

O PROBLEMA DOS MAPAS E TEOREMAS DE PONTO FIXO

N. Diehl, D. Marcon e D. Lieban

30 de junho de 2014

O objetivo deste trabalho é discutir alguns aspectos de Teoremas de Ponto Fixo – com olhar atento para suas hipóteses e particularidades – e estreitar suas relações com outros tópicos de matemática. Em muitos casos, teoremas que envolvem pontos fixos nos garantem apenas a existência, sob certas condições, de soluções, mas não necessariamente como obtê-las. Partindo de um problema cuja solução pela Geometria Euclidiana Clássica já é conhecida, a ideia com este minicurso é apresentar resolução pela Álgebra Linear, além de fazermos uma abordagem em que possamos discutir com mais propriedade quais são as condições que nos permitem decidir se o problema tem ou não solução. Finalmente, resgatada a essência da teoria, apresentar em que situações ela pode ser útil, seja no contexto matemático ou mesmo do cotidiano.

1 Introdução

Localizar pontos (ou cidades) em mapas pode não ser tarefa fácil se você não tiver um GPS ou qualquer referência prévia de orientação. Um bom exercício é tentar procurar, no mapa do Brasil, uma cidade brasileira da qual você nunca ouviu falar, sem qualquer indicação que possa auxiliá-lo na tarefa. Por qual estado começar? Difícil? Pois o nosso problema consiste de algo parecido. Iremos em busca de um ponto específico no mapa do Brasil, ou melhor, em dois mapas do Brasil.

O problema que propomos, então, é o seguinte:

Colocando-se dois mapas do Brasil, com escalas diferentes, sobrepostos de forma que o menor deles esteja inteiramente contido sobre o maior, podemos encontrar algum ponto que coincida com ele mesmo em ambos os mapas?

Vale notar que a ordem em que o problema é proposto estabelece primeiramente a sobreposição dos mapas para a posterior localização do ponto fixo e não o contrário.

Do ponto de vista matemático, o ponto comum aos dois mapas é um ponto fixo, visto que ele é identificado consigo próprio, apesar das configurações distintas dos mapas. As diferentes disposições podem ser interpretadas como transformações no plano (do primeiro em relação ao segundo mapa) no sentido de rotação, contração e translação. A fim de organizarmos melhor as ideias, pensemos que um dos nossos mapas esteja disposto em um quadrado, que está centrado na origem de um sistema cartesiano, conforme a Figura 1 a seguir.

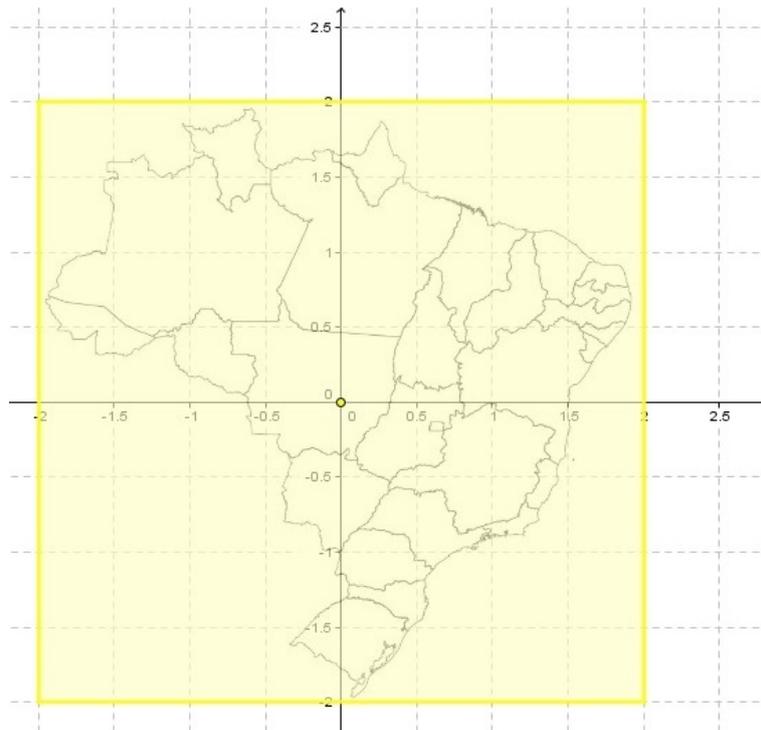


Figura 1: Mapa no interior do quadrado de lado 4, centrado na origem.

