x \in A$.

As funções-característica acabam mostrando a seguinde equipotência:

$\mathcal{P}(X) \approx {}^{X}2$

Para qualquer conjunto X, a família de todos os subconjuntos de X é equipotente à família de todas as funções de X em 2.

... Diante disso, o que o nosso caso particular importante do argumento diagonal nos mostra ?

$\mathcal{P}(\omega)$ é não-enumerável !!!

Temos que a família de todos os subconjuntos de ω – que é identificada com a família de todas as sequências infinitas de 0's e 1's via funções-característica – é não-enumerável !!!

A cardinalidade de $\mathcal{P}(\omega)$ é $2^{\aleph_0}$ – pois, para quaisquer cardinais κ e λ, $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$.

Essencialmente o mesmo argumento de "trocar zero por um na diagonal" prova, ainda, o teorema que garante que "dado um certo tamanho de infinito, sempre existe um infinito de tamanho maior" ...

O Teorema de Cantor

Teorema de Cantor

Não existem funções sobrejetoras de X em $\mathcal{P}(X)$, i.e., dada uma função qualquer $h : X \to \mathcal{P}(X)$, sempre existe um subconjunto de X que não pertence à imagem de h.

Notar que, com o enunciado que escolhemos apresentar acima, automaticamente fica excluída a possibilidade de X e $\mathcal{P}(X)$ serem equipotentes !!! E, de fato, chegamos a $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ – **por quê** ?

O Teorema de Cantor

O colega pode sem muita dificuldade verificar que, de fato, dada qualquer $h : X \to \mathcal{P}(X)$, tem-se que o subconjunto de X dado por $Y = \{x \in X : x \notin h(x)\}$ não pertence à imagem de h.

Exercício. No caso particular com ω e $\mathcal{P}(\omega)$, e identificando os subconjuntos de ω com as sequências binárias infinitas, mostre que o conjunto Y é obtido **exatamente pelo argumento diagonal !!!**

E qual é o legado do Teorema de Cantor ?

O Teorema de Cantor é um resultado central em Teoria dos Conjuntos, pois ele nos dá uma base sólida para argumentos como os seguintes:

- Dado um conjunto infinito, existe um conjunto infinito que é **maior** do que ele !!!
- Em particular, existem infinitos **maiores** do que outros !!!

  Convém lembrar que, antes de +− 1880, não se concebia a operação de "comparar tamanhos de infinito" ; a crença coincidia com a crença usual entre os calouros dos cursos de Matemática, que é **"Se é infinito, é tudo igual ....** Porém, o Teorema de Cantor nos mostrou que isso não é verdade, e em particular nos mostrou claramente que:

- **Existem conjuntos não-enumeráveis.**

E qual é o legado do Teorema de Cantor ?

O Teorema de Cantor é um resultado central em Teoria dos Conjuntos, pois ele nos dá uma base sólida para argumentos como os seguintes:

- Dado um conjunto infinito, existe um conjunto infinito que é **maior** do que ele !!!
- Em particular, existem infinitos **maiores** do que outros !!!

Convém lembrar que, antes de +– 1880, não se concebia a operação de "comparar tamanhos de infinito" ; a crença coincidia com a crença usual entre os calouros dos cursos de Matemática, que é **"Se é infinito, é tudo igual . . . .** Porém, o Teorema de Cantor nos mostrou que isso não é verdade, e em particular nos mostrou claramente que:

- Existem conjuntos não-enumeráveis.

E qual é o legado do Teorema de Cantor ?

O Teorema de Cantor é um resultado central em Teoria dos Conjuntos, pois ele nos dá uma base sólida para argumentos como os seguintes:

- Dado um conjunto infinito, existe um conjunto infinito que é **maior** do que ele !!!
- Em particular, existem infinitos **maiores** do que outros !!!

Convém lembrar que, antes de +– 1880, não se concebia a operação de "comparar tamanhos de infinito" ; a crença coincidia com a crença usual entre os calouros dos cursos de Matemática, que é **"Se é infinito, é tudo igual . . . .** Porém, o Teorema de Cantor nos mostrou que isso não é verdade, e em particular nos mostrou claramente que:

- **Existem conjuntos não-enumeráveis.**

O cardinal $2^{\aleph_0}$

Também segue diretamente do Teorema de Cantor que...

Uma desigualdade crucial

$$\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}.$$

De fato: $\aleph_1$ é o **primeiro** (ou **menor**) **cardinal não-enumerável** – e $2^{\aleph_0}$ é **um** cardinal não-enumerável !!! O menor não-enumerável é menor ou igual a qualquer um dos não-enumeráveis...

A partir dessa desigualdade já poderíamos enunciar uma versão da Hipótese do Contínuo... Porém, esperaremos mais um pouco para enunciar **CH**, para que nosso primeiro enunciado seja o **enunciado original de Cantor** !!!

Para tanto, deve ficar claro exatamente **"quem é"** $2^{\aleph_0}$...

Qual é o tamanho da reta ?

Justificaremos rapidamente o fato de que muitos de vocês já deveriam saber, ou ao menos "desconfiavam", antes deste minicurso...

A cardinalidade do contínuo

O cardinal $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ representa a cardinalidade da reta real.

Em outras palavras, temos que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\omega)| = |{}^{\omega}2| = |\mathbb{R}|$.

Assim, temos mais um "legado" do Teorema de Cantor:

O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é não-enumerável.

Como mostramos que $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$?

A ferramenta principal que usaremos em nossa justificativa para a igualdade $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ é o seguinte famosíssimo teorema, o qual **não necessita do Axioma da Escolha** em sua demonstração...

Teorema (ZF, Schröder-Bernstein-Cantor)

Se X e Y são conjuntos tais que $X \preccurlyeq Y$ e $Y \preccurlyeq X$, então X e Y são equipotentes.

Ou seja, para mostrar que dois conjuntos são equipotentes, não precisamos necessariamente exibir uma bijeção entre eles: basta que existam funções injetoras nos dois sentidos !!!

Injetando $\mathbb{R}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$...

Para mostrar que $\mathbb{R} \preccurlyeq \mathcal{P}(\omega)$, temos que nos lembrar de como é a **construção formal da reta por cortes de Dedekind**.

Um **corte de Dedekind** é um subconjunto próprio e não-vazio do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais que é "fechado para baixo" – i.e., se um racional x é um elemento de um corte α e y é um racional qualquer que é menor do que x, então y é também um elemento do corte α – e que não possui elemento máximo.

Cortes racionais são aqueles para os quais o seu complementar tem elemento mínimo – os demais são os **cortes irracionais**.

Injetando $\mathbb{R}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$...

Vejamos um corte na prática !!!

Exercício: Mostre que

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \leqslant 0 \text{ ou } (x > 0 \text{ e } x^2 < 2)\}$$

é um corte irracional.

Os números reais são definidos como sendo exatamente **o conjunto dos cortes !!!**. Como o colega deve já estar "desconfiado" , o corte do exercício acima é exatamente o número real $\sqrt{2}$.

Injetando $\mathbb{R}$ em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$...

Com isso, temos que:

> Formalmente, um número real nada mais é do que um subconjunto de $\mathbb{Q}$.

Disso, segue imediatamente que $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$, donde $\mathbb{R} \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathbb{Q})$!!!

Mas, $\mathbb{Q}$ é um conjunto enumerável, i.e., $\mathbb{Q} \approx \mathbb{N}$!!! Segue que $\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N})$, e assim

$$\mathbb{R} \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \approx \mathcal{P}(\mathbb{N}) \implies \mathbb{R} \preccurlyeq \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Injetando $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$...

Para esta dominação, basta exibir um subconjunto da reta que seja equipotente a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$!!!

O mais elegante entre os conjuntos que podem fazer esse "serviço" é, sem sombra de dúvida, o **Conjunto de Cantor**.

O Conjunto de Cantor (cuja construção, bastante conhecida, consiste na iteração da operação de "retirar os terços médios abertos" do intervalo $[0, 1]$ e de cada um dos subintervalos subsequentes) pode ser facilmente caracterizado, considerando sua representação na base ternária...

Injetando $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$...

Conjunto de Cantor na base ternária

O Conjunto de Cantor C é exatamente o conjunto dos números reais entre 0 e 1 (inclusive) para os quais é possível obter uma representação ternária (finita ou infinita) na qual só apareçam os algarismos 0 e 2.

Com isso, ficou fácil !!!

- A partir da caracterização acima, tem-se que $C \approx {}^{\omega}\{0, 2\}$ – associando a cada elemento de C a sequência de 0's e 2's que é dada pela sua representação em base ternária...
- Evidentemente ${}^{\omega}\{0, 2\} \approx {}^{\omega}\{0, 1\} = {}^{\omega}2$, assim $C \approx {}^{\omega}2$.
- Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2 \approx C$, acabou !!! Exibimos de fato um subconjunto da reta que tem tamanho $2^{\aleph_0}$!!!

Injetando $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$...

Conjunto de Cantor na base ternária

O Conjunto de Cantor C é exatamente o conjunto dos números reais entre 0 e 1 (inclusive) para os quais é possível obter uma representação ternária (finita ou infinita) na qual só apareçam os algarismos 0 e 2.

Com isso, ficou fácil !!!

