CONEXÕES
CIÊNCIA E TECNOLOGIA

UMA INVESTIGAÇÃO DINÂMICA SOBRE AS DEMONSTRAÇÕES DAS DESIGUALDADES DAS MÉDIAS

CARMEN VIEIRA MATHIAS[1], HILÁRIO ALENCAR[2], LARISSA CÂNDIDO[3], RONALDO GARCIA[4]

Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)[1],
Universidade Federal de Alagoas (UFAL)[2], Secretária Estadual de Educação[3],
Universidade Federal de Goiás (UFG)[4]

<carmen@ufsm.br>, <hilarioalencar@gmail.com>, <larikarollynne95@gmail.com>, <ragarcia@ufg.br>
DOI: 10.21439/conexoes.v18i0.2992

Resumo. As noções de prova e raciocínio sempre estiveram intimamente ligadas; pois é complexo imaginar demonstrar uma proposição sem usar um encadeamento lógico de ideias. Mas, quer provemos ou raciocinemos, é preciso lembrar que, além da linguagem natural e de seus meios de expressão, existem outras maneiras de apresentar uma prova. Nesse contexto, o presente artigo tem por objetivo apresentar possibilidades de utilizar animações, realizadas com o *software* GeoGebra, para ilustrar demonstrações das desigualdades que envolvem as médias harmônica, aritmética, geométrica e quadrática. Para tanto, realizamos uma discussão sobre o conceito de prova, apresentamos, via animações de provas sem palavras os resultados referentes às médias. Neste estudo, foram criadas animações a partir de transformações geométricas e iniciadas por meio de um controle deslizante, o que poderá permitir aos professores que forneçam exemplos claros para apoiar suas conclusões ou fornecem aos alunos contraexemplos ou degenerações. Assim, esperamos que esse trabalho possa levar discussões sobre a valorização do uso de recursos computacionais no auxílio da compreensão dos resultados matemáticos acima elencados.

Palavras-chaves: Provas sem palavras. Desigualdade das médias. Animações. Geogebra.

A DYNAMIC INVESTIGATION ON THE DEMONSTRATIONS INEQUALITIES OF MEANS

Abstract. The notions of proof and reasoning have always been intimately connected; because it is complex to imagine demonstrating a proposition without using a logical chain of ideas. But, whether we prove or reason, it must be remember that, in addition to natural language and its means of expression, there are other ways of presenting proof. In this context, this article aims to present possibilities of using animations, created with the GeoGebra software, to illustrate demonstrations of inequalities involving harmonic, arithmetic, geometric and quadratic means. For that, we held a discussion on the concept of proof, we presented, via proof without words animations, the results referring to the means. In this study, animations were created from geometric transformations and initiated using a slider, which could allow teachers to provide clear examples to support their conclusions or provide students with counterexamples or degenerations. Therefore, we hope that this work can lead to discussions about valuing the use of computational resources to help understand the mathematical results listed above.

Keywords: Proof without words. Inequality of means. Animations. Geogebra.

1 INTRODUÇÃO

Com o objetivo de divulgar e mostrar que a Matemática é um campo fértil para pesquisas, especialmente entre crianças e adolescentes, muitas vezes utiliza-se do argumento sobre a estética e a beleza dessa área do conhecimento. Aliás, algumas pesquisas em Matemática (Ghys, 2015) ou em Educação Matemática (Cardoso;

Artigo submetido em 27 mar. 2023 e aceito em 19 jan. 2024

Paulo; Dalcin, 2014; Ruiz, 2002) preocupam-se com essa abordagem. Por exemplo, ao discutir as expressões do senso estético da Matemática, Ruiz (2002, p. 288) pondera que "o matemático é um desenhista de ideias e a beleza é um dos critérios pelos quais os desenhos podem ser julgados".

Na tentativa de definir a beleza matemática, Ghys (2015, p. 7) aponta que "na matemática, o belo, o útil, é o que pode ser usado em muitas ocasiões diferentes, é uma ideia que é ao mesmo tempo simples e que serve vários propósitos, que nos dá a possibilidade de um entendimento global de muitas coisas no mesmo momento". Esse autor discute a beleza nas provas de teoremas, permeando diversas áreas que fazem parte da Matemática. Observa-se que essa discussão sobre beleza matemática e demonstrações, surge também em (Aharoni, 2014) ao realizar uma analogia entre provas e poesias:

> (...) em matemática há um consenso praticamente unânime sobre o que torna um argumento belo. Quase todos os matemáticos concordariam que uma ideia matemática é bela se revelar alguma estrutura interna surpreendente. Tais ideias parecem surgir do nada e lançar luz sobre as coisas. Essa aparência geralmente é repentina, muito rápida para nosso eu consciente analisar ou absorver completamente instantaneamente, nossa compreensão analítica fica atrás da compreensão subliminar. (Aharoni, 2014, p. 2).

Esse autor apresenta as características do que ele identifica como uma bela prova e, além disso, ressalta que uma demonstração para ser bela, precisa conter alguns parâmetros: ser curta, inesperada, agregar conhecimento e ser aplicável a outros problemas. De acordo com essas ideias, um senso de beleza na Matemática é o resultado de nossa resposta imediata e inconsciente a uma estrutura oculta. Nesse sentido, Stupel e Ben-Chaim (2013) enfatizam a importância do conhecimento matemático e da capacidade de usar diversas estratégias, para determinar diferentes métodos de solução para uma mesma tarefa ou para a demonstração de um teorema. De fato, conforme os autores, a existência de tais soluções não apenas demonstra aos alunos a beleza e a estética da Matemática, mas também aprimora a compreensão matemática dos alunos apresentando diferentes pontos de vista, incluindo o uso de *software* de matemática dinâmica (SMD).