Observe que pela disposição do mapa maior, qualquer um de seus pontos pode ser identificado por um par ordenado (x, y) , com $|x| \leq 2$ e $|y| \leq 2$. No entanto, queremos avaliar a intersecção deste mapa com o mapa menor, como indica a Figura 2.

Algebricamente, essas transformações são aplicações sobre um par ordenado (x, y) que deve resultar nele próprio, conforme a expressão que segue (onde as matrizes quadradas correspondem às transformações de rotação e contração, sendo a matriz somada correspondente à translação):

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.9 & -0.5 \\ 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Note que o produto de uma matriz diagonal com qualquer outra sempre é comutativo.

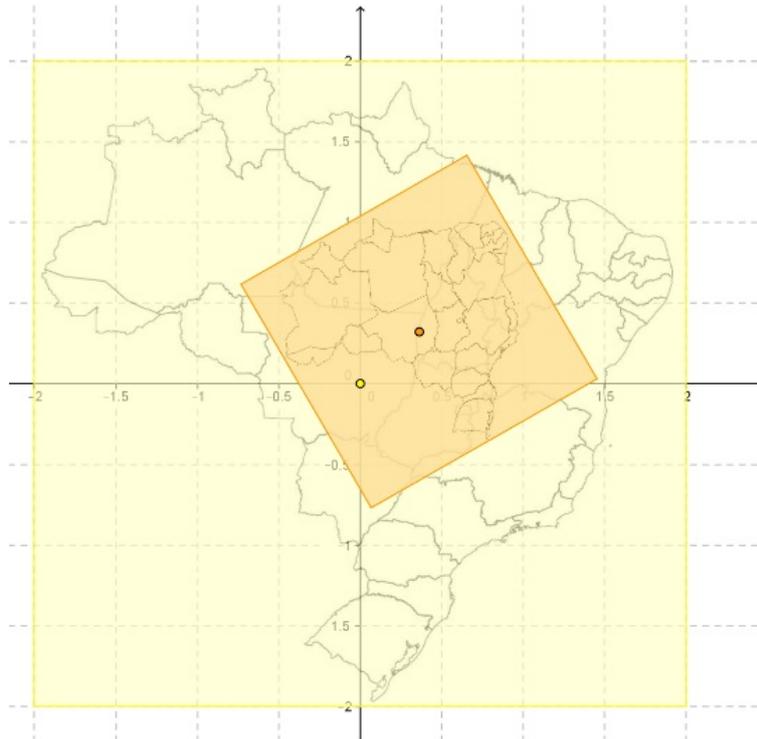


Figura 2: Mapas sobrepostos.

2 Resolvendo algebricamente

Fazendo a identificação da matriz de rotação com um número complexo

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \sim z = a + bi,$$

podemos escrever a aplicação descrita na seção anterior como

$$T(x, y) := z \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = zr \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Inspirados no Teorema do Ponto Fixo de Banach¹, construímos um ponto fixo a partir de iterações da aplicação T . Temos

$$\begin{aligned} T^2(x, y) &= zr zr \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + zr \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= z^2 r^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + zr \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Iterando, obtemos

$$\begin{aligned} T^n(x, y) &= z^n r^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + z^{n-1} r^{n-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \dots + zr \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= z^n r^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} z^k r^k. \end{aligned}$$

Como $|z|r < |z| = 1$ e $r^n \rightarrow 0$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x, y) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{1}{1 - zr} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \frac{1 + \bar{z}r}{1 - r^2} \\ &= \frac{1}{1 - r^2} \left[r \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] =: (\tilde{x}, \tilde{y}). \end{aligned}$$

Como T é contínua, resulta que

$$T(\tilde{x}, \tilde{y}) = T \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} T^n(x, y) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T^{n+1}(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Portanto, (\tilde{x}, \tilde{y}) é um ponto fixo de T .

3 Teoremas de Ponto Fixo

O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer é provavelmente o mais conhecido dentre os teoremas de ponto fixo. Apesar de ser atribuído a Brouwer, o Teorema de Brouwer foi na realidade estabelecido por vários matemáticos. Em termos modernos, podemos enunciar como

¹Teorema 3.2 da Seção 3.

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer). Seja $f : B \rightarrow B$ uma função contínua da bola unitária fechada B em si mesma. Então f admite um ponto fixo. Em outras palavras, existe um ponto $x \in B$ tal que $f(x) = x$.

Uma generalização nos diz que o teorema anterior continua válido se substituirmos a bola unitária B por qualquer conjunto convexo e compacto em um espaço euclidiano (mesmo que de dimensão infinita). Sendo o território brasileiro não convexo, uma aplicação direta do teorema anterior não é possível, nos motivando a buscar uma versão que se adapte melhor às nossas hipóteses².

