Equivalências e Consequências da Hipótese do Contínuo em Análise e Topologia –

Parte II: Algumas equivalências surpreendentes !!!

Prof. Dr. Samuel Gomes da Silva
IM/UFBA
Salvador – Bahia – Brasil

Maceió – Alagoas
Novembro de 2014

Sumário I

Equivalências de **CH**

Na sessão de hoje, veremos algumas equivalências da Hipótese do Contínuo.

Com isso, veremos que determinadas questões combinatórias, geométricas e analíticas resultam em proposições indecidíveis para a Matemática – exatamente por resultarem em proposições equivalentes a **CH**.

As primeiras duas equivalências são devidas a Sierpiński, que escreveu uma monografia em 1934 contendo várias equivalências para a Hipótese do Contínuo – e nos dias de hoje essa monografia é considerada um texto clássico.

A Decomposição de Sierpiński

Sierpiński considerou a possibilidade de decomposições bastante peculiares do plano !!!

A Decomposição de Sierpiński

Uma decomposição de Sierpiński é uma partição do plano $\mathbb{R}^2$ em dois subconjuntos disjuntos, digamos $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, de tal forma que A possui todas as suas seções horizontais enumeráveis e B possui todas as seções verticais enumeráveis.

Em outras palavras, esses conjuntos disjuntos A e B, que quando unidos resultam no plano, são tais que A intersecta **qualquer linha horizontal** num conjunto **enumerável**, enquanto que B intersecta **qualquer linha vertical** num conjunto **enumerável**.

Equivalência com **CH**

Apesar de seu enunciado com um pouco de combinatória e com um pouco de geometria – que poderia levar alguém a pensar que é mais uma questão ao nível de alguma Olimpíada de Matemática –, a existência desse tipo de decomposição do plano é **indecidível** para a Matemática !!!

Teorema (Sierpiński, 1934)

A existência de decomposições de Sierpiński é equivalente à Hipótese do Contínuo.

Vejamos como é a demonstração !!!

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Supondo **CH**, podemos escrever $\mathbb{R} = \{r_\xi : \xi < \omega_1\}$.
- Definiremos nossos subconjuntos A e B do plano da seguinte forma: fazemos $A = \{\langle r_\xi, r_\eta\rangle : \xi < \eta\}$

  $$\text{e } B = \{\langle r_\xi, r_\eta\rangle : \xi \geqslant \eta\}.$$

  Note que, de fato, $A \cap B = \emptyset$.
- Definimos agora, para cada $\alpha < \omega_1$, o seguinte conjunto:

  $$L_{h,\alpha} = \{\langle x, r_\alpha\rangle : x \in \mathbb{R}\}$$

  Notar que $L_{h,\alpha}$ representa "a reta horizontal que passa por $\langle 0, r_\alpha\rangle$".

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Supondo **CH**, podemos escrever $\mathbb{R} = \{r_\xi : \xi < \omega_1\}$.
- Definiremos nossos subconjuntos A e B do plano da seguinte forma: fazemos $A = \{\langle r_\xi, r_\eta \rangle : \xi < \eta\}$

$$\text{e } B = \{\langle r_\xi, r_\eta \rangle : \xi \geqslant \eta\}.$$

Note que, de fato, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

- Definimos agora, para cada $\alpha < \omega_1$, o seguinte conjunto:

$$L_{h,\alpha} = \{\langle x, r_\alpha \rangle : x \in \mathbb{R}\}$$

Notar que $L_{h,\alpha}$ representa "a reta horizontal que passa por $\langle 0, r_\alpha \rangle$".

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Supondo **CH**, podemos escrever $\mathbb{R} = \{r_\xi : \xi < \omega_1\}$.
- Definiremos nossos subconjuntos A e B do plano da seguinte forma: fazemos $A = \{\langle r_\xi, r_\eta\rangle : \xi < \eta\}$

$$\text{e } B = \{\langle r_\xi, r_\eta\rangle : \xi \geqslant \eta\}.$$

  Note que, de fato, $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.
- Definimos agora, para cada $\alpha < \omega_1$, o seguinte conjunto:

$$L_{h,\alpha} = \{\langle x, r_\alpha\rangle : x \in \mathbb{R}\}$$

  Notar que $L_{h,\alpha}$ representa "a reta horizontal que passa por $\langle 0, r_\alpha\rangle$".

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Analisemos o que ocorre com as intersecções de A com as retas horizontais !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha} \cap A$, para algum $\alpha < \omega_1$.

  Existe então $\gamma < \omega_1$ tal que $a = r_\gamma$.

- Como supusemos que $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha}$, então $b = r_\alpha$ logo (pela definição de A !!!) tem-se que $\gamma < \alpha < \omega_1$.
- Assim, $L_{h,\alpha} \cap A = \{\langle r_\gamma, r_\alpha\rangle : \gamma < \alpha\}$.
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A| \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha < \omega_1$. Segue que $|\alpha| < \omega_1$ - o que é óbvio, dado que ω_1 é exatamente o conjunto formado pelos **ordinais enumeráveis !!!**
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A|$ é enumerável.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Analisemos o que ocorre com as intersecções de A com as retas horizontais !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha} \cap A$, para algum $\alpha < \omega_1$.

  Existe então $\gamma < \omega_1$ tal que $a = r_\gamma$.
- Como supusemos que $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha}$, então $b = r_\alpha$ logo (pela definição de A !!!) tem-se que $\gamma < \alpha < \omega_1$.
- Assim, $L_{h,\alpha} \cap A = \{\langle r_\gamma, r_\alpha\rangle : \gamma < \alpha\}$.
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A| \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha < \omega_1$. Segue que $|\alpha| < \omega_1$ - o que é óbvio, dado que ω_1 é exatamente o conjunto formado pelos **ordinais enumeráveis !!!**
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A|$ é enumerável.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Analisemos o que ocorre com as intersecções de A com as retas horizontais !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha} \cap A$, para algum $\alpha < \omega_1$.

  Existe então $\gamma < \omega_1$ tal que $a = r_\gamma$.
- Como supusemos que $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha}$, então $b = r_\alpha$ logo (pela definição de A !!!) tem-se que $\gamma < \alpha < \omega_1$.
- Assim, $L_{h,\alpha} \cap A = \{\langle r_\gamma, r_\alpha\rangle : \gamma < \alpha\}$.
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A| \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha < \omega_1$. Segue que $|\alpha| < \omega_1$ - o que é óbvio, dado que ω_1 é exatamente o conjunto formado pelos **ordinais enumeráveis !!!**
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A|$ é enumerável.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Analisemos o que ocorre com as intersecções de A com as retas horizontais !!!

  Tome $\langle a, b \rangle \in L_{h,\alpha} \cap A$, para algum $\alpha < \omega_1$.

  Existe então $\gamma < \omega_1$ tal que $a = r_\gamma$.
- Como supusemos que $\langle a, b \rangle \in L_{h,\alpha}$, então $b = r_\alpha$ logo (pela definição de A !!!) tem-se que $\gamma < \alpha < \omega_1$.
- Assim, $L_{h,\alpha} \cap A = \{\langle r_\gamma, r_\alpha \rangle : \gamma < \alpha\}$.
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A| \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha < \omega_1$. Segue que $|\alpha| < \omega_1$ - o que é óbvio, dado que ω_1 é exatamente o conjunto formado pelos **ordinais enumeráveis !!!**
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A|$ é enumerável.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Analisemos o que ocorre com as intersecções de A com as retas horizontais !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha} \cap A$, para algum $\alpha < \omega_1$.

  Existe então $\gamma < \omega_1$ tal que $a = r_\gamma$.
- Como supusemos que $\langle a, b\rangle \in L_{h,\alpha}$, então $b = r_\alpha$ logo (pela definição de A !!!) tem-se que $\gamma < \alpha < \omega_1$.
- Assim, $L_{h,\alpha} \cap A = \{\langle r_\gamma, r_\alpha\rangle : \gamma < \alpha\}$.
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A| \leqslant |\alpha| \leqslant \alpha < \omega_1$. Segue que $|\alpha| < \omega_1$ - o que é óbvio, dado que ω_1 é exatamente o conjunto formado pelos **ordinais enumeráveis !!!**
- Segue que $|L_{h,\alpha} \cap A|$ é enumerável.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Agora, definimos as "retas verticais" i.e., os conjuntos da forma $L_{v,\beta} = \{\langle r_\beta, y\rangle : y \in \mathbb{R}\}$.
- Vejamos agora como "funcionam" as intersecções desses conjuntos com B !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{v,\beta} \cap B$.

  Existe, então, um ordinal enumerável γ tal que $b = r_\gamma$.
- Lembre-se que $a = r_\beta$!!!

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Agora, definimos as “retas verticais” i.e., os conjuntos da forma $L_{v,\beta} = \{\langle r_\beta, y\rangle : y \in \mathbb{R}\}$.
- Vejamos agora como “funcionam” as intersecções desses conjuntos com B !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{v,\beta} \cap B$.

  Existe, então, um ordinal enumerável γ tal que $b = r_\gamma$.
- Lembre-se que $a = r_\beta$!!!

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposição de Sierpiński

- Agora, definimos as "retas verticais" i.e., os conjuntos da forma $L_{v,\beta} = \{\langle r_\beta, y\rangle : y \in \mathbb{R}\}$.
- Vejamos agora como "funcionam" as intersecções desses conjuntos com B !!!

  Tome $\langle a, b\rangle \in L_{v,\beta} \cap B$.