Pensando o quanto um SMD pode auxiliar na compreensão da demostração de um teorema, pesquisas realizadas por Oxman e Stupel (2016), Stupel, Sigler e Jahangiri (2019) apresentam possibilidades de usar essas ferramentas para construir provas. Tais possibilidades são amparadas na capacidade que os referidos ambientes possuem de envolver os alunos na investigação de propriedades matemáticas, por meio do engajamento dinâmico e das animações. Segundo esses autores, por meio desses processos, é possível não só explorar propriedades de um determinado objeto, mas formar conjecturas e hipóteses relativas às características adicionais.

As animações também são citadas por Summermann, Sommerhoff e Rott (2021, p. 438) que as utilizam para apoiar "a construção de provas matemáticas nas dimensões de interatividade e formalidade". Tais autores afirmam que essas provas nutrem o pensamento matemático e possibilitam a construção de ambientes de aprendizagem que não se limitam apenas a mostrar animações pré-definidas, mas também permitir a interação do usuário com objetos matemáticos.

Ao utilizar as tecnologias como aliadas do conhecimento matemático a fim de salientar a beleza oculta em alguns resultados, neste artigo temos por objetivo apresentar possibilidades de utilizar animações, realizadas com o SMD GeoGebra, para ilustrar demonstrações das desigualdades que envolvem as médias harmônica, aritmética, geométrica e quadrática.

No que se segue, abordamos alguns aspectos que entendemos ser importantes sobre provas e argumentos matemáticos, tanto em termos de conceito quanto de suas aplicabilidades em situações de ensino.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

As provas ou demonstrações de teoremas são elementos fundamentais na Matemática, tanto em relação às pesquisas quanto no ensino. No que tange às pesquisas, a prova de um resultado pode na sua devida extensão, caracterizar-se como uma tese de doutoramento, por exemplo. E, no tocante as atividades de ensino, culmina como o fechamento de uma série de argumentos, dedicados a convencer os estudantes que determinado resultado matemático é válido.

Nos últimos anos, algumas pesquisas em Educação Matemática vem sendo realizadas no intuito de classificar as provas em diferentes categorias e caracterizá-las. Hanna et al. (2009) cita os tipos de prova determinadas por suas propriedades matemáticas ou lógicas, como, por exemplo, técnicas específicas - como a prova por exaustão, prova por indução matemática, prova por contradição ou provas de tipos específicos - provas de existência, tanto construtivas como não construtivas.

Porém, o que de fato é considerado em uma demonstração em Matemática? Parte da resposta a esse questionamento é dada em Hanna et al. (2009), ao considerar que em uma prova deve-se especificar claramente as suposições feitas e fornecer um argumento apropriado e apoiado em raciocínio válido para tirar as conclusões necessárias. Além disso, Stylianides (2009) discute o conceito de demonstração ao pontuar que uma prova:

> (...)envolve explorar relações matemáticas para identificar e organizar fatos significativos em padrões significativos, usando os padrões para formular conjecturas, testando as conjecturas contra novas evidências e revisando as conjecturas para formular novas conjecturas que estejam de acordo com a evidência e fornecendo argumentos informais que demonstram a viabilidade das conjecturas (Stylianides, 2009, p. 258).

Uma definição precisa do conceito de prova em Matemática é dada em Stylianides (2007). Conforme o autor, uma prova é um argumento matemático que contém uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma afirmação matemática, a qual possui três componentes básicas:

> 1. O uso de declarações aceitas pela comunidade, que são verdadeiras e disponíveis sem justificativa adicional; 2. O emprego de formas de raciocínio (modos de argumentação) que são válidas e conhecidas ou estão ao alcance conceitual da comunidade envolvida; 3. A comunicação com formas de expressão (modos de representação argumentativa) que são apropriadas e conhecidas ou estão no alcance conceitual da comunidade envolvida. Stylianides (2007, p. 291).

A Figura 1 ilustra exemplos de cada um dos três componentes de um argumento matemático, mencionados na definição dada por Stylianides (2007).

Em particular, pensando na sala de aula de Matemática,Dreyfus, Nardi e Leikin (2012) pontuam que existe a necessidade de observar esses três componentes básicos. Nesse sentido, esses autores referem-se a aspectos que influenciam a aparência de uma demonstração e a maneira como essas provas podem ser concebidas por alunos e professores, que necessitam trabalhar com a compreensão ou produção de provas. Os aspectos citados em Dreyfus, Nardi e Leikin (2012) incluem: diferentes argumentações, graus de detalhamento e diferentes representações.

Fazendo um paralelo ao exposto por Stylianides (2007), quanto às diferentes argumentações, Dreyfus, Nardi e Leikin (2012) pontuam que existem diversos modos de argumentação, e exemplificam que esses podem ser modos de argumentação indutivos baseados em exemplos, genéricos baseados em exemplos e gerais. Observa-se que quanto aos diferentes graus de detalhamento, Dreyfus, Nardi e Leikin (2012) abordam o rigor matemático, em que ao olhar de Stylianides (2007) incluem o conjunto de declarações aceitas, ou seja, os diferentes graus de apontamento de pressupostos, seja em termos de primeiros princípios ou de declarações previamente comprovados. No que tange aos modos de representação argumentativa citados por Stylianides (2007) são exatamente as diferentes representações citadas por Dreyfus, Nardi e Leikin (2012), que as exemplificam como sendo representações visuais, verbais e dinâmicas. Ao fazer uma correspondência com as componentes ou aspectos elencados pelas pesquisas citadas, percebe-se claramente que uma demonstração envolve pensar sobre novas situações, focando em aspectos significativos, usando conhecimentos já adquiridos para conectar ideias. Para construir uma prova existe a necessidade de considerar relações, fazer conjecturas, usar definições conforme necessário e construir um argumento válido (Tall et al., 2012).