- A partir da caracterização acima, tem-se que $C \approx {}^{\omega}\{0,2\}$ – associando a cada elemento de C a sequência de 0's e 2's que é dada pela sua representação em base ternária...
- Evidentemente ${}^{\omega}\{0,2\} \approx {}^{\omega}\{0,1\} = {}^{\omega}2$, assim $C \approx {}^{\omega}2$.
- Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2 \approx C$, acabou !!! Exibimos de fato um subconjunto da reta que tem tamanho $2^{\aleph_0}$!!!

Injetando $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ em $\mathbb{R}$...

Conjunto de Cantor na base ternária

O Conjunto de Cantor C é exatamente o conjunto dos números reais entre 0 e 1 (inclusive) para os quais é possível obter uma representação ternária (finita ou infinita) na qual só apareçam os algarismos 0 e 2.

Com isso, ficou fácil !!!

- A partir da caracterização acima, tem-se que $C \approx {}^{\omega}\{0,2\}$ – associando a cada elemento de C a sequência de 0's e 2's que é dada pela sua representação em base ternária...
- Evidentemente ${}^{\omega}\{0,2\} \approx {}^{\omega}\{0,1\} = {}^{\omega}2$, assim $C \approx {}^{\omega}2$.
- Como $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\omega) \approx {}^{\omega}2 \approx C$, acabou !!! Exibimos de fato um subconjunto da reta que tem tamanho $2^{\aleph_0}$!!!

O enunciado original de Cantor

Tendo estabelecido a igualdade $2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$ (via Teorema de Schröder-Bernstein-Cantor), e tendo anteriormente estabelecido que $|\mathbb{N}| = \aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ (via Teorema de Cantor), já podemos enunciar a **Hipótese do Contínuo (CH)** nos termos originalmente propostos por Cantor.

De certa forma, a Hipótese do Contínuo é uma espécie de "exclusão de uma terceira possibilidade" ... Ela declara **não haver nada "intermediário"** entre $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$.

O enunciado original de Cantor

A Hipótese do Contínuo – Cantor, 1878

CH $\equiv$ Dado um subconjunto infinito S da reta real, então devemos ter, necessariamente,

$$\text{ou } S \approx \mathbb{N} \text{ ou } S \approx \mathbb{R}.$$

Em outras palavras, **CH** declara que **“Não existe um subconjunto S da reta real cujo número cardinal seja maior do que $\aleph_0$ e menor do que $\mathfrak{c}$”**.

Neste minicurso, vamos mostrar aos colegas participantes que Cantor não chegou à essa conjectura “por acaso” ...

Como será o restante de nossa jornada ?

Tendo colocado a Hipótese do Contínuo exatamente nos termos propostos por Cantor, como continuaremos com este minicurso ?

Para esta primeira sessão, ainda pretendemos:

- Apresentaremos rapidamente a teoria de ordinais e cardinais, para podermos enunciar a versão da Hipótese do Contínuo em termos de cardinais;
- Destacaremos o que significa dizer que **CH** "é independente dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos";
- Mostraremos qual foi o contexto que levou Cantor a conjecturar a validade da Hipótese do Contínuo;
- Apresentaremos algumas construções consistentes (conjuntos de Luzin e de Sierpiński).

Como será o restante de nossa jornada ?

Tendo colocado a Hipótese do Contínuo exatamente nos termos propostos por Cantor, como continuaremos com este minicurso ?

Para esta primeira sessão, ainda pretendemos:

- Apresentaremos rapidamente a teoria de ordinais e cardinais, para podermos enunciar a versão da Hipótese do Contínuo em termos de cardinais;
- Destacaremos o que significa dizer que **CH** "é independente dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos";
- Mostraremos qual foi o contexto que levou Cantor a conjecturar a validade da Hipótese do Contínuo;
- Apresentaremos algumas construções consistentes (conjuntos de Luzin e de Sierpiński).

Como será o restante de nossa jornada ?

Tendo colocado a Hipótese do Contínuo exatamente nos termos propostos por Cantor, como continuaremos com este minicurso ?

Para esta primeira sessão, ainda pretendemos:

- Apresentaremos rapidamente a teoria de ordinais e cardinais, para podermos enunciar a versão da Hipótese do Contínuo em termos de cardinais;
- Destacaremos o que significa dizer que **CH** "é independente dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos";
- Mostraremos qual foi o contexto que levou Cantor a conjecturar a validade da Hipótese do Contínuo;
- Apresentaremos algumas construções consistentes (conjuntos de Luzin e de Sierpiński).

Como será o restante de nossa jornada ?

Tendo colocado a Hipótese do Contínuo exatamente nos termos propostos por Cantor, como continuaremos com este minicurso ?

Para esta primeira sessão, ainda pretendemos:

- Apresentaremos rapidamente a teoria de ordinais e cardinais, para podermos enunciar a versão da Hipótese do Contínuo em termos de cardinais;
- Destacaremos o que significa dizer que **CH** "é independente dos Axiomas da Teoria dos Conjuntos";
- Mostraremos qual foi o contexto que levou Cantor a conjecturar a validade da Hipótese do Contínuo;
- Apresentaremos algumas construções consistentes (conjuntos de Luzin e de Sierpiński).

Quem são os ordinais ?

Formalmente, ordinais são conjuntos **transitivos** e **bem-ordenados por** $\in$. Pode-se provar, ainda, que **todo conjunto transitivo de ordinais é, também, um ordinal**.

Na Teoria dos Conjuntos, os ordinais são os "representantes canônicos das boas ordens", pois qualquer **boa ordem** (ordem total no qual qualquer subconjunto não-vazio tem elemento mínimo) é isomorfa a um único ordinal, denominado **tipo de ordem** dessa boa ordem. Para demonstrar tal fato, precisamos do Axioma da Substituição !

Exercício: Dado um ordinal α, tem-se que $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ é um ordinal, e vale também que se β é um ordinal com $\alpha \subseteq \beta \subseteq S(\alpha)$ então $\alpha = \beta$ ou $\beta = S(\alpha)$ (i.e., $S(\alpha)$ é o **sucessor** de α).

Ordinais finitos = Números naturais

Observando que o conjunto vazio é um ordinal (por vacuidade !) e usando a operação de sucessor, podemos obter facilmente os chamados **números naturais de von Neumann**:

$0 = \emptyset$,
$1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$,
$2 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$,
$3 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$,
$4 = 3 \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$,
$5 = 4 \cup \{4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, etc.

De posse de todos os números naturais, o conjunto de todos os números naturais é obtido atráves do chamado **Axioma do Infinito** da Teoria dos Conjuntos.

Propriedades dos ordinais

- Elementos de um ordinal são ordinais e, mais ainda, um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precedem.
- Vale a tricotomia e a transitividade entre os ordinais.
- Entre os ordinais, a inclusão estrita "$\subsetneq$" e a pertinência "$\in$" coincidem.
- Mais ainda, escrevendo sempre "$\alpha < \beta$" para denotar "$\alpha \in \beta$", valem para quaisquer γ,δ ordinais a seguinte equivalência: $\gamma \leqslant \delta \Longleftrightarrow \gamma \subseteq \delta$.
- Todo conjunto não-vazio de ordinais têm elemento mínimo e todo conjunto de ordinais possui supremo.

Segue das propriedades descritas o fato – já comentado – de que "todo conjunto transitivo de ordinais é, também, um ordinal".

Propriedades dos ordinais

- Elementos de um ordinal são ordinais e, mais ainda, um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precedem.
- Vale a tricotomia e a transitividade entre os ordinais.
- Entre os ordinais, a inclusão estrita "$\subsetneq$" e a pertinência "$\in$" coincidem.
- Mais ainda, escrevendo sempre "$\alpha < \beta$" para denotar "$\alpha \in \beta$", valem para quaisquer γ,δ ordinais a seguinte equivalência: $\gamma \leqslant \delta \iff \gamma \subseteq \delta$.
- Todo conjunto não-vazio de ordinais têm elemento mínimo e todo conjunto de ordinais possui supremo.

Segue das propriedades descritas o fato – já comentado – de que "todo conjunto transitivo de ordinais é, também, um ordinal".

Propriedades dos ordinais

- Elementos de um ordinal são ordinais e, mais ainda, um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precedem.
- Vale a tricotomia e a transitividade entre os ordinais.
- Entre os ordinais, a inclusão estrita "$\subsetneq$" e a pertinência "$\in$" coincidem.
- Mais ainda, escrevendo sempre "$\alpha < \beta$" para denotar "$\alpha \in \beta$", valem para quaisquer γ,δ ordinais a seguinte equivalência: $\gamma \leqslant \delta \iff \gamma \subseteq \delta$.
- Todo conjunto não-vazio de ordinais têm elemento mínimo e todo conjunto de ordinais possui supremo.

Segue das propriedades descritas o fato – já comentado – de que "todo conjunto transitivo de ordinais é, também, um ordinal".

Propriedades dos ordinais

- Elementos de um ordinal são ordinais e, mais ainda, um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precedem.
- Vale a tricotomia e a transitividade entre os ordinais.
- Entre os ordinais, a inclusão estrita "$\subsetneq$" e a pertinência "$\in$" coincidem.
- Mais ainda, escrevendo sempre "$\alpha < \beta$" para denotar "$\alpha \in \beta$", valem para quaisquer γ,δ ordinais a seguinte equivalência: $\gamma \leqslant \delta \Longleftrightarrow \gamma \subseteq \delta$.
- Todo conjunto não-vazio de ordinais têm elemento mínimo e todo conjunto de ordinais possui supremo.