  Existe, então, um ordinal enumerável γ tal que $b = r_\gamma$.
- Lembre-se que $a = r_\beta$!!!

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposiçãode Sierpiński

- Como estamos supondo que $\langle a, b\rangle \in B$, então (pela definição de B !!!), e usando que $a = r_\beta$, então $\beta \geqslant \gamma \Rightarrow \gamma \leqslant \beta < \omega_1$.
- Assim, $L_{v,\beta} \cap B = \{\langle r_\beta, r_\gamma\rangle : \gamma \leqslant \beta\}$, onde $\beta < \omega_1$
- Então $|L_{v,\beta} \cap B| \leqslant |\beta| \leqslant \beta < \omega_1$. E, com argumentos análogos aos feitos no caso anterior, chegamos a $|L_{v,\beta} \cap B| < \omega_1$, sendo portanto enumerável.
- Portanto, A e B, de fato, constituem uma decomposição de Sierpiński.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposiçãode Sierpiński

- Como estamos supondo que $\langle a, b\rangle \in B$, então (pela definição de B !!!), e usando que $a = r_\beta$, então $\beta \geqslant \gamma \Rightarrow \gamma \leqslant \beta < \omega_1$.
- Assim, $L_{v,\beta} \cap B = \{\langle r_\beta, r_\gamma\rangle : \gamma \leqslant \beta\}$, onde $\beta < \omega_1$
- Então $|L_{v,\beta} \cap B| \leqslant |\beta| \leqslant \beta < \omega_1$. E, com argumentos análogos aos feitos no caso anterior, chegamos a $|L_{v,\beta} \cap B| < \omega_1$, sendo portanto enumerável.
- Portanto, A e B, de fato, constituem uma decomposição de Sierpiński.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposiçãode Sierpiński

- Como estamos supondo que $\langle a, b\rangle \in B$, então (pela definição de B !!!), e usando que $a = r_\beta$, então $\beta \geqslant \gamma \Rightarrow \gamma \leqslant \beta < \omega_1$.
- Assim, $L_{v,\beta} \cap B = \{\langle r_\beta, r_\gamma\rangle : \gamma \leqslant \beta\}$, onde $\beta < \omega_1$
- Então $|L_{v,\beta} \cap B| \leqslant |\beta| \leqslant \beta < \omega_1$. E, com argumentos análogos aos feitos no caso anterior, chegamos a $|L_{v,\beta} \cap B| < \omega_1$, sendo portanto enumerável.
- Portanto, A e B, de fato, constituem uma decomposição de Sierpiński.

CH $\Rightarrow$ Existe uma decomposiçãode Sierpiński

- Como estamos supondo que $\langle a, b\rangle \in B$, então (pela definição de B !!!), e usando que $a = r_\beta$, então $\beta \geqslant \gamma \Rightarrow \gamma \leqslant \beta < \omega_1$.
- Assim, $L_{v,\beta} \cap B = \{\langle r_\beta, r_\gamma\rangle : \gamma \leqslant \beta\}$, onde $\beta < \omega_1$
- Então $|L_{v,\beta} \cap B| \leqslant |\beta| \leqslant \beta < \omega_1$. E, com argumentos análogos aos feitos no caso anterior, chegamos a $|L_{v,\beta} \cap B| < \omega_1$, sendo portanto enumerável.
- Portanto, A e B, de fato, constituem uma decomposição de Sierpiński.

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Vamos para a recíproca, i.e., suponhamos que exista uma decomposição do plano em subconjuntos disjuntos A e B nas condições desejadas.
- De qualquer modo – i.e., independente do que venhamos a argumentar em seguida –, sabemos que $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$!!! Por isso, é possível fixar $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|U| = \aleph_1$.
- Fixemos $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente. Afirmamos que existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- De fato: suponha por absurdo que não exista $u \in U$ com $\langle r, u \rangle \in A$; seguiria que para todo $u \in U$ teríamos $\langle r, u \rangle \in B$ – ou seja, **todos** os pares da forma $\langle r, u \rangle$, com $u \in U$, acabariam sendo elementos de B.
- Bem, nesse caso B intersectaria uma reta vertical em uma quantidade não-enumerável de pontos !!! Contradição. . .

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Vamos para a recíproca, i.e., suponhamos que exista uma decomposição do plano em subconjuntos disjuntos A e B nas condições desejadas.
- De qualquer modo – i.e., independente do que venhamos a argumentar em seguida –, sabemos que $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$!!! Por isso, é possível fixar $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|U| = \aleph_1$.
- Fixemos $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente. Afirmamos que existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- De fato: suponha por absurdo que não exista $u \in U$ com $\langle r, u \rangle \in A$; seguiria que para todo $u \in U$ teríamos $\langle r, u \rangle \in B$ – ou seja, **todos** os pares da forma $\langle r, u \rangle$, com $u \in U$, acabariam sendo elementos de B.
- Bem, nesse caso B intersectaria uma reta vertical em uma quantidade não-enumerável de pontos !!! Contradição. . .

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Vamos para a recíproca, i.e., suponhamos que exista uma decomposição do plano em subconjuntos disjuntos A e B nas condições desejadas.
- De qualquer modo – i.e., independente do que venhamos a argumentar em seguida –, sabemos que $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$!!! Por isso, é possível fixar $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|U| = \aleph_1$.
- Fixemos $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente. Afirmamos que existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- De fato: suponha por absurdo que não exista $u \in U$ com $\langle r, u \rangle \in A$; seguiria que para todo $u \in U$ teríamos $\langle r, u \rangle \in B$ – ou seja, **todos** os pares da forma $\langle r, u \rangle$, com $u \in U$, acabariam sendo elementos de B.
- Bem, nesse caso B intersectaria uma reta vertical em uma quantidade não-enumerável de pontos !!! Contradição. . .

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Vamos para a recíproca, i.e., suponhamos que exista uma decomposição do plano em subconjuntos disjuntos A e B nas condições desejadas.
- De qualquer modo – i.e., independente do que venhamos a argumentar em seguida –, sabemos que $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$!!! Por isso, é possível fixar $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|U| = \aleph_1$.
- Fixemos $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente. Afirmamos que existe $u \in U$ tal que $\langle r, u\rangle \in A$.
- De fato: suponha por absurdo que não exista $u \in U$ com $\langle r, u\rangle \in A$; seguiria que para todo $u \in U$ teríamos $\langle r, u\rangle \in B$ – ou seja, **todos** os pares da forma $\langle r, u\rangle$, com $u \in U$, acabariam sendo elementos de B.
- Bem, nesse caso B intersectaria uma reta vertical em uma quantidade não-enumerável de pontos !!! Contradição. . .

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Vamos para a recíproca, i.e., suponhamos que exista uma decomposição do plano em subconjuntos disjuntos A e B nas condições desejadas.
- De qualquer modo – i.e., independente do que venhamos a argumentar em seguida –, sabemos que $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_1$!!! Por isso, é possível fixar $U \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|U| = \aleph_1$.
- Fixemos $r \in \mathbb{R}$ arbitrariamente. Afirmamos que existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- De fato: suponha por absurdo que não exista $u \in U$ com $\langle r, u \rangle \in A$; seguiria que para todo $u \in U$ teríamos $\langle r, u \rangle \in B$ – ou seja, **todos** os pares da forma $\langle r, u \rangle$, com $u \in U$, acabariam sendo elementos de B.
- Bem, nesse caso B intersectaria uma reta vertical em uma quantidade não-enumerável de pontos !!! Contradição. . .

Existe uma decomposição de Sierpiński ⇒ **CH**

- Então concluímos que, de fato, para um $r \in \mathbb{R}$ fixado, com certeza existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- Agora, para $u \in U$ fixado, considere o conjunto

$$A_u = \{r \in \mathbb{R} : \langle r, u \rangle \in A\}$$

- Ora, cada A_u é enumerável ! Pois A_u nada mais é do que a intersecção do conjunto A com a reta horizontal $L_{h,u}$.
- Perceba agora o colega que os dois argumentos anteriores nos dão que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{u \in U} A_u.$$

- De fato, o primeiro argumento nos diz que, dado $r \in R$ arbitrário, com certeza existe u tal que esse r acaba sendo m elemento do A_u correspondente !!!

Existe uma decomposição de Sierpiński ⇒ **CH**

- Então concluímos que, de fato, para um $r \in \mathbb{R}$ fixado, com certeza existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- Agora, para $u \in U$ fixado, considere o conjunto

$$A_u = \{r \in \mathbb{R} : \langle r, u \rangle \in A\}$$

- Ora, cada A_u é enumerável ! Pois A_u nada mais é do que a intersecção do conjunto A com a reta horizontal $L_{h,u}$.
- Perceba agora o colega que os dois argumentos anteriores nos dão que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{u \in U} A_u.$$

- De fato, o primeiro argumento nos diz que, dado $r \in R$ arbitrário, com certeza existe u tal que esse r acaba sendo m elemento do A_u correspondente !!!

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Então concluímos que, de fato, para um $r \in \mathbb{R}$ fixado, com certeza existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- Agora, para $u \in U$ fixado, considere o conjunto

$$A_u = \{r \in \mathbb{R} : \langle r, u \rangle \in A\}$$

- Ora, cada A_u é enumerável ! Pois A_u nada mais é do que a intersecção do conjunto A com a reta horizontal $L_{h,u}$.
- Perceba agora o colega que os dois argumentos anteriores nos dão que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{u \in U} A_u.$$

- De fato, o primeiro argumento nos diz que, dado $r \in R$ arbitrário, com certeza existe u tal que esse r acaba sendo m elemento do A_u correspondente !!!