Com relação as finalidades de uma demonstração, Hanna (2000) considera a gama de funções que as provas desempenham na prática matemática. Conforme a autora, os matemáticos claramente esperam mais uma prova do que uma justificativa, ou seja, uma demonstração precisa auxiliar na compreensão do resultado que está sendo provado. A demonstração precisa fazer perceber não apenas que o teorema é verdadeiro, mas também por que é válido. As provas que "provam"são aquelas que verificam um teorema, ou seja, que convencem de que tal afirmação é verdadeira. As provas que "explicam" são aquelas que mostram porque um teorema ou afirmação é verdadeira Hanna (1989).

Na escola básica, deveria ser natural perceber uma demonstração em primeiro lugar como explicação e, consequentemente, valorizar aquelas que auxiliam o professor a explanar os resultados a serem demonstrados. Nesse sentido, concordando com Larios-Osorio e Acuña-Soto (2009), os *softwares* podem fornecer aos alunos ferramentas para expressar provas ou respostas, pois é um mediador que influencia a construção do conhecimento, incluindo linguagem e argumentação.

Em particular, Mathias, Silva e Leivas (2019) e Alencar et al. (2021) utilizam o *software* GeoGebra para construir animações que ilustram exemplos de provas sem palavras (PSP) de alguns resultados geométricos. Alsina e Nelsen (2012), definem essas provas como esquemas ou imagens que auxiliam a compreender por que uma afirmação matemática pode ser verdadeira, e a perceber como iniciar a demonstrar que tal afirmação é válida. Ou seja, pode-se assumir que uma pessoa que possui o conhecimento matemático adequado, visualizará a PSP, entenderá o que foi feito e será capaz de justificar cada etapa da prova.

Brown (2010) indica que uma PSP é uma prova visual elegante (geralmente simples e breve) de um resultado cuja demonstração usa um conjunto de declarações aceitas, conforme definido por Stylianides (2007). Em muitos casos, as PSP são belas analogias geométricas

Artigo submetido em 27 mar. 2023 e aceito em 19 jan. 2024

Figura 1: Exemplos de três componentes de um argumento matemático mencionado na definição de prova.

Fonte: Adaptado de Stylianides (2007, p. 292)

em que a veracidade do resultado é percebido em um único olhar (Alencar et al., 2019). Porém, Marco, Palatnik e Schwarz (2022) enfatizam que as PSP sugerem implicitamente argumentos sem indicar a ordem entre eles, enquanto uma demonstração, os argumentos são declarados de forma explícita e linear. Nesse artigo, não entraremos no mérito se as PSP são ou não aceitas no meio acadêmico como demonstrações, visto que a experiência didática faz perceber que quando a ilustração para um determinado resultado é apresentado, o nível de dificuldade do entendimento por parte dos alunos diminui consideravelmente.

Assim, no que se segue, dedica-se a apresentar resultados que poderão ser utilizados em sala de aula, acompanhados de uma PSP, seguida de uma explicação.

3 AS DESIGUALDADES E AS DEMONSTRAÇÕES

Antes de apresentar exemplos de PSP que envolvem as desigualdades das médias, existe a necessidade de conceituar média. Assim, conforme Nery (2009), um número m é uma média de um conjunto finito de números positivos não nulos, se todos os números desse conjunto forem substituídos por m, uma certa peculiaridade, por exemplo, soma ou produto dos números, será mantida. Um exemplo muito conhecido é a média aritmética, a qual é muito utilizada em estatística, principalmente na educação básica. Então, se ao substituir os números (positivos não nulos) por m, e a soma for mantida, diz-se que m é a média aritmética desse conjunto de números. Caso mantenha o produto, diz-se que m é a média geométrica, se mantém a soma dos inversos, m é a média harmônica e se mantém a soma dos quadrados, m é a média quadrática (Nery, 2009). Assim, considerando

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \text{ e } a_n$$

números reais positivos, as quantidades

$$\sqrt[n]{(a_1)(a_2)\ldots(a_n)}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \ldots + (a_n)^2}{n}}$$

$$\frac{n}{\left(\frac{1}{a_1}\right) + \left(\frac{1}{a_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{a_n}\right)}$$

são chamadas, respectivamente, de média geométrica (MG), média aritmética (MA), média quadrática (MQ) e média harmônica (MH) dos números

$$a_i, i = 1, 2, \ldots, n$$

As médias definidas anteriormente se relacionam por uma relação de desigualdade. No que segue serão enunciadas tais desigualdades, considerando apenas dois números a e b, pois o objetivo principal é apresentar as PSP de tais desigualdades envolvendo suas interpretações geométricas. Tais PSP são descritas, conforme o que aponta Dreyfus, Nardi e Leikin (2012), relativo as diferentes argumentações e representações. Sobre as provas ditas usuais, para os resultados listados a seguir, essas podem ser encontradas em Rigodanzo (2016).

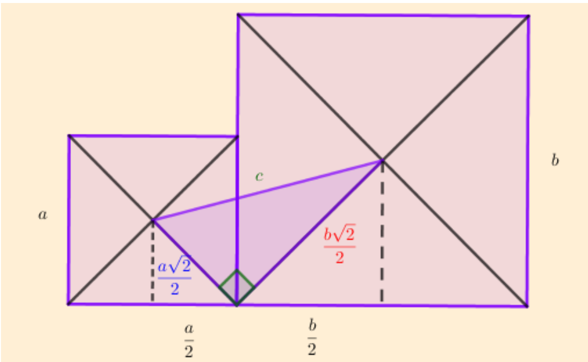
O primeiro resultado diz respeito a MQ e MA, que se relacionam por meio da desigualdade enunciada a seguir.