Segue das propriedades descritas o fato – já comentado – de que "todo conjunto transitivo de ordinais é, também, um ordinal".

Propriedades dos ordinais

- Elementos de um ordinal são ordinais e, mais ainda, um ordinal é o conjunto dos ordinais que o precedem.
- Vale a tricotomia e a transitividade entre os ordinais.
- Entre os ordinais, a inclusão estrita "$\subsetneq$" e a pertinência "$\in$" coincidem.
- Mais ainda, escrevendo sempre "$\alpha < \beta$" para denotar "$\alpha \in \beta$" , valem para quaisquer γ,δ ordinais a seguinte equivalência: $\gamma \leqslant \delta \Longleftrightarrow \gamma \subseteq \delta$.
- Todo conjunto não-vazio de ordinais têm elemento mínimo e todo conjunto de ordinais possui supremo.

Segue das propriedades descritas o fato – já comentado – de que "todo conjunto transitivo de ordinais é, também, um ordinal".

Supremo e mínimo de um conjunto de ordinais

Achar o mínimo e o supremo de um dado conjunto de ordinais é fácil !

- Se $X \neq \emptyset$ é um conjunto de ordinais, $min(X) = \bigcap X$.
- Se X é um conjunto de ordinais, $sup(X) = \bigcup X$.

Supremo e mínimo de um conjunto de ordinais

Achar o mínimo e o supremo de um dado conjunto de ordinais é fácil !

- Se $X \neq \emptyset$ é um conjunto de ordinais, $min(X) = \bigcap X$.
- Se X é um conjunto de ordinais, $sup(X) = \bigcup X$.

Quem são os ordinais maiores que ω ?

Se ω é um ordinal, então o seu sucessor é um ordinal, e assim por diante...

"Continuando o processo transfinitamente", obtemos

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$,
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1\}$,
$\omega + 3 = (\omega + 2) \cup \{\omega + 2\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2\}$,...,
$\omega + \omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \ldots, \} = \omega.2$,
$\omega.2 + 1$, $\omega.2 + 2$, $\omega.2 + 3$ e assim por diante.

Acompanhe no quadro como podemos chegar ao famoso ordinal ε_0, célebre por sua utilização por Gentzen na prova (em lógica infinitária) da consistência da aritmética ! Porém, mesmo esse longo caminho até ε_0 é um caminho ainda de ordinais enumeráveis. . .

A Função de Hartogs

Como chegarmos até os ordinais não-enumeráveis ? Utilizaremos a Função de Hartogs...

Dado um conjunto X, podemos definir, com o uso cuidadoso dos Axiomas: Partes e Substituição, o conjunto de ordinais

$$F(X) = \{\alpha : \alpha \preccurlyeq X\}$$

$F(X)$ é a chamada **Função de Hartogs de X**.

É fácil ver que $F(X)$ é um conjunto transitivo de ordinais, logo é um ordinal !

A Função de Hartogs

Também é fácil ver que $F(X)$ é **o menor ordinal que não pode ser injetado em** X.

(Muito frequentemente, "o conjunto dos ordinais que possuem uma certa propriedade acaba sendo o menor ordinal que **não** possui aquela propriedade". Note que para ordinais finitos ocorreu o mesmo !!!).

Então, quem seria $F(\omega)$?

$F(\omega) = \omega_1$

$F(\omega)$ é **o menor ordinal que não pode ser injetado em** ω – i.e., é o menor ordinal não-enumerável !!! Tal ordinal é denominado ω_1. Ou seja,

ω_1, o menor ordinal não-enumerável, é exatamente o conjunto formado por todos os ordinais enumeráveis.

Na verdade, ω_1 também é o **menor cardinal não-enumerável** – e quando se quer destacar esse aspecto de ω_1, costumamos escrever $\aleph_1$ no lugar de ω_1...

O menor ordinal não-enumerável é o menor cardinal não-enumerável

$$\omega_1 = \aleph_1$$

Cardinalidades e cardinais

No entanto, ainda não definimos formalmente quem são os cardinais !

Podemos, porém, destacar uma propriedade que tanto $\omega = \aleph_0$ como $\omega_1 = \aleph_1$ possuem...

- Por ser exatamente o conjunto formado pelos ordinais finitos, pode-se dizer que ω (que é o primeiro ordinal infinito) não é equipotente a nenhum ordinal menor do que ele.
- Por ser exatamente o conjunto formado pelos ordinais enumeráveis, pode-se dizer que ω_1 (que é o primeiro ordinal não-enumerável) não é equipotente a nenhum ordinal menor do que ele.

...Veremos que isso caracteriza os cardinais: os cardinais serão exatamente aqueles ordinais que **não possuem** uma bijeção com um ordinal que seja menor do que eles...

Cardinalidades e cardinais

No entanto, ainda não definimos formalmente quem são os cardinais !

Podemos, porém, destacar uma propriedade que tanto $\omega = \aleph_0$ como $\omega_1 = \aleph_1$ possuem...

- Por ser exatamente o conjunto formado pelos ordinais finitos, pode-se dizer que ω (que é o primeiro ordinal infinito) não é equipotente a nenhum ordinal menor do que ele.
- Por ser exatamente o conjunto formado pelos ordinais enumeráveis, pode-se dizer que ω_1 (que é o primeiro ordinal não-enumerável) não é equipotente a nenhum ordinal menor do que ele.

...Veremos que isso caracteriza os cardinais: os cardinais serão exatamente aqueles ordinais que **não possuem** uma bijeção com um ordinal que seja menor do que eles...

Cardinalidades e cardinais

Cardinalidades e cardinais

- Se X pode ser bem ordenado, definimos a **cardinalidade** de X como sendo

$$|X| = min\{\alpha : \alpha \approx X\}$$

- Um ordinal κ é dito um **cardinal** se

$$\kappa = |\kappa|$$

Por isso, em alguns textos os cardinais são chamados de "ordinais iniciais".

- Pode-se mostrar ainda que vale a propriedade que destacamos no slide anterior:

$$\kappa \text{ é cardinal } \iff (\forall \beta < \kappa)[\beta \not\approx \kappa]$$

Cardinalidades e cardinais

Cardinalidades e cardinais

- Se X pode ser bem ordenado, definimos a **cardinalidade** de X como sendo

$$|X| = min\{\alpha : \alpha \approx X\}$$

- Um ordinal κ é dito um **cardinal** se

$$\kappa = |\kappa|$$

  Por isso, em alguns textos os cardinais são chamados de "ordinais iniciais".

- Pode-se mostrar ainda que vale a propriedade que destacamos no slide anterior:

$$\kappa \text{ é cardinal } \iff (\forall \beta < \kappa)[\beta \not\approx \kappa]$$

Cardinalidades e cardinais

Cardinalidades e cardinais

- Se X pode ser bem ordenado, definimos a **cardinalidade** de X como sendo

$$|X| = min\{\alpha : \alpha \approx X\}$$

- Um ordinal κ é dito um **cardinal** se

$$\kappa = |\kappa|$$

  Por isso, em alguns textos os cardinais são chamados de "ordinais iniciais".

- Pode-se mostrar ainda que vale a propriedade que destacamos no slide anterior:

$$\kappa \text{ é cardinal} \iff (\forall \beta < \kappa)[\beta \not\approx \kappa]$$

Cardinais e cardinalidades

A Função de Hartogs pode ser usada, em geral, para construir os chamados **cardinais sucessores**.

Definição. Se κ é um cardinal, então $F(\kappa)$ (que é o menor cardinal que é estritamente maior do que κ) é denominado **cardinal sucessor de** κ e denotado κ^+.

Em geral, se X é um conjunto que pode ser bem-ordenado, $F(X) = |X|^+$.

Cardinais e cardinalidades

Aplicando-se a Função de Hartogs sucessivamente a $\omega = \aleph_0$, obtemos os cardinais sucessores $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\ldots$, $\aleph_n$, $\ldots$. Para tal conjunto de cardinais, o seu supremo $\aleph_\omega$ é o menor **cardinal limite**.

$\aleph_\omega$ é um contra-exemplo para várias afirmações de "senso comum" sobre cardinais infinitos – mas isso é assunto para algum outro minicurso !!!

Indução e Recursão

Por serem conjuntos, em particular, bem-ordenados, podemos fazer sobre ordinais e cardinais os processos de **indução transfinita** e de **recursão transfinita**. que são as generalizações dos conhecidos processos de indução finita e recursão finita – os quais são realizados sobre ω !!!

Se α é um ordinal infinito, a princípio podem existir, abaixo de α, três tipos de ordinais . . . Quais são eles ?

Indução e Recursão

Resposta: Um ordinal menor do que α pode:

- ser igual a zero; ou
- ser igual ao ordinal sucessor de algum outro ordinal; ou
- ser um ordinal limite (i.e., o resultado de uma certa ordenação de "cópias de ω" ...)

Pensando nesta simples observação, podemos enunciar o Princípio de Indução sobre ζ - onde ζ é um ordinal infinito !