Na seção anterior, obtivemos um ponto fixo inspirados no Teorema do Ponto Fixo de Banach, que proporciona um método de construção via aproximações para pontos fixos de contrações. Lembre que uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é uma contração quando, para alguma constante $0 < \lambda < 1$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|, \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Teorema 3.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $f : X \rightarrow X$ uma contração. Então, f possui um único ponto fixo $x^* \in X$. Ainda mais, dado qualquer $x \in X$, temos que

$$f^n(x) := \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(x) \rightarrow x^*, \quad \text{quando } n \rightarrow +\infty.$$

Uma outra generalização de particular interesse para o nosso problema é devida a Solomon Lefschetz e foi publicada em 1926. O Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz estabelece um método de contagem de pontos fixos de aplicações contínuas em conjuntos não necessariamente convexos, utilizando técnicas de topologia algébrica. A ideia é analisar o grau das aplicações induzidas nos grupos de homotopia. Temos interesse apenas em um caso particular, que nos referiremos também por Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz, que é o seguinte

Teorema 3.3 (Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz). Suponhamos que K é um conjunto compacto e simplesmente conexo de \mathbb{R}^n e que $f : K \rightarrow K$ é contínua. Então, f possui um ponto fixo.

Intuitivamente, um conjunto é simplesmente conexo quando não possui buracos, de maneira

²Na verdade, é possível aplicar o Teorema de Brouwer após “transformar” o território brasileiro em uma bola através de um homeomorfismo, aplicação contínua de inversa contínua, mas foi somente através do estudo dos resultados que seguem que chegamos à esta conclusão.

que possa ser deformado continuamente a um ponto. Por exemplo, uma bola é simplesmente conexa, já uma bola menos um ponto interior não é. Em um domínio que não seja simplesmente conexo, pode acontecer que aplicações contínuas não tenham ponto fixo. Por exemplo, em um círculo menos o centro, a rotação (que é uma aplicação linear) dos pontos por qualquer ângulo menor do que 360 graus, com relação ao centro, não possui pontos fixos.

De volta ao problema original, a parte continental do território brasileiro é topologicamente uma bola, ou seja, é homeomorfo a uma bola. É também simplesmente conexo; portanto, existe ponto fixo. Por outro lado, não é verdade que o mesmo tipo de problema admitiria solução na África do Sul, por exemplo, já que uma parte interna pertence a outra nação (Lesoto), fazendo que seu mapa delimite uma região que não é simplesmente conexa. É possível construir uma aplicação do tipo rotação, via homeomorfismo, que não tenha pontos fixos.

4 Aplicações

Além da aplicação do teorema do ponto fixo ao problema dos mapas apresentado na seção 2, apresentaremos uma aplicação na álgebra e uma aplicação em um problema que se refere a existência de solução.

4.1 O Teorema Fundamental da Álgebra

Uma questão que por muito tempo intrigou a comunidade matemática foi a obtenção de raízes de polinômios através de fórmulas. Desde os babilônios já se conheciam fórmulas para equações polinomiais de grau dois, e, bem mais tarde, matemáticos italianos como Tartaglia e Cardano obtiveram fórmulas para raízes de equações polinomiais de grau três e quatros. Alguns anos depois Galois provou que para algumas equações polinomias de grau maior ou igual a cinco não existem fórmulas que calculam seus zeros.

Apesar de Galois ter obtido este resultado um tanto frustrante para os matemáticos da época, que esforçavam-se para obter tais fórmulas, Gauss mostrou, que todo polinômio de coeficientes complexos, de grau maior ou igual a um, tem uma raiz complexa. Este resultado hoje é conhecido como Teorema Fundamental da Álgebra (T.F.A.) e tem uma prova simples, devida a B.H.Arnold, via Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, que será apresentada abaixo.

Teorema 4.1 (Teorema Fundamental da Álgebra). Seja $p(x)$ um polinômio em \mathbb{C} , de grau $n \geq 1$. Então existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.