Teorema 1: Dados a e b números reais positivos, tem-se

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

Uma PSP para esse Teorema é baseada em Nelsen (2015), e ilustrado na Figura 2.

Figura 2: Desigualdade entre MQ e MA[1]



Fonte: Sistematizado pelos autores.

Nesse caso, o resultado é obtido ao perceber que dados dois quadrados de lados a e b , a soma da metade dos lados dos quadrados é menor que o comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo, cujos catetos medem a metade das diagonais dos quadrados. Ou seja,

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2}=\frac{a+b}{2} \leq c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

O segundo resultado (Teorema 2) relaciona a MA e MG.

Teorema 2: Sejam a e b números reais positivos em que $a < b$, então

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Uma PSP para esse Teorema é a construção ilustrada na Figura 3, baseada em Nelsen (2015), supondo a < b.

Observa-se que o resultado é obtido comparando áreas de regiões planares. A soma das áreas de dois triângulos retângulos isósceles de lados iguais $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ é maior que a área do retângulo de lados $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$

Em Eves (2003) é apresentada uma PSP que relaciona as médias geométrica e harmônica. Nesse caso, ao invés de utilizar triângulos e quadrados (como fizemos nas desigualdades anteriores), o autor utiliza-se de uma relação existente nos trapézios. Tal resultado está enunciado a seguir.

Teorema 3: Dados a e b números reais positivos não nulos, tem-se

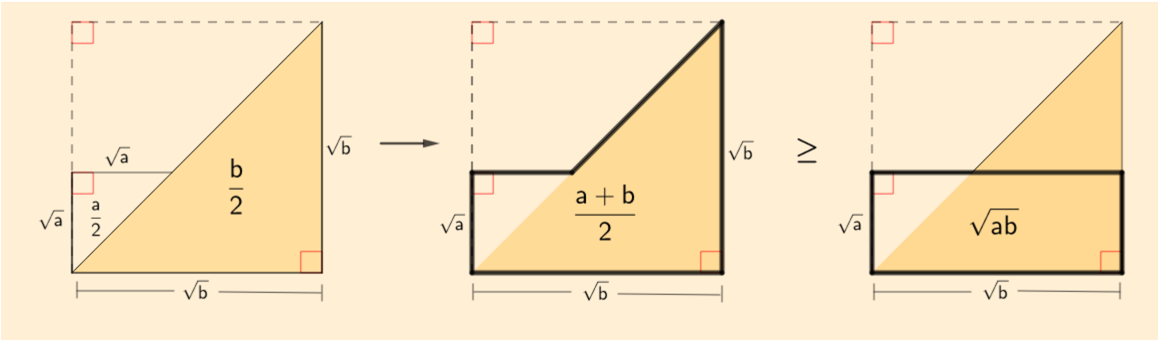
$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{1/a + 1/b}$$

Assim, considerando ABCD um trapézio em que a base menor AB possui medida a e a base maior CD possui medida b, é possível construir um segmento PQ de medida c paralelo às bases que determina dois trapézios semelhantes ABPQ e PQCD. A Figura 4, ilustra o processo de construção.

[1]Animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/xrtc3kwd>

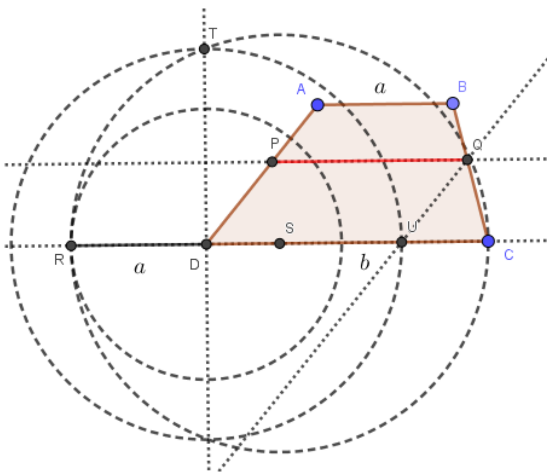
[2]Animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/hcue6rkg>

Figura 3: Desigualdade entre MA e MG[2]



Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 4: Processo de construção



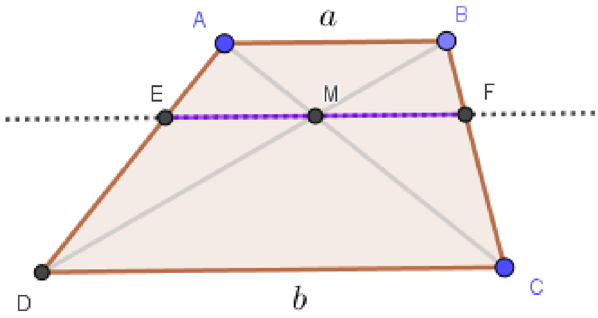
Fonte: Sistematizado pelos autores.

Como os dois trapézios criados são semelhantes[3] , a razão entre a base menor do trapézio superior e a base menor do trapézio inferior será igual à razão entre a base maior do trapézio superior e a base maior do trapézio inferior. Assim, como a base menor mede a, a base maior mede b, e o segmento PQ mede c, tem-se que $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, ou seja, c é a média geométrica de a e b. E, considerando o mesmo trapézio ABCD, as duas diagonais se cruzam no ponto M. O segmento EF formado pela reta paralela às bases e que passa por M é a média harmônica de a e b (Figura 5). Ou seja

$$|EF| = \frac{2}{1/a + 1/b}$$

Essa afirmação pode ser comprovada via semelhança de triângulos e uma forma de fazê-lo está descrita em Nery (2009). Assim como ilustra a Figura 6,

Figura 5: Média Harmônica



Fonte: Sistematizado pelos autores.