Indução e Recursão

Resposta: Um ordinal menor do que α pode:

- ser igual a zero; ou
- ser igual ao ordinal sucessor de algum outro ordinal; ou
- ser um ordinal limite (i.e., o resultado de uma certa ordenação de "cópias de ω" ...)

Pensando nesta simples observação, podemos enunciar o Princípio de Indução sobre ζ - onde ζ é um ordinal infinito !

Indução e Recursão

Resposta: Um ordinal menor do que α pode:

- ser igual a zero; ou
- ser igual ao ordinal sucessor de algum outro ordinal; ou
- ser um ordinal limite (i.e., o resultado de uma certa ordenação de "cópias de ω" ...)

Pensando nesta simples observação, podemos enunciar o Princípio de Indução sobre ζ - onde ζ é um ordinal infinito !

Fazendo indução de comprimento ζ

Princípio de Indução sobre ζ

Sejam ζ um ordinal infinito e C um subconjunto de ζ. Suponha que valham as seguintes cláusulas:

- $0 \in C$;
- Se $\alpha < \omega_1$ é tal que $\alpha \in C$, então $\alpha + 1 \in C$;
- Se $\gamma < \omega_1$ é ordinal limite e para todo $\delta < \gamma$ temos $\delta \in C$, então $\gamma \in C$.

Nestas condições, $C = \zeta$.

A demonstração é simples: basta deduzir uma contradição a partir do **menor contra-exemplo possível !!!**

Fazendo indução de comprimento ζ

Princípio de Indução sobre ζ

Sejam ζ um ordinal infinito e C um subconjunto de ζ. Suponha que valham as seguintes cláusulas:

- $0 \in C$;
- Se $\alpha < \omega_1$ é tal que $\alpha \in C$, então $\alpha + 1 \in C$;
- Se $\gamma < \omega_1$ é ordinal limite e para todo $\delta < \gamma$ temos $\delta \in C$, então $\gamma \in C$.

Nestas condições, $C = \zeta$.

A demonstração é simples: basta deduzir uma contradição a partir do **menor contra-exemplo possível !!!**

Fazendo indução de comprimento ζ

Princípio de Indução sobre ζ

Sejam ζ um ordinal infinito e C um subconjunto de ζ. Suponha que valham as seguintes cláusulas:

- $0 \in C$;
- Se $\alpha < \omega_1$ é tal que $\alpha \in C$, então $\alpha + 1 \in C$;
- Se $\gamma < \omega_1$ é ordinal limite e para todo $\delta < \gamma$ temos $\delta \in C$, então $\gamma \in C$.

Nestas condições, $C = \zeta$.

A demonstração é simples: basta deduzir uma contradição a partir do **menor contra-exemplo possível !!!**

Princípio de Indução sobre ζ

Como também ocorre no caso da indução finita, se desejarmos mostrar que uma determinada afirmação $P(\alpha)$ sobre um ordinal α é válida para todo ordinal $\alpha < \zeta$, podemos utilizar o princípio do slide anterior para o conjunto $C = \{\alpha < \zeta : \ P(\zeta) \text{ é verdadeira}\}$.

Se estivermos em uma situação onde não é necessário diferenciar os casos "sucessor e limite", podemos utilizar uma "versão resumida" do Princípio de Indução...

Versão do Princípio de Indução sobre ζ

Versão do Princípio de Indução sobre ζ

Sejam ζ um ordinal infinito e C um subconjunto de ζ. Suponha que para qualquer $\alpha < \zeta$ vale a seguinte propriedade:

$$\text{Se } \alpha \subseteq C, \text{ então } \alpha \in C.$$

Nestas condições, $C = \zeta$.

Novamente, uma demonstração consistiria em deduzir uma contradição a partir do menor contra-exemplo possível.

Indução e Recursão sobre um ordinal

Utilizando indução (e, eventualmente, dependendo de como enunciemos, o Axioma da Substituição !!!), podemos provar os teoremas de **recursão transfinita** – que nos permitem definir funções em conjuntos bem-ordenados que estejam definidas de forma que o valor em um determinado elemento dependa dos valores obtidos para os predecessores desse elemento.

Para não carregar muito a notação, não iremos enunciar os teoremas de recursão, mas podemos discuti-los em separado com os mais interessados.

Indução e Recursão sobre um ordinal

A idéia geral é que, por exemplo, sendo G uma função (ou "instrução", "comando") que possa ser calculada em qualquer ordinal menor que um certo ordinal ζ, e sendo H uma função ("comando") que possa ser calculada em qualquer sequência cujo comprimento seja um ordinal limite menor do que ζ, é possível construir uma função F com domínio ζ e tal que:

- $F(0)$ assume qualquer valor pré-determinado;
- $F(\alpha+1) = G(\alpha)$, se $\alpha + 1 < \zeta$;
- $F(\xi) = H(F \upharpoonright \xi)$, se ξ é um ordinal limite menor que ζ.

Indução e Recursão sobre um ordinal

A idéia geral é que, por exemplo, sendo G uma função (ou "instrução", "comando") que possa ser calculada em qualquer ordinal menor que um certo ordinal ζ, e sendo H uma função ("comando") que possa ser calculada em qualquer sequência cujo comprimento seja um ordinal limite menor do que ζ, é possível construir uma função F com domínio ζ e tal que:

- $F(0)$ assume qualquer valor pré-determinado;
- $F(\alpha + 1) = G(\alpha)$, se $\alpha + 1 < \zeta$;
- $F(\xi) = H(F \upharpoonright \xi)$, se ξ é um ordinal limite menor que ζ.

Indução e Recursão sobre um ordinal

A idéia geral é que, por exemplo, sendo G uma função (ou "instrução", "comando") que possa ser calculada em qualquer ordinal menor que um certo ordinal ζ, e sendo H uma função ("comando") que possa ser calculada em qualquer sequência cujo comprimento seja um ordinal limite menor do que ζ, é possível construir uma função F com domínio ζ e tal que:

- $F(0)$ assume qualquer valor pré-determinado;
- $F(\alpha + 1) = G(\alpha)$, se $\alpha + 1 < \zeta$;
- $F(\xi) = H(F \upharpoonright \xi)$, se ξ é um ordinal limite menor que ζ.

Indução e Recursão sobre a classe dos ordinais

Mais ainda, ambos os processos (de indução e de recursão) podem ser feitos sobre a **classe** *On* **dos ordinais !!!**

Dessa forma, podemos definir uma função-classe F (i.e., uma classe própria que se comporta como uma função) que satisfaça

$$(\forall\alpha \in \mathbf{On}\ [F(\alpha) = G(F \upharpoonright \alpha)])$$

onde G representa um comando que possa ser calculado em qualquer sequência de ordinais.

Os Alephs

Com a noção de cardinal sucessor dada pela função de Hartogs, podemos usar recursão transfinita sobre **On** para definir a **hierarquia dos alephs**:

Os alephs

Os alephs são os cardinais infinitos dados pela seguinte sequência de comprimento **On**:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega & \\ \aleph_{\alpha+1} = (\aleph_\alpha)^+ & \text{para cada } \alpha \in \mathbf{On} \\ \aleph_\xi = \sup\{\aleph_\zeta : \zeta < \xi\} & \text{se } \xi \text{ é um ordinal limite} \end{cases}$$

Em **ZFC**, pode-se provar (por indução transfinita) que a sequência acima contém **todos os cardinais infinitos !!!**

Aritmética Cardinal

As propriedades básicas da Aritmética Cardinal, em **ZFC**, baseiam-se no seguinte fato, que é, na realidade, **uma equivalência do Axioma da Escolha**:

Se X é um conjunto infinito, então $X^2 \approx X$.

As chamadas "leis de absorção" são deduzidas diretamente do fato anterior !!!

Aritmética Cardinal

(ZFC) As operações e as Leis de Absorção para a Soma e o Produto

Dados κ e λ cardinais quaisquer, definimos
$\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$, $\kappa.\lambda = |\kappa \times \lambda|$ e $\kappa^\lambda = |{}^\lambda\kappa|$

Se κ e λ são ambos não-nulos e pelo menos um deles é infinito, valem as **Leis de Absorção**:

$$\kappa + \lambda = \kappa.\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Em particular, vale a versão para cardinais da equivalência para o Axioma da Escolha dado no slide anterior:

Se κ é um cardinal infinito, então a "matriz infinita" $\kappa \times \kappa$ é equipotente a κ.

Obs.: Para conjuntos bem-ordenados (logo, em particular, para os cardinais), este resultado vale em **ZF** !!!

Consequências imediatas de $\kappa \times \kappa \approx \kappa$

Sabendo-se o tamanho da matriz infinita $\kappa \times \kappa$, deduzimos os seguintes fatos:

Pense na matriz infinita !!!

Os seguintes resultados são válidos em **ZFC**:

- **A união de $\leqslant \kappa$ conjuntos, todos de tamanho $\leqslant \kappa$, tem tamanho $\leqslant \kappa$** – i.e. se $\lambda \leqslant \kappa$ e $\{X_\alpha : \alpha < \lambda\}$ é uma família de conjuntos tais que $|X_\alpha| \leqslant \kappa$ para todo $\alpha < \lambda$, então

$$|\bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha| \leqslant \kappa$$

Note que o resultado acima é uma generalização do conhecido **"união enumerável de enumeráveis é enumerável. . .**

Consequências imediatas de $\kappa \times \kappa \approx \kappa$

Pense na matriz infinita !!!