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Então concluímos que, de fato, para um $r \in \mathbb{R}$ fixado, com certeza existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- Agora, para $u \in U$ fixado, considere o conjunto

$$A_u = \{r \in \mathbb{R} : \langle r, u \rangle \in A\}$$

- Ora, cada A_u é enumerável ! Pois A_u nada mais é do que a intersecção do conjunto A com a reta horizontal $L_{h,u}$.
- Perceba agora o colega que os dois argumentos anteriores nos dão que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{u \in U} A_u.$$

- De fato, o primeiro argumento nos diz que, dado $r \in R$ arbitrário, com certeza existe u tal que esse r acaba sendo m elemento do A_u correspondente !!!

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

- Então concluímos que, de fato, para um $r \in \mathbb{R}$ fixado, com certeza existe $u \in U$ tal que $\langle r, u \rangle \in A$.
- Agora, para $u \in U$ fixado, considere o conjunto

$$A_u = \{r \in \mathbb{R} : \langle r, u \rangle \in A\}$$

- Ora, cada A_u é enumerável ! Pois A_u nada mais é do que a intersecção do conjunto A com a reta horizontal $L_{h,u}$.
- Perceba agora o colega que os dois argumentos anteriores nos dão que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{u \in U} A_u.$$

- De fato, o primeiro argumento nos diz que, dado $r \in R$ arbitrário, com certeza existe u tal que esse r acaba sendo m elemento do A_u correspondente !!!

Existe uma decomposição de Sierpiński $\Rightarrow$ **CH**

Porém, a igualdade

$$\mathbb{R} = \bigcup_{u \in U} A_u.$$

nos permite escrever a reta como a união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis !!!

Pela nossa fórmula para uniões generalizadas, concluíriamos que

$$|\mathbb{R}| \leqslant |U|.\sup_{u \in U} |A_u| = \aleph_1.\aleph_0 = \aleph_1.$$

Assim, $2^{\aleph_0} \leqslant \aleph_1$!!! Como a outra desigualdade já era válida desde o começo, concluímos que vale a Hipótese do Contínuo !!!

Os dardos de Freiling

Em 1986, Chris Freiling utilizou um argumento combinatório – também devido a Sierpiński – para propor um "experimento mental" cuja conclusão, ao final, ele defendeu constituir uma **evidência empírica contrária à validade da Hipótese do Contínuo.**

Sua descrição do experimento mental é feita em termos de argumentos probabilísticos, elegantemente descritos em termos de **"lancar dardos na reta real"**.

Ele defendia que um certo **axioma de simetria** seria auto-evidente o suficiente para ser acrescido aos Axiomas da Teoria dos Conjuntos. . .

No entanto, ... ? . . . .

Os dardos de Freiling

Em 1986, Chris Freiling utilizou um argumento combinatório – também devido a Sierpiński – para propor um "experimento mental" cuja conclusão, ao final, ele defendeu constituir uma **evidência empírica contrária à validade da Hipótese do Contínuo.**

Sua descrição do experimento mental é feita em termos argumentos probabilísticos, elegantemente descritos em termos de **"lançar dardos na reta real"**.

Ele defendia que um certo **axioma de simetria** seria auto-evidente o suficiente para ser acrescido aos Axiomas da Teoria dos Conjuntos. . .

No entanto, tal axioma é **equivalente à negação de CH !!!**

Os dardos de Freiling

As asserções de Freiling foram denominadas como axiomas de simetria pelo próprio autor (o título do artigo publicado é **Axioms of Symmetry: Throwing Darts at the Real Number Line**).

Tratam-se de argumentos probabilísticos completamente aceitáveis – no entanto, em um dado ponto **assume-se que uma certa situação é simétrica !!!**

Vamos utilizar aqui uma descrição do raciocínio probabilístico de Freiling que é baseada em argumentos enunciados via jogos, redigidos pelo colega Leandro Fiorini Aurichi (USP São Carlos).

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- Imaginemos um jogo entre dois jogadores, A e B, que vão lançar dardos na reta real.
- O jogador A, com os olhos vendados, lança o seu dardo aleatoriamente e marca assim um certo número real.
- O jogador B, também de olhos vendados, lança o seu dardo. O jogador B vence se o seu dardo cai em um um número real que é **diferente** do número marcado pelo jogador A.
- ...?!?!?!?!?!?
- ...Está muito fácil para o jogador B, não é ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- Imaginemos um jogo entre dois jogadores, A e B, que vão lançar dardos na reta real.
- O jogador A, com os olhos vendados, lança o seu dardo aleatoriamente e marca assim um certo número real.
- O jogador B, também de olhos vendados, lança o seu dardo. O jogador B vence se o seu dardo cai em um um número real que é **diferente** do número marcado pelo jogador A.
- ...?!?!?!?!?!?!?
- ...Está muito fácil para o jogador B, não é ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- Imaginemos um jogo entre dois jogadores, A e B, que vão lançar dardos na reta real.
- O jogador A, com os olhos vendados, lança o seu dardo aleatoriamente e marca assim um certo número real.
- O jogador B, também de olhos vendados, lança o seu dardo. O jogador B vence se o seu dardo cai em um um número real que é **diferente** do número marcado pelo jogador A.
- ...?!?!?!?!?!?
- ...Está muito fácil para o jogador B, não é ?

Um jogo que é “sempre” vencido pelo jogador B...

- Imaginemos um jogo entre dois jogadores, A e B, que vão lançar dardos na reta real.
- O jogador A, com os olhos vendados, lança o seu dardo aleatoriamente e marca assim um certo número real.
- O jogador B, também de olhos vendados, lança o seu dardo. O jogador B vence se o seu dardo cai em um um número real que é **diferente** do número marcado pelo jogador A.
- ...?!?!?!?!?!?!?
- ...Está muito fácil para o jogador B, não é ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- Imaginemos um jogo entre dois jogadores, A e B, que vão lançar dardos na reta real.
- O jogador A, com os olhos vendados, lança o seu dardo aleatoriamente e marca assim um certo número real.
- O jogador B, também de olhos vendados, lança o seu dardo. O jogador B vence se o seu dardo cai em um um número real que é **diferente** do número marcado pelo jogador A.
- ...?!?!?!?!?!?!?
- ...Está muito fácil para o jogador B, não é ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- De fato: é praticamente impossível (se bem que **não teoricamente impossível**) que o dardo jogado pelo jogador B atinja a reta no mesmo número marcado pelo dardo de A !!!
- Pois bem: vamos tentar melhorar as possibilidades para o jogador A.
- Imaginemos agora que o jogador A vende os olhos e jogue uma quantidade **enumerável e infinita** de dardos na reta real.
- Em seguida, o jogador B venda os olhos e lança o seu dardo, ganhando o jogo se o seu dardo **não atinge** a reta em nenhum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos do jogador A.
- ... ??? ...
- Na verdade, a situação continua muito boa para o jogador B, certo ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- De fato: é praticamente impossível (se bem que **não teoricamente impossível**) que o dardo jogado pelo jogador B atinja a reta no mesmo número marcado pelo dardo de A !!!
- Pois bem: vamos tentar melhorar as possibilidades para o jogador A.
- Imaginemos agora que o jogador A vende os olhos e jogue uma quantidade **enumerável e infinita** de dardos na reta real.
- Em seguida, o jogador B venda os olhos e lança o seu dardo, ganhando o jogo se o seu dardo **não atinge** a reta em nenhum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos do jogador A.
- ...??? ...
- Na verdade, a situação continua muito boa para o jogador B, certo ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- De fato: é praticamente impossível (se bem que **não teoricamente impossível**) que o dardo jogado pelo jogador B atinja a reta no mesmo número marcado pelo dardo de A !!!
- Pois bem: vamos tentar melhorar as possibilidades para o jogador A.
- Imaginemos agora que o jogador A vende os olhos e jogue uma quantidade **enumerável e infinita** de dardos na reta real.
- Em seguida, o jogador B venda os olhos e lança o seu dardo, ganhando o jogo se o seu dardo **não atinge** a reta em nenhum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos do jogador A.
- ...??? ...
- Na verdade, a situação continua muito boa para o jogador B, certo ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- De fato: é praticamente impossível (se bem que **não teoricamente impossível**) que o dardo jogado pelo jogador B atinja a reta no mesmo número marcado pelo dardo de A !!!
- Pois bem: vamos tentar melhorar as possibilidades para o jogador A.
- Imaginemos agora que o jogador A vende os olhos e jogue uma quantidade **enumerável e infinita** de dardos na reta real.
- Em seguida, o jogador B venda os olhos e lança o seu dardo, ganhando o jogo se o seu dardo **não atinge** a reta em nenhum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos do jogador A.
- ...??? ...
- Na verdade, a situação continua muito boa para o jogador B, certo ?

Um jogo que é “sempre” vencido pelo jogador B...

- De fato: é praticamente impossível (se bem que **não teoricamente impossível**) que o dardo jogado pelo jogador B atinja a reta no mesmo número marcado pelo dardo de A !!!
- Pois bem: vamos tentar melhorar as possibilidades para o jogador A.
- Imaginemos agora que o jogador A vende os olhos e jogue uma quantidade **enumerável e infinita** de dardos na reta real.
- Em seguida, o jogador B venda os olhos e lança o seu dardo, ganhando o jogo se o seu dardo **não atinge** a reta em nenhum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos do jogador A.
- ...??? ...
- Na verdade, a situação continua muito boa para o jogador B, certo ?