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2}{1/a + 1/b}$$

Usando os Teoremas 1, 2 e 3, é possível concluir um Teorema clássico, a saber:

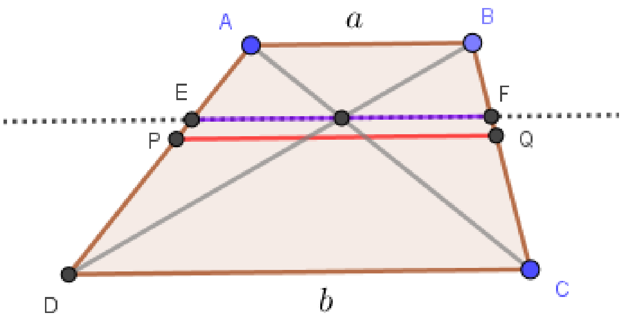
Teorema 4: (Desigualdade das Médias). Para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e a_n verificam-se as seguintes desigualdades: $MH \geq MG \geq MA \geq MQ$
$MH \geq MG \geq MA \geq MQ$ Além disso, em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Novamente, considerando-se apenas dois números a e b, uma PSP para a desigualdade quadrática - aritmética-geométrica-harmônica é a ilustrada na Figura 7.

[3] Em geometria, duas formas são ditas semelhantes se a razão entre seus lados correspondentes for igual.

[4] Animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/dqsapds4>

Figura 6: Desigualdade entre MG e MH



Fonte: Sistematizado pelos autores.

Essa PSP é baseada em (Gallant, 1977) e utiliza a geometria do triângulo retângulo inscrito num semicírculo de diametro $a{+}b$. Nesse semicírculo são construídos segmentos que representam cada uma das médias. Assim, observa-se que o raio do referido semicírculo é $\frac{(a+b)}{2}$, justamente a MA de a e b, conforme ilustra a Figura 8.

A MQ é a hipotenusa do triângulo retângulo no qual um dos catetos é o raio do semicírculo (exatamente a MA construída anteriormente). Observa-se que dessa forma, a MQ sempre será maior que a MA (um dos catetos), conforme ilustra a Figura 9.

A MG é construída como o comprimento da perpendicular ao diâmetro do semicírculo, traçada a partir do ponto de interseção dos segmentos de medidas a e b, conforme ilustra a Figura 10.

A Figura 11 ilustra que essa medida (MG) não será maior que o raio do círculo (MA).

Para determinar a MH usando triângulo retângulo inscrito em um semicírculo, utiliza-se o triângulo retângulo que possui o raio (MA) como a hipotenusa e o segmento equivalente a MG como um dos catetos. E, nesse triângulo, que denominamos ABC, traçamos a altura AP, conforme ilustra a Figura 12.

Observa-se que os triângulos ABC e APC são semelhantes, pois possuem dois ângulos em comum. Assim, temos que $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CP}}$, ou seja,

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{CP}$$

Isso implica que

$$CP = \frac{2}{1/a + 1/b}$$

E, como no triângulo retângulo APC, o segmento AC (hipotenusa) representa a MG, tem-se que o segmento CP (cateto), que é a MH não será maior que a MG.

Dessa forma, mostra-se que $MQ \geq MA \geq MG \geq MH$. Salienta-se que se $a \neq b$, então todas as desigualdades são estritas, uma vez que a hipotenusa de um triângulo retângulo é estritamente maior que um cateto. Se $a = b$, então, teremos todas as quantidades iguais a a ou b, ou seja, quando todos os comprimentos forem o raio do semicírculo. Ainda sobre a desigualdade das médias (Teorema 4), Nelsen (1989) ilustra, via três imagens (Figura 13 - A, B e C) e utilizando área de quadrados, uma PSP que prova tal desigualdade,

Assim, utilizando o SMD GeoGebra, foram construídas 3 animações distintas, que poderão auxiliar na compreensão dos modos de argumentação representativa (Stylianides, 2007, p. 292) da PSP dada em Nelsen (1989).

A primeira construção (Figura 14), refere-se a PSP que envolve MQ e MA ilustrada na Figura 13 – A.

Na PSP compara-se a soma das áreas dos quadrados de lados medindo a e b com a área do quadrado de lado medindo $a + b$ Nesse processo, observa-se que

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$$

e consequentemente,

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}$$

A Figura 13 – B ilustra uma PSP que relaciona MA e MG e foi desenvolvida uma animação usando o GeoGebra que a representa (Figura 15)

Nesse caso, foi construído um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos são $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ Em seguida, são feitas três cópias do triângulo retângulo e posicionados de modo que as hipotenusas sejam os lados de um quadrado, cuja área é $a + b$. Ao comparar a área quadrado de lado medindo $\sqrt{a + b}$ com as áreas dos quatro triângulos construídos, tem-se que

$$(\sqrt{a + b})^2 = a + b \geq 4\frac{\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} = 2\sqrt{ab}$$

E, portanto

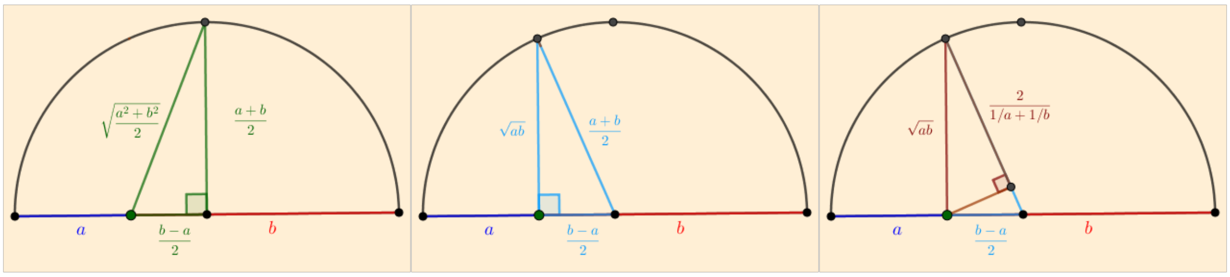
$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