- Em particular, sabemos calcular um limitante superior para o tamanho das **uniões generalizadas**:

$$|\bigcup_{i \in I} X_i| \leqslant |I|.\sup\{|X_i| : i \in I\}$$

Mais ainda, mostra-se que a desigualdade acima torna-se uma igualdade quando a família $\{X_i : i \in I\}$ é dois-a-dois disjunta.

Consequências imediatas de $\kappa \times \kappa \approx \kappa$

Segue dos fatos destacados a seguinte característica importante dos cardinais sucessores em **ZFC**:

Exercício. Um cardinal infinito κ é dito **regular** se κ não pode ser escrito como uma união de uma família de menos do que κ conjuntos, todos com tamanho menor do que κ.

Mostre que se um cardinal infinito κ é da forma $\kappa = \lambda^+$ então κ é um cardinal regular.

Atenção !!! Uma consequência importante para o caso particular ω_1 é: dado qualquer subconjunto enumerável de ω_1, digamos A, então esse subconjunto tem que ser **limitado** em ω_1. Pois, se tivéssemos A ilimitado teríamos $\omega_1 = \sup(A) = \bigcup A$, o que é um absurdo porque assim teríamos escrito ω_1 como uma reunião enumerável de ordinais enumeráveis !!!

CH e GCH

Agora podemos enunciar tanto a Hipótese do Contínuo (**CH**) como a Hipótese Generalizada do Contínuo (**GCH**) em termos de cardinais !!!

Já argumentamos sobre a equipotência $\mathcal{P}(X) \approx {}^{X}2$, que vale para **qualquer** conjunto X. Se tomarmos como caso particular $X = \kappa$ um cardinal, então $|\mathcal{P}(\kappa)| = |{}^{\kappa}2|$, e este último cardinal é, por definição, 2^{κ}.

Também já sabemos, pelo Teorema de Cantor, que $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ para todo conjunto X. Em particular, se κ é um cardinal, vale que $\kappa < 2^{\kappa}$, ou, equivalentemente:

$$\kappa^{+} \leqslant 2^{\kappa}$$

CH e **GCH** em termos de cardinais

Os enunciados em termos de cardinais são os que seguem:

CH e **GCH** em termos de cardinais

- A Hipótese do Contínuo (**CH**) é a asserção

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

- A Hipótese Generalizada do Contínuo (**GCH**) é a asserção

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} \text{ para todo } \alpha \in \mathbf{On}$$

Sem a linguagem de $\aleph$'s, **GCH** nos diz que $2^\kappa = \kappa^+$ para todo cardinal infinito κ.

CH e **GCH** em termos de cardinais

Os enunciados em termos de cardinais são os que seguem:

CH e **GCH** em termos de cardinais

- A Hipótese do Contínuo (**CH**) é a asserção

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

- A Hipótese Generalizada do Contínuo (**GCH**) é a asserção

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha} \text{ para todo } \alpha \in \mathbf{On}$$

Sem a linguagem de $\aleph$'s, **GCH** nos diz que $2^\kappa = \kappa^+$ para todo cardinal infinito κ.

Proposições indecidíveis

CH e **GCH** são exemplos de **proposições indecidíveis** para a Matemática – não podendo ser nem provadas nem refutadas dentro de **ZFC**.

Vamos introduzir um mínimo de linguagem sobre proposições **consistentes** e **independentes**:

Linguagem básica de consistência e independência

- Uma teoria T é dita **consistente** se não prova contradições.
- Uma proposição φ é **consistente com** T se $T \cup \{\alpha\}$ é uma teoria consistente.
- Uma proposição φ é **independente de** T se tanto α como $\neg\alpha$ são consistentes.

Proposições indecidíveis

CH e **GCH** são exemplos de **proposições indecidíveis** para a Matemática – não podendo ser nem provadas nem refutadas dentro de **ZFC**.

Vamos introduzir um mínimo de linguagem sobre proposições **consistentes** e **independentes**:

Linguagem básica de consistência e independência

- Uma teoria T é dita **consistente** se não prova contradições.
- Uma proposição φ é **consistente com** T se $T \cup \{\alpha\}$ é uma teoria consistente.
- Uma proposição φ é **independente de** T se tanto α como $\neg\alpha$ são consistentes.

Proposições indecidíveis

CH e **GCH** são exemplos de **proposições indecidíveis** para a Matemática – não podendo ser nem provadas nem refutadas dentro de **ZFC**.

Vamos introduzir um mínimo de linguagem sobre proposições **consistentes** e **independentes**:

Linguagem básica de consistência e independência

- Uma teoria T é dita **consistente** se não prova contradições.
- Uma proposição φ é **consistente com** T se $T \cup \{\alpha\}$ é uma teoria consistente.
- Uma proposição φ é **independente de** T se tanto α como $\neg\alpha$ são consistentes.

Sintática e Semântica

Os aspectos sintáticos (relativos a **provas**) e semânticos (relativos a **modelos**) são de certa forma unificados pelo **Teorema de Completude** (de Gödel), o qual, em uma de suas versões, declara que:

Uma teoria é consistente se, e somente se, possui modelo.

Assim, para ver que uma certa proposição é independente de uma dada teoria, basta encontrar modelos da teoria no qual a proposição vale e modelos da teoria onde a proposição não vale.

Notar que é exatamente isso que ocorre, por exemplo, com o 5o. Postulado com relação aos axiomas anteriores de Euclides !!! O plano usual (i.e., o plano $\mathbb{R}^2$) é um modelo no qual **vale** o 5o. Postulado, e o Disco de Poincaré é um modelo no qual **não vale** o 5o. Postulado !!!

O modelo construtível de Gödel

Nos anos 30 do séc. XX, Gödel construiu um determinado modelo, o chamado **modelo construtível de Gödel**, denotado por **L**, no qual vale a Hipótese do Contínuo.

Com isso, obtemos a consistência de **CH**, i.e., tem-se que se a Teoria dos Conjuntos for consistente então ela continua consistente se acrescentamos **CH**.

Notar que, dessa forma, já fica estabelecido que **CH não pode ser refutada !!!**

É interessante observar que **AC** também é válido em **L** – i.e., **L** é um modelo de **ZF** no qual **AC** é verificado como sendo válido na estrutura.

O forcing de Cohen

Restava, então, mostrar que a negação de **CH** também não poderia ser refutada...

Isso foi resolvido em 1963 – há aproximadamente 50 anos, portanto !!

Cohen desenvolveu o método de forcing para obter um modelo de **ZF** no qual tanto **CH** como **AC não são** válidos, o que, em conjunção com os resultados anteriores de Gödel, demonstra que ambos princípios são **independentes** da axiomatização de Zermelo-Fraenkel para a Teoria dos Conjuntos.

CH não foi conjecturada ao acaso !!!

É interessante destacar aqui algo que não é muito comentado nos cursos de graduação em Matemática: **Cantor não conjecturou a Hipótese do Contínuo por acaso !!!**

Ou seja, ele não "acordou um belo dia achando que a reta tinha cardinalidade equivalente ao primeiro cardinal não-enumerável". . .

A Hipótese do Contínuo surgiu naturalmente, a partir das **práticas** de Cantor como matemático.

Tentando construir algo intermediário...

Conforme já destacamos, Cantor iniciou o estudo formal do infinito em Matemática, observando que os naturais e os reais tinham uma diferença de tamanho – já que este último é equipotente ao conjunto das partes do primeiro !!! Segue do seu Teorema que $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.

Após esse trabalho seminal, Cantor passou a analisar as cardinalidades de vários tipos específicos de subconjuntos infinitos da reta, e observou que esses conjuntos ou eram enumeráveis ou tinham a cardinalidade da própria reta.

Tentando construir algo intermediário...

Por exemplo, os subconjuntos fechados e não-enumeráveis da reta real possuem, necessariamente, número cardinal $\mathfrak{c}$.

Em seus estudos, Cantor não conseguia **produzir**, ou **exibir**, nenhum subconjunto da reta real que tivesse uma cardinalidade intermediária entre aquela dos naturais e aquela dos reais.

Por não haver conseguido exibir nenhum conjunto de tamanho intermediário ... Cantor conjecturou que tal tipo de conjunto não existia !!!

À luz dessa observação, é interessante olharmos novamente para o seu enunciado original...

"Se eu não consigo exibir, não deve existir"...

CH $\equiv$ Dado um subconjunto infinito S da reta real, então devemos ter, necessariamente,

$$\text{ou } S \approx \mathbb{N} \text{ ou } S \approx \mathbb{R}.$$

O Teorema de Cantor-Bendixson

Vamos aqui esboçar a demonstração do resultado de uma das "tentativas" de Cantor de exibir algum conjunto intermediário.

No caso, o resultado que apresentaremos – o chamado **Teorema de Cantor-Bendixson** – tem como corolário o fato que já observamos rapidamente:

Corolário do Teorema de Cantor-Bendixson

Os fechados não-enumeráveis da reta real são necessariamente equipotentes à própria reta, i.e., possuem número cardinal igual a $\mathfrak{c}$.