Um jogo que é "sempre" vencido pelo jogador B...

- De fato: é praticamente impossível (se bem que **não teoricamente impossível**) que o dardo jogado pelo jogador B atinja a reta no mesmo número marcado pelo dardo de A !!!
- Pois bem: vamos tentar melhorar as possibilidades para o jogador A.
- Imaginemos agora que o jogador A vende os olhos e jogue uma quantidade **enumerável e infinita** de dardos na reta real.
- Em seguida, o jogador B venda os olhos e lança o seu dardo, ganhando o jogo se o seu dardo **não atinge** a reta em nenhum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos do jogador A.
- ...??? ...
- Na verdade, a situação continua muito boa para o jogador B, certo ?

Conjuntos enumeráveis têm medida nula = probabilidade zero

- De fato, como conjuntos enumeráveis têm **medida nula** na reta – o que corresponde à probabilidade zero –, ainda é praticamente impossível (ainda que não teoricamente impossível . . .) que o dardo do jogador B atinja a reta em algum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos lançados por A.
- Lembramos aos estudantes que, para espaços amostrais infinitos, probabilidade zero **não é equivalente** à impossibilidade !!!

A probabilidade zero significa "probabilidade menor do que qualquer probabilidade positiva fixada" . . .

Conjuntos enumeráveis têm medida nula = probabilidade zero

- De fato, como conjuntos enumeráveis têm **medida nula** na reta – o que corresponde à probabilidade zero –, ainda é praticamente impossível (ainda que não teoricamente impossível . . .) que o dardo do jogador B atinja a reta em algum dos enumeráveis reais marcados pelos infinitos dardos lançados por A.
- Lembramos aos estudantes que, para espaços amostrais infinitos, probabilidade zero **não é equivalente** à impossibilidade !!!

  A probabilidade zero significa "probabilidade menor do que qualquer probabilidade positiva fixada" . . .

Conjuntos enumeráveis têm medida nula = probabilidade zero

- De fato, podemos, por exemplo, usar a **série geométrica** para mostrar que é possível cobrir os racionais, por exemplo, com intervalinhos cuja soma (infinita !) de seus comprimentos é menor do que qualquer comprimento previamente fixado.
- Então, tendo o jogador A jogado enumeráveis dardos na reta, ainda o jogador B tem probabilidade 1 de ganhar o jogo !!!

Conjuntos enumeráveis têm medida nula = probabilidade zero

- De fato, podemos, por exemplo, usar a **série geométrica** para mostrar que é possível cobrir os racionais, por exemplo, com intervalinhos cuja soma (infinita !) de seus comprimentos é menor do que qualquer comprimento previamente fixado.
- Então, tendo o jogador A jogado enumeráveis dardos na reta, ainda o jogador B tem probabilidade 1 de ganhar o jogo !!!

Vamos fazer com que os números reais joguem !!!

- Agora, vamos imaginar que dois números reais distintos x e y joguem ... E agora vamos fazer com que joguem um jogo que, devido à simetria da situação, terá uma grande possibilidade de "empate" !!!
- O número real x "joga" um subconjunto enumerável da reta real, digamos A_x, e o número real y também "jogará" em seguida, um subconjunto enumerável da reta, digamos B_y.
- Digamos que x ganha se ele **"escapa"** dos dardos de y, porém y **"não escapa"** dos dardos de x; y ganha se ocorre o contrário; e o jogo empata se ambos conseguem escapar dos dardos do outro.
- ... E agora ?
- Bem, também em termos probabilísticos, o jogo tem probabilidade 1 de acabar empatado !

Vamos fazer com que os números reais joguem !!!

- Agora, vamos imaginar que dois números reais distintos x e y joguem ... E agora vamos fazer com que joguem um jogo que, devido à simetria da situação, terá uma grande possibilidade de "empate" !!!
- O número real x "joga" um subconjunto enumerável da reta real, digamos A_x, e o número real y também "jogará" em seguida, um subconjunto enumerável da reta, digamos B_y.
- Digamos que x ganha se ele **"escapa"** dos dardos de y, porém y **"não escapa"** dos dardos de x; y ganha se ocorre o contrário; e o jogo empata se ambos conseguem escapar dos dardos do outro.
- ... E agora ?
- Bem, também em termos probabilísticos, o jogo tem probabilidade 1 de acabar empatado !

Vamos fazer com que os números reais joguem !!!

- Agora, vamos imaginar que dois números reais distintos x e y joguem . . . E agora vamos fazer com que joguem um jogo que, devido à simetria da situação, terá uma grande possibilidade de "empate" !!!
- O número real x "joga" um subconjunto enumerável da reta real, digamos A_x, e o número real y também "jogará" em seguida, um subconjunto enumerável da reta, digamos B_y.
- Digamos que x ganha se ele **"escapa"** dos dardos de y, porém y **"não escapa"** dos dardos de x; y ganha se ocorre o contrário; e o jogo empata se ambos conseguem escapar dos dardos do outro.
- . . . E agora ?
- Bem, também em termos probabilísticos, o jogo tem probabilidade 1 de acabar empatado !

Vamos fazer com que os números reais joguem !!!

- Agora, vamos imaginar que dois números reais distintos x e y joguem ... E agora vamos fazer com que joguem um jogo que, devido à simetria da situação, terá uma grande possibilidade de "empate" !!!
- O número real x "joga" um subconjunto enumerável da reta real, digamos A_x, e o número real y também "jogará" em seguida, um subconjunto enumerável da reta, digamos B_y.
- Digamos que x ganha se ele **"escapa"** dos dardos de y, porém y **"não escapa"** dos dardos de x; y ganha se ocorre o contrário; e o jogo empata se ambos conseguem escapar dos dardos do outro.
- ... E agora ?
- Bem, também em termos probabilísticos, o jogo tem probabilidade 1 de acabar empatado !

Vamos fazer com que os números reais joguem !!!

- Agora, vamos imaginar que dois números reais distintos x e y joguem ... E agora vamos fazer com que joguem um jogo que, devido à simetria da situação, terá uma grande possibilidade de "empate" !!!
- O número real x "joga" um subconjunto enumerável da reta real, digamos A_x, e o número real y também "jogará" em seguida, um subconjunto enumerável da reta, digamos B_y.
- Digamos que x ganha se ele **"escapa"** dos dardos de y, porém y **"não escapa"** dos dardos de x; y ganha se ocorre o contrário; e o jogo empata se ambos conseguem escapar dos dardos do outro.
- ... E agora ?
- Bem, também em termos probabilísticos, o jogo tem probabilidade 1 de acabar empatado !

Vamos fazer agora com que **todos** os números reais joguem !!!

- Agora, ao invés de deixarmos apenas 2 jogadores se divertirem... **Vamos deixar todos os números reais jogarem !!!**
- Ou seja, consideremos uma função f que associa a cada número real x um subconjunto enumerável da reta, $f(x)$ – formalmente, estamos fazendo uma

$$f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}.$$

- $[\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ denota a família de todos os subconjuntos enumeráveis (finitos ou infinitos) da reta real.

  Tal conjunto tem a mesma cardinalidade da família de todas as funções dos naturais nos naturais, o que coincide com a cardinalidade do contínuo, $2^{\aleph_0}$.

Vamos fazer agora com que **todos** os números reais joguem !!!

- Agora, ao invés de deixarmos apenas 2 jogadores se divertirem... **Vamos deixar todos os números reais jogarem !!!**
- Ou seja, consideremos uma função f que associa a cada número real x um subconjunto enumerável da reta, $f(x)$ – formalmente, estamos fazendo uma

$$f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}.$$

- $[\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ denota a família de todos os subconjuntos enumeráveis (finitos ou infinitos) da reta real.

  Tal conjunto tem a mesma cardinalidade da família de todas as funções dos naturais nos naturais, o que coincide com a cardinalidade do contínuo, $2^{\aleph_0}$.

Vamos fazer agora com que **todos** os números reais joguem !!!

- Agora, ao invés de deixarmos apenas 2 jogadores se divertirem... **Vamos deixar todos os números reais jogarem !!!**
- Ou seja, consideremos uma função f que associa a cada número real x um subconjunto enumerável da reta, $f(x)$ – formalmente, estamos fazendo uma

$$f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}.$$

- $[\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ denota a família de todos os subconjuntos enumeráveis (finitos ou infinitos) da reta real.

  Tal conjunto tem a mesma cardinalidade da família de todas as funções dos naturais nos naturais, o que coincide com a cardinalidade do contínuo, $2^{\aleph_0}$.

Vamos fazer agora com que **todos** os números reais joguem !!!

- Nestas condições, dados reais x e y **fixados**, com **probabilidade 1** teremos que x não pertença ao subconjunto enumerável da reta dado por $f(y)$, enquanto que, ao mesmo tempo, y não pertença ao subconjunto enumerável da reta dado por $f(x)$!!!
- No entanto, agora com que todos os números reais estão jogando, é mais razoável supor que **todos os números reais jogaram ao mesmo tempo . . .** – ou seja, não fará mais diferença "quem jogou em primeiro e quem jogou em segundo".
- Observem que este é o momento em que começamos a introduzir a idéia de **simetria**. . .

Vamos fazer agora com que **todos** os números reais joguem !!!