A PSP ilustrada na Figura 13 - C compara MG e MH. A construção realizada no GeoGebra inicia-se por

[5]Animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/zfvrdacu>

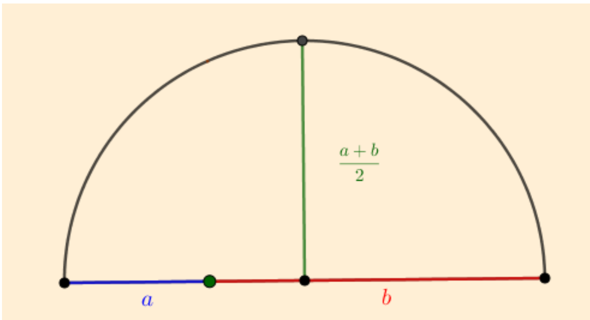
[6]Animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/nwwrrkab>

Figura 7: Desigualdade das médias [4]



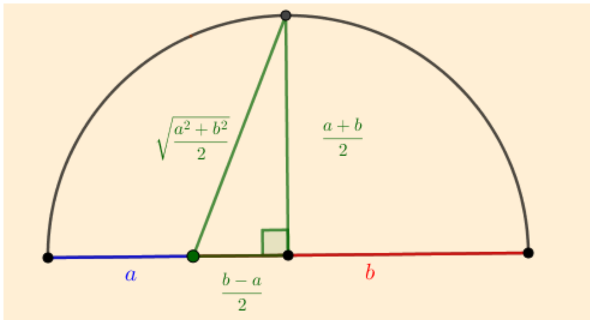
Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 8: Representação da MA



Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 9: Desigualdade entre MA e MQ



Fonte: Sistematizado pelos autores.

um retângulo, cujos lados medem $\frac{a}{(a+b)}$ e $\frac{b}{(a+b)}$ (Figura 16).

De modo análogo a PSP anterior, são construídos outros três retângulos congruentes ao primeiro e posicionados de maneira a formar um quadrado cujo lado mede $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$, cuja área vale uma unidade de área. Dessa forma, ao comparar a área do quadrado com as áreas dos retângulos, tem-se que

$$1 \geq 4\frac{ab}{(a+b)^2}$$

e, portanto,

$$ab \geq 4\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2$$

e, logo,

$$\sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

[7]Animação disponível em <https://www.geogebra.org/m/h4wdd9gp>

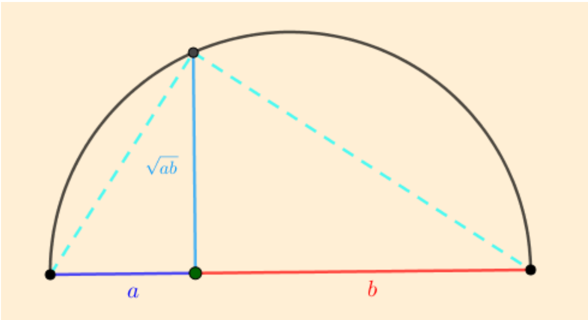
Observa-se que as três desigualdades destacadas mostram a desigualdade das médias (Teorema 4).

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse artigo teve como objetivo apresentar possibilidades de utilizar animações, realizadas com o SMD GeoGebra, para ilustrar demonstrações das desigualdades que envolvem as médias harmônica, aritmética, geométrica e quadrática. Assim, para obter subsídios teóricos, os autores recorreram a literatura existente na qual ficou evidenciada que a noção de prova tem sido um assunto de pesquisa importante e atual, tanto na Matemática quanto na Educação Matemática (Dreyfus; Nardi; Leikin, 2012; Gallant, 1977; Hanna, 2000; Hanna et al., 2009; Oxman; Stupel, 2016). Aliás, nossa investigação é sustentada aproveitando-se dessa ideia de sobreposição das demonstrações nos diversos campos matemáticos, em que ressaltamos o estudo das desigualdades das médias, apresentando os resultados referentes às médias aritmética, geométrica, quadrática e harmônica.

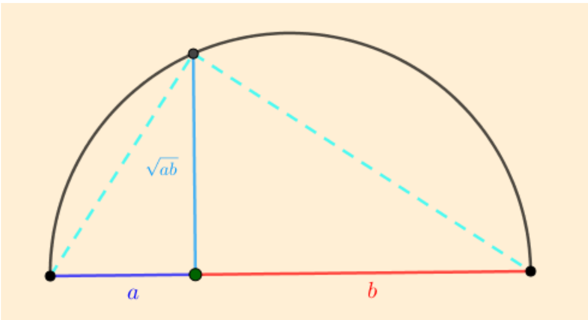
Destacamos que um ponto importante e fundamente

Figura 10: Representação da MG



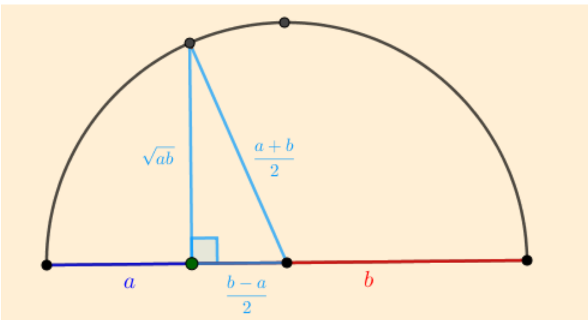
Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 11: Desigualdade entre MG e MA



Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 12: Representação da MH



Fonte: Sistematizado pelos autores.