Assim, depois deste teorema, Cantor já sabia que **se existisse um conjunto que fosse contra-exemplo para CH, tal conjunto não poderia ser fechado !!!**

Conjuntos perfeitos

O Teorema de Cantor-Bendixson é um teorema sobre **conjuntos perfeitos**, na verdade.

Conjuntos perfeitos

Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é dito ser um **conjunto perfeito** se A é um fechado não-vazio que, como subespaço de $\mathbb{R}$, não possui pontos isolados.

Equivalentemente, um subconjunto não-vazio da reta é perfeito se $A = A'$, onde A' é o **derivado** de A, dado por

$$A' = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é ponto de acumulação de } A\}.$$

Conjuntos perfeitos

Note que a igualdade $A = A'$ (para $A \neq \emptyset$) já nos diz que

> **A é um fechado não-vazio no qual todo ponto é de acumulação.**

E isso resume, essencialmente, a noção de conjunto perfeito.

Um exemplo óbvio de conjunto perfeito é o intervalo fechado $[0, 1]$.

Podemos, no entanto, exibir um conjunto perfeito **de interior vazio**... Aliás, trata-se de um conjunto que já tratamos hoje.

Que conjunto é esse ?

O Conjunto de Cantor é perfeito

O estudante que já tenha feito um curso de Análise e/ou de Topologia pode fazer o seguinte exercício, ademais clássico:

Algumas propriedades do Conjunto de Cantor

O Conjunto de Cantor C é um compacto perfeito de interior vazio e medida nula.

Mais ainda, pode-se provar que, a menos de homeomorfismo, C é o único espaço métrico compacto, perfeito e totalmente disconexo (i.e., suas componentes conexas se reduzem a unitários).

Para nós, teoristas de conjuntos, o Conjunto de Cantor é visto como **o conjunto dos ramos de uma árvore binária !!!**

C como ramos de uma árvore de intervalos

Já observamos que o Conjunto de Cantor pode ser encarado como o conjuntos dos pontos que, na base ternária, possuem uma representação, finita ou infinita, na qual aparecem apenas os algarismos 0 e 2.

Podemos indexar os intervalos fechados que surgem em cada etapa de sua construção por sequências finitas de 0's e 2's, que representam os primeiros números de sua representação ternária...

Com isso, surge uma **árvore binária de intervalos** da forma

$$\{I_s : s \in {}^{<\omega}\{0,2\}\}.$$

C como ramos de uma árvore de intervalos

Denotemos uma sequência s de domínio n com valores em $\{0, 2\}$ na forma $\langle s(0)s(1)\dots s(n-1)\rangle$ – por exemplo, $\langle 020022\rangle$.

Assim, teremos os intervalos:
$I_\emptyset = [0, 1]$;

$I_{\langle 0\rangle} = [0, \frac{1}{3}], I_{\langle 2\rangle} = [\frac{2}{3}, 1]$;

(note que os números de $I_{\langle 0\rangle}$ são exatamente aqueles que podem, quando escritos na base ternária, começar com 0 – incluindo o número $\frac{1}{3}$, que pode ser escrito como $(0, 02222222\dots)_3$!!! O comentário análogo vale para $I_{\langle 2\rangle}\dots$)

C como ramos de uma árvore de intervalos

Continuando:

$I_{\langle 00\rangle} = [0, \frac{1}{9}], I_{\langle 02\rangle} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], I_{\langle 20\rangle} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], I_{\langle 22\rangle} = [\frac{8}{9}, 1];$

$I_{\langle 000\rangle} = [0, \frac{1}{27}], I_{\langle 002\rangle} = [\frac{2}{27}, \frac{1}{9}], I_{\langle 020\rangle} = [\frac{2}{9}, \frac{7}{27}], I_{\langle 022\rangle} = [\frac{8}{27}, \frac{1}{3}],$

$\mathrm{I}_{\langle 200\rangle} = [\frac{2}{3}, \frac{19}{27}], I_{\langle 202\rangle} = [\frac{20}{27}, \frac{7}{9}], I_{\langle 220\rangle} = \frac{8}{9}, \frac{25}{27}], I_{\langle 222\rangle} = [\frac{26}{27}, 1];$

...e assim por diante.

Note que agora fica evidente que:

Cada elemento do Conjunto de Cantor pode ser encarado como a intersecção do ramo da árvore formado pelos intervalos aos quais ele pertence...

Número pertencente a $C \equiv$ ramo da árvore...

Ora, um ramo dessa árvore pode ser identificado com uma função de ω em $\{0, 2\}$ (**"ramo = união de todas as sequências parciais que compõem esse ramo"**), e o número real que é dado pela intersecção desses intervalos – que nada mais são do que intervalos encaixantes com diâmetro tendendo a zero num espaço métrico completo, então de fato **sabemos** que existe essa intersecção, com um único ponto nela – pode ser indexado e identificado com esse ramo...

Isso sugere uma nova e poderosa notação para o Conjunto de Cantor.

Os números da forma x_f, para $f \in {}^{\omega}\{0,2\}$

Uma nova escrita para o Conjunto de Cantor

Denotaremos cada elemento do Conjunto de Cantor na forma x_f para $f \in {}^{\omega}\{0,2\}$, de tal forma que

$$\{x_f\} = \bigcap_{n<\omega} I_{f\restriction n}$$

Assim, $C = \{x_f : f \in {}^{\omega}\{0,2\}\}$.

Notar que a escrita acima deixa ainda mais evidente a equipotência entre C e ${}^{\omega}\{0,2\} \approx {}^{\omega}2$.

Exercício: Use a notação de árvore para mostrar que C, com a topologia de subespaço da reta, é **homeomorfo** ao espaço produto 2^{ω}.

Introduzimos a notação por árvores por um motivo !!!

Não introduzimos a notação de árvore para o Conjunto de Cantor apenas porque a achamos muito bonita... Temos uma razão específica para isso !!!

Vamos usar argumentos de árvore para provar a primeira informação importante a respeito dos subconjuntos perfeitos da reta:

Teorema - Sobre o tamanho dos conjuntos perfeitos

Se P é um subconjunto perfeito, então $|P| = 2^{\aleph_0}$.

Como um subconjunto da reta possui tamanho menor ou igual a $2^{\aleph_0}$, basta mostrar que **todo conjunto perfeito contém um subconjunto de tamanho $2^{\aleph_0}$.**

Todo subconjunto perfeito...contém uma cópia do Conjunto de Cantor dentro dele !!!

Nossa estratégia será, dado um conjunto perfeito, construir uma árvore binária de intervalos ("inspirados" pela construção de C, digamos) e, para cada ramo dessa árvore, exibir um elemento de P; tal construção será injetiva. Como a árvore terá $2^{\aleph_0}$ ramos, obteremos ao final essa cópia do Conjunto de Cantor dentro do conjunto perfeito, e acabou.

Seja A um subconjunto fechado da reta e suponha que A intersecte um intervalo aberto $]a,b[$. É fácil ver que, a cada $z \in]a,b[\cap A$ e a cada $\varepsilon < 0$, existe um intervalo fechado $J \subseteq]a,b[$ contendo z como ponto interior e que é tal que $J \cap A$ é fechado e $\mathrm{diam}(J) \leqslant \varepsilon$.

Preparando uma construção recursiva...

No caso em que P é um conjunto perfeito, intersecções entre perfeitos e intervalos são infinitas, assim podemos melhorar um pouco a afirmação do parágrafo anterior:

Lema

Sejam P perfeito e $]a, b[$ um intervalo aberto que intersecte P. Então, dado $\epsilon > 0$, existem intervalos fechados disjuntos $J_0, J_1 \subseteq\ ]a, b[$ tais que $\mathrm{int}(J_0) \cap P \neq \emptyset$, $\mathrm{int}(J_1) \cap P \neq \emptyset$ e os diâmetros de J_0 e J_1 são ambos $\leqslant \varepsilon$.

Usaremos o Lema acima $\aleph_0$ vezes, numa recursão finita.

Uma construção recursiva...

Vamos indexar agora os intervalos pelas sequências finitas de 0's e 1's (i.e., elementos de ${}^{<\omega}2$). Para uma tal sequência s, $s^\frown 0$ é a sequência estendida por um valor 0 no final (i.e., se s é uma sequência cujo domínio é dado por $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ então $s^\frown 0 = s \cup \{\langle n, 0\rangle\}$), e analogamente se define $s^\frown 1$.

Façamos agora uma construção recursiva !!! A cada $s \in {}^{<\omega}2$ definiremos, por indução no comprimento da sequência (e aplicando o Lema em cada passo), um intervalo fechado e não-vazio I_s satisfazendo:

(i) $\mathrm{int}(I_s) \cap P \neq \emptyset$;

(ii) $\mathrm{diam}(I_s) \leqslant \frac{1}{3^{\mathrm{dom}(s)}}$; e

(iii) $I_{s^\frown 0}$ e $I_{s^\frown 1}$ são subintervalos disjuntos de I_s, também satisfazendo (i) e (ii).

A recursão

O primeiro intervalo, $I_\emptyset$, é da forma $[a, b]$ para algum $]a, b[$ que intersecte P, e que possua diâmetro menor ou igual a 1.