Prova. Seja $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 1$. Sejam $z = re^{i\theta}$ com $0 \leq \theta < 2\pi$ e $R = 2 + |a_0| + |a_1| + \dots + |a_{n-2}| + |a_{n-1}|$. Definimos

$$g(z) = \begin{cases} z - \frac{1}{R} \frac{p(z)}{e^{i(n-1)\theta r}} & \text{se } |z| \leq 1 \\ z - \frac{1}{R} \frac{p(z)}{z^{(n-1)}} & \text{se } |z| > 1 \end{cases}$$

Note que $g(z)$ é contínua, de fato se $|z| \leq 1$ com $z = re^{i\theta}$ então $f(z) = \frac{1}{e^{i(n-1)\theta r}}$ é contínua nesta região. Note ainda que se $z \rightarrow 0$ então $f(z) = \frac{1}{e^{i(n-1)\theta r}} \rightarrow 1 = f(0)$. Assim g é contínua para $|z| \leq 1$.

Se $|z| \geq 1$ então g é contínua visto que $\frac{1}{z^{n-1}}$ é contínua para $|z| \geq 1$. Para $|z| = 1$ as definições coincidem e assim g é contínua.

Seja $B_R(0)$, então $g(B_R(0)) \subset B_R(0)$. De fato, se $|z| \leq 1$, então $|g(z)| \leq |z| + \frac{|p(z)|}{R} \leq 1 + \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{R} \leq 1 + 1 \leq R$.

Já se $1 \leq |z| \leq R$, obtemos $|g(z)| \leq |z| \frac{R-1}{R} + \frac{|a_0| + \dots + |a_{n-1}|}{R} \leq R-1 + \frac{R-2}{R} \leq R$. Assim pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe z_0 tal que $g(z_0) = z_0$ e então $z_0 - p(z_0) = z_0$, ou seja, $p(z_0) = 0$. □

4.2 A viagem e a garrafa de água

No percurso de uma cidade A para uma cidade B um viajante leva consigo uma garrafa de água. Será que em algum momento da viagem a proporção de líquido dentro da garrafa será igual a proporção do trecho já viajado?

Mesmo que a garrafa não esteja cheia no início ou vazia no final do percurso a resposta é sim! Definindo $x = (\text{distância percorrida})/(\text{distância entre A e B})$, podemos definir $f(x)$ como sendo a proporção de líquido dentro da garrafa. Note que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x$. Assim, a pergunta pode ser reescrita como: A função $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tem ponto fixo?

Para responder esta pergunta basta utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Outra possibilidade é considerar $g(x) = x - f(x)$ e observar que $g(0) \leq 0$ e $g(1) \geq 0$. Como $g(x)$ é contínua, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe x_0 tal que $g(x_0) = 0$, ou seja, $f(x_0) = x_0$. Note que, em uma dimensão, esta é uma prova direta do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

5 Considerações finais

Muitas vezes, resultados de matemática de teor mais formal são inacessíveis para o grande público por requererem conhecimentos bastante específicos para o fim que se propõe. No entanto, algumas situações do cotidiano podem ser ótimos exemplos para ilustrar ou motivar teorias que possam ser tão sofisticadas quanto laboriosas, mas cuja essência está sustentada em ideias de fácil compreensão e baseadas em procedimentos relativamente intuitivos. Outras aplicações podem ser ilustradas à luz do resultado de ponto fixo como, por exemplo, colocar uma folha de papel amassada aleatoriamente acima de outra folha do mesmo padrão: o Teorema de Brouwer estabelece que deve existir pelo menos um ponto na folha amassada que está diretamente acima do ponto correspondente da folha que está abaixo. Em três dimensões, o Teorema de Brouwer implica que ao movimentar o café em uma taça, deve existir pelo menos um ponto no café que coincidirá exatamente com sua posição original.

Promover questionamentos dessa natureza sem abrir mão do formalismo, quando necessário, deve ser exercício permanente para o professor de matemática, sempre buscando incentivar o caráter investigativo e argumentativo de seus alunos em sala de aula.

Referências

- [1] J.L. Casti. *Five Golden Rules: Great Theories Of 20th Century Mathematics And Why They Matter*. 2. ed. John Wiley & Sons, 1996.
- [2] H. Eves. *Introdução à história da matemática*. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.
- [3] M. Guzmán. *Mirar y ver*. Madrid: Nivola , 2002.
- [4] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [5] D.C. Lay. *Álgebra linear e suas aplicações*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.
- [6] A. Paenza. *Matemática... ¿Estás Ahí?*. Episodio 3,14. Buenos Aires: Siglo XXI Editores Argentina S.A., 2007
- [7] E. Veloso e J.P. Viana. *Árvores e Castelos (Desafios I)*. Biblioteca Desafios Matemáticos. Editora RBA, 2008.

[8] *Revista Cálculo – Matemática para todos*. Edição 21. Editora Segmento, 2012.