- Nestas condições, dados reais x e y **fixados**, com **probabilidade 1** teremos que x não pertença ao subconjunto enumerável da reta dado por $f(y)$, enquanto que, ao mesmo tempo, y não pertença ao subconjunto enumerável da reta dado por $f(x)$!!!
- No entanto, agora com que todos os números reais estão jogando, é mais razoável supor que **todos os números reais jogaram ao mesmo tempo . . .** – ou seja, não fará mais diferença “quem jogou em primeiro e quem jogou em segundo”.
- Observem que este é o momento em que começamos a introduzir a idéia de **simetria**. . .

Vamos fazer agora com que **todos** os números reais joguem !!!

- Nestas condições, dados reais x e y **fixados**, com **probabilidade 1** teremos que x não pertença ao subconjunto enumerável da reta dado por $f(y)$, enquanto que, ao mesmo tempo, y não pertença ao subconjunto enumerável da reta dado por $f(x)$!!!
- No entanto, agora com que todos os números reais estão jogando, é mais razoável supor que **todos os números reais jogaram ao mesmo tempo ...** – ou seja, não fará mais diferença "quem jogou em primeiro e quem jogou em segundo".
- Observem que este é o momento em que começamos a introduzir a idéia de **simetria**...

A situação é simétrica – certo ?

- Ou seja, estamos praticamente convencidos de que **muito provavelmente** seja verdade que, para **quaisquer** x, y distintos da reta, teremos $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$.
- Com mais razão ainda, parece **absolutamente auto-evidente** que algo que muito provavelmente acontece **todas as vezes**, deverá acontecer **pelo menos uma vez !!!** Ou seja, deveria existir **pelo menos um par de reais** x e y para os quais o jogo **terminaria empatado** para eles...
- Ou seja, poderíamos nos sentir tentados a aceitar todo o argumento probabilístico dado e assumir a validade do seguinte **Axioma de Simetria**:

O Axioma de Simetria de Freiling

$$(\forall f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0})\,(\exists x\, \exists y)\,[\, y \notin f(x) \ \wedge\ x \notin f(y)\,]$$

A situação é simétrica – certo ?

- Ou seja, estamos praticamente convencidos de que **muito provavelmente** seja verdade que, para **quaisquer** x, y distintos da reta, teremos $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$.
- Com mais razão ainda, parece **absolutamente auto-evidente** que algo que muito provavelmente acontece **todas as vezes**, deverá acontecer **pelo menos uma vez !!!** Ou seja, deveria existir **pelo menos um par de reais** x e y para os quais o jogo **terminaria empatado** para eles...
- Ou seja, poderíamos nos sentir tentados a aceitar todo o argumento probabilístico dado e assumir a validade do seguinte **Axioma de Simetria**:

O Axioma de Simetria de Freiling

$$(\forall f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0})\,(\exists x\, \exists y)\,[\, y \notin f(x) \;\wedge\; x \notin f(y)\,]$$

A situação é simétrica – certo ?

- Ou seja, estamos praticamente convencidos de que **muito provavelmente** seja verdade que, para **quaisquer** x, y distintos da reta, teremos $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$.
- Com mais razão ainda, parece **absolutamente auto-evidente** que algo que muito provavelmente acontece **todas as vezes**, deverá acontecer **pelo menos uma vez !!!** Ou seja, deveria existir **pelo menos um par de reais** x e y para os quais o jogo **terminaria empatado** para eles...
- Ou seja, poderíamos nos sentir tentados a aceitar todo o argumento probabilístico dado e assumir a validade do seguinte **Axioma de Simetria**:

O Axioma de Simetria de Freiling

$$(\forall f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0})\, (\exists x\, \exists y)\, [\ y \notin f(x)\ \wedge\ x \notin f(y)\ ]$$

Pois é, parecia razoável, né...

- O nobre colega que se sente convencido de que o Axioma de Simetria de Freiling **deve ser verdadeiro...**
- Pois saiba que você está, no momento, convencido de que a **Hipótese de Contínuo é falsa !!!**
- O resultado impressionante é o seguinte:

Teorema (argumento original de Sierpiński)

O Axioma de Simetria de Freiling é equivalente à negação de **CH**.

- Para Freiling, o fato de que, normalmente, qualquer matemático aceite intuitivamente a validade do seu axioma de simetria é **uma evidência empírica da não validade da Hipótese do Contínuo**.

Pois é, parecia razoável, né...

- O nobre colega que se sente convencido de que o Axioma de Simetria de Freiling **deve ser verdadeiro...**
- Pois saiba que você está, no momento, convencido de que a **Hipótese de Contínuo é falsa !!!**
- O resultado impressionante é o seguinte:

Teorema (argumento original de Sierpiński)

O Axioma de Simetria de Freiling é equivalente à negação de **CH**.

- Para Freiling, o fato de que, normalmente, qualquer matemático aceite intuitivamente a validade do seu axioma de simetria é **uma evidência empírica da não validade da Hipótese do Contínuo**.

Pois é, parecia razoável, né...

- O nobre colega que se sente convencido de que o Axioma de Simetria de Freiling **deve ser verdadeiro...**
- Pois saiba que você está, no momento, convencido de que a **Hipótese de Contínuo é falsa !!!**
- O resultado impressionante é o seguinte:

Teorema (argumento original de Sierpiński)

O Axioma de Simetria de Freiling é equivalente à negação de **CH**.

- Para Freiling, o fato de que, normalmente, qualquer matemático aceite intuitivamente a validade do seu axioma de simetria é **uma evidência empírica da não validade da Hipótese do Contínuo**.

Pois é, parecia razoável, né...

- O nobre colega que se sente convencido de que o Axioma de Simetria de Freiling **deve ser verdadeiro...**
- Pois saiba que você está, no momento, convencido de que a **Hipótese de Contínuo é falsa !!!**
- O resultado impressionante é o seguinte:

Teorema (argumento original de Sierpiński)

O Axioma de Simetria de Freiling é equivalente à negação de **CH**.

- Para Freiling, o fato de que, normalmente, qualquer matemático aceite intuitivamente a validade do seu axioma de simetria é **uma evidência empírica da não validade da Hipótese do Contínuo**.

Muita discussão foi despertada por este artigo de Freiling...

Nos anos que se seguiram à publicação do artigo, houve muita discussão e nenhum consenso, quer na comunidade de matemáticos teoristas de conjuntos, quer na comunidade de filósofos da matemática !!!

Na verdade, o artigo apresentava ainda **outros** axiomas de simetria.

Por exemplo: o argumento probabilístico que acabamos de apresentar considera um subconjunto **enumerável** da reta como sendo algo de probabilidade zero.

"O caso contra o Axioma da Escolha"

Se um argumento análogo for realizado considerando que **qualquer cardinalidade menor do que o contínuo** pode ser considerada desprezível, ou seja, considerando a asserção

$$(\forall f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}})\,(\exists x\,\exists y)\,[\; y \notin f(x) \;\wedge\; x \notin f(y)\;]$$

então muito facilmente se demonstra que essa asserção análoga **implica na negação do Axioma da Escolha !!!**

. . . No que segue, vamos apresentar a demonstração para a equivalência entre o Axioma de Simetria e a negação da Hipótese do Contínuo.

Axioma de Simetria $\Rightarrow \neg$**CH**

- A prova é por contraposição: mostremos que **CH** implica a negação do Axioma de Simetria.
- Pois bem: assumindo **CH**, podemos escrever

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

- Definimos $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ pondo, simplesmente,

$$f(r_\alpha) = \{r_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \text{ para todo } \alpha < \omega_1.$$

Note que a função está bem definida, já que cada α é um ordinal enumerável !!!

Axioma de Simetria $\Rightarrow \neg$CH

- A prova é por contraposição: mostremos que **CH** implica a negação do Axioma de Simetria.
- Pois bem: assumindo **CH**, podemos escrever

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

- Definimos $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ pondo, simplesmente,

$$f(r_\alpha) = \{r_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \text{ para todo } \alpha < \omega_1.$$

Note que a função está bem definida, já que cada α é um ordinal enumerável !!!

Axioma de Simetria $\Rightarrow \neg$**CH**

- A prova é por contraposição: mostremos que **CH** implica a negação do Axioma de Simetria.
- Pois bem: assumindo **CH**, podemos escrever

$$\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

- Definimos $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ pondo, simplesmente,

$$f(r_\alpha) = \{r_\beta : \beta \leqslant \alpha\} \text{ para todo } \alpha < \omega_1.$$

  Note que a função está bem definida, já que cada α é um ordinal enumerável !!!

Axioma de Simetria $\Rightarrow \neg$CH

- Agora, evidentemente o Axioma de Simetria não pode ser satisfeito ! Se x e y são reais distintos arbitrários, então existem ordinais distintos α e β tais que $x = r_\alpha$ e $y = r_\beta$, satisfazendo ainda, sem perda de generalidade, $\alpha < \beta$. Nessas condições tem-se $x \in f(y)$!!!
- Portanto, não vale o Axioma de Simetria.

Note o colega que, assumindo **AC**, então existe uma boa-ordenação da reta, e portanto podemos escrever $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Assim, uma $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$ dada por $f(r_\alpha) = \{r_\beta : \beta \leqslant \alpha\}$ para todo $\alpha < \mathfrak{c}$ nos daria o resultado que acabamos de comentar – i.e., se considerarmos uma versão do Axioma de Simetria com "menor do que $\mathfrak{c}$" fazendo o papel de "enumerável", então tal axioma implicaria a negação do Axioma da Escolha !!!

Axioma de Simetria $\Rightarrow \neg$**CH**

- Agora, evidentemente o Axioma de Simetria não pode ser satisfeito ! Se x e y são reais distintos arbitrários, então existem ordinais distintos α e β tais que $x = r_\alpha$ e $y = r_\beta$, satisfazendo ainda, sem perda de generalidade, $\alpha < \beta$. Nessas condições tem-se $x \in f(y)$!!!
- Portanto, não vale o Axioma de Simetria.