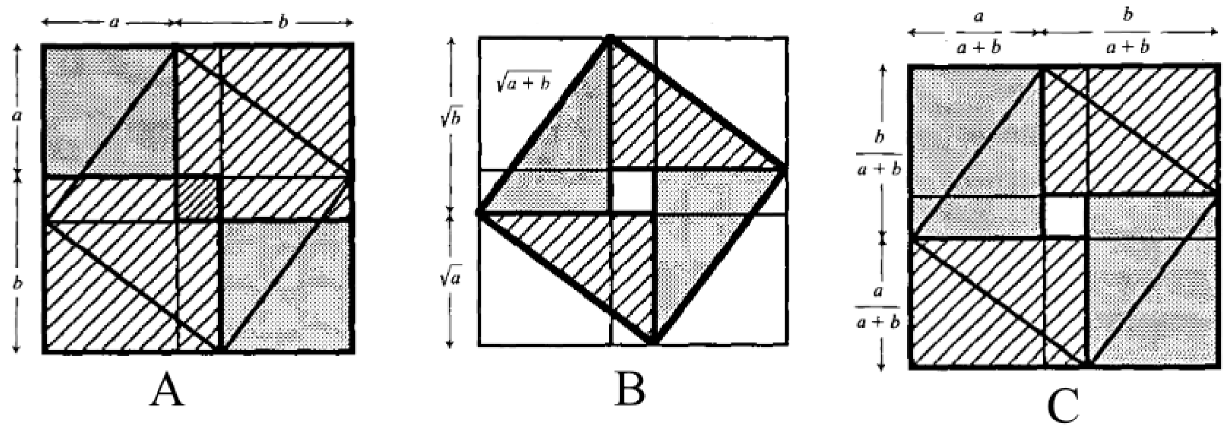
neste trabalho é o reconhecimento das animações como possíveis facilitadores às demonstrações, que, possivelmente, implicará em uma ampla abertura sobre os diferentes caminhos que as provas podem ter no cotidiano escolar. Em particular, as desigualdades das médias são um pequeno recorte de pesquisas que os autores vem realizando sobre esse tipo de recurso e suas possíveis implicações do uso desses nos ambientes escolares. Observa-se também que incialmente o artigo descreve a beleza contida nas demonstrações, citando A Aharoni (2014) - que apresenta atributos do que denomina de uma bela demonstração. De fato, apresentamos maneiras distintas de provar o mesmo resultado por perspectivas diferentes que se utilizam de situações geométricas, mas que trazem concepções completamente distintas e inusitadas. Os exemplos descritos no artigo, assim como defende Hanna et al. (2009), foram construídos usando um SMD o que altera fundamentalmente a ideia do que é um objeto geométrico. Um SMD pode servir como um ambiente para fazer conjecturas sobre objetos geométricos e, assim, como o que foi realizado nas animações, levar a situações geradoras de provas. E, tais ambientes podem desempenhar o papel de mediador na transição entre a argumentação e a prova (Hanna et al., 2009) por meio das animações construídas. No caso dessa pesquisa, as animações foram realizadas utilizando basicamente transformações geométricas e foram iniciadas via controles deslizantes, que podem possibilitar a abertura de caminhos que possivelmente sejam significativos para os alunos. Por exemplo, ao utilizar os controles deslizantes, o professor pode apresentar exemplos distintos para apoiar uma conjectura ou pode auxiliar a apresentar aos alunos alguns contra-exemplos ou degenerações. Durante a pesquisa realizada, concentrou-se os esforços em buscar e construir, além das animações, uma explicação do porque as PSP apresentadas demonstram os resultados enunciados. Tal explicação faz-se necessária, pois nem sempre as formas de raciocínio ou modos de argumentação, como denonominados em Stylianides (2007), são imediatamente reconhecidos. Dessa forma, foi possível apresentar a validade do resultado sobre desigualdes das médias por duas derivações diferentes. Justifica-se, com isso, que caso o professor venha a fazer uso do material aqui desenvolvido, este poderá escolher, dependendo da desenvoltura dos alunos, as oportunidades de ensino e aprendizagem que lhes são oferecidas, apresentar a animação seguida da explicação ou apenas a animação, dando a oportunidade aos alunos de completarem as lacunas, caso seja necessário.

REFERÊNCIAS

AHARONI, R. Mathematics, poetry and beauty. **Journal of Mathematics and the Arts**, v. 8, n. 1-2, p. 5–12, 2014.

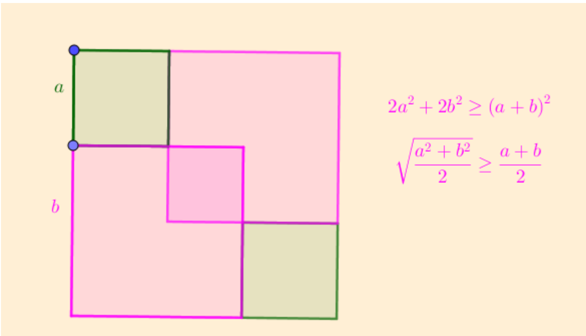
ALENCAR, H.; CâNDIDO, L.; GARCIA, R.; MATHIAS, C. O geogebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações

Figura 13: Desigualdade das médias



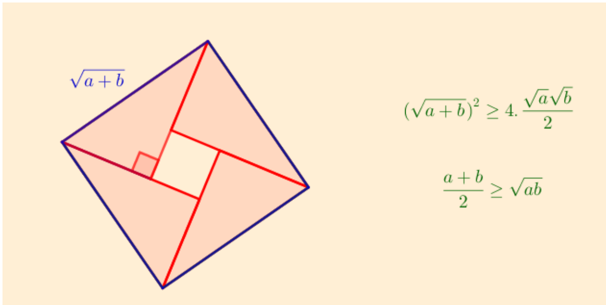
Fonte: Adaptada de Nelsen (1989).