A partir desse intervalo, basta seguir aplicando sucessivamente o Lema !!!

A cada $f \in {}^{\omega}2$, seja x_f o único ponto da intersecção

$$\bigcap_{n<\omega} (I_{f\upharpoonright n} \cap P) = (\bigcap_{n<\omega} I_{f\upharpoonright n}) \cap P$$

(Tal ponto existe por ser uma intersecção de uma sequência decrescente de fechados não-vazios, com diâmetro tendendo a zero, em um espaço métrico completo !!!)

A recursão

Também é fácil verificar que essa associação $f \mapsto x_f$ é injetora (**exercício !**)

Assim, $\{x_f : f \in {}^{\omega}2\}$ é um subconjunto de tamanho $2^{\aleph_0}$ de P, o que mostra que P tem tamanho $2^{\aleph_0}$, conforme desejado !!!

Agora estamos prontos para o **enunciado e a prova** do Teorema de Cantor-Bendixson . . .

Enunciado e Prova do Teorema de Cantor-Bendixson

Teorema de Cantor-Bendixson

Se F é um conjunto fechado e não-enumerável da reta, então existem conjuntos disjuntos P e S, com P perfeito e S enumerável (que pode ser vazio) tal que

$$F = P \cup S.$$

Segue que todo fechado não-enumerável F contém um subconjunto de tamanho $2^{\aleph_0}$ – donde $|F| = 2^{\aleph_0}$.

A construção também é por recursão !!!

Prova do Teorema de Cantor-Bendixson

A recursão é feita **na classe dos ordinais**. Para cada $\alpha \in \mathbf{On}$, construiremos um fechado F_α, da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_0 = F & \\ F_{\alpha+1} = (F_\alpha)' & \text{para todo } \alpha \in On \text{, e} \\ F(\gamma) = \bigcap\limits_{\xi<\gamma} F(\xi) & \text{se } \gamma \text{ é ordinal limite.} \end{cases}$$

Note que como o conjunto derivado A' é fechado para qualquer $A \subseteq \mathbb{R}$ – e, também, a intersecção qualquer de fechados é um fechado –, a sequência acima é, de fato, uma sequência de fechados !

A prova formal desse fato é por indução transfinita.

Demonstração

Vamos agora itemizar alguns fatos que podemos concluir sobre a sequência de fechados $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{On}\}$.

- Essa sequência é decrescente (pois $A' \subseteq A$, se A é um fechado qualquer), e se fosse **estritamente decrescente**, teríamos uma injeção da classe dos ordinais no conjunto F, o que é um absurdo !!!
- Portanto, existe um ordinal α tal que $F_\beta = F_\alpha$ para todo ordinal $\beta \geqslant \alpha$ ("a sequência **estaciona** em um certo ponto").
- Em particular, note que $F_\alpha = F_{\alpha+1} = (F_\alpha)'$ – assim, denotando tal fechado F_α por P, temos $P = P'$!!!
- Portanto, para P ser um conjunto perfeito, basta que seja **não-vazio**.
- Mostraremos que P é não-vazio verificando que $S = F \setminus P$ é um conjunto enumerável, o que encerra a demonstração !!!

Lembrar que F, por hipótese, é não-enumerável ... Sendo S enumerável, teremos P não-vazio (na verdade, não-enumerável !!!).

Demonstração

Vamos agora itemizar alguns fatos que podemos concluir sobre a sequência de fechados $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{On}\}$.

- Essa sequência é decrescente (pois $A' \subseteq A$, se A é um fechado qualquer), e se fosse **estritamente decrescente**, teríamos uma injeção da classe dos ordinais no conjunto F, o que é um absurdo !!!
- Portanto, existe um ordinal α tal que $F_\beta = F_\alpha$ para todo ordinal $\beta \geqslant \alpha$ ("a sequência **estaciona** em um certo ponto").
- Em particular, note que $F_\alpha = F_{\alpha+1} = (F_\alpha)'$ – assim, denotando tal fechado F_α por P, temos $P = P'$!!!
- Portanto, para P ser um conjunto perfeito, basta que seja **não-vazio**.
- Mostraremos que P é não-vazio verificando que $S = F \setminus P$ é um conjunto enumerável, o que encerra a demonstração !!!

Lembrar que F, por hipótese, é não-enumerável ... Sendo S enumerável, teremos P não-vazio (na verdade, não-enumerável !!!).

Demonstração

Vamos agora itemizar alguns fatos que podemos concluir sobre a sequência de fechados $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{On}\}$.

- Essa sequência é decrescente (pois $A' \subseteq A$, se A é um fechado qualquer), e se fosse **estritamente decrescente**, teríamos uma injeção da classe dos ordinais no conjunto F, o que é um absurdo !!!
- Portanto, existe um ordinal α tal que $F_\beta = F_\alpha$ para todo ordinal $\beta \geqslant \alpha$ ("a sequência **estaciona** em um certo ponto").
- Em particular, note que $F_\alpha = F_{\alpha+1} = (F_\alpha)'$ – assim, denotando tal fechado F_α por P, temos $P = P'$!!!
- Portanto, para P ser um conjunto perfeito, basta que seja **não-vazio**.
- Mostraremos que P é não-vazio verificando que $S = F \setminus P$ é um conjunto enumerável, o que encerra a demonstração !!!

Lembrar que F, por hipótese, é não-enumerável ... Sendo S enumerável, teremos P não-vazio (na verdade, não-enumerável !!!).

Demonstração

Vamos agora itemizar alguns fatos que podemos concluir sobre a sequência de fechados $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{On}\}$.

- Essa sequência é decrescente (pois $A' \subseteq A$, se A é um fechado qualquer), e se fosse **estritamente decrescente**, teríamos uma injeção da classe dos ordinais no conjunto F, o que é um absurdo !!!
- Portanto, existe um ordinal α tal que $F_\beta = F_\alpha$ para todo ordinal $\beta \geqslant \alpha$ ("a sequência **estaciona** em um certo ponto").
- Em particular, note que $F_\alpha = F_{\alpha+1} = (F_\alpha)'$ – assim, denotando tal fechado F_α por P, temos $P = P'$!!!
- Portanto, para P ser um conjunto perfeito, basta que seja **não-vazio**.
- Mostraremos que P é não-vazio verificando que $S = F \setminus P$ é um conjunto enumerável, o que encerra a demonstração !!!

Lembrar que F, por hipótese, é não-enumerável ... Sendo S enumerável, teremos P não-vazio (na verdade, não-enumerável !!!).

Demonstração

Vamos agora itemizar alguns fatos que podemos concluir sobre a sequência de fechados $\{F_\alpha : \alpha \in \mathbf{On}\}$.

- Essa sequência é decrescente (pois $A' \subseteq A$, se A é um fechado qualquer), e se fosse **estritamente decrescente**, teríamos uma injeção da classe dos ordinais no conjunto F, o que é um absurdo !!!
- Portanto, existe um ordinal α tal que $F_\beta = F_\alpha$ para todo ordinal $\beta \geqslant \alpha$ ("a sequência **estaciona** em um certo ponto").
- Em particular, note que $F_\alpha = F_{\alpha+1} = (F_\alpha)'$ – assim, denotando tal fechado F_α por P, temos $P = P'$!!!
- Portanto, para P ser um conjunto perfeito, basta que seja **não-vazio**.
- Mostraremos que P é não-vazio verificando que $S = F \setminus P$ é um conjunto enumerável, o que encerra a demonstração !!!

Lembrar que F, por hipótese, é não-enumerável ... Sendo S enumerável, teremos P não-vazio (na verdade, não-enumerável !!!).

Demonstração

- Um elemento que não pertença a um F_γ, com γ limite, necessariamente não pertencia a algum F_ξ para $\xi < \gamma$.
- Assim, **o menor índice α para o qual um certo $x \in F$ não pertence a F_α necessariamente é um ordinal sucessor**.
- Segue que

$$\begin{aligned} F \setminus P &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus F_{\beta+1} \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus (F_\beta)'. \end{aligned}$$

- Assim, $F \setminus P$ foi escrito como uma união disjunta $F \setminus P = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$, onde $G_\beta = F_\beta \setminus (F_\beta)'$ acaba sendo **o conjunto dos pontos isolados do subespaço** F_β.

Demonstração

- Um elemento que não pertença a um F_γ, com γ limite, necessariamente não pertencia a algum F_ξ para $\xi < \gamma$.
- Assim, **o menor índice α para o qual um certo $x \in F$ não pertence a F_α necessariamente é um ordinal sucessor**.
- Segue que

$$F \setminus P = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus F_{\beta+1} = \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus (F_\beta)'.$$

- Assim, $F \setminus P$ foi escrito como uma união disjunta $F \setminus P = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$, onde $G_\beta = F_\beta \setminus (F_\beta)'$ acaba sendo **o conjunto dos pontos isolados do subespaço** F_β.

Demonstração

- Um elemento que não pertença a um F_γ, com γ limite, necessariamente não pertencia a algum F_ξ para $\xi < \gamma$.
- Assim, **o menor índice α para o qual um certo $x \in F$ não pertence a F_α necessariamente é um ordinal sucessor**.
- Segue que

$$\begin{aligned} F \setminus P &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus F_{\beta+1} \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus (F_\beta)'. \end{aligned}$$

- Assim, $F \setminus P$ foi escrito como uma união disjunta $F \setminus P = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$, onde $G_\beta = F_\beta \setminus (F_\beta)'$ acaba sendo **o conjunto dos pontos isolados do subespaço** F_β.