Note o colega que, assumindo **AC**, então existe uma boa-ordenação da reta, e portanto podemos escrever $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$. Assim, uma $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{<\mathfrak{c}}$ dada por $f(r_\alpha) = \{r_\beta : \beta \leqslant \alpha\}$ para todo $\alpha < \mathfrak{c}$ nos daria o resultado que acabamos de comentar – i.e., se considerarmos uma versão do Axioma de Simetria com "menor do que $\mathfrak{c}$" fazendo o papel de "enumerável", então tal axioma implicaria a negação do Axioma da Escolha !!!

$\neg$CH $\Rightarrow$ Axioma de Simetria

- Assumamos $\neg CH$, i.e., que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Nessas condições, fixemos um subconjunto (em nosso caso, necessariamente próprio) da reta com cardinalidade $\aleph_1$, digamos U ($|U| = \aleph_1$).
- Fixe $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ **qualquer** e considere o conjunto
$$A = \bigcup_{x \in U} f(x).$$
Sendo uma união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis, A tem cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ – que supomos ser menor do que $\mathfrak{c}$!!!
- Assim, existe um número real y que **não pertence a** A – assim, $y \notin f(x)$ para todo $x \in U$.
- Porém, note que $f(y)$ é enumerável, enquanto que U é não-enumerável !!! Assim, existe $x \in U$ tal que $x \notin f(y)$.
- Para tais x e y, tem-se simultaneamente $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ – portanto, vale o Axioma de Simetria.

$\neg$CH $\Rightarrow$ Axioma de Simetria

- Assumamos $\neg CH$, i.e., que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Nessas condições, fixemos um subconjunto (em nosso caso, necessariamente próprio) da reta com cardinalidade $\aleph_1$, digamos U ($|U| = \aleph_1$).
- Fixe $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ **qualquer** e considere o conjunto
$$A = \bigcup_{x \in U} f(x).$$
Sendo uma união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis, A tem cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ – que supomos ser menor do que $\mathfrak{c}$!!!
- Assim, existe um número real y que **não pertence a** A – assim, $y \notin f(x)$ para todo $x \in U$.
- Porém, note que $f(y)$ é enumerável, enquanto que U é não-enumerável !!! Assim, existe $x \in U$ tal que $x \notin f(y)$.
- Para tais x e y, tem-se simultaneamente $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ – portanto, vale o Axioma de Simetria.

$\neg$CH $\Rightarrow$ Axioma de Simetria

- Assumamos $\neg CH$, i.e., que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Nessas condições, fixemos um subconjunto (em nosso caso, necessariamente próprio) da reta com cardinalidade $\aleph_1$, digamos U ($|U| = \aleph_1$).
- Fixe $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ **qualquer** e considere o conjunto
$$A = \bigcup_{x \in U} f(x).$$
Sendo uma união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis, A tem cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ – que supomos ser menor do que $\mathfrak{c}$!!!
- Assim, existe um número real y que **não pertence a** A – assim, $y \notin f(x)$ para todo $x \in U$.
- Porém, note que $f(y)$ é enumerável, enquanto que U é não-enumerável !!! Assim, existe $x \in U$ tal que $x \notin f(y)$.
- Para tais x e y, tem-se simultaneamente $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ – portanto, vale o Axioma de Simetria.

$\neg$CH $\Rightarrow$ Axioma de Simetria

- Assumamos $\neg CH$, i.e., que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Nessas condições, fixemos um subconjunto (em nosso caso, necessariamente próprio) da reta com cardinalidade $\aleph_1$, digamos U ($|U| = \aleph_1$).
- Fixe $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant\aleph_0}$ **qualquer** e considere o conjunto
$$A = \bigcup_{x \in U} f(x).$$
Sendo uma união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis, A tem cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ – que supomos ser menor do que $\mathfrak{c}$!!!
- Assim, existe um número real y que **não pertence a** A – assim, $y \notin f(x)$ para todo $x \in U$.
- Porém, note que $f(y)$ é enumerável, enquanto que U é não-enumerável !!! Assim, existe $x \in U$ tal que $x \notin f(y)$.
- Para tais x e y, tem-se simultaneamente $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ – portanto, vale o Axioma de Simetria.

$\neg$**CH** $\Rightarrow$ Axioma de Simetria

- Assumamos $\neg CH$, i.e., que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_1$. Nessas condições, fixemos um subconjunto (em nosso caso, necessariamente próprio) da reta com cardinalidade $\aleph_1$, digamos U ($|U| = \aleph_1$).
- Fixe $f : \mathbb{R} \to [\mathbb{R}]^{\leqslant \aleph_0}$ **qualquer** e considere o conjunto
$$A = \bigcup_{x \in U} f(x).$$
Sendo uma união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis, A tem cardinalidade menor ou igual a $\aleph_1$ – que supomos ser menor do que $\mathfrak{c}$!!!
- Assim, existe um número real y que **não pertence a** A – assim, $y \notin f(x)$ para todo $x \in U$.
- Porém, note que $f(y)$ é enumerável, enquanto que U é não-enumerável !!! Assim, existe $x \in U$ tal que $x \notin f(y)$.
- Para tais x e y, tem-se simultaneamente $x \notin f(y)$ e $y \notin f(x)$ – portanto, vale o Axioma de Simetria.

A Família das Funções Inteiras de Erdös

Em 1964, Erdös considerou a seguinte questão, que tinha acabado de ser proposta por Wetzel, no contexto da Análise Complexa:

A questão de Wetzel

Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções inteiras (i.e., analíticas em todo o plano complexo) satisfazendo a seguinte condição:

(*) Para todo complexo $z \in \mathbb{C}$, o conjunto de valores $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ é enumerável.

Nessas condições, a própria família $\mathcal{F}$ deve ser, necessariamente, enumerável ?

Erdös mostrou que a resposta depende de **CH** !!!

O que Erdös fez foi demonstrar, conforme ele mesmo escreveu em seu artigo **An interpolation problem associated with the Continuum Hypothesis**, que "...a resposta para a pergunta de Wetzel depende da Hipótese do Contínuo".

Um Teorema de Erdös

Existe uma família não-enumerável $\mathcal{F}$ de funções inteiras satisfazendo a propriedade (*) se, e somente se, vale a Hipótese do Contínuo.

Como o paper de Erdös foi publicado em 1964, esta pesquisa ocorreu mais ou menos na mesma época do estabelecimento da independência de **CH** com relação aos axiomas de **ZFC** !!! Como Erdös mesmo observou ao final de seu paper: **"A recente prova de Paul Cohen para a independência da Hipótese do Contínuo deu a este problema algum interesse adicional".**

Existe família $\mathcal{F}$ não-enumerável com (*) $\Rightarrow$ **CH**

Vamos iniciar as demonstrações da equivalência de Erdös.

A primeira demonstração é feita por contraposição:

Mostraremos que: se **CH** não vale, então **nenhuma** família $\mathcal{F}$ que seja não-enumerável pode satisfazer (*).

Pois bem: suponhamos então que $\mathfrak{c} > \aleph_1$.

Para deduzir a partir daí que não existe família não-enumerável de funções inteiras satisfazendo (*), é suficiente concluir que não existe uma tal família de tamanho $\aleph_1$ (**por quê ?**).

Existe família $\mathcal{F}$ não-enumerável com (*) $\Rightarrow$ **CH**

Seja então $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ uma família arbitrária de $\aleph_1$ funções inteiras distintas.

Vamos necessitar do seguinte resultado de funções analíticas:

Folklore de funções analíticas

Os zeros de uma função inteira são isolados – i.e., se f é uma função inteira não-identicamente nula e a é um número complexo tal que $f(a) = 0$, então existe uma vizinhança de a no plano complexo na qual a função não se anula.

Vamos relembrar um ou dois resultados de funções analíticas que justifiquem esse fato.

Revival de funções analíticas

O fato de "folklore" do slide anterior é justificado pelos seguintes resultados:

Teorema 3.7, pág.78 do livro do Conway de Análise Complexa

Seja G um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. São equivalentes:

1. f é identicamente nula;
2. Existe um ponto $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geqslant 0$;
3. $\{z \in G : f(z) = 0\}$ tem ponto de acumulação em G.

O teorema anterior é provado a partir de uma análise simples da expansão da f em série de potências.

Corolário 3.8 do Conway – "Teorema da Identidade para Funções Analíticas"

Se f e g são analíticas em uma região, então $f = g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em G.

Revival de funções analíticas

O fato de "folklore" do slide anterior é justificado pelos seguintes resultados:

Teorema 3.7, pág.78 do livro do Conway de Análise Complexa

Seja G um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. São equivalentes:

1. f é identicamente nula;
2. Existe um ponto $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geqslant 0$;
3. $\{z \in G : f(z) = 0\}$ tem ponto de acumulação em G.

O teorema anterior é provado a partir de uma análise simples da expansão da f em série de potências.

Corolário 3.8 do Conway – "Teorema da Identidade para Funções Analíticas"

Se f e g são analíticas em uma região, então $f = g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em G.

Revival de funções analíticas

O fato de "folklore" do slide anterior é justificado pelos seguintes resultados:

Teorema 3.7, pág.78 do livro do Conway de Análise Complexa

Seja G um aberto conexo de $\mathbb{C}$ e seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função analítica. São equivalentes:

1. f é identicamente nula;
2. Existe um ponto $a \in G$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \geqslant 0$;
3. $\{z \in G : f(z) = 0\}$ tem ponto de acumulação em G.