Figura 14: Desigualdade entre MQ e MA [5]



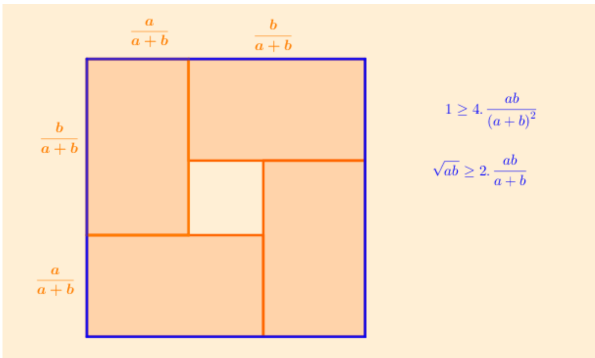
Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 15: Desigualdade entre MA e MG [6]



Fonte: Sistematizado pelos autores.

Figura 16: Desigualdade entre MG e MH [7]



Fonte: Sistematizado pelos autores.

em geometria. **Professor de Matemática Online**, v. 10, p. 482–501, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1033>. Acesso em: 14 de jan. de 2023.

ALENCAR, H.; CâNDIDO, L.; GARCIA, R.; MATHIAS, C. O geogebra como ferramenta de apoio ao entendimento de demonstrações em geometria. **Professor de Matemática Online**, v. 10, p. 482–501, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.21711/2319023x2022/pmo1033>. Acesso em: 14 de jan. de 2023.

ALSINA, C.; NELSEN, R. B. Um convite a provas sem palavras. **ComCiência**, n. 143, 2012.

BROWN, J. R. **Philosophy of mathematics: A contemporary introduction to the world of proofs and pictures**. [S.l.]: Routledge, 2010.

CARDOSO, V. C.; PAULO, R. M.; DALCIN, A. **A beleza matemática: uma proposta pedagógica de sensibilização estética para o ensino da Matemática**. 2014.

DREYFUS, T.; NARDI, E.; LEIKIN, R. Forms of proof and proving in the classroom. In: **Proof and proving in mathematics education**. Dordrecht: Springer, 2012. p. 191–213.

EVES, H. Means appearing in geometric figures. **Mathematics Magazine**, v. 76, n. 4, p. 292–294, 2003.

GALLANT, C. Proof without words: a truly geometric inequality. **Mathematics Magazine**, v. 50, n. 2, p. 98–98, 1977.

GHYS, E. **A beleza da matemática**. 2015. Disponível em: <https://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/belezapalestra.pdf>. Acesso em: 29 de set. de 2022.

HANNA, G. Proofs that prove and proofs that explain. In: **Proceedings of the 13rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 13)**. Paris, França: [s.n.], 1989. v. 2, p. 45–51.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: An overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, n. 1, p. 5–23, 2000.

HANNA, G. et al. Proof and proving in mathematics education: Discussion document. In: **Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education**. National Taiwan Normal University in Taipei, Taiwan: [s.n.], 2009.

LARIOS-OSORIO, V.; ACUñA-SOTO, C. Geometrical proof in the institutional classroom environment. In: **Proceedings of the ICMI 19 Study Conference: Proof and proving in mathematics education**. [S.l.: s.n.], 2009. p. 59–63.

MARCO, N.; PALATNIK, A.; SCHWARZ, B. When is less more? investigating gap-filling in proofs without words activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 111, p. 271–297, 2022.

MATHIAS, C. V.; SILVA, H. A. da; LEIVAS, J. C. P. Provas sem palavras, visualização, animação e geogebra. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**, v. 8, n. 2, p. 62–77, 2019.

NELSEN, R. B. **Proofs without words III: Further exercises in visual thinking**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 2015.

NERY, C. Uma aula sobre médias. **Revista do Professor de Matemática**, v. 68, p. 16–20, 2009. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/68/5.html>. Acesso em: Acesso: 16 de jan. de 2023.

OXMAN, V.; STUPEL, M. A dynamic investigation of geometric properties with "proofs without words". **Learning and Teaching Mathematics**, v. 2016, n. 21, p. 30–35, 2016.

RIGODANZO, M. **Desigualdade das médias e a resolução de problemas geométricos**. Dissertação (Mestrado) — PROFMAT – UFSM, 2016.

RUIZ, A. R. Matemática, matemática escolar e o nosso cotidiano. **Teoria e Prática na Educação**, p. 3–10, 2002.

STUPEL, M.; BEN-CHAIM, D. One problem, multiple solutions: How multiple proofs can connect several areas of mathematics. **Far East Journal of Mathematical Education**, v. 11, n. 2, p. 129, 2013.

STUPEL, M.; SIGLER, A.; JAHANGIRI, J. Teaching proofs without words using dynamic geometry. **The Mathematical Gazette**, v. 103, n. 557, p. 204–211, 2019.

STYLIANIDES, A. L. Proof and proving in school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 38, n. 3, p. 289–321, 2007.

STYLIANIDES, G. J. Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 11, n. 4, p. 258–288, 2009.

SUMMERMANN, M. L.; SOMMERHOFF, D.; ROTT, B. Mathematics in the digital age: The case of simulation-based proofs. **International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education**, v. 7, n. 3, p. 438–465, 2021.

TALL, D. et al. Cognitive development of proof. In: **Proof and proving in mathematics education**. Dordrecht: Springer, 2012. p. 13–49.