Demonstração

- Um elemento que não pertença a um F_γ, com γ limite, necessariamente não pertencia a algum F_ξ para $\xi < \gamma$.
- Assim, **o menor índice α para o qual um certo $x \in F$ não pertence a F_α necessariamente é um ordinal sucessor**.
- Segue que

$$\begin{aligned} F \setminus P &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus F_{\beta+1} \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \setminus (F_\beta)'. \end{aligned}$$

- Assim, $F \setminus P$ foi escrito como uma união disjunta $F \setminus P = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$, onde $G_\beta = F_\beta \setminus (F_\beta)'$ acaba sendo **o conjunto dos pontos isolados do subespaço** F_β.

Demonstração

Com isso, a demonstração está praticamente encerrada !!! O colega vê o por quê ??? Vejamos...

Sabemos que se x é um ponto isolado de um dado conjunto A, existe um intervalo aberto I_x, de extremos racionais, tais que $I_x \cap A = \{x\}$.

Mas... A família dos intervalos abertos de extremos racionais é **enumerável** !!! Fixemos uma enumeração $\{I_n : n < \omega\}$ para essa família.

A cada $x \in F \setminus P$, existe um único $\beta < \alpha$ tal que $x \in G_\beta$. Seja $n(x)$ o menor número natural n para o qual $I_n \cap F_\beta = \{x\}$.

Demonstração

Vejamos agora que se $x \neq y$ são pontos distintos de $F \setminus P$ então $n(x) \neq n(y)$.

De fato: caso x e y estejam em um mesmo G_β, claramente $n(x) \neq n(y)$; por outro lado, se $x \in G_{\beta_1}$, $y \in G_{\beta_2}$ e $\beta_1 < \beta_2$, então y não pode pertencer a $I_{n(x)}$ – lembre-se que a sequência é **descrescente !!!** Assim, se y pertencesse a $I_{n(x)}$ teríamos que ...(?) ...

Segue que a aplicação de $S = F \setminus P$ em ω dada por $x \mapsto n(x)$ é injetora, assim S é um conjunto enumerável.

A demonstração está encerrada !!!

Usando **CH** numa recursão transfinita ...

Para encerrar esta primeira sessão do minicurso, vamos aproveitar esta oportunidade de todos estarem com a mente "treinada" em recursões/induções transfinitas para mostrar uma das principais formas de se aplicar a Hipótese do Contínuo em Topologia e Análise: em construções recursivas.

Observe o colega que, ao fazermos uma recursão **finita** sobre um conjunto enumerável, somos capazes de percorrer esse conjunto enumerável inteiramente (em ω passos), e sendo que em cada etapa sabemos que os elementos já visitados formam um conjunto finito. Supondo **CH**, a reta tem tamanho $\aleph_1$!!! Qual é a ação análoga que podemos fazer ???

Usando **CH** numa recursão transfinita ...

ω_1 passos até $\mathbb{R}$...

Assumindo a Hipótese do Contínuo, teremos que $|\mathbb{R}| = \aleph_1$, assim poderemos escrever

$$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$$

Dessa forma, podemos percorrer toda a reta real em ω_1 passos, e em cada passo α o conjunto dos elementos já visitados $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é um conjunto **enumerável**.

E o mesmo pode ser feito para **qualquer** conjunto que tenha cardinalidade igual à da reta !!!

Exercício: Mostre (em **ZFC**) que a **topologia da reta** (i.e., a família de todos os abertos da reta) tem tamanho $2^{\aleph_0}$.

Conjuntos de Luzin e de Sierpiński

Em 1914, Luzin mostrou que, se assumirmos **CH**, então certos tipos **subconjuntos especiais da reta** existiriam: os chamados **conjuntos de Luzin**.

Lembramos ao colega que um subconjunto de um espaço topológico é **raro** se o interior do seu fecho é vazio, e é dito **magro** se estiver contido numa reunião enumerável de raros.

Conjuntos de Luzin

Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é dito ser um **Conjunto de Luzin** se A é não-enumerável mas $A \cap X$ é enumerável para todo $X \subseteq \mathbb{R}$ magro.

Equivalentemente, A é de Luzin se, e somente se, A é não-enumerável porém os únicos subconjuntos magros de A são os subconjuntos enumeráveis.

Conjuntos de Luzin e de Sierpiński

Os **Conjuntos de Sierpiński** são os análogos para a Teoria da Medida – i.e., subconjuntos não-enumeráveis da reta que possuem intersecção enumerável com qualquer conjunto de medida nula.

Vamos apresentar a demonstração de Luzin para **CH** $\Rightarrow$ "Existem Conjuntos de Luzin" ; a demonstração para conjuntos de Sierpiński é inteiramente análoga.

Antes de mais nada, note que **existem exatamente** $2^{\aleph_0}$ **fechados de interior vazio da reta**. Pois: existem $2^{\aleph_0}$ abertos na reta, então existem $2^{\aleph_0}$ fechados na reta; assim o número de fechados de interior vazio é menor ou igual a $2^{\aleph_0}$.

Como todos os unitários são fechados de interior vazio, segue que o número de fechados de interior vazio é exatamente $2^{\aleph_0}$.

Demonstração de **CH** $\Rightarrow$ Existem Conjuntos de Luzin

Façamos a demonstração !!! Iremos **diagonalizar contra os fechados de interior vazio . . .**

Assumindo **CH**, podemos escrever a família de **todos** os fechados de interior vazio na forma $\{F_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

Vamos fazer uma construção **recursiva**, supondo em cada etapa que temos uma escolha canônica que pode ser feita em um conjunto não-vazio (i.e., estaremos também utilizando o Axioma da Escolha em cada passo).

Em cada passo, utilizaremos ainda o **Teorema de Baire para Espaços Métricos Completos**, o qual declara que: em um espaço métrico completo, conjuntos magros possuem interior vazio.

Demonstração de **CH** $\Rightarrow$ Existem Conjuntos de Luzin

Pois bem: para cada $\alpha < \omega_1$, escolheremos um número real x_α da seguinte maneira:

1. $x_0 \notin F_0$;
2. E assumindo construídos x_ξ para todo $\xi < \alpha$, escolhemos x_α de modo que

$$x_\alpha \notin \Big(\big(\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi\big) \cup \{x_\xi : \xi < \alpha\}\Big).$$

Notar que sempre será possível realizar o passo 2, já que $\alpha < \omega_1$ é um ordinal enumerável, assim $\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi$ é um conjunto magro; como a união de dois magros é magro e $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é enumerável e portanto magro, temos que $(\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi) \cup \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é magro e portanto de interior vazio na reta !!! Logo, podemos tomar x_α em seu complementar...

Demonstração de **CH** $\Rightarrow$ Existem Conjuntos de Luzin

Pois bem: para cada $\alpha < \omega_1$, escolheremos um número real x_α da seguinte maneira:

1. $x_0 \notin F_0$;
2. E assumindo construídos x_ξ para todo $\xi < \alpha$, escolhemos x_α de modo que

$$x_\alpha \notin \Big(\big(\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi \big) \cup \{x_\xi : \xi < \alpha\} \Big).$$

Notar que sempre será possível realizar o passo 2, já que $\alpha < \omega_1$ é um ordinal enumerável, assim $\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi$ é um conjunto magro; como a união de dois magros é magro e $\{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é enumerável e portanto magro, temos que $\big(\bigcup_{\xi<\alpha} F_\xi \big) \cup \{x_\xi : \xi < \alpha\}$ é magro e portanto de interior vazio na reta !!! Logo, podemos tomar x_α em seu complementar...

Demonstração de **CH** $\Rightarrow$ Existem Conjuntos de Luzin

Pois bem: o nosso Conjunto de Luzin é simplesmente o conjunto formado pelos pontos escolhidos, i.e., $A = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$.

De fato: seja M um subconjunto magro da reta, escolhido arbitrariamente. Então existe $B \subseteq \omega_1$ enumerável tal que $M \subseteq \bigcup_{\alpha \in B} F_\alpha$.

("$B =$ conjunto enumerável formado pelos índices dos fechados de interior vazio que são usados para cobrir M")

Demonstração de **CH** $\Rightarrow$ Existem Conjuntos de Luzin

Ora, sendo B enumerável sabemos que B é limitado em ω_1 !!!

Assim, sendo $\zeta = \sup(B) + 1 < \omega_1$, teremos que

$$M \subseteq \bigcup_{\alpha<\zeta} F_\alpha$$

E portanto temos que $A \cap M \subseteq \{x_\alpha : \alpha \leqslant \zeta\}$ (**por quê ???**), assim $A \cap M$ é enumerável já que ζ é um ordinal enumerável.

. . . E chegamos ao final da primeira sessão !!!

. . . Para esta primeira sessão, chegamos ao final !!!

Espero que estejam aproveitando, e até a segunda e última sessão deste minicurso !!!

Daremos indicações de leitura ao final da segunda sessão. . .

Vamos discutir Lógica e Teoria dos Conjuntos ?

samuel@ufba.br