O teorema anterior é provado a partir de uma análise simples da expansão da f em série de potências.

Corolário 3.8 do Conway – "Teorema da Identidade para Funções Analíticas"

Se f e g são analíticas em uma região, então $f = g$ se, e somente se, o conjunto $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ tem um ponto de acumulação em G.

Voltando à demonstração...

Assim, para nossa família $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de funções inteiras distintas, temos que, se fixarmos α, β distintos em ω_1, o conjunto

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$$

não pode possuir pontos de acumulação, já que $f_\alpha \neq f_\beta$ – i.e., trata-se de um subconjunto **discreto** do plano complexo.

... Agora, vamos precisar de um fato de topologia !!!

Um fato de Topologia Conjuntística

O seguinte fato é bastante conhecido entre os **topológos conjuntistas** – pesquisadores que, como eu, aplicam a Teoria dos Conjuntos em Topologia Geral !!!

Fato

Se X é um espaço topológico de base enumerável, então todo subconjunto discreto de X é, no máximo, enumerável.

De fato: se $A \subseteq X$ é discreto, para cada $a \in A$ existe um aberto U_a satisfazendo $U_a \cap A = \{a\}$. Se fixarmos $\mathcal{B}$ uma base enumerável para X, podemos fixar $B_a \in \mathcal{B}$ tal que $a \in B_a \subseteq U_a$ para cada $a \in A$. Nestas condições, a aplicação $a \mapsto B_a$ é claramente (?) uma injeção de A em $\mathcal{B}$, o que mostra que A é enumerável.

Voltando (outra vez) à demonstração...

Logo, por ser um conjunto sem pontos de acumulação em um espaço métrico **separável** (i.e., com denso enumerável) – logo, de base enumerável –, cada um dos conjuntos

$$S(\alpha, \beta) = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$$

é necessariamente um subconjunto enumerável do plano complexo.

Segue que

$$S = \bigcup_{\alpha, \beta \in \omega_1} S_{\alpha, \beta}$$

é um subconjunto de $\mathbb{C}$ de tamanho menor ou igual a $\aleph_1$ – por ser uma união de $\aleph_1$ conjuntos enumeráveis !!!

Finalizando a demonstração desta implicação

Como assumimos logo no início que $\mathfrak{c} > \aleph_1$, e como $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = \mathfrak{c}\ldots$ Segue que existe um número complexo, digamos um complexo a, **que não é pertencente a S !!!**

Mostraremos agora que, para esse complexo a, o conjunto $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ é não-enumerável – donde $\mathcal{F}$ não satisfaz (*), conforme desejado.

Afirmação: Se $f, g \in \mathcal{F}$, então $f(a) \neq g(a)$.

Note que se mostrarmos a afirmação então estamos feitos: sendo $\mathcal{F}$ não-enumerável, segue da afirmação que o conjunto de valores em questão é não-enumerável.

Finalizando a demonstração desta implicação

Pois bem: sejam $f, g \in \mathcal{F}$. Pela nossa enumeração inicial, existem $\xi, \zeta < \omega_1$ tais que

$$f = f_\xi,\ g = f_\zeta.$$

Se tivéssemos então $f(a) = f_\xi(a) = f_\zeta(a) = g(a)$, teríamos

$$a \in S_{\xi,\zeta} \subseteq S$$

– o que é uma contradição, pois nosso complexo a foi tomado **não pertencente a** S **!**

Portanto, vale a afirmação – e esta implicação fica demonstrada.

CH $\Rightarrow$ Existe família $\mathcal{F}$ não-enumerável com (*)

Agora, mostraremos a parte **realmente trabalhosa** – mostrar que se assumirmos **CH**, então é possível construir uma família $\mathcal{F}$ que é não-enumerável e que satisfaz a condição (*).

Sob **CH**, teremos $\mathfrak{c} = \aleph_1$ e podemos escrever $\mathbb{C} = \{c_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Sempre podemos também considerar o denso enumerável de $\mathbb{C}$ dado por $D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$.

A construção da família $\mathcal{F}$ será inteiramente baseada na afirmação do próximo slide !

A afirmação principal

(Lembrar que D é o denso enumerável dado por $D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i \ldots$)

Nosso "desafio" combinatório é comprovar a seguinte afirmação:

A afirmação principal

É possível construir uma família $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de funções distintas, todas inteiras, satisfazendo, para todo $\alpha < \omega_1$ fixado,

$$\{f_\alpha(c_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq D$$

...Por quê essa afirmação já nos basta ???

A afirmação principal nos basta...

Suponha que $\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tenha sido construída de modo que, efetivamente, para todo $\alpha < \omega_1$ tenhamos

$$\{f_\alpha(c_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq D$$

Para verificarmos que tal $\mathcal{F}$ realmente satisfaz (*), temos que checar se, para todo z complexo, tem-se que o conjunto de valores $\{f_\alpha(z) : \alpha < \omega_1\}$ é enumerável.

De fato !!! Seja z um complexo arbitrário fixado. Existe então $\beta < \omega_1$ (**também fixado !**) tal que $z = c_\beta$. Se $\beta < \alpha$ – o que constitui **a maioria** dos α's –, então, como supusemos que a construção foi levada a cabo, teremos $f_\alpha(c_\beta) \in D$.

A afirmação principal nos basta...

Já no caso de $\alpha \leqslant \beta$, então teremos que o conjunto $\{f_\alpha(c_\beta) : \alpha \leqslant \beta\}$ é um conjunto de cardinalidade menor ou igual a $|\beta|$, sendo portanto um conjunto enumerável.

...Em resumo, o que ocorre é que se $z = c_\beta$ tem-se que

$$\begin{aligned}\{f_\alpha(c_\beta) : \alpha < \omega_1\} &= \{f_\alpha(c_\beta) : \beta < \alpha < \omega_1\} \cup \{f_\alpha(c_\beta) : \alpha \leqslant \beta\}\\ &\subseteq D \cup \{f_\alpha(c_\beta) : \alpha \leqslant \beta\}.\end{aligned}$$

E segue que o nosso conjunto de interesse é enumerável, por estar contido na união de dois conjuntos enumeráveis !!!

Vamos demonstrar a afirmação principal !!!

A afirmação principal será demonstrada a partir de um argumento de indução transfinita, de comprimento ω_1.

Os resultados básicos de funções analíticas que serão necessários para justificar que as funções de nossa família $\mathcal{F}$ são, de fato, inteiras, serão os do seguinte slide:

Revival de funções analíticas, Parte 2

Proposição 1.10, pág.144 do livro de Conway

A convergência no espaço das funções contínuas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$ é a convergência uniforme nos compactos.

Teorema 2.1, pág. 151 do livro do Conway

Se (f_n) é uma sequência de funções inteiras que converge para f, então f é uma função inteira.

Teste M de Weierstrass, pág. 29 do livro do Conway

Sejam $\mu_n : X \to \mathbb{C}$ uma sequência de funções satisfazendo $|\mu_n(x)| \leqslant M_n$ para todo $x \in X$, onde (M_n) é uma sequência de constantes reais não-negativas. Suponha que as constantes satisfaçam $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$. Nestas condições, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$ é uniformemente convergente em cada ponto $x \in X$.

Revival de funções analíticas, Parte 2

Segue que se conseguirmos escrever as nossas funções como **somas uniformemente convergentes em compactos de funções inteiras**, então essas funções serão inteiras.

Vamos precisar também de alguns fatos um pouco menos imediatos sobre funções analíticas. . .

Esses fatos não foram explicitados por Erdös no seu artigo, mas apresentamos aqui as justificativas para esses fatos ali utilizados.

Alguns fatos mais sutis...

Fato um pouco mais sutil 1

Para cada $a, b \in \mathbb{C}$ fixados, com $a \neq 0$, $f(z) = az + b$ é um homeomorfismo de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$.

Como homeomorfismos são, em particular, homeomorfismos locais, para cada $w \in \mathbb{C}$ fixado vale que vizinhanças de w são mapeadas homeomorficamente em vizinhanças de $f(w)$.

Fato um pouco mais sutil 2

Fixe $\varepsilon > 0$ e $z \in \mathbb{C}$ que satisfaça $|z| < \frac{\varepsilon}{2}$. Então, z possui uma vizinhança na qual todos os pontos têm módulo menor do que ε.

...Este segundo fato não tem nada de profundo: basta considerar a bola aberta $B(z, \frac{\varepsilon}{4})$ e aplicar a desigualdade triangular... O interessante é o que ocorre quando juntamos os dois fatos um pouco mais sutis acima.

Escolhendo pontos de modo que o resultado de uma certa "conta" pertença a um denso pré-fixado ...

Fato um pouco mais sutil 3

Considere fixados $a, b \in \mathbb{C}$ e $\varepsilon > 0$, com $a \neq 0$. Nessas condições, é possível encontrar um número complexo w satisfazendo $|w| < \varepsilon$ e que seja tal que $aw + b$ pertença ao denso $D = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}i$.

De fato: considere como "chute inicial" **qualquer** número complexo w que tenha módulo menor do que $\frac{\varepsilon}{2}$.

Se você "ganhou na loteria" e já se tem que $aw + b$ é um elemento do denso D, ótimo ! Seu w já funcionou.

Escolhendo pontos de modo que o resultado de uma certa "conta" pertença a um denso pré-fixado ...

Caso contrário, considere a vizinhança de w dado pelo "Fato um pouco mais sutil 2" – i.e., uma vizinhança formada por pontos de módulo menor do que ε. Ora, pelo "Fato um pouco mais sutil 1", essa vizinhança é mapeada homeomorficamente por $f(z) = az + b$ em uma vizinhança de $aw + b$.

Nessa vizinhança de $aw + b$, **com certeza existem pontos do denso D !!!**

Portanto, basta então procurar w' na vizinhança de w que seja tal que $f(w')$ pertence ao denso. Seu w' faz o serviço desejado !!!

Note ainda que como "um aberto menos um ponto também é um aberto" também poderíamos, caso necessário, excluir a possibilidade de $aw + b$ ter valor igual a um certo complexo fixado, digamos c.

Vamos – finalmente !!! – realizar a construção !!!

Construiremos a família de funções inteiras $\{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ nas condições da "Afirmação principal" – i.e., $\{f_\alpha(c_\beta) : \beta < \alpha\} \subseteq D$ para todo $\alpha < \omega_1$ – por indução transfinita.

Podemos tomar como sendo f_0 a função constante de valor igual a zero (ou com qualquer valor constante que pertença ao denso D).

Assuma agora que $0 < \alpha < \omega_1$ e que $\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ estejam construídas satisfatoriamente.

Usando que α é um ordinal enumerável, enumeramos $\{f_\beta : \beta < \alpha\}$ e $\{c_\beta : \beta < \alpha\}$ da seguinte forma:

$$\{f_\beta : \beta < \alpha\} = \{g_n : n < \omega\}, \{c_\beta : \beta < \alpha\} = \{d_n : n < \omega\}.$$

Continuando com a construção

Temos agora que construir uma função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que seja tal que

1. g é inteira;
2. $g \neq g_n$ para todo $n < \omega$ (i.e., g é distinta das anteriormente construídas);
3. $g(d_n) \in D$ para todo $n < \omega$.

Qualquer função g satisfazendo (1), (2) e (3) acima pode ser considerada como sendo f_α !!!

Para garantir (2), basta checar a seguinte condição (2)', dada por: $g(d_n) \neq g_n(d_n)$ para todo $n < \omega$ (ou seja, garantimos que a função é diferente das outras por um **argumento diagonal !!!**).

Continuando com a construção

Temos agora que construir uma função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que seja tal que

1. g é inteira;
2. $g \neq g_n$ para todo $n < \omega$ (i.e., g é distinta das anteriormente construídas);
3. $g(d_n) \in D$ para todo $n < \omega$.

Qualquer função g satisfazendo (1), (2) e (3) acima pode ser considerada como sendo f_α !!!

Para garantir (2), basta checar a seguinte condição (2)', dada por: $g(d_n) \neq g_n(d_n)$ para todo $n < \omega$ (ou seja, garantimos que a função é diferente das outras por um **argumento diagonal !!!**).

Continuando com a construção

Temos agora que construir uma função $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que seja tal que

1. g é inteira;
2. $g \neq g_n$ para todo $n < \omega$ (i.e., g é distinta das anteriormente construídas);
3. $g(d_n) \in D$ para todo $n < \omega$.

Qualquer função g satisfazendo (1), (2) e (3) acima pode ser considerada como sendo f_α !!!

Para garantir (2), basta checar a seguinte condição (2)', dada por: $g(d_n) \neq g_n(d_n)$ para todo $n < \omega$ (ou seja, garantimos que a função é diferente das outras por um **argumento diagonal !!!**).

Continuando com a construção

A função g será da forma

$$g(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(z - d_0) + \varepsilon_2(z - d_0)(z - d_1) + \varepsilon_3(z - d_0)(z - d_1)(z - d_2) + \dots$$

Agora, dentro de nossa indução transfinita, faremos uma **indução finita** !!!

Indução em n

Para cada $n \geqslant 0$, é possível obter um coeficiente ε_n de modo que as condições desejadas (1), (2)' e (3) sejam satisfeitas.

Para $n = 0$, tomamos $\varepsilon_0 \in D$ suficientemente pequeno e tal que $\varepsilon_0 \neq g_0(0)$.

Teremos $g(d_0) = \varepsilon_0 \neq g_0(0)$. Note que os valores de ε_k para $\geqslant 1$ **não influem no valor de $g(d_0)$!!!**

Continuando com a construção

Obviamente, a analiticidade da g – que é a condição (1) – só pode ser verificada posteriormente, com todos os coeficientes ε_n construídos...

Agora, suponha que os coeficientes $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ estejam construídos.

Considere c como sendo o número complexo $c = g_n(n)$.

Usando o "Fato um pouco mais sutil 3" – bem como o comentário imediatamente subsequente –, obtemos ε_n suficientemente pequeno e de modo que o número complexo

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1(d_n - d_0) + \varepsilon_2(d_n - d_0)(d_n - d_1) + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon_n(d_n - d_0)(d_n - d_1)\ldots(d_n - d_{n-1})$$

satisfaça, simultaneamente, (i) ser um elemento de D; (ii) ser distinto de c.

Continuando com a construção

De fato: estamos usando, na linguagem dos "fatos um pouco menos sutis", $f(z) = az + b$ com

$$a = (d_n - d_0)(d_n - d_1)(d_n - d_2) \dots (d_n - d_{n-1}); \text{ e}$$

$$b = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(z - d_0) + \varepsilon_2(d_n - d_0)(d_n - d_1) + \dots \\ \dots + \varepsilon_{n-1}(d_n - d_0)(d_n - d_1) \dots (d_n - d_{n-2})$$

Note agora que $g(d_n)$ tem como valor exatamente o número complexo construído, i.e.,

$$g(d_n) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(d_n - d_0) + \varepsilon_2(d_n - d_0)(d_n - d_1) + \dots \\ \dots + \varepsilon_n(d_n - d_0)(d_n - d_1) \dots (d_n - d_{n-1})$$

pois, analogamente ao caso anterior, o valor de $g(d_n)$ não depende de ε_k para $k \geqslant n + 1$.

... Falta dizer o que é "suficientemente pequeno"!!!

Assim, g satisfaz, até agora, as condições (2)' e (3).

Falta agora dizer o que significa o "suficientemente pequeno" que citamos – i.e., garantir que os ε_n podem ser realmente tomados de modo que, ao final, a função g construída seja inteira.

Isso é o que faremos no que segue:

Quão suficientemente pequeno ε_n necessita ser ...

Para que a função

$$g(z) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(z - d_0) + \varepsilon_2(z - d_0)(z - d_1) + \varepsilon_3(z - d_0)(z - d_1)(z - d_2) + \ldots$$

seja inteira, é suficiente garantir que, a cada $n < \omega$, tenhamos

$$|\varepsilon_n| < \frac{1}{(2n)^n(1+|d_0|)(1+|d_1|)\ldots(1+|d_{n-1}|)}$$

Verificação da analiticidade da g

De fato: pela segunda parte do nosso revival de funções analíticas, basta garantir que tenhamos convergência uniforme da série (cujo limite é g) nos compactos !

Pois bem: fixemos $R > 0$. Afirmamos que a série converge uniformemente no disco fechado de centro 0 e raio R (o que é suficiente para nós). De fato: para $n > R$ e para z no disco (i.e., $|z| \leqslant R < n$), temos

$$
\begin{aligned}
|\varepsilon_n(z-d_0)(z-d_1)(z-d_2)\dots(z-d_{n-1})| &\leqslant |\varepsilon_n|.(n+|d_0|).(n+|d_1|)\dots.(n+|d_{n-1}|) \\
&\leqslant |\varepsilon_n|.n^n.(1+|d_0|).\dots.(1+|d_{n-1}|) \\
&< \frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

Portanto, está garantida a convergência uniforme, pelo Teste M de Weierstrass !!!

. . . As equivalências todas foram encerradas !!!

Apresentamos, portanto, as três equivalências propostas para a Hipótese do Contínuo – a Decomposição de Sierpiński, os Dardos de Freiling e a Família das Funções Inteiras de Erdös !!! Agradeço muito a atenção de todos, e espero que tenham gostado do minicurso !!!

Como o nosso minicurso ficou com apenas três horas, este é o máximo que podemos apresentar desta vez !!!

Mas podemos ficar em contato, e conforme este curso "aumente" posso mantê-los atualizados. . .

Vamos discutir Lógica e Teoria dos Conjuntos ?

samuel@ufba.br

Na página seguinte, seguem algumas referências ! Grato outra vez !!!

Referências

R. Engelking, *General Topology*, rev. compl. ed., Sigma Series in Pure Mathematics Vol. **6**, Heldermann (Berlin, 1989), viii + 529 pp.

P. Erdös, *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, The Michigan Mathematical Journal **11**, (1964), 9–10.

C. Freiling, *Axioms of Symmetry: throwing darts at the real number line*, Journal of Symbolic Logic **51**, 1 (1986), 190–200.

T. Jech, *Set theory - the third millennium edition, revised and expanded*, Springer Monographs in Mathematics (Berlin, 2003), xiv + 769 pp.

J. P. C. de Jesus e S. G. da Silva, *Cem Anos do Axioma da Escolha: Boa Ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff*, Revista Matemática Universitária (RMU/SBM), **42** (2007), 16–34.

W. Sierpiński, *Hypothèse du Continu*, Monografie Matematyczne, 1 ère ed. PWN (Warsaw, 1934), v + 192 pp.

S. G. da Silva, *Two infinite families of equivalences of the Continuum Hypothesis*, Matematicki Vesnik **66**, 1 (2014), 109